

Steuerbarkeit – Erreichbarkeit – Zugänglichkeit

algebraische und differentialgeometrische Aspekte¹

Markus Lemmen

Forschungsbericht Nr. 3/95

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Der vorliegende Bericht gibt einen Überblick über die Unterscheidung der Steuerbarkeit, Erreichbarkeit und Zugänglichkeit nichtlinearer Systeme. Dabei wird vom gut bekannten Begriff der Steuerbarkeit für lineare Systeme ausgegangen, um dann den Übergang zur Steuerbarkeits-Begriffswelt für nichtlineare Systeme zu erleichtern. Für einige dieser vorgestellten Steuerbarkeitsbegriffe existieren Kriterien, die als Erweiterung des Steuerbarkeitskriteriums nach Kalman anzusehen sind und auf der Grundlage der Differentialgeometrie entwickelt wurden. Diese Kriterien werden in diesem Bericht vorgestellt und in diesem Zusammenhang eine Einführung in die Differentialgeometrie gegeben.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

¹Dieser Bericht entstand im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Projekts Schw 120/55-1 „Algebraische Strukturanalyse nichtlinearer- und Fuzzy-Systeme“

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	III
1 Einleitende Übersicht	1
2 Steuerbarkeit linearer Systeme	3
2.1 Steuerbarkeitsdefinition für lineare Systeme	3
2.2 Steuerbarkeitskriterien für lineare Systeme	4
2.3 Algebraische Kriterien der Zustandssteuerbarkeit linearer Systeme	7
2.4 Algebraische Kriterien der Ausgangsteuerbarkeit linearer Systeme	8
2.5 Algebraisch–quantitative Steuerbarkeitsanalyse linearer Systeme	9
3 Differentialgeometrische Methoden	11
3.1 Definitionen	11
3.2 Einführung in die differentialgeometrische Steuerbarkeitsanalyse	22
3.3 Kriterien für nichtlineare Systeme	26
3.4 Algebraische Kriterien durch Linearisierung	29
3.5 Systemdekomposition und Erreichbarkeit	30
4 Anwendungsbeispiele	38
4.1 Steuerbarkeit eines Automobils in der Ebene	38
4.2 Steuerbarkeitsanalyse eines hydraulischen Antriebs	43
5 Zusammenfassung und Ausblick	45
Literaturverzeichnis	46

Anhang	48
A Allgemeine mathematische Hilfsmittel	48
A.1 Glatte und analytische Funktionen	48
A.2 Linearisierung	48
A.3 Bild und Nullraum (Kern)	48
A.4 Rangberechnungen	49
B Differentialgeometrische Hilfsmittel	50
B.1 Topologien, offene Mengen und Umgebung	50
B.2 Homeomorphismus	50
B.3 Diffeomorphismus für Koordinatentransformationen	50
B.4 Glatte Mannigfaltigkeiten, Koordinatennetze, Koordinatenfunktionen	51
B.5 Untermannigfaltigkeiten	52
B.6 Tangentenvektoren und Tangentialräume	53
B.7 Vektorfelder, Integralkurven, Fluß	53
B.8 Kovektorfelder, duale Vektorfelder	55
B.9 Differential, Gradient, (Lie-) Ableitungen	56
B.10 Gruppe und Lie-Gruppe	57
B.11 Lie-Algebra und Lie-Klammer	58
B.12 Distribution, Regulärität, Singulärität	61
B.13 Kodistributionen, Annullatoren	64
B.14 Frobenius-Theorem, vollständige Integrierbarkeit	65
B.15 Koordinatentransformation	66

Nomenklatur

Abkürzungen

ALS	Analytisches System mit linearer Steuerung
AS	Analytisches System
BLS	Bilineares System
EEN	Eingangs–Entkopplungsnulstelle
LA	Lie–Algebra
LS	Lineares System

Skalare Größen

A_w	Wirksame Kolbenfläche
F_1	Reibkraftkonstante
l	Dimension des Ausgangsvektors $\mathbf{y}(t)$
m	Dimension des Eingangsvektors $\mathbf{u}(t)$, Masse
n	Dimension des Zustandsvektors $\mathbf{x}(t)$
p_0	Versorgungsdruck
Q_0	Maximaler Öldurchfluß bei gegebenem Versorgungsdruck
s	Laplace–Variable
t	Zeit
u	Stellgröße
w	Variable eines Moduls
x	Zustandsvariable
y	Ausgangsgröße

Mengen und Strukturen

\mathcal{C}	Zugänglichkeitsalgebra
\mathcal{C}_0	Strenge Zugänglichkeitsalgebra
L	Lie–Algebra
L_0	Kleinste Unteralgebra von L , die \mathbf{g} enthält und abgeschlossen unter Kommutieren ist.
\mathcal{L}	Gesamtheit aller nach $\mathbf{0}$ steuerbaren Paare
\mathcal{M}	Zustandsmannigfaltigkeit
\mathcal{M}_0	Umgebung um \mathbf{x}_0
\mathcal{N}	Teilmannigfaltigkeit
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathcal{R}	Menge erreichbarer Systemzustände
\mathcal{RR}	Menge umkehrbar erreichbarer Systemzustände
S	Scheibe, Partition
S^1	Geschlossene Winkelkoordinatenachse
\mathcal{SR}	Menge schwach erreichbarer Systemzustände
\mathcal{U}	Menge zulässiger Steuerfunktionen
$V^\infty(\mathcal{M})$	Lie–Algebra der Vektorfelder auf \mathcal{M}

w	Endliche Menge der Variablen w_i eines Moduls
\mathcal{Y}	Menge \mathbb{R}^p -wertiger Ausgangsfunktionen

Vektorielle Größen, Tensoren und Distributionen

$\mathbf{0}$	Nullmatrix
\mathbf{A}	Systemmatrix
$\mathbf{a}(\mathbf{x})$	Driftterm eines ALS
\mathbf{B}	Systemeingangsmatrix
$\mathbf{b}(\mathbf{x})$	Nichtlineare Eingangsmatrix
C	Zugänglichkeitsdistribution
C_0	Strenge Zugänglichkeitsdistribution
\mathbf{C}	Systemausgangsmatrix
$\mathbf{c}(\mathbf{x})$	Nichtlineare Ausgangsspaltenmatrix
\mathbf{D}	Durchgangsmatrix
$F(s)$	Übertragungsfunktion
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	Systemfunktion bzw. Vektorfeld
$\mathbf{F}(s)$	Übertragungsmatrix
$\mathbf{g}(\mathbf{x})$	Vektorfeld
$\mathbf{G}(t)$	Stetige Matrix vom Typ (n, m)
\mathbf{I}	Einheitsmatrix
\mathbf{K}	Matrix zur Berechnung der Steuerbarkeitsindizes
\mathbf{N}	Systemmatrix eines BLS
\mathbf{p}	Punkt im Zustandsraum in globalen Koordinaten, Eigenvektor zu \mathbf{A}^T
$\mathbf{P}(\mathbf{x})$	Erreichbarkeitsdistribution
$\mathbf{P}(s)$	Rosenbrock-Systemmatrix
$\mathbf{P}(\mathbf{A}, \mathbf{N}, \mathbf{b})$	n -Erreichbarkeitsmatrix
\mathbf{Q}_A	Ausgangssteuerbarkeitsmatrix
\mathbf{Q}_S	Steuerbarkeitsmatrix
\mathbf{R}	Distribution
sl	„fahren“-Vektorfeld
\mathbf{V}	Symmetrische Matrix vom Typ (n, n)
\mathbf{W}	Symmetrische Matrix, mit $\mathbf{W} := \mathbf{V}$ für $\mathbf{G}(t) = \Phi(t_0, t)\mathbf{B}(t)$
wr	„schlängeln“-Vektorfeld
\mathbf{u}	Eingangsvektor des Systems
\mathbf{x}	Zustandsvektor des Systems
\mathbf{y}	Ausgangsvektor des Systems
\mathbf{z}	Zustandsvektor des Systems in lokalen Koordinaten

Griechische Buchstaben

α	Index
γ	Polynomkoeffizient
Δ	Distribution
λ	Eigenwert

Ω	Kodistribution
ω	Kovektor
Ω	Kovektorfeld
ϕ	Koordinatenfunktion, Orientierung des Automobils in der Ebene
ϕ	Koordinatentransformation
Φ	Fundamentalmatrix
Φ	Fluß
Σ	System
τ	Zeitvariable
$\tau(t_1, t_2)$	Trajektorie
τ	Vektorfeld
Θ	Lenkwinkel des Automobils
ζ	Zustandsvektor in lokalen aufgeteilten Koordinaten

Indizierung

i, j, k	Laufindizes
$[\cdot]^T$	Transponierte Matrix zu $[\cdot]$
$(\cdot)^\perp$	Annulator zu (\cdot)
$\{\Phi^{f_i}\}_G$	Kleinste Untergruppe von $\text{diff}(\mathcal{M})$, die den Fluß $\Phi^{f_i}(t)$ für alle f in $\{f_i\}$ enthält.
$\{f_i\}_{LA}$	Durch die Vektorfelder $\{f_i\}$ erzeugte Lie-Algebra

Operatoren und Funktionen

\circ	Komposition
Δ	Abweichung von einem Arbeitspunkt
$\overline{(\cdot)}$	Linearisierung von (\cdot) um einen Arbeitspunkt
$(\dot{\cdot})$	Zeitliche Ableitung $\frac{d(\cdot)}{dt}$
∇	Gradient
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$	Partielle Ableitung nach \mathbf{x}
bild	Bild
C^∞	Glatte Funktion
C^ω	Analytische Funktion
$\text{diff}(\mathcal{M})$	Gruppe der Diffeomorphismen auf \mathcal{M} , deren inverse Abbildung ebenfalls glatt ist.
dim	Dimension
kern	Nullraum, Kern
$h(\cdot)$	Allgemeine Funktion auf (\cdot)

1 Einleitende Übersicht

Aufgrund der Nichtlinearitäten realer technischer Systeme erweist sich eine Beschreibung mit Hilfe der Theorie linearer Systeme häufig als nicht ausreichend. Im Bereich der nichtlinearen Systemtheorie wird darum maßgeblich versucht Werkzeuge der linearen Systemtheorie, wie z.B. bei der Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsanalyse auf nichtlineare Systeme zu übertragen.

Im Rahmen einer derartigen Übertragung muß eine Trennung der Begriffe der Steuerbarkeit, Erreichbarkeit und der Zugänglichkeit erfolgen. Der Unterschied zwischen den ersten beiden Begriffen liegt in den unterschiedlichen Auflagen begründet, die die End- bzw. Anfangspunkte (-zustände) der Untersuchung erfüllen müssen. Bei der Fragestellung nach der Erreichbarkeit eines Systems wird untersucht, ob von einem Startpunkt aus der Systemzustand in die anderen Punkte des Systems überführt werden kann. Bei dem Problem der Steuerbarkeit eines Systems wird die Betrachtungsweise genau umgekehrt, es wird also untersucht, ob von beliebigen Anfangspunkten des Systems aus der Systemzustand in einen fest vorgegebenen Endpunkt überführt werden kann. Dieser ist dann meist ein Gleichgewichtszustand und in der Regel der Koordinatenursprung. Bei der Zugänglichkeit eines Systems wird der Frage nachgegangen, ob von jedem beliebigen Punkt des Systems aus andere erreichbare bzw. andere steuerbare Punkte vorhanden sind. Unter gewissen Bedingungen bzw. für gewisse Systeme sind die Begriffe der Erreichbarkeit und der Steuerbarkeit synonym und diese strenge Unterscheidung erübrigt sich. Dazu gehören die linearen Systeme, aber auch die sogenannten symmetrischen Systeme, für die für beliebige \mathbf{x} und \mathbf{u} gilt: $\mathbf{f}(\mathbf{x}, -\mathbf{u}) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ (Sontag 1990).

Für die Erweiterung der algebraischen Kriterien linearer Systeme auf nichtlineare haben sich sowohl differentialgeometrische als auch differentialalgebraische Methoden als hilfreich erwiesen. In dem vorliegenden Bericht werden algebraische und differentialgeometrische Definitionen und Kriterien der Steuerbarkeit, Erreichbarkeit und Zugänglichkeit für dynamische Systeme zusammen- und gegenübergestellt. Diese Gegenüberstellung wird an dem technischen Anwendungsbeispiel eines elektrohydraulischen Translationsantriebs erläutert.

Für eine bessere Einordnung der hier vorgestellten Ergebnisse werden im Abschnitt 2 zunächst verschiedene Steuerbarkeitsdefinitionen für lineare Systeme vorgestellt und Beurteilungskriterien für den Begriff der Zustandssteuerbarkeit exemplarisch hergeleitet. In den Abschnitten 2.3 bis 2.5 werden dann die bekanntesten algebraischen Kriterien für lineare zeitkontinuierliche Systeme zusammengestellt und erläutert.

Abschnitt 3 befaßt sich mit der Erweiterung des linearen Steuerbarkeitsbegriffs auf nichtlineare Systeme. Dieser kann jedoch nicht einfach übertragen werden, sondern es ist erforderlich die Begriffe Steuerbarkeit, Erreichbarkeit und Zugänglichkeit voneinander abzugrenzen. Die Begriffsunterscheidung erfolgt an der allgemeinen (nichtlinearen) Systemklasse der analytischen Systeme Σ_{AS} (Abschnitt 3.1, Gl. (3.1)). Eine Einführung in die differentialgeometrische Steuerbarkeitsanalyse (Abschnitt 3.2) verdeutlicht die enge Verknüpfung der Differentialgeometrie mit der Lie-Algebra in diesem Bereich der Kontrolltheorie und offenbart die grundlegenden Schwierigkeiten bei einer Herleitung von Steuerbarkeitskriterien für nichtlineare Systeme. Dabei wird im Rahmen dieser Arbeit vorwiegend der von Isidori (1989) propagierte Ansatz zur Systemanalyse benutzt. Neben dessen Definitionen im Bereich der Differentialgeometrie finden jedoch auch häufig Erläuterungen von Olver (1986) Verwendung, insbesondere bei der

Einbeziehung der Lie-Algebra und der Lie-Theorie. Eine Übersicht über die benutzten differentialgeometrischen Begriffe und eine knappe Einführung in die Differentialgeometrie befindet sich im Anhang B des Berichts. Für die Gegenüberstellung verschiedener Kriterien (Abschnitt 3.3) bezüglich einer Steuerbarkeitsanalyse dynamischer Systeme werden insbesondere solche Kriterien berücksichtigt, die als eine Erweiterung des Rangkriteriums nach Kalman für lineare Systeme angesehen werden können. Inwieweit eine weiterführende Analyse eines vorliegenden Systems erfolgen kann, wenn das Gesamtsystem nicht steuerbar/erreichbar ist, zeigt Abschnitt 3.5. Im Rahmen einer derartigen Analyse erfolgt eine Aufteilung des Systems in zwei Teile (Systemdekomposition): einen prinzipiell nicht erreichbaren/steuerbaren und einen prinzipiell erreichbaren/steuerbaren Anteil.

Anhand eines anschaulichen Beispiels wird dann in Abschnitt 4.1 die Anwendung von verschiedenen Kriterien erläutert und die Bedeutung der Lie-Kommutatoren innerhalb der Differentialgeometrie veranschaulicht und die Leistungsfähigkeit der vorgestellten Kriterien anhand eines technischen Beispiels in Form eines elektrohydraulischen Translationsantriebs demonstriert (Abschnitt 4.2).

Eine Zusammenfassung und ein Ausblick in Abschnitt 5 schließen diesen Bericht ab.

2 Steuerbarkeit linearer Systeme

2.1 Steuerbarkeitsdefinition für lineare Systeme

In der Literatur gibt es eine Vielzahl von Definitionen bezüglich der Steuerbarkeit eines Systems. Alle führen auf die Frage hinaus, ob es möglich ist, einen vorgegebenen Zustand eines Systems auf einen gewünschten Endzustand in einer endlichen Zeitspanne T zu bringen. Dabei ist dann noch zu unterscheiden, ob es sich um eine Untersuchung der Steuerbarkeit bezüglich der Zustände eines Systems handelt (was als Zustandssteuerbarkeit, oder auch kurz mit Steuerbarkeit bezeichnet wird) oder, ob der Systemausgang auf seine Steuerbarkeit hin untersucht werden soll. Der letzte Fall wird dann mit dem Begriff der Ausgangssteuerbarkeit umschrieben.

Der Begriff der Zustandssteuerbarkeit soll nun für ein lineares, zeitvariantes System nach Knobloch und Kwakernaak (1985) erläutert werden. Betrachtet wird hierfür ein System der Form:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad ; \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad .\end{aligned}\tag{2.1}$$

Dabei stellen m die Anzahl der Systemeingänge, n die Anzahl der Zustände und l die Anzahl der Ausgänge dar. Im Verlauf der weiteren Arbeit wird die Durchgangsmatrix \mathbf{D} zu $\mathbf{0}$ angenommen.

Man nennt nun ein System (Gl. 2.1) steuerbar, wenn es grundsätzlich möglich ist, durch Wahl einer geeigneten Steuerfunktion von einem vorgegebenen Anfangszustand \mathbf{x}_0 in endlicher Zeit zu einem vorgegebenen Endzustand \mathbf{x}_1 zu gelangen (Knobloch und Kwakernaak 1985). Die Betonung liegt dabei auf „grundsätzlich“. Denn für die Steuerbarkeit wird für die konkrete Überführung $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1$ keine weitere Bedingung an $\mathbf{u}(\cdot)$ (außer Stetigkeit) und an $\mathbf{x}(\cdot)$ gestellt. Bei technischen Systemen ist jedoch eine freie Wahl der Stellgrößen und Zustände nicht möglich (Stellgrößenbeschränkungen, Zustandsbeschränkungen). Somit sind bei technischen Systemen Nebenbedingungen der Form $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ oder auch $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$ zu beachten. Für ein technisches System, das durch ein steuerbares lineares Modell der Gl. (2.1) beschrieben wird, bedeutet das also noch keineswegs, daß sich der Zustand des zugrundeliegenden Systems stets in der gewünschten Weise beeinflussen läßt.

Trotzdem ist auf eine Analyse der Steuerbarkeit mit einer Systembeschreibung der Form Gl. (2.1) nicht zu verzichten. Das liegt daran, daß die Steuerbarkeit eines Systems eine Grundvoraussetzung für eine befriedigende mathematische Behandlung der wichtigsten regelungstechnischen Probleme ist (auch solcher, die mit der Frage der reinen Zustandsveränderung nichts zu tun haben) (Knobloch und Kwakernaak 1985).

Somit ergeben sich also die beiden folgenden Definitionen der Steuerbarkeit linearer Systeme:

Definition 2.1 (Knobloch und Kwakernaak 1985)

Gegeben sei das System nach Gl. (2.1), die Anfangszeit t_0 , der Anfangszustand \mathbf{x}_0 und der Endzustand \mathbf{x}_1 . Das Paar (t_0, \mathbf{x}_0) heißt zur Zeit $t_1 > t_0$ nach \mathbf{x}_1 *steuerbar*, falls es eine stetige Steuerfunktion $\mathbf{u}(\cdot)$ gibt derart, daß die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad , \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\tag{2.2}$$

der Bedingung $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ genügt.

Das Paar (t_0, \mathbf{x}_0) heißt nach \mathbf{x}_1 steuerbar, wenn es zu irgendeiner Zeit $t_1 > t_0$ nach \mathbf{x}_1 steuerbar ist. \square

Definition 2.2

Wenn für jedes (t_0, \mathbf{x}_0) und jedes \mathbf{x}_1 das Paar (t_0, \mathbf{x}_0) nach \mathbf{x}_1 steuerbar ist, so heißt Gl. (2.1) ein *vollständig steuerbares System*. \square

Nach Svaricek (1994) wird weiterhin unterschieden:

Definition 2.3

Ein dynamisches System $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ heißt *vollständig ausgangsteuerbar*, wenn der Ausgangsvektor $\mathbf{y}(t)$ durch einen geeigneten Steuervektor $\mathbf{u}(t)$ in einer endlichen Zeit T von einem beliebigen Anfangswert $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ in irgendeinen Endwert $\mathbf{y}(T)$ überführt werden kann. \square

In der englischsprachigen Literatur findet sich häufig eine andere Definition für die Untersuchung der Ausgangsteuerbarkeit (Svaricek 1994):

Definition 2.4

Ein dynamisches System $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$; $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ heißt *funktional vollständig ausgangsteuerbar*, wenn für jeden beliebigen Vektor $\mathbf{y}(t)$ von geeigneten Ausgangsfunktionen, die für $t > 0$ definiert seien, ein entsprechender Steuervektor $\mathbf{u}(t)$, ($t > 0$) existiert, der für die Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ diesen Vektor von Ausgangsfunktionen generiert. \square

Geeignete Ausgangsfunktionen sind dabei hinreichend glatte Funktionen, die somit ohne impulsförmige Anregungen des Steuervektors \mathbf{u} erzeugt werden können und über eine Laplace-Transformierte verfügen.

2.2 Steuerbarkeitskriterien für lineare Systeme

Anhand der vorgestellten Steuerbarkeitsdefinitionen sollen nun Kriterien für die Bestimmung der Zustandssteuerbarkeit linearer Systeme entwickelt werden. Dafür ist es notwendig, die Gesamtheit aller Paare (t_0, \mathbf{x}_0) , die im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ nach $\mathbf{0}$ steuerbar sind, durch $\mathcal{L}(t_0, t_1)$ zusammenzufassen. Zur besseren Übersicht werden in der Regel die Zeitargumente in den Zuständen unterdrückt. $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{L}(t_0, t_1)$ bedeutet demnach, daß eine Steuerfunktion $\mathbf{u}(\cdot)$ existiert, so daß die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad , \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

der Bedingung $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ genügt. Diese Forderung läßt sich mit $\Phi(t, \tau)$, der Übertragungsmatrix der Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ so umformulieren:

$$\mathbf{0} = \Phi(t_1, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)dt \quad . \quad (2.4)$$

Somit kann die Menge $\mathcal{L}(t_0, t_1)$ auch so definiert werden: $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{L}(t_0, t_1)$, falls es eine Steuerfunktion $\mathbf{u}(t)$ gibt, derart daß gilt:

$$-\mathbf{x}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) dt \quad . \quad (2.5)$$

Ein anderer Zugang zur Menge der nach $\mathbf{0}$ steuerbaren Punkte kann durch Einsetzen des folgenden wichtigen Satzes der linearen Kontrollmathematik erfolgen:

Satz 2.1 (Knobloch und Kwakernaak 1985):

Sei $\mathbf{G}(t)$ eine auf $] -\infty, \infty[$ definierte und stetige Matrix vom Typ (n, m) und es sei

$$\mathbf{V} := \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{G}(t) \mathbf{G}(t)^T dt \quad , t_0 < t_1. \quad (2.6)$$

\mathbf{V} ist eine symmetrische Matrix vom Typ (n, n) . Dann gilt: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ läßt sich dann und nur dann in der Form

$$\mathbf{x} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{G}(t) \mathbf{u}(t) dt \quad (2.7)$$

mit einer stückweise stetigen m -dimensionalen Vektorfunktion $\mathbf{u}(t)$ schreiben, wenn \mathbf{x} im Bildraum der Matrix \mathbf{V} liegt, d.h. wenn es ein \mathbf{z} gibt, derart daß $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z}$ gilt. \square

Die Aussage dieses Satzes läßt sich auch so formulieren:

Wenn \mathbf{x} überhaupt mit Hilfe einer Funktion $\mathbf{u}(\cdot)$ in der Form Gl. (2.7) dargestellt werden kann, so ist dies immer mit Hilfe eines speziellen Funktionentyps, nämlich

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{G}(t) \mathbf{z} \quad \mathbf{z} = const. \quad (2.8)$$

möglich (Knobloch und Kwakernaak 1985).

Die Gesamtheit der Elemente $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, die sich in Form Gl. (2.8) mit einem geeigneten $\mathbf{u}(\cdot)$ schreiben lassen, bildet einen linearen Raum \mathcal{L} , und der Bildraum der Matrix \mathbf{V} ist ein Teilraum von \mathcal{L} , d.h. es ist $\text{bild } \mathbf{V} \subseteq \mathcal{L}$. Wegen der Symmetrie der Matrix \mathbf{V} gilt auch: $\mathcal{L} \cap \text{kern } \mathbf{V} = \{0\}$. Für die Beschreibung der Menge der Punkte, die zu $\mathbf{0}$ steuerbar sind, kann dieser Hilfssatz nun in folgender Weise benutzt werden. Zunächst wird $\mathbf{G}(t)$ mit der Matrix $\Phi(t_0, t) \mathbf{B}(t)$ identifiziert (vgl. Gln. (2.5) und (2.8)). Die zugehörige symmetrische Matrix \mathbf{V} wird mit $\mathbf{W}(t_0, t_1)$ bezeichnet. Also (Knobloch und Kwakernaak 1985):

$$\mathbf{W}(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{B}(t)^T \Phi(t_0, t)^T dt \quad . \quad (2.9)$$

Daraus ergibt sich nun der folgende Satz, der im Grunde eine Interpretation von bild und kern der Matrix $\mathbf{W}(t_0, t_1)$ darstellt:

Satz 2.2 (Knobloch und Kwakernaak 1985)

i) $\mathcal{L}(t_0, t_1)$ ist der Bildraum der Matrix $\mathbf{W}(t_0, t_1)$, d.h. es gilt

$$\mathcal{L}(t_0, t_1) = \{\mathbf{x} \exists \mathbf{z} \text{ mit } \mathbf{x} = \mathbf{W}(t_0, t_1)\mathbf{z}\} \quad . \quad (2.10)$$

ii) $\mathbf{W}(t_0, t_1)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ gilt dann und nur dann wenn $\mathbf{x}^T \Phi(t_0, t)\mathbf{B}(t) = \mathbf{0}$ für alle $t \in [t_0, t_1]$.

□

Daraus läßt sich dann nach Knobloch und Kwakernaak (1985) das folgende Kriterium herleiten:

Kriterium 2.1

Das System nach Gl. (2.2) ist dann und nur dann steuerbar, wenn es zu jedem t_0 ein t_1 gibt derart, daß $\mathbf{W}(t_0, t_1) > 0$ ist. Es ist dann in dieser Zeit t_1 jedes (t_0, \mathbf{x}_0) in jedes \mathbf{x}_1 steuerbar.

□

Für zeitinvariante Systeme läßt sich dieses Kriterium noch deutlich vereinfachen. Dabei wird dann das folgende zeitinvariante System betrachtet:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad , \quad (2.11)$$

mit konstanten Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} . Somit gilt (Knobloch und Kwakernaak 1985):

Satz 2.3

Für ein zeitinvariantes System nach Gl. (2.11) ist $\mathcal{L}(t_0, t_1)$ von t_0, t_1 unabhängig und es ist gleich dem von den Spalten der Matrix

$$\mathbf{Q}_S = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (2.12)$$

aufgespannten Teilraum des \mathbb{R}^n , d.h. es ist $\mathcal{L}(t_0, t_1) = \text{bild } \mathbf{Q}_S$.

□

Aus diesem Satz lassen sich dann die beiden bekanntesten algebraischen Steuerbarkeitskriterien für zeitinvariante Systeme ableiten:

Kriterium 2.2

Die Eigenschaft des Systems nach Gl. (2.11), steuerbar zu sein ist mit jeder der beiden nachfolgenden Bedingungen gleichwertig:

1. rang $\mathbf{Q}_S = n$.
2. Ist \mathbf{p} Eigenvektor zu \mathbf{A}^T , so gilt $\mathbf{p}^T \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$.

□

Das erste Kriterium ist erstmals von Kalman formuliert worden und wird zusammen mit dem zweiten (von Hautus und in etwas veränderter Form von Rosenbrock) im Abschnitt 2.5 ausführlicher behandelt. Dazu analog werden auch in Schwarz (1971) Kriterien zur Steuerbarkeitsüberprüfung linearer, zeitinvarianter Systeme hergeleitet. Dabei werden die Differentialgleichung dieser Systeme direkt integriert und anschließend mit Hilfe einer Taylorreihenapproximation algebraische Kriterien eingeführt.

2.3 Algebraische Kriterien der Zustandssteuerbarkeit linearer Systeme

Aufbauend auf den Definitionen der Steuerbarkeit lassen sich unterschiedliche Kriterien für die Steuerbarkeit eines vorgegebenen Systems herleiten (vgl. Abschnitt 2.2). Das erste und bekannteste Kriterium ist das sog. *Rang-Kriterium von Kalman* (Unbehauen 1989, Svaricek 1994):

Kriterium 2.3

Ein dynamisches System (\mathbf{A}, \mathbf{B}) ist genau dann vollständig (zustands-) steuerbar, wenn für die Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_S gilt:

$$\text{rang } \mathbf{Q}_S = \text{rang} [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n_s = n \quad . \quad (2.13)$$

□

Dabei stellt n die Dimension des Zustandsraums dar. Für nicht vollständig steuerbare Systeme ist $n_s < n$, und n_s gibt die Dimension des vollständig steuerbaren Unterraumes an. Schwarz (1971) führt an, daß für Mehrgrößensysteme die Rangbestimmung der Matrix \mathbf{Q}_S bereits nach den ersten n linear unabhängigen Spaltenvektoren abgebrochen werden kann, obwohl die Matrix \mathbf{Q}_S selber jedoch $n \cdot m$ Spalten besitzt. Mit dem Kalman-Rangkriterium wird also unter Umständen ein höherer Rechenaufwand betrieben, als unbedingt notwendig ist. Dieser Umstand wird mit Hilfe der Steuerbarkeitsindizes umgangen, die in Abschnitt 2.5 an späterer Stelle noch weiter behandelt werden.

Mit Hilfe des Kriteriums 2.3 ist es möglich, eine Entscheidung zu treffen, ob ein System überhaupt steuerbar ist. Sollen jedoch auch Aussagen darüber getroffen werden, welche der Eigenbewegungen eines Systems (Eigenwerte der Matrix \mathbf{A}) nicht steuerbar sind, oder wie weit das System vom nächsten steuerbaren entfernt ist, sind andere Kriterien heranzuziehen. So existiert für den ersten Fall z.B. das sog. *Hautus-Kriterium* (Svaricek 1994):

Kriterium 2.4

Ein dynamisches System (\mathbf{A}, \mathbf{B}) ist genau dann vollständig steuerbar, wenn

$$\text{rang} [\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}, \mathbf{B}] = n \quad (2.14)$$

für alle Eigenwerte λ der Matrix \mathbf{A} gilt. □

Dieses Kriterium erfordert die Kenntnis der n Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} und in der Regel eine n -malige Ranguntersuchung der Matrix $[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}, \mathbf{B}]$. Die Verletzung der Steuerbarkeitsbedingung aus Gl. (2.14) zeigt dann an, welche der Eigenwerte für eine fehlende vollständige Steuerbarkeit des Gesamtsystems verantwortlich ist. Bei einer Untersuchung der Steuerbarkeit eines Systems ist jedoch zu beachten, daß das Hautus-Kriterium keine zuverlässigen Aussagen bei mehrfachen Eigenwerten geben kann.

Bei einem dritten Kriterium zur Steuerbarkeitsüberprüfung nach Rosenbrock werden die sogenannten Eingangs-Entkopplungsnulstellen (*EEN*) bestimmt (Svaricek 1994):

Kriterium 2.5

Die Gesamtheit aller Nullstellen der elementaren Polynome der Polynommatrix $\mathbf{P}_E(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}, \mathbf{B}]$ sind die Eingangs–Entkopplungsnullstellen (*EEN*) und gehören zu dem nicht steuerbaren Systemanteil. Alle Eingangs–Entkopplungsnullstellen genügen dann der Beziehung

$$\text{rang} [\mathbf{P}_E(s)]_{s=EEN} = \text{rang} [s\mathbf{I} - \mathbf{A}, \mathbf{B}]_{s=EEN} < n \quad . \quad (2.15)$$

□

2.4 Algebraische Kriterien der Ausgangssteuerbarkeit linearer Systeme

Für die Ausgangssteuerbarkeit gibt es ein Kriterium (Schwarz 1971, Svaricek 1994), das sehr ähnlich zu dem von Kalman (Kriterium 2.3) aufgebaut ist:

Kriterium 2.6

Ein dynamisches System $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ ist genau dann vollständig ausgangssteuerbar, wenn für die Ausgangs–Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_A gilt:

$$\text{rang } \mathbf{Q}_A = \text{rang} [\mathbf{C}\mathbf{B}, \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = l \quad , \quad (2.16)$$

mit l als Anzahl der Ausgänge. □

Ist die Systemmatrix \mathbf{D} ungleich $\mathbf{0}$ dann gilt (Unbehauen 1989):

Kriterium 2.7

Ein dynamisches System $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ ist genau dann vollständig ausgangssteuerbar, wenn für die Ausgangs–Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_A gilt:

$$\text{rang } \mathbf{Q}_A = \text{rang} [\mathbf{C}\mathbf{B}, \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}, \mathbf{D}] = m \quad , \quad (2.17)$$

mit m als Anzahl der Eingänge. □

Aus der Definition der funktionalen Ausgangssteuerbarkeit (Definition 2.4) läßt sich ein Kriterium zu deren Überprüfung herleiten. Dieses Kriterium umfaßt jedoch auch die Ausgangssteuerbarkeit gemäß Definition 2.3. Ein solches Kriterium von Rosenbrock lautet (Svaricek 1994)²:

Kriterium 2.8

Ein dynamisches System $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ ist genau dann funktional vollständig ausgangssteuerbar, wenn für die Übertragungsmatrix $\mathbf{F}(s)$

$$\text{normalrang } \mathbf{F}(s) = l \quad (2.18)$$

bzw. für die Rosenbrock–Systemmatrix $\mathbf{P}(s)$

$$\text{normalrang } \mathbf{P}(s) = n + l \quad (2.19)$$

gilt; dabei ist l identisch mit der Anzahl der Ausgänge. □

²vgl. Definition A.2

2.5 Algebraisch–quantitative Steuerbarkeitsanalyse linearer Systeme

Mit Hilfe der bisher in diesem Abschnitt aufgeführten Kriterien ist lediglich eine Aussage darüber zu treffen, ob ein System überhaupt steuerbar ist, oder welche Eigenbewegungen des Systems nicht steuerbar sind. Von Interesse ist aber bei technischen Anwendungen auch die Güte einer Steuerbarkeit. So beschreiben Schwarz (1971) und Svaricek (1994) einen Steuerbarkeitsindex κ_S als ein Maß für den „Regelbarkeitsaufwand“. Je größer dieser Index ist, umso komplizierter müssen Regler aufgebaut sein, wenn das System beliebig verändert werden soll. Es kann dann immer ein Regler der Ordnung kleiner gleich $\kappa_S - 1$ gefunden werden, der die Pole beliebig plaziert (Svaricek 1994).

Definition 2.5 (Svaricek 1994)

Der Steuerbarkeitsindex κ_S eines dynamischen Systems Gl. (2.13) ist die Potenz der Systemmatrix \mathbf{A} , die ausreicht, die vollständige Steuerbarkeit eines Systems nachzuweisen, d.h. es muß gelten:

$$\text{rang } \mathbf{Q}_S = \text{rang } [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{\kappa_S-1}\mathbf{B}] = n \quad . \quad (2.20)$$

□

Aus der Tatsache, daß die Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_S eines Systems (\mathbf{A}, \mathbf{B}) mehr Spalten ($n \times m$) als Zeilen besitzt, läßt sich das Rangkriterium nach Kalman umschreiben. Für den Nachweis der Steuerbarkeit reicht der Nachweis von n linear unabhängigen Spalten aus (d.h. $\text{rang } \mathbf{Q}_S = n$), die frei aus der ursprünglichen Steuerbarkeitsmatrix Gl. (2.13) gewählt werden können, solange der Rang der ursprünglichen Matrix unverändert bleibt. Somit ist es auch erlaubt, die ersten n linear unabhängigen Spaltenvektoren aus der folgenden Matrix zu benutzen. Die Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_S wird dabei zunächst entsprechend ihren Spalten (mit $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m]$) aufgeschrieben:

$$\mathbf{Q}_S = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m, \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{b}_m, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_m] \quad . \quad (2.21)$$

Etwas anders sortiert erhält man m Vektorketten

$$\mathbf{K} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}^{\kappa_1-1}\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{A}\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{A}^{\kappa_2-1}\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m, \mathbf{A}\mathbf{b}_m, \dots, \mathbf{A}^{\kappa_m-1}\mathbf{b}_m] \quad . \quad (2.22)$$

Die bei diesem Verfahren gewonnenen Längen κ_i der Vektorketten stellen die *Steuerbarkeitsindizes* des Systems (\mathbf{A}, \mathbf{B}) dar. Somit ergibt sich die folgende Definition der Steuerbarkeitsindizes

Definition 2.6 (Svaricek 1994)

Der Steuerbarkeitsindex κ_i der Spalte \mathbf{b}_i in $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m]$ ist die kleinste ganze Zahl, so daß $\mathbf{A}^{\kappa_i}\mathbf{b}_i$ von seinen Vorgängern linear abhängig ist. □

Da während der oben erläuterten Umformung der Rang der erhaltenen Matrix \mathbf{K} mit der ursprünglichen Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_S übereinstimmt, gilt immer noch:

$$\text{rang } \mathbf{K} = n_S = \text{rang } \mathbf{Q}_S \quad . \quad (2.23)$$

Da in der Matrix \mathbf{K} nach der Umformung nur noch linear unabhängige Vektoren enthalten sind, müssen für die Rangbestimmung der Matrix nur noch die Spalten „gezählt“ werden. So

gibt also die Summe der Steuerbarkeitsindizes die Dimension n_S des steuerbaren Unterraumes an:

$$n_S = \sum_{i=1}^m \kappa_i \quad . \quad (2.24)$$

Speziell für den Fall der vollständigen Steuerbarkeit gilt $n_S = n$.

3 Differentialgeometrische Methoden

Die Definition der Steuerbarkeit für nichtlineare System verläuft im Grunde analog zu der für lineare. Dabei ist jedoch das betrachtete Modell des realen Systems von dem der linearen Systeme grundlegend verschieden. Desweiteren wird bei nichtlinearen Systemen oft nicht die Steuerbarkeit nachgewiesen, sondern die (lokale) Erreichbarkeit eines Systems. Dabei bedeutet die Erreichbarkeit eines Gesamtsystems auch die Steuerbarkeit des Gesamtsystems (die exakte Unterscheidung der Begriffe erfolgt in Abschnitt 3.1).

Im Bereich der Steuerbarkeits- bzw. der Erreichbarkeitsuntersuchungen eines Systems kann man nicht von reinen differentialgeometrischen Untersuchungen reden. So sind die Übergänge in diesem Bereich zur gruppentheoretischen Betrachtung fließend. So wird letztendlich versucht die Erreichbarkeit/Steuerbarkeit mit differentialgeometrischen Methoden auf ein numerisch auswertbares, algebraisches Kriterium zu reduzieren. Bei diesen Überlegungen stellen dann gruppentheoretische, insbesondere Lie-theoretische Überlegungen eine entscheidende Rolle. Einige der wichtigsten Überlegungen für eine Charakterisierung der Differentialgeometrie finden sich in den folgenden Beschreibungen von Bronsteijn und von Sussmann.

Die Differentialgeometrie untersucht die Eigenschaften von Kurven und Flächen mit den Methoden der Differentialrechnung. Um das Verhalten in einer Umgebung eines Punktes zu studieren, benutzt man wesentlich die Taylorentwicklung, wobei stillschweigend vorausgesetzt wird, daß alle in den Gleichungen vorkommenden Ableitungen stetig sind. Differentialgeometrische Eigenschaften müssen unabhängig vom gewählten Koordinatensystem sein (Bronsteijn und Semendjajew 1991).

Bei einer differentialgeometrischen Untersuchung von dynamischen Systemen wird ein Kontrollsystem in erster Linie als eine Familie von Vektorfeldern auf einer Mannigfaltigkeit angesehen und viele der in kontrolltheoretischer Hinsicht interessanten Informationen über das System, sollten in den Lie-Klammern dieser Vektorfelder enthalten sein (Sussman 1985).

Eine knappe Einführung in die in dieser Arbeit benötigten Begriffe aus der Differentialgeometrie befindet sich in Anhang B.

3.1 Definitionen

Für nichtlineare Systeme existiert keine internationale Normung der Begriffe Steuerbarkeit, Erreichbarkeit und Zugänglichkeit, wodurch erhebliche Schwierigkeiten bei der Übertragbarkeit der Sätze entstehen. Insbesondere der Vergleich verschiedener Steuerbarkeits- bzw. Erreichbarkeitskriterien wird dadurch erschwert. So können zwar einige Kriterien unterschiedlich komplex in der Anwendung sein, die Aussagen dieser Kriterien über das Systemverhalten sind jedoch in der Regel von Grund auf verschieden. Bei einigen Autoren (z.B. Herman und Krener (1977), Krener (1985) und Sussman (1985)) besitzt der Begriff Steuerbarkeit zum Teil die Bedeutung der Erreichbarkeit bei anderen Autoren (z.B. Casti (1985) und Schwarz (1991)). Zusätzlich führen dann die Vertreter der ersten Steuerbarkeitsauffassung den Begriff der Zugänglichkeit (engl.: accessibility) ein, der nur unter gewissen Voraussetzungen mit dem der Erreichbarkeit der Autoren der zweiten Steuerbarkeitsauffassung übereinstimmt. Neben diesen teilweise nur auf den zweiten Blick unterscheidbaren Ansichten der möglichen Definition dieser Begriffe, gibt

es für nichtlineare Systeme noch eine Vielzahl von Einschränkungen und zusätzlichen Bedingungen für diese Begriffe. Diese sollen dann z.B. eine lokale Bedeutung, oder auch eineindeutige Relationen zwischen Zuständen eines Systems hervorheben. Vertreter solcher Einschränkungen (oder auch Erweiterungen) sind z.B. Adjektive wie: endlich, lokal, schwach, streng, umkehrbar oder vollständig. Für eine bessere Einordnung der in dieser Arbeit benutzten Begriffe soll in Anlehnung an Schwarz (1991) in tabellarischer Form die Idee charakterisiert werden, die hinter den entsprechenden Begriffen steht.

Betrachtet werden zunächst analytische Systeme (Σ_{AS}) der Form (Schwarz 1991):

$$\sum_{AS} \quad \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{c}(\mathbf{x}) \quad . \end{array} \quad (3.1)$$

Dabei stellt \mathcal{U} eine Menge zulässiger Steuerfunktionen aus \mathbb{R}^m (also $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$), \mathcal{Y} eine Menge \mathbb{R}^p -wertiger Ausgangsfunktionen (mit $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$) und \mathcal{M} eine C^∞ einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit der Dimension n dar ($\mathbf{x}(t) \in \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$). In Anlehnung an Schwarz (1991) wird in dieser Arbeit unterschieden:

Definition 3.1

- i) Die Frage, welche Systemzustände von einem gegebenen Anfangszustand \mathbf{x}_0 unter der Wirkung einer Steuerung $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$ innerhalb einer Zeit T erreicht werden können, betrifft das Problem der *Zustands-Erreichbarkeit* (Bild 3.1).
- ii) Soll das System von \mathbf{x}_0 in einen Gleichgewichtszustand – üblicherweise der Koordinatensprung der Zustandsdarstellung – überführt werden, sprechen wir von dem Problem der *Steuerbarkeit* (Bild 3.2).
- iii) Die Frage, ob von einem Systemzustand aus in einer offenen (Teil-)Menge des Zustandsraums erreichbare Punkte vorhanden sind, wird mit *Zugänglichkeit* charakterisiert.
- iv) Den Begriff der *endlichen Erreichbarkeit* betrifft das Problem, ob eine vollständige Umgebung um einen Zustand \mathbf{x}_0 in einer endlichen Zeit von \mathbf{x}_0 aus erreichbar ist. Diese Fragestellung ist im Begriff der Erreichbarkeit enthalten.

□

Für eine bessere Einordnung dieser Arbeit in die vorhandene Literatur sei erwähnt, daß Sussman (1985), Herman und Krener (1977) und Krener (1985) in ihren Artikeln die Begriffe wie folgt benutzen: Erreichbarkeit=controllability/attainability, endliche Erreichbarkeit=small time local controllability und Zugänglichkeit=accessibility.

Im folgenden wird die Erreichbarkeit intensiver behandelt, da das Problem der Steuerbarkeit teilweise in dieser Betrachtung enthalten ist. Für die Vereinfachung der Notation wird angenommen, daß der Zustandsraum \mathcal{M} durch global definierte Koordinaten $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ beschreibbar sei. Dann lassen sich die folgenden Definitionen (Herman und Krener 1977, Krener 1985) einer Erreichbarkeit unterscheiden. Dabei sei \mathcal{M}_0 eine offene zusammenhängende Untermannigfaltigkeit³ von \mathcal{M} , und T sei eine nichtnegative reelle Zahl.

³siehe Anhang B.4

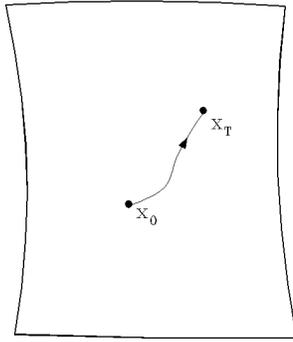


Bild 3.1: Erreichbarkeit eines Punktes von einem Punkt \mathbf{x}_0 , Steuerbarkeit eines Punktes *von* einem Punkt aus.

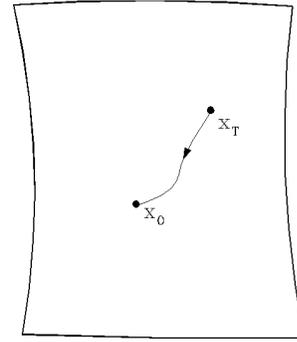


Bild 3.2: Steuerbarkeit eines Punktes in einen Punkt \mathbf{x}_0 .

Definition 3.2

Ein Punkt $\mathbf{x}_T \in \mathcal{M}_0$, mit $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$ heißt \mathcal{M}_0 -*erreichbar* von \mathbf{x}_0 zur Zeit T , wenn eine beschränkte, meßbare Steuerung $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$ existiert, die eine Trajektorie von (3.1) mit $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{M}_0$ für alle $t \in [t_0, T]$ generiert derart, daß gilt:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \text{ und } \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T \quad . \quad (3.2)$$

□

Bei dem Begriff der \mathcal{M}_0 -Erreichbarkeit (und später auch bei den verschiedenen Begriffen der lokalen Erreichbarkeit) ist zu beachten, daß die Trajektorien zu keiner Zeit während des Vorgangs $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}(T)$ die vorher definierte Umgebung \mathcal{M}_0 um \mathbf{x}_0 verlassen darf.

Definition 3.3

Die Menge aller Zustände \mathbf{x}_T , die von \mathbf{x}_0 aus zur Zeit T \mathcal{M}_0 -erreichbar sind, wird mit $\mathcal{R}(\mathbf{x}_0, T, \mathcal{M}_0)$ bezeichnet. Wird die Zeit T weggelassen, so versteht man unter dieser Menge die zu einer positiven Zeit $t \geq 0$ von \mathbf{x}_0 aus \mathcal{M}_0 -erreichbaren Zustände:

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}_0, \mathcal{M}_0) = \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{R}(\mathbf{x}_0, T, \mathcal{M}_0) \quad . \quad (3.3)$$

□

Definition 3.4

Gilt $\mathcal{R}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{M}$, so spricht man von \mathcal{M} -Erreichbarkeit oder von *Erreichbarkeit* schlechthin. □

Herman und Krener (1977) führen in ihrem Artikel den Begriff der Steuerbarkeit eines Systems von einem Punkt aus ein. Dieser Begriff deckt sich jedoch nicht mit dem Verständnis der Steuerbarkeit durch Definition 3.1 (Bild 3.3 und 3.4). Der Vollständigkeit halber sei dieser Begriff hier erläutert:

Definition 3.5

Ist $\mathcal{R}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{M}$, so ist das System Gl. (3.1) steuerbar von \mathbf{x}_0 . □

Unter dem Begriff der Steuerbarkeit von einem Punkt aus ist also die Erreichbarkeit nach Definition 3.1 zu verstehen. Demgegenüber ist die nachfolgende Definition wieder mit der in Definition 3.1 angeführten Unterscheidung der Erreichbarkeit und Steuerbarkeit eines Systems verträglich (Krener 1985):

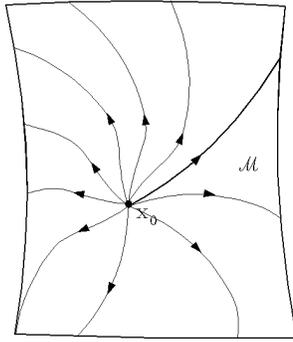


Bild 3.3: Erreichbarkeit eines Systems von einem Punkt \mathbf{x}_0 , Steuerbarkeit eines Systems von einem Punkt aus.

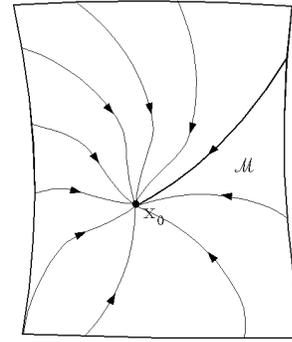


Bild 3.4: Steuerbarkeit eines Systems in einen Punkt \mathbf{x}_0 .

Definition 3.6

Gilt $\mathcal{R}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{M}$ für jedes beliebige $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$, so ist das System Gl. (3.1) steuerbar. \square

Das liegt daran, daß in dieser Definition der Begriff der Steuerbarkeit eines Systems „symmetrisch“ ist:

Von jedem beliebigen Punkt des Zustandsraums aus ist jeder beliebige Punkt des Zustandsraums per Definition erreichbar; also ist auch jeder beliebige Punkt des Zustandsraums in jeden beliebigen Punkt des Zustandsraums steuerbar.

Diese Überlegung gilt für den Begriff der Steuerbarkeit eines Systems von einem Punkt aus natürlich nicht:

Der gesamte Zustandsraum muß nur von dem einen Punkt \mathbf{x}_0 aus \mathcal{M} -erreichbar sein; die Steuerbarkeit eines Systems von einem Punkt aus (Definition 3.5) ist also durchaus nicht symmetrisch und ist mit der Aussage identisch, daß das System erreichbar von \mathbf{x}_0 ist.

Aus den Definitionen (3.4) bis (3.6) wird ersichtlich, daß für eine Zeit T , innerhalb derer die entsprechenden Systemzustände erreicht werden und für die Systemzustände \mathbf{x} der Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ nur geringe Einschränkungen gelten. So ist es dann durchaus denkbar, daß bestimmte Systemzustände nur nach einer sehr großen Zeit T , oder aber über sehr weite Wege für $\mathbf{x}(t)$ erreicht werden können. Für eine technische Anwendung spielen aber gerade die für das Erreichen eines bestimmten Zustands \mathbf{x}_e benötigte Zeit T , die dafür benötigte Energie, oder auch die dadurch bedingten Systembelastungen eine große Rolle. Es erscheint also sinnvoll, eine *lokale* Erreichbarkeit einzuführen, die es eher gestattet, diese Fragestellungen zu berücksichtigen. Dabei wird dann eine Umgebung $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$ um einen Punkt \mathbf{x}_0 betrachtet, die eine offene und zusammenhängende Teilmenge von \mathcal{M} darstellt (Krener 1985). So wird in Herman und Krener (1977) definiert:

Definition 3.7

Das System Σ_{AS} (Gl. (3.1)) ist *lokal steuerbar von \mathbf{x}_0* , wenn für jede Umgebung \mathcal{M}_0 von \mathbf{x}_0 die Menge $\mathcal{R}(\mathbf{x}_0)$ ebenfalls eine Umgebung von \mathbf{x}_0 ist. \square

Bei dieser Definition ist wieder dasselbe zu beachten, wie in Definition 3.5: Diese Interpretation ist nicht deckungsgleich mit der Steuerbarkeitsauffassung nach Definition (3.1). Wichtiger ist jedoch die nachfolgende Definition von Krener (1985):

Definition 3.8

Das System Σ_{AS} (Gl. (3.1)) ist *lokal steuerbar*, wenn es für jede beliebige offene zusammenhängende Teilmenge \mathcal{M}_0 von \mathcal{M} steuerbar ist; d.h. $\mathcal{R}(\mathbf{x}_0, \mathcal{M}_0) = \mathcal{M}_0$ für jedes beliebige $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ ist. \square

Hinter Definition 3.8 verbirgt sich also wieder ein symmetrischer Begriff. Aus den unterschiedlichen Steuerbarkeitsdefinitionen nach Herman und Krener (1977) ergibt sich, daß nur solche Steuerbarkeitsdefinitionen nach Herman und Krener (1977) mit der Steuerbarkeitsauffassung nach Definition 3.1 verträglich sind, die symmetrisch sind. Unter einer derartigen Steuerbarkeit ist dann eher eine vollständige Steuerbarkeit entsprechend der Definition für lineare Systeme zu verstehen und unter den steuerbaren Zuständen aus Herman und Krener (1977) verstecken sich im Grunde erreichbare Zustände. Aus diesem Grund benutzt Krener (1985) nur symmetrische Begriffe zur Beschreibung der Steuerbarkeit, wie in den Definitionen 3.6 und 3.8. Für die Steuerbarkeit eines Systems in einen Punkt sollte es jedoch nur erforderlich sein, daß alle Ausgangszustände aus einen Zustandsraum in ein und denselben Endzustand bewegt werden können. Dieser Endzustand braucht dann nicht unbedingt beliebig zu sein (die Steuerbarkeit in Krener (1985) ist also eine wesentlich strengere Systemeigenschaft und kann eher mit dem Begriff der vollständigen Steuerbarkeit beschrieben werden; Bild 3.5 und 3.6).

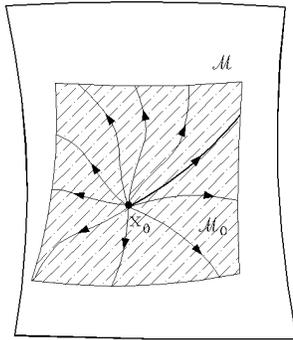


Bild 3.5: Lokale Erreichbarkeit eines Systems von einem Punkt \mathbf{x}_0 , lokale Steuerbarkeit eines Systems von einem Punkt aus.

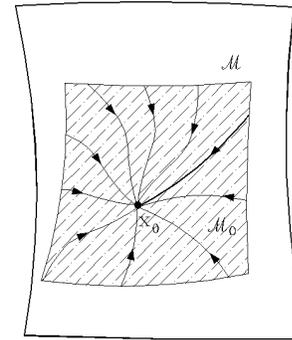


Bild 3.6: Steuerbarkeit eines Systems in einen Punkt \mathbf{x}_0 .

Bei der Betrachtung der unterschiedlichen Erreichbarkeits- und Steuerbarkeitsdefinitionen ist zu beachten, daß die Anforderungen für das „lokale“ Verhalten eines Systems sehr viel schwieriger zu erfüllen sind als die „globalen“. In diesem Zusammenhang muß berücksichtigt werden, daß – im Rahmen der Steuerbarkeitsuntersuchung – bei lokalen Systemeigenschaften verlangt wird, daß die Umgebung frei wählbar ist. Sie kann also – solange sie zusammenhängend bleibt – beliebig klein gewählt werden. Ist also ein System lokal steuerbar/erreichbar, so existiert damit auch eine kleinste oder auch minimale Verbindungslinie zwischen den Systemzuständen des Systems.

Ein weiterer wichtiger Aspekt der lokalen Erreichbarkeit/Steuerbarkeit ist, daß ein steuerbares/erreichbares System auch im gesamten Zustandsraum steuerbar/erreichbar ist. Aus der lokalen Eigenschaft folgt in diesem Zusammenhang also die globale. Bild 3.7 verdeutlicht diesen Vorgang: Im gesamten Zustandsraum/Mannigfaltigkeit \mathcal{M} sind sowohl die Umgebungen

$\mathcal{M}_{01}, \mathcal{M}_{02} \subset \mathcal{M}$, als auch die Punkte \boldsymbol{x}_0 frei wählbar. Es ist damit möglich, alle beliebigen Punkte \boldsymbol{x}_i in der gesamten Zustandsmannigfaltigkeit \mathcal{M} über Punkte aus der Schnittmenge $\mathcal{M}_{01} \cap \mathcal{M}_{02}$ miteinander zu verbinden und so den gesamten Zustandsraum/Mannigfaltigkeit mit dieser Eigenschaft (Erreichbarkeit/Steuerbarkeit) zu erfassen.

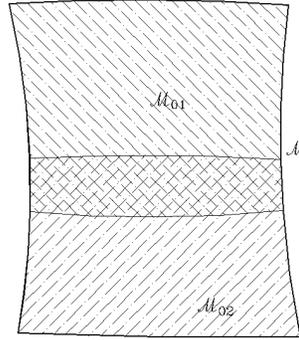


Bild 3.7: Zur lokalen Erreichbarkeit/Steuerbarkeit eines Systems.

Bei der Definition einer Erreichbarkeit/Steuerbarkeit von einem Punkt aus ist zu beachten, – ebenso wie die Definitionen 3.2 bis 3.5 – daß diese Erreichbarkeit/Steuerbarkeit nicht symmetrisch ist; d.h. \boldsymbol{x}_e kann von \boldsymbol{x}_0 aus erreichbar sein, der Umkehrschluß \boldsymbol{x}_0 ist von \boldsymbol{x}_e aus erreichbar muß jedoch nicht gelten (etwas, was bei zeitkontinuierlichen linearen Systemen durchweg der Fall ist).

Sollen nun alle Punkte zusammengefaßt werden, die in einer Erreichbarkeits– oder Steuerbarkeitsbeziehung stehen, so muß eine schwächere Beziehung eingeführt werden, die nicht mehr die Richtungsabhängigkeit dieser Beziehung berücksichtigt. Dafür werden dann mehrere Systemzustände zu einer Sequenz von Systemzuständen zusammengefaßt. Innerhalb dieser Sequenz soll dann *entweder* jeweils der Vorgänger vom Nachfolger aus erreichbar sein *oder* der Nachfolger vom Vorgänger. Da es gleich ist, ob in der Sequenz nun der Vorgänger oder aber der Nachfolger erreichbar ist, kann in der Definition auch die Erreichbarkeit durch die Steuerbarkeit vom Vorgänger oder Nachfolger aus ersetzt werden, ohne die daraus resultierenden Aussagen zu verfälschen.

Nach Casti (1985) und Schwarz (1991) wird definiert:

Definition 3.9

Zwei Zustände \boldsymbol{x}_e und $\bar{\boldsymbol{x}}$ des Systems Σ_{AS} sind *schwach erreichbar voneinander* dann und nur dann, wenn Zustände $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k \in \mathcal{M}$ derart existieren, daß $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_e$ und $\boldsymbol{x}_k = \bar{\boldsymbol{x}}$ und entweder \boldsymbol{x}_i von \boldsymbol{x}_{i-1} oder \boldsymbol{x}_{i-1} von \boldsymbol{x}_i erreichbar ist, für $i = 1, 2, \dots, k$. \square

In der ursprünglichen Fassung in Herman und Krener (1977) wird diese Eigenschaft einer Sequenz von Systemzuständen (Definition 3.9) mit dem Begriff der schwachen \mathcal{M}_0 -Zugänglichkeit beschrieben. Der Begriff der Zugänglichkeit erleichtert in diesem Zusammenhang den Zugang zu einigen grundlegenden Eigenschaften, die ein System besitzt, das schwach erreichbar ist. Die Erläuterungen dazu erfolgen jedoch an späterer Stelle und es wird zunächst mit den Definitionen bezüglich einer *schwachen* Systemeigenschaft fortgefahren.

Definition 3.10

Das System Σ_{AS} ist *schwach erreichbar*, wenn es schwach erreichbar für *jedes* $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$ ist. \square

Definition 3.11

Die Menge aller von \mathbf{x}_0 aus schwach erreichbaren Zustände wird mit

$$\mathcal{SR}(\mathbf{x}_0) = \bigcup \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \text{ schwach erreichbar von } \mathbf{x}_0 \} \quad (3.4)$$

bezeichnet. \square

Äquivalent dazu sind die Begriffe der schwachen Steuerbarkeit (Herman und Krener 1977):

Definition 3.12

Das System Σ_{AS} ist *schwach steuerbar von* \mathbf{x}_0 , wenn gilt: $\mathcal{SR}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{M}$. \square

Definition 3.13

Das System Σ_{AS} ist *schwach steuerbar*, wenn gilt: $\mathcal{SR}(\mathbf{x}) = \mathcal{M}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$. \square

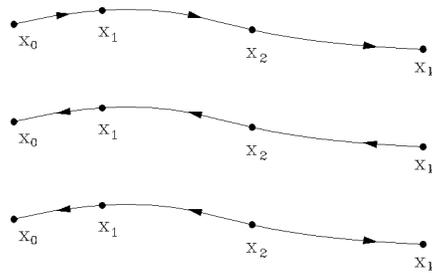


Bild 3.8: Schwach erreichbare Zustände \mathbf{x}_0 bis \mathbf{x}_k .

Aus den Überlegungen zur schwachen Erreichbarkeit heraus ergeben sich auch noch andere Konsequenzen für die Eigenschaft der schwachen Erreichbarkeit von Punkten eines Systems: Es kann vorkommen, daß zwei Punkte \mathbf{x}_0 und \mathbf{x}_k schwach erreichbar sind, obwohl weder \mathbf{x}_k von \mathbf{x}_0 aus erreichbar noch \mathbf{x}_0 von \mathbf{x}_k aus erreichbar ist (Bild 3.8: jeder Punkt ist in der unteren Darstellung von \mathbf{x}_2 aus erreichbar, aber von keinem Punkt aus ist \mathbf{x}_2 selbst erreichbar). Besitzt also ein System die Eigenschaft der schwachen Erreichbarkeit, so ist keineswegs gewährleistet, daß jeder Punkt von jedem Punkt aus erreichbar ist (etwas, was fälschlicherweise unter der Symmetrie in Casti (1985) und unter der „Äquivalenzrelation der schwachen \mathcal{M}_0 -Zugänglichkeit“ in Herman und Krener (1977) verstanden werden kann). Schwache Erreichbarkeit ist nur insofern eine Äquivalenzrelation, als für einen Punkt \mathbf{x}_e , der von \mathbf{x}_0 aus schwach erreichbar ist, auch gilt, daß \mathbf{x}_0 von \mathbf{x}_e aus *schwach* erreichbar ist.

Einen anderen Zugang zur Eigenschaft der schwachen Erreichbarkeit eines Systems erhält man über den Ansatz der Zugänglichkeit eines Systems: Ist ein System innerhalb einer Umgebung schwach erreichbar, so existieren ausgezeichnete Punkte innerhalb dieser Umgebung, von denen aus die meisten Zustände in dieser Umgebung entweder erreichbar sind oder aber in die die meisten Punkte dieser Umgebung steuerbar sind. Können alle diese Punkte angesprochen werden, so kann auch jeder beliebige Punkt in der Umgebung entweder erreicht werden oder aber in diese Punkte gesteuert werden. Das System besitzt dann also die Eigenschaft, daß die

Gesamtumgebung in Teilumgebungen aufgeteilt werden kann, in denen es dann jeweils mindestens einen Punkt gibt, von denen dann diese Teilumgebung erreichbar oder aber in die diese Teilumgebung steuerbar ist (es existieren also „Quellen“ und „Senken“).

Durch die Einführung dieser schwachen Begriffe werden jedoch nicht mehr lokale Konzepte verfolgt. Für eine lokale Betrachtung bietet sich die folgende Definitionen nach Herman und Krener (1977) an:

Definition 3.14

Das System Σ_{AS} ist *lokal schwach steuerbar um \mathbf{x}_0* , wenn für jede beliebige Umgebung von \mathbf{x}_0 die Menge der schwach erreichbaren Punkte $\mathcal{SR}_{\mathcal{M}_0}$ wiederum eine Umgebung um \mathbf{x}_0 ist. \square

Definition 3.15

Das System Σ_{AS} ist *lokal schwach steuerbar*, wenn gilt:

$$\mathcal{SR}_{\mathcal{M}_0}(\mathbf{x}) = \mathcal{M} \text{ für alle } \mathbf{x}. \quad \square$$

Es ergeben sich somit die folgenden Zusammenhänge der schwachen Steuerbarkeits- und Erreichbarkeitsdefinitionen. Dabei stehen die Pfeile jeweils in Richtung der geringeren Steuerbarkeits-/Erreichbarkeitsanforderungen des Systems bzw. in Richtung des logischen Zusammenhangs der Definitionen (ein steuerbares oder erreichbares System ist immer auch ein schwach steuerbares/erreichbares u.s.w.):

$$\begin{array}{ccc} \text{lokale Steuerbarkeit} & \implies & \text{Steuerbarkeit} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{lokale schwache Steuer-/Erreichbarkeit} & \implies & \text{schwache Steuer-/Erreichbarkeit.} \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ \text{lokale Erreichbarkeit} & \implies & \text{Erreichbarkeit} \end{array}$$

Für zeitinvariante bzw. autonome lineare Systeme sind diese Konzepte alle identisch.

Der nachfolgende Satz für Σ_{AS} spiegelt die Interpretation der lokalen schwachen Erreichbarkeit wieder. Anders ausgedrückt heißt das, daß ein System Σ_{AS} dann und nur dann lokal schwach erreichbar sein kann, wenn man zur Unterscheidung der Trajektorien von jedem Punkt \mathbf{x} aus lokale Koordinaten der Dimension n benötigt.

Satz 3.1 (Herman und Krener 1977)

Ein System Σ_{AS} ist dann und nur dann lokal schwach erreichbar, wenn für jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ und jeder Umgebung \mathcal{M}_0 von \mathbf{x}_0 das Innere $\mathcal{SR}_{\mathcal{M}_0} \neq \emptyset$ ist. \square

Bei dem Versuch, das Rangkriterium (Kriterium 2.6) linearer Systeme für nichtlineare zu verallgemeinern, zeigt sich, daß für Σ_{ALS} (analytische Systeme mit linearer Steuerung) das Konzept der *lokalen schwachen Erreichbarkeit* angemessen ist. Bei der Untersuchung von bilinearen Systemen ist noch die *n-Erreichbarkeit* (Schwarz 1991) wichtig:

Definition 3.16

Das System Σ_{AS} heißt *n-erreichbar*, wenn die Menge aller schwach erreichbaren Zustände den vollständigen Zustandsraum aufspannt:

$$\mathcal{SR}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{M} = \mathbb{R}^n \quad . \quad (3.5)$$

\square

Anhand der Definition der n -Erreichbarkeit erkennt man, daß es sich dabei um eine schwache Steuerbarkeit handelt.

Wie bereits im Verlauf dieses Abschnitts festgestellt worden ist, ist lokale Steuerbarkeit/Erreichbarkeit eines Systems bzw. Steuerbarkeit/Erreichbarkeit eines Systems ein symmetrischer Begriff: Jeder beliebige Punkt der Zustandsmannigfaltigkeit ist von jedem beliebigen Punkt der Zustandsmannigfaltigkeit aus erreichbar bzw. dahin steuerbar. Unglücklicherweise ist dieser Begriff nicht mit einem einfachen Kriterium auswertbar. Die Voraussetzung für ein derartiges Kriterium ist, daß den Systemtrajektorien in beliebiger Richtung gefolgt werden kann (hin *und* zurück). Für ein beliebiges technisches System würde das bedeuten, daß die Trajektorien auch „zeitinvers“ existieren. Da das aber eine Forderung ist, die analytische Systeme in dieser Art nicht erfüllen können, müssen nun Systeme betrachtet werden, die eine zur zeitinversen äquivalente Eigenschaft besitzen. Diese Systeme stellen eine Unterklasse der Σ_{AS} dar und besitzen die Eigenschaft symmetrisch zu sein. Nach Krener (1985) werden Systeme der folgenden Art betrachtet:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u_0, \mathbf{u}) = \mathbf{g}_0(\mathbf{x})u_0 + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad , \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad , \text{ mit } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad .\end{aligned}\tag{3.6}$$

Bei diesen Systemen kann also durch Vorzeichenumkehr in den Steuerungen auch die Systemtrajektorie in ihrer Richtung umgekehrt werden.

Von großer Bedeutung für eine technische Anwendung dieser Systemklasse ist der folgende Begriff nach Krener (1985):

Definition 3.17

Ein System nach Gl. (3.1) ist umkehrbar steuerbar/erreichbar, wenn Gl. (3.6) steuerbar ist. \square

Definition 3.18

Ein System nach Gl. (3.1) ist lokal umkehrbar steuerbar/erreichbar, wenn Gl. (3.6) lokal steuerbar ist. \square

Analog zur Beschreibung der Erreichbarkeit wird nun nach Krener (1985) definiert:

Definition 3.19

Mit $\mathcal{RR}(\mathbf{x}_0, T, \mathcal{M}_0)$ wird die Menge der von \mathbf{x}_0 aus, entlang Trajektorien von Gl. (3.6) \mathcal{M}_0 -erreichbaren Punkte bezeichnet. \square

Nach Krener (1985) gilt:

Satz 3.2

Ein System Gl. (3.1) ist genau dann umkehrbar steuerbar, wenn für jedes $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$ gilt: $\mathcal{RR}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{M}$. \square

Satz 3.3

Ein System Gl. (3.1) ist genau dann lokal umkehrbar steuerbar, wenn für jedes $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}_0$ und für jedes $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ gilt: $\mathcal{RR}(\mathbf{x}_0, \mathcal{M}_0) = \mathcal{M}_0$. \square

Aus diesen Definitionen ergibt sich, daß aus der Steuerbarkeit/Erreichbarkeit umkehrbare Steuerbarkeit/Erreichbarkeit folgt, nicht jedoch umgekehrt. Ist ein System umkehrbar steuerbar/erreichbar, so bedeutet das, daß keine Systemzustände in diesem System existieren, die nicht durch die Systemsteuerungen beeinflußt werden können. Somit stellt umkehrbare Steuerbarkeit also eine ausgesprochen wichtige Eigenschaft für die Anwendung dar.

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist die Zugänglichkeit eines Systems, die im Verlauf dieses Abschnitts bereits erwähnt worden ist. Nach Krener (1985) wird definiert:

Definition 3.20

Das System nach Gl. (3.1) besitzt die Zugänglichkeitseigenschaft, wenn $\mathcal{R}(\mathbf{x}_0)$ ein nichtleeres Inneres für jedes beliebige $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$ besitzt. \square

Definition 3.21

Das System nach Gl. (3.1) besitzt die lokale Zugänglichkeitseigenschaft, wenn $\mathcal{R}(\mathbf{x}_0, \mathcal{M}_0)$ ein nichtleeres Inneres für jedes beliebige $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$ und einer beliebigen offenen Umgebung \mathcal{M}_0 besitzt. \square

Definition 3.22

Das System nach Gl. (3.1) besitzt die umkehrbare Zugänglichkeitseigenschaft, wenn das System Gl.(3.6) die Zugänglichkeitseigenschaft besitzt. \square

Definition 3.23

Das System nach Gl. (3.1) besitzt die lokale umkehrbare Zugänglichkeitseigenschaft, wenn das System Gl.(3.6) die lokale Zugänglichkeitseigenschaft besitzt. \square

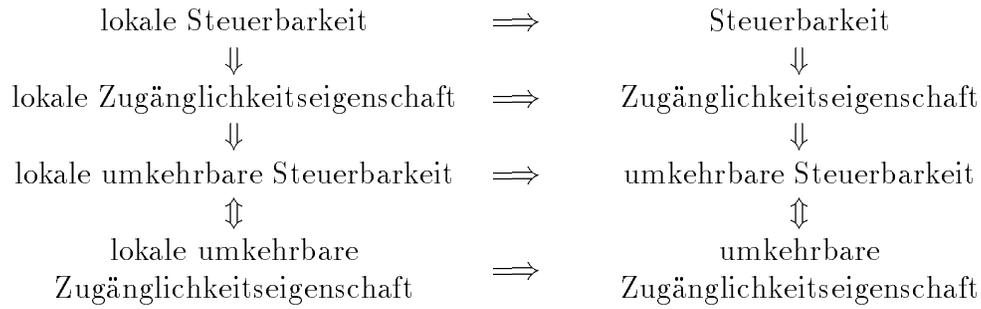
Daraus ergibt sich dann der folgende Satz, der die Verknüpfungen dieser Definitionen untereinander hervorhebt:

Satz 3.4 (Krener 1985)

1. Besitzt das System nach Gl. (3.1) die Zugänglichkeitseigenschaft, so ist es umkehrbar steuerbar.
2. Dieses System besitzt die umkehrbare Zugänglichkeitseigenschaft dann und nur dann, wenn es umkehrbar steuerbar ist.
3. Dieses System besitzt die lokale umkehrbare Zugänglichkeitseigenschaft dann und nur dann, wenn es lokal; umkehrbar steuerbar ist.
4. Das System besitzt die lokale Zugänglichkeitseigenschaft dann und nur dann, wenn es umkehrbar steuerbar ist.

\square

Somit ergeben sich auch für die damit eingeführten Begriffe zur Beschreibung einer Steuerbarkeits-/Zugänglichkeitseigenschaft folgende Zusammenhänge (Krener 1985):



Um den Unterschied zwischen den Begriffen der schwachen Steuer-/Erreichbarkeit und der Zugänglichkeit eines Systems zu erläutern, seien nun zwei aus mathematischer Sicht interessante Beispiele eines schwach steuerbaren und eines lokal zugänglichen Systems vorgestellt. In Bild 3.9 ist ein System dargestellt, in dem die Umgebung \mathcal{M}_{01} nach \boldsymbol{x}_1 steuerbar, die Umgebung \mathcal{M}_{03} nach \boldsymbol{x}_3 steuerbar, die Umgebung \mathcal{M}_{02} von \boldsymbol{x}_2 aus erreichbar und die Umgebung \mathcal{M}_{04} von \boldsymbol{x}_4 aus erreichbar ist. Somit ist das Gesamtsystem (Umgebung \mathcal{M}) schwach erreichbar. Trotzdem kann der Zustand dieses Systems nicht mehr geändert werden, wenn er sich einmal in den Punkt \boldsymbol{x}_1 oder \boldsymbol{x}_3 bewegt hat. Eine derartige Konstellation mag zwar in der Praxis nicht allzu häufig vorkommen, trotzdem wird die Schwierigkeit deutlich, die mit dem Begriff der schwachen Erreichbarkeit eines Systems verbunden ist: In einem schwach steuerbaren System sind nicht notwendigerweise alle Zustände von einem beliebigen Punkt aus erreichbar, oder alle Punkte in einen beliebigen Punkt steuerbar. Es existieren vielmehr ausgezeichnete Punkte von denen aus entweder andere Punkte erreicht werden können („Quelle“), oder aber in die andere Punkte steuerbar sind („Senke“).

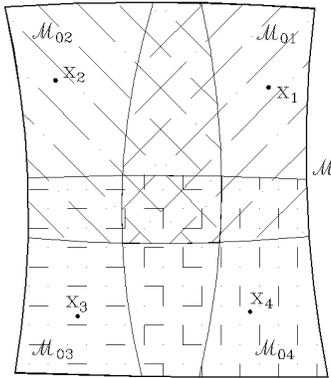


Bild 3.9: Schwach erreichbares System.

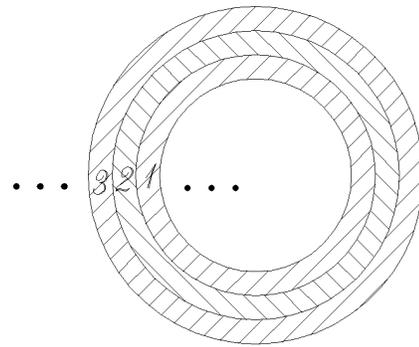


Bild 3.10: Lokal zugängliches Systems nach Definition 3.20 und 3.21.

Eine andere unglückliche Konstellation für die Zugänglichkeit bzw. auch für die lokale Zugänglichkeit wird durch Bild 3.10 verdeutlicht: Es ist zwar möglich jeden beliebigen Punkt des Zustandsraums zu verlassen, trotzdem kann es vorkommen, daß man sich dabei auf Bahnen innerhalb in sich geschlossener Bereiche bewegt. So ist es dann nicht möglich, obwohl das System lokal zugänglich ist, die geschlossenen Umgebungen zu verlassen, auf denen sich der Anfangszustand der Trajektorie befindet (es existiert also keine Verbindung von Bereich 1 zu Bereich 2 u.s.w.). Die Folge ist, daß in einem lokal zugänglichen System nicht notwendigerweise auch alle Zustände erreicht werden können bzw. der Systemzustand immer in jede beliebige Richtung verändert werden kann.

Nijmeijer und van der Schaft (1991) führen zusätzlich noch den Begriff der strengen Zugänglichkeit ein. Damit soll berücksichtigt werden, daß für das Erreichen der gewünschten Endzustände auch eine möglichst kleine Zeit erforderlich ist:

Definition 3.24 (Nijmeijer und van der Schaft 1991)

Das System nach Gl. (3.1) heißt lokal streng zugänglich von \mathbf{x}_0 , wenn $\mathcal{R}(\mathbf{x}_0, \mathcal{M}_0)$ ein nichtleeres Inneres für jede beliebige Umgebung \mathcal{M}_0 um \mathbf{x}_0 und T hinreichend klein besitzt. \square

3.2 Einführung in die differentialgeometrische Steuerbarkeitsanalyse

Um die Schwierigkeiten zu verdeutlichen, die auftreten, wenn versucht wird, das Rangkriterium von Kalman auf nichtlineare System zu erweitern, erfolgen in diesem Abschnitt einige Überlegungen zu der von einem Punkt aus erreichbaren Menge. Dabei wird die enge Verknüpfung der Differentialgeometrie mit der Lie–Algebra im Rahmen einer Steuerbarkeitsanalyse dynamischer Systeme deutlich.

Zur Vereinfachung werde zunächst eine einzelne Differentialgleichung im \mathbb{R}^n betrachtet:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \quad ; \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad , \quad (3.7)$$

wobei \mathbf{f} genügend glatt sei, um genau eine Lösung zu definieren. Im Rahmen der Theorie der Differentialgleichungen wird üblicherweise der Wert der Lösung zur Zeit t mit $\Phi(t, \mathbf{x}_0)$ bezeichnet (in der Differentialgeometrie wird dafür auch häufig die Schreibweise $(\exp t\mathbf{f})\mathbf{x}_0$ benutzt, unabhängig davon, ob \mathbf{f} linear ist oder nicht). Entsprechend dem Cauchy–Lipschitz–Theorem kann man nun sagen, daß eine eindimensionale Teilmenge \mathcal{M} des \mathbb{R}^n mit $\mathcal{M} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \Phi(t, \mathbf{x}_0) ; |t| < \epsilon\}$ existiert in der Art, daß $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ zu jedem Punkt tangential zu \mathcal{M} ist. Ähnlich zu dieser Betrachtung kann nun auch allgemeiner die folgende Frage formuliert werden. Betrachtet werde ein System

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^m u_i \mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t)) \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad . \quad (3.8)$$

Analog zu oben lautet die Fragestellung wie folgt: Wann läßt sich eine p –dimensionale Teilmenge \mathcal{M} von \mathbb{R}^n in der Art finden, daß die $\mathbf{f}_i(\mathbf{x})$ den Tangentialraum von \mathcal{M} an jedem beliebigen Punkt aufspannen?

Das Interesse an der Beantwortung dieser Frage ist offensichtlich: die u_i stellen in dieser Differentialgleichung die frei wählbaren Eingangsgrößen dar. Wenn also ein solches \mathcal{M} existiert, so wird \mathbf{x} offensichtlich auch in der Lage sein, an jeden beliebigen Punkt in \mathcal{M} zu gelangen und dabei \mathcal{M} nicht zu verlassen (Brockett 1976). Mit diesen Fragestellungen sind dann die Begriffe der Steuerbarkeit und Erreichbarkeit des Systems eng verknüpft.

Zunächst einmal hängt die Existenz von einem derartigen \mathcal{M} von der folgenden Beobachtung ab: Wenn man sich entlang der Integralkurve von $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_1(\mathbf{x})$ t Zeiteinheiten lang, danach für t Zeiteinheiten entlang $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_2(\mathbf{x})$, dann für weitere t Zeiteinheiten entlang $\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{f}_1(\mathbf{x})$ und schließlich noch einmal für t Zeiteinheiten entlang $\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{f}_2(\mathbf{x})$ bewegt, so kann man mit

Hilfe der Taylor-Reihenentwicklung den erreichten Punkt $\Phi^{-f_2}(t, \Phi^{-f_1}(t, \Phi^{f_2}(t, \Phi^{f_1}(t, \mathbf{x}_0))))$ bestimmen. Dabei wird dann wiederholt die Entwicklung bis zur zweiten Ordnung benutzt:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_0) + \frac{t^2}{2} \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_0) + O(t^3) \quad (3.9)$$

führt dann zu

$$\Phi^{-f_2}(t, \Phi^{-f_1}(t, \Phi^{f_2}(t, \Phi^{f_1}(t, \mathbf{x}_0)))) = \mathbf{x}_0 + \frac{t^2}{2} [\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1] \mathbf{x}_0 + O(t^3) \quad . \quad (3.10)$$

Dabei ist dann

$$[\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1] = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_1 - \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_2 \quad , \quad (3.11)$$

die sogenannte Lie-Klammer in der Differentialgeometrie bzw. der Lie-Kommutator.

Wenn also $[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]$ keine Linearkombination der Vektorfelder $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$ darstellt, so repräsentiert dieser Lie-Kommutator eine „neue“ Richtung, in die sich die Lösung bewegen kann, und das ursprüngliche Problem, das des Findens einer Mannigfaltigkeit in der Art, daß $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m$ den Tangentialraum aufspannen, ist nicht mehr lösbar.

Mit diesem Problem ist der Begriff *involutiv* eng verknüpft: Man nennt eine Menge von Vektorfeldern $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$ involutiv, wenn ein γ_{ijk} in der Art existiert, daß gilt:

$$[\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j] = \sum_{k=1}^m \gamma_{ijk}(\mathbf{x}) \mathbf{f}_k(\mathbf{x}) \quad . \quad (3.12)$$

Die Eigenschaft der Involutivität ist also eine notwendige Bedingung, um die Vektorfelder $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m)$ zu „integrieren“, um eine „Lösungsmannigfaltigkeit“ zu erhalten. Als Frobenius dann sein Theorem der vollständigen Integrierbarkeit vorstellte, zeigte es sich, daß diese Eigenschaft unter gewissen Regularitätsanforderungen auch hinreichend ist.

Die Bedeutung der Lie-Klammer (Lie-Kommutator) folgt aus einem Theorem von Chow. Dafür sei ein System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^m u_i \mathbf{f}_i[\mathbf{x}(t)] \quad ; \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.13)$$

gegeben. Mit Sicherheit können dann die Punkte der folgenden Form erreicht werden:

$$\mathbf{x} = \Phi^{f_{\alpha_1}}(t_1, \Phi^{f_{\alpha_2}}(t_2, \Phi^{f_{\alpha_3}}(t_3, \dots, \Phi^{f_{\alpha_m}}(t_m, \mathbf{x}_0) \dots))) \quad , \quad (3.14)$$

indem einfach je alle Eingänge bis auf einen zu Null gesetzt werden. Im speziellen Fall mit zwei gegebenen Vektorfeldern \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 können also

$$\mathbf{x} = \Phi^{-f_1}(t_1, \Phi^{-f_2}(t_2, \Phi^{f_1}(t_1, \Phi^{f_2}(t_2, \mathbf{x}_0)))) = \mathbf{x}_0 + \frac{t^2}{2} [\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1] \mathbf{x}_0 + O(t^3) \quad (3.15)$$

erreicht werden. Das heißt also, daß der Zustand in Richtung $[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]$ bewegt werden kann, obwohl diese Richtung nicht im linearen Feld der $\{\mathbf{f}_i\}$ enthalten sein muß. Aus dieser Tatsache ergibt sich die nun folgende Definition:

Definition 3.25 (Brockett 1976)

Wenn $\{\mathbf{f}_i\}$ eine Sammlung von C^∞ oder analytischen Vektorfeldern auf einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist, so sagt man, daß $\{\mathbf{f}_i\}$ eine Lie–Algebra von Vektorfeldern darstellt, unter der Voraussetzung, daß

1. $\{\mathbf{f}_i\}$ einen reellen Vektorraum hinsichtlich der gewöhnlichen Addition und Skalarmultiplikation darstellt und
2. wenn \mathbf{f}_j und \mathbf{f}_k zu $\{\mathbf{f}_i\}$ gehören, auch die Lie–Klammer zu $\{\mathbf{f}_i\}$ gehört.

Die Lie–Algebra heißt dann endlich dimensional, wenn der reelle Vektorraum $\{\mathbf{f}_i\}$ endlich dimensional ist. \square

Der Fluß $\Phi^{\mathbf{f}}(t, \mathbf{x}_0)$ ist also in der Menge der von \mathbf{x}_0 aus erreichbaren Punkte enthalten, wenn er als kommutierende (engl.: bracketed) Kombination der \mathbf{f}_i dargestellt werden kann. Bezeichne nun $\{\mathbf{f}_i\}_{LA}$ die Lie–Algebra der Vektorfelder, die durch $\{\mathbf{f}_i\}$ erzeugt wird; d.h. es können alle Linearkombinationen der $\{\mathbf{f}_i\}$, alle Lie–Klammern und wieder alle Linearkombinationen, alle Lie–Klammern, u.s.w. benutzt werden, um an die kleinste Lie–Algebra der Vektorfelder zu gelangen, die $\{\mathbf{f}_i\}$ enthält und bezeichne diese mit $\{\mathbf{f}_i\}_{LA}$. Dieser Begriff soll nun für den Fall erweitert werden, wenn die Vektorfelder in $\{\mathbf{f}_i\}_{LA}$ komplett (complete) sind; d.h. $\Phi^{\mathbf{f}}(t, \mathbf{x})$ ist für alle $-\infty < t < \infty$ definiert. Für diesen Fall existiert eine Gruppe von Abbildungen auf sich selbst, die eng mit der Lie–Algebra $\{\mathbf{f}_i\}_{LA}$ verknüpft ist:

Definition 3.26 (Brockett 1976)

Die Menge aller eindeutigen C^∞ und C^∞ Abbildungen einer C^∞ –Mannigfaltigkeit auf sich selbst werden als Gruppe der Diffeomorphismen auf \mathcal{M} und mit $\text{diff}(\mathcal{M})$ bezeichnet, wenn sie die Eigenschaft besitzen, daß die inverse Abbildung ebenfalls C^∞ (glatt) ist. Diese Menge rechtfertigt den Begriff der Gruppe, da sie abgeschlossen unter der Inversenbildung und Komposition ist. \square

Ist nun ein Vektorfeld \mathbf{f} gegeben, so wird für jedes t durch $\Phi^{\mathbf{f}}(t)$ eine Abbildung von \mathcal{M} auf sich selbst definiert, eben die durch den Fluß auf \mathcal{M} erzeugte Abbildung, die durch die Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ definiert wird. Es wird nun die kleinste Untergruppe von $\text{diff}(\mathcal{M})$, die $\Phi^{\mathbf{f}}(t)$ für alle \mathbf{f} in $\{\mathbf{f}_i\}$ enthält, mit $\{\Phi^{\mathbf{f}_i}\}_G$ bezeichnet. Es ist offensichtlich, daß ein Punkt $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ der Form $\mathbf{x} = \{\Phi^{\mathbf{f}_i}\}_G(\mathbf{x}_0)$ von \mathbf{x}_0 aus erreicht werden kann (durch Lösungskurven der Gl. (3.8) und stückweise konstanten Eingängen). Worin liegt nun der Unterschied zwischen einer Menge $\{\Phi^{\mathbf{f}_i}\}_G(\mathbf{x}_0)$ und der Menge $\{\Phi^{\mathbf{f}_i}\}_{LA}(\mathbf{x}_0)$? Die erste Menge stellt in jedem Fall eine von \mathbf{x}_0 aus erreichbare Menge dar, während die zweite etwas größeres zu sein scheint. Nach dem Theorem von Chow sind diese Mengen jedoch unter gewissen schwachen Annahmen gleich (Brockett 1976):

Satz 3.5 (Version des Theorems von Chow)

Sei $\{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_m(\mathbf{x})\}$ eine Sammlung von Vektorfeldern, so daß die Sammlung $\{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_m(\mathbf{x})\}_{LA}$

1. analytisch auf einer analytischen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist. Ist dann ein beliebiger Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$ gegeben, so existiert eine maximale Teilmannigfaltigkeit $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, die \mathbf{x}_0 enthält in der Art, daß gilt: $\{\Phi^{\mathbf{f}_i}\}_G(\mathbf{x}_0) = \{\Phi^{\mathbf{f}_i}\}_{LA}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{N}$.

2. C^∞ auf einer C^∞ Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist, mit $\text{span}(\{\mathbf{f}_i(\mathbf{x})\}_{LA})$ konstant über \mathcal{M} . Ist dann ein beliebiger Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$ gegeben, so existiert eine maximale Teilmannigfaltigkeit $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, die \mathbf{x}_0 enthält in der Art, daß gilt: $\{\Phi^{\mathbf{f}_i}\}_G(\mathbf{x}_0) = \{\Phi^{\mathbf{f}_i}\}_{LA}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{N}$.

□

Mit diesen Aussagen lassen sich dann Kriterien für ein System Gl. (3.8) bilden. In der Technik sind jedoch häufiger Systeme relevant, die einen sogenannten Driftterm enthalten:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{u}(t)\mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad . \quad (3.16)$$

Für die Untersuchung eines solchen Systems liegt eine Schwierigkeit darin, daß dafür im Theorem von Chow nicht zwischen positiven und negativen Zeiten unterschieden wird. Das bedeutet, daß eine Teilmannigfaltigkeit, deren Existenz durch Satz 3.5 gesichert ist, Punkte enthalten kann, die *nur* dadurch erreicht werden können, indem man rückwärts entlang einem Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ läuft. Das bedeutet für eine technische Anwendung, daß die Menge der von \mathbf{x}_0 aus erreichbaren Punkte immer in der durch Chows Theorem (Satz 3.5) definierten Mannigfaltigkeit enthalten sind, im allgemeinen aber nur eine echte Teilmenge dieser Mannigfaltigkeit darstellen:

Satz 3.6 (Brockett 1976)

Seien \mathbf{f} und \mathbf{g} Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} und $\{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}$ erfüllen jeweils die Bedingungen des Chow–Theorems. Dann beinhaltet die Menge der erreichbaren Punkte des Systems nach Gl. (3.16) eine offene Menge Teilmenge der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N} = \{\{\Phi^{\mathbf{f}, \mathbf{g}}\}_{LA}\}_G(\mathbf{x}_0)$. □

Unter gewissen Umständen ist es möglich den Einfluß des Driftterms auf die Menge der von \mathbf{x}_0 aus erreichbaren Punkte $\mathcal{R}(t)$ „herauszumultiplizieren“. Dafür wird L_0 , eine Lie–Algebra von Vektorfeldern, die durch \mathbf{f} und \mathbf{g} bestimmt wird benötigt. Diese muß jedoch nicht notwendigerweise mit $\{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}_{LA}$ übereinstimmen. Ein besonders einfacher und anschaulicher Fall wird durch den folgenden Satz (Brockett 1976) wiedergegeben:

Satz 3.7

Sei $L = \{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}_{LA}$ und L_0 die kleinste Unter algebra von L , die \mathbf{g} enthält und abgeschlossen unter Lie–Kommutieren mit \mathbf{f} (Lie bracketing with \mathbf{f}) ist. Weiterhin soll für ein \mathbf{h} aus L_0 gelten: $[\mathbf{h}, \mathbf{g}] = \alpha \mathbf{h}$ mit konstantem α . Dann gilt auch:

$$\mathcal{R}(t) = \{\Phi^{L_0}\}_G \Phi^{\mathbf{f}}(t, \mathbf{x}_0) \quad . \quad (3.17)$$

□

Beispiel 3.1 Betrachtet werde das lineare, zeitinvariante System:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad ; \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad . \quad (\text{B 3.1-1})$$

Daraus ergeben sich:

$$\begin{aligned} L &= \{\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{x}\} \\ L_0 &= \{\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\} \end{aligned} \quad (\text{B 3.1-2})$$

und

$$[L_0, \mathbf{B}] = \{0\} \quad . \quad (\text{B 3.1-3})$$

Somit ist die zur Zeit t von \mathbf{x}_0 aus erreichbare Menge

$$\mathcal{R}(t) = \Phi^{\{\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\}}(e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0) \quad . \quad (\text{B 3.1-4})$$

Da $(\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B})$ konstante Vektorfelder darstellen, ist diese Darstellung äquivalent:

$$\mathcal{R}(t) = \left\{ \mathbf{x} : e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\eta} \quad , \boldsymbol{\eta} \in \text{span}(\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) \right\} \quad . \quad (\text{B 3.1-5})$$

3.3 Kriterien für nichtlineare Systeme

Nach der knappen Einleitung in die Problematik der Kriterienentwicklung für eine Steuerbarkeitsanalyse dynamischer Systeme (Abschnitt 3.2) werden in diesem Abschnitt Steuerbarkeits-/Erreichbarkeitskriterien für die Systemklasse der analytischen in der Steuerung linearen Systeme Σ_{ALS} zusammengestellt. Diese können als Spezialfall der analytischen Systeme Σ_{AS} verstanden werden und besitzen die nachfolgende Form (Schwarz 1991):

$$\sum_{ALS} \left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i(\mathbf{x}(t))u_i(t) \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{c}(\mathbf{x}) \quad . \end{array} \right\} \quad (3.18)$$

Es ergibt sich nach Schwarz (1991) das folgende Kriterium zur Bestimmung der lokalen schwachen Erreichbarkeit:

Kriterium 3.1

Für das System Σ_{ALS} (3.18) und eine Umgebung \mathcal{M}_0 um den betrachteten Anfangszustand \mathbf{x}_0 sei die Distribution⁴ $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{x}) = \text{span}\{\mathbf{b}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{b}_m(\mathbf{x})\}$ über \mathcal{M}_0 definiert und es seien $\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{b}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{b}_m(\mathbf{x})$ die Vektorfelder, unter denen $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{x})$ invariant sein soll. Ferner sei $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ die minimale Distribution, die $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{x})$ enthält und invariant unter den Vektorfeldern $\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{b}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{b}_m(\mathbf{x})$ ist:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{b}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{b}_m(\mathbf{x}) \mid \text{span}\{\mathbf{b}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{b}_m(\mathbf{x})\} \rangle \quad , \quad (3.19)$$

dann gilt:

- i) Das System (3.18) ist in \mathcal{M}_0 vollständig schwach erreichbar, wenn

$$\dim \mathbf{P}(\mathbf{x}) = n \quad . \quad (3.20)$$

- ii) $\dim \mathbf{P}(\mathbf{x}) = r \leq n$ gibt die Dimension der lokal schwach erreichbaren Teilmannigfaltigkeit von \mathcal{M}_0 an.

□

Daraus läßt sich das folgende Rangkriterium bilden, welches ein nichtlineares Analogon zum linearen Rangkriterium nach Kalman darstellt (Schwarz 1991):

⁴siehe Anhang B.12

Kriterium 3.2

Es sei

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{x}) &= [\mathbf{P}_0(\mathbf{x}) : \mathbf{P}_1(\mathbf{x}) : \dots] \\ \mathbf{P}_0(\mathbf{x}) &= [\mathbf{b}_1(\mathbf{x}) : \dots : \mathbf{b}_m(\mathbf{x})] \\ \mathbf{P}_k(\mathbf{x}) &= [\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{P}_{k-1}(\mathbf{x})] \quad ; \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\}, \quad (3.21)$$

dann gibt

$$\text{rang } \mathbf{P}(\mathbf{x}) = r \leq n \quad (3.22)$$

die Dimension der lokal schwach erreichbaren Mannigfaltigkeit in \mathcal{M}_0 an. \square

Der so beschriebene Bildungsalgorithmus kann nach Isidori (1989) abgebrochen werden, wenn ein k^* existiert für das gilt: $\mathbf{P}_{k^*}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_{k^*+1}(\mathbf{x})$. Das ist z.B. der Fall, wenn alle Lie-Kommutatoren bei der Stufe $k^* + 1$ Null ergeben. Der Algorithmus kann aber auch abgebrochen werden, sobald der volle Rang (n) erreicht ist, das System also in \mathcal{M}_0 vollständig schwach erreichbar ist.

Die Dimension d der Distribution \mathbf{P} bzw. der Rang r der diese Distribution erzeugenden Matrix $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ entspricht der Bezeichnung n_S aus dem linearen Bereich im Abschnitt 2.3. Um aus einem gegebenen System die Systemteile ablesen zu können, die für den Rangabfall, also den nicht schwach steuerbaren Systemteil verantwortlich sind, kann eine (nichtlineare) Koordinatentransformation benutzt werden, um mit deren Hilfe das System in die eben erwähnten Teilsysteme aufzuteilen. Eine derartige Vorgehensweise wird im Abschnitt 3.5 erläutert.

Analog zu diesem Rang-Kriterium der Σ_{ALS} für die schwache Erreichbarkeit existieren auch noch für andere nichtlineare Systeme und Erreichbarkeitsdefinitionen unterschiedliche Entscheidungskriterien. Als nächstes soll nun noch der Begriff der Zugänglichkeit mit einem Entscheidungskriterium versehen werden.

Nach Nijmeijer und van der Schaft (1991) sei nun:

Definition 3.27

Betrachtet werde ein System Σ_{ALS} der Form (3.1). Die *Zugänglichkeitsalgebra* \mathcal{C} ist die kleinste Unter algebra von $V^\infty(\mathcal{M})$ (die Lie-Algebra von Vektorfeldern auf \mathcal{M}), die $\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$ enthält. \square

Definition 3.28

Die *Zugänglichkeitsdistribution* C ist die durch die Zugänglichkeitsalgebra \mathcal{C} generierte Distribution:

$$C(\mathbf{x}) = \text{span } \{\mathbf{X}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{X} \text{ Vektorfeld in } \mathcal{C}\}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M}. \quad (3.23)$$

\square

Außerdem gilt nach Nijmeijer und van der Schaft (1991):

Satz 3.8

Gilt für ein System Σ_{ALS} nach Gl.(3.1)

$$\dim \mathcal{C}(\mathbf{x}_0) = n \quad , \quad (3.24)$$

so besitzt für jede beliebige Umgebung \mathcal{M}_0 von \mathbf{x}_0 und $T > 0$ die Menge der erreichbaren Punkte $\mathcal{R}(\mathbf{x}_0, T, \mathcal{M}_0)$ ein nichtleeres Inneres. \square

Daraus ergibt sich (Nijmeijer und van der Schaft 1991):

Kriterium 3.3

Gilt $\dim C(\mathbf{x}) = n$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$, so ist das System lokal zugänglich. \square

Dieses Kriterium 3.3 wird in der Literatur auch häufig *Zugänglichkeits–Rangbedingung* genannt.

Weiterhin wird unterschieden (Nijmeijer und van der Schaft 1991):

Definition 3.29

Sei \mathcal{C} die Zugänglichkeitsalgebra von Gl.(3.1). Es sei nun \mathcal{C}_0 die kleinste Unteralgebra, die $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$ enthält und für die gilt: $[\mathbf{f}, \mathbf{X}] \in \mathcal{C}_0 \forall \mathbf{X} \in \mathcal{C}$.

Desweiteren wird die dazu korrespondierende involutive Distribution definiert:

$$\mathcal{C}_0(\mathbf{x}) = \text{span} \{ \mathbf{X}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{X} \text{ ist Vektorfeld in } \mathcal{C}_0 \} \quad . \quad (3.25)$$

Dann heißt \mathcal{C}_0 *strenge Zugänglichkeitsalgebra* und \mathcal{C}_0 *strenge Zugänglichkeitsdistribution*. \square

Zur Verdeutlichung seien diese Begriffe für lineare Systeme erläutert:

Satz 3.9 (Nijmeijer und van der Schaft 1991)

Für lineare Systeme der Form Gl. (2.1) gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &= \text{span} \{ \mathbf{b}_i, \mathbf{A}\mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_i, \quad i = 1, \dots, m \} \\ \mathcal{C}_0(\mathbf{x}) &= \text{bild} (\mathbf{B} : \mathbf{A}\mathbf{B} : \dots : \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

\square

Kriterium 3.4

Betrachtet werde das System Gl. (3.1). Gilt

$$\dim \mathcal{C}_0(\mathbf{x}_0) = n \quad , \quad (3.27)$$

dann ist das System lokal streng zugänglich von \mathbf{x}_0 . \square

Dieses Kriterium nennen Nijmeijer und van der Schaft (1991) auch *strenge Zugänglichkeits–Rangbedingung*.

Bilineare Eingrößensysteme

Für bilineare Eingrößensysteme läßt sich die n -Erreichbarkeit durch eine einfache Erweiterung des Kalman-Kriteriums bestimmen. Dabei werden bilineare Systeme der Form (Schwarz 1991):

$$\Sigma_{BLS} \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{N}\mathbf{x}(t)u(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.28)$$

betrachtet. Das Kriterium zur Überprüfung der n -Erreichbarkeit bilinearer Eingrößensysteme lautet nun entsprechend Rough (1981) bzw. Schwarz (1991):

Kriterium 3.5

Ein n -dimensionales bilineares System $\{\mathbf{A}, \mathbf{N}, \mathbf{b}, \mathbb{R}^n\}$ ist genau dann n -erreichbar, wenn gilt:

$$\text{rang } \mathbf{P}(\mathbf{A}, \mathbf{N}, \mathbf{b}) = n \quad , \quad (3.29)$$

wobei die $(n \times (2^n - 1))$ -dimensionale Erreichbarkeitsmatrix $\mathbf{P}(\mathbf{A}, \mathbf{N}, \mathbf{b})$ aus folgender Rekursionsformel berechnet wird:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= \mathbf{b} \quad , \\ \mathbf{P}_i &= (\mathbf{A}\mathbf{P}_{i-1}, \mathbf{N}\mathbf{P}_{i-1}) \quad \forall \quad i = 2, 3, \dots, n \quad , \text{ und} \\ \mathbf{P}(\mathbf{A}, \mathbf{N}, \mathbf{b}) &= (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n) . \end{aligned} \quad (3.30)$$

□

3.4 Algebraische Kriterien durch Linearisierung

Algebraische Steuerbarkeitskriterien für lineare Systeme haben sich in der Regelungstechnik als äußerst nützlich erwiesen. Mit ihrer Hilfe können per Rechnerprogramm aus dem linearen Modell Steuerbarkeitsuntersuchungen vorgenommen werden. Wie bereits im Abschnitt 2 gezeigt wurde, ist ein lineares zeitinvariantes System der Form Gl. (2.11) genau dann und nur dann steuerbar, wenn gilt (Storey 1973):

$$\text{rang } (\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) = n \quad . \quad (3.31)$$

Für ein zeitvariantes System der Form Gl. (2.1) ergibt sich das Kriterium, daß dieses System steuerbar ist, wenn die Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{W}(t_0, t)$ nach Gl. (2.9) den maximalen Rang für ein vorgegebenes t_0 und ein beliebiges t behält. Um nun ein nichtlineares System algebraisch auf seine lokale Steuerbarkeit hin zu untersuchen, muß das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (3.32)$$

um einen beliebigen Arbeitspunkt linearisiert werden. Soll z.B. die Steuerbarkeit am Ursprung mit $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und begrenzten Stellgrößen $\|\mathbf{u}(t)\| \leq \epsilon$ für positive ϵ untersucht werden, so werden zunächst die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} gebildet:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \right) \\ \mathbf{B} &= \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{u}_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \right) \quad . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Wenn das Rang-Kriterium nach Gl. (3.31) erfüllt ist, dann existiert ein (nach $\mathbf{0}$) steuerbarer Bereich um den Ursprung, der eine Umgebung um den Ursprung enthält. Die tatsächliche Größe dieses Bereichs bleibt jedoch unbekannt (Storey 1973). Zusammengefaßt heißt das: Aus der Steuerbarkeit der Linearisierung des nichtlinearen Systems folgt, daß eine offene Umgebung um den Ursprung existiert, in der jeder Punkt steuerbar zum Ursprung des ursprünglichen, nichtlinearen Systems ist (Storey 1973).

3.5 Systemdekomposition und Erreichbarkeit

Lokale Systemaufteilung

Isidori (1989) zeigt, daß durch eine geschickte Koordinatentransformation ein nichtlineares System in zwei Teile aufgespalten werden kann (auch Dekomposition genannt). Das erste Teilsystem kann dann ein erreichbares sein, während das zweite ein nicht erreichbares ist. Dabei geht Isidori üblicherweise nach folgendem Algorithmus vor:

1. Bilden einer involutiven, minimalen Distribution Δ , mit Hilfe des Algorithmus nach Gl.(3.38). Dabei werden Kommutatoren von Vektorfeldern ausgerechnet, was partielles Differenzieren erfordert.
2. Finden einer Koordinatentransformation. Das erfordert das Lösen (Integration) partieller Differentialgleichungen.
3. Ausführen der Koordinatentransformation. Dafür muß wieder differenziert werden.

Für ein System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x})u_i \\ y_i &= h_i(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.34)$$

können nun die folgenden Aufteilungen gefunden werden:

1. Sei Δ eine nichtsinguläre Distribution der Dimension d und invariant unter den Vektorfeldern $\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$. Desweiteren sei $\text{span} \{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}$ in der Distribution Δ enthalten. Dann ist es für jeden Punkt \mathbf{x}_0 möglich eine Umgebung \mathcal{M}_0 von \mathbf{x}_0 und eine lokale Koordinatentransformation $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x})$ derart zu finden, daß das System nach Gl. (3.34) in den neuen Koordinaten durch ein Gleichungssystem der folgenden Form wiedergegeben werden kann:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= \mathbf{f}_1(\zeta_1, \zeta_2) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_{1i}(\zeta_1, \zeta_2)u_i && \text{prinzipiell steuerbarer/erreichbarer Systemanteil} \\ \dot{\zeta}_2 &= \mathbf{f}_2(\zeta_2) && \text{prinzipiell nicht steuerbarer/erreichbarer Systemanteil} \end{aligned} \quad (3.35)$$

mit $\zeta_1 = (z_1, \dots, z_d)$ und $\zeta_2 = (z_{d+1}, \dots, z_n)$.

Bei dieser Darstellung ist sehr gut zu erkennen, daß der gesamte Zustandsraum durch die Koordinaten ζ_1 und ζ_2 beschrieben wird, der steuerbare Systemanteil jedoch lediglich durch die Koordinaten ζ_1 erfaßt wird. Somit sind die steuerbaren Zustände in den Koordinaten von ζ_2 nicht mehr zu unterscheiden. Die durch diesen Sachverhalt beschriebenen Punkte im Zustandsraum bilden sogenannte *Scheiben*:

$$S_{\mathbf{x}} = \{ \mathbf{x}' \in \mathcal{M}_0 : \zeta_2(\mathbf{x}') = \zeta_2(\mathbf{x}) \} \quad . \quad (3.36)$$

Anders ausgedrückt heißt das, daß diejenigen (verschiedenen) Punkte aus der Umgebung \mathcal{M}_0 zu einer Scheibe gehören, die dieselbe Koordinatendarstellung in ζ_2 -Koordinaten besitzen. Somit wird der Zustandsraum also in verschiedene Scheiben *partitioniert*.

Sehr anschaulich wird dadurch die Darstellung der Menge der erreichbaren Punkte $\mathcal{R}(\mathbf{x}_0)$ (mit der Dimension r) eines Systems (von einem Startwert \mathbf{x}_0 aus). Diese Punkte sind nun ebenfalls nicht in ζ_2 -Koordinaten zu unterscheiden. Somit liegen diese Punkte auf einer Scheibe $S_{\mathbf{x}_0}$ der Umgebung \mathcal{M}_0 und $\mathcal{R}(\mathbf{x}_0)$ stellt eine Teilmenge der Scheibe $S_{\mathbf{x}_0}$ dar. Bild 3.11 stellt diesen Vorgang dar.

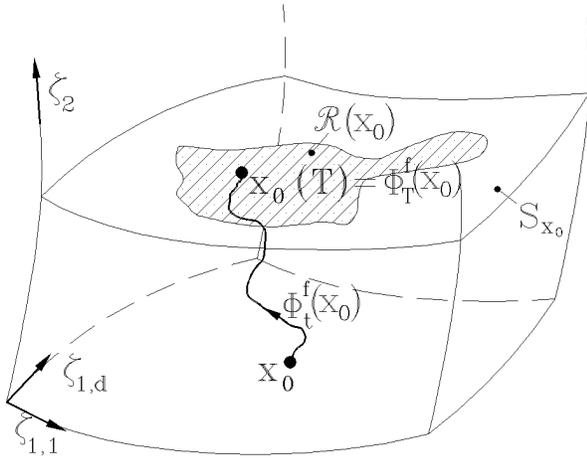


Bild 3.11: Menge der erreichbaren Punkte in \mathcal{M}_0 in den Koordinaten ζ_1 und ζ_2 .

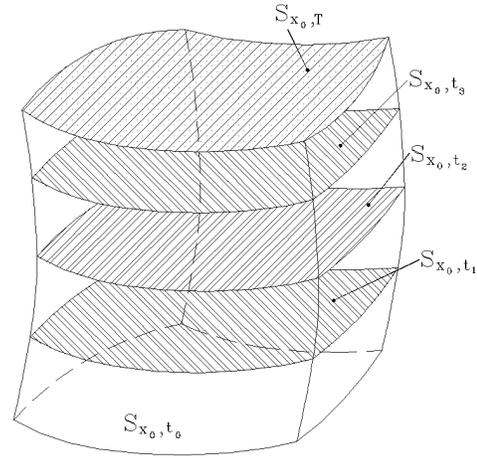


Bild 3.12: Partition der Umgebung \mathcal{M}_0 in Scheiben S .

- Sei Δ eine nichtsinguläre Distribution der Dimension d und invariant unter den Vektorfeldern $\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$. Desweiteren sei die Kodistribution $\text{span} \{ dh_1, \dots, dh_p \}$ in der Kodistribution Δ^\perp (= Annulator zu Δ , Anhang B.13) enthalten. Dann ist es für jeden Punkt \mathbf{x}_0 möglich eine Umgebung \mathcal{M}_0 von \mathbf{x}_0 und eine lokale Koordinatentransformation $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x})$ derart zu finden, daß das System Gl. (3.34) in den neuen Koordinaten durch ein Gleichungssystem der folgenden Form wiedergegeben werden kann:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= \mathbf{f}_1(\zeta_1, \zeta_2) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_{1i}(\zeta_1, \zeta_2) u_i && \text{prinzipiell nicht beobachtbarer Systemanteil} \\ \dot{\zeta}_2 &= \mathbf{f}_2(\zeta_2) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_{2i}(\zeta_2) u_i && \text{prinzipiell beobachtbarer Systemanteil} \\ y_i &= h_i(\zeta_2) \quad , && \end{aligned} \quad (3.37)$$

mit $\zeta_1 = (z_1, \dots, z_d)$ und $\zeta_2 = (z_{d+1}, \dots, z_n)$.

Es gilt also allgemein: Existiert eine nichtsinguläre Distribution Δ der Dimension d mit den folgenden Eigenschaften:

- i) Δ ist involutiv,
- ii) Δ enthält die Distribution $\text{span} \{g_1, \dots, g_m\}$ und
- iii) Δ ist invariant unter den Vektorfeldern f, g_1, \dots, g_m ,

dann ist es, für jeden beliebigen Punkt x_0 , möglich, eine auf einer Umgebung \mathcal{M}_0 um x_0 definierte Koordinatentransformation und eine Partition von \mathcal{M}_0 in Scheiben der Dimension d zu finden, so daß die zu einer Zeit T erreichbaren Punkte (ausgehend von einem Initialzustand x_0 und auf Trajektorien verlaufend, die in \mathcal{M}_0 für alle $t \in [0, T]$ verbleiben) innerhalb einer solchen Scheibe von \mathcal{M}_0 liegen.

Im Rahmen dieser Arbeit ist jedoch nur die erste dieser beiden Systemaufteilungen von Interesse. Für eine technische Anwendung ist es jedoch nicht nur interessant zu wissen, daß man ein System in ein lokal erreichbares und in ein nicht erreichbares Teilsystem aufspalten kann, sondern man möchte auch gerne erfahren, welche Größe die Menge der zur Zeit T erreichbaren Punkte einer Scheibe besitzt. Dies geschieht, indem zunächst ein erreichbarer Unterraum bzw. Teilmannigfaltigkeit erzeugt wird, der invariant unter Vektorfeldern f, g_1, \dots, g_m und involutiv ist. Die so berechnete Distribution Δ stellt das nichtlineare Analogon zur Steuerbarkeitsmatrix Q_S aus der linearen Kontrolltheorie dar:

Gegeben sei eine kleinste, unter den Vektorfeldern τ_1, \dots, τ_q invariante Distribution $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$. Um zu gewährleisten, daß diese minimale Distribution ebenfalls nichtsingulär, wie die Distribution Δ selber ist, gibt Isidori (1989) einen Algorithmus zur Berechnung einer nichtabfallenden Sequenz von Distributionen an. Der Algorithmus lautet:

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \Delta \\ \Delta_k &= \Delta_{k-1} + \sum_{i=1}^q [\tau_i, \Delta_{k-1}] \quad . \end{aligned} \quad (3.38)$$

Die so erzeugten Distributionen Δ_k genügen also für alle ganzzahligen, nichtnegativen k :

$$\Delta_k \subset \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle \quad . \quad (3.39)$$

Existiert dann ein k^* , für das gilt $\Delta_{k^*} = \Delta_{k^*+1}$, so gilt auch:

$$\Delta_{k^*} = \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle \quad (3.40)$$

und der Bildungsalgorithmus kann abgebrochen werden. Dieser Fall tritt z.B. ein, wenn alle neu gebildeten Lie-Kommutatoren verschwinden (Null werden).

Satz 3.10 (Isidori 1989)

Die Distribution Δ werde von einigen der Vektorfelder τ_1, \dots, τ_q aufgespannt und $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ sei nichtsingulär. Dann gilt auch : $\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$ ist involutiv. \square

Aufbauend auf diesen Begriffen sollen nun zwei Distributionen besonderer Art eine eigene Bezeichnung erhalten:

$$\mathbf{P} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m \mid \text{span} \{ \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m \} \rangle \quad (3.41)$$

und

$$\mathbf{R} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m \mid \text{span} \{ \mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m \} \rangle \quad , \quad (3.42)$$

mit $\dim \mathbf{P} = p$ und $\dim \mathbf{R} = r$.

Satz 3.11 (Isidori 1989)

Sind \mathbf{P} und $\mathbf{P} + \text{span} \{ \mathbf{f} \}$ nichtsingulär, dann gilt:

$$\dim \mathbf{R} - \dim \mathbf{P} \leq 1 \quad . \quad (3.43)$$

□

Mit diesen Begriffen läßt sich nun zusammenfassend der folgende Satz formulieren:

Satz 3.12 (Isidori 1989)

Seien die Distributionen \mathbf{P} (also die kleinste unter $\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$ invariante Distribution, die $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$ enthält) mit der Dimension p und $\mathbf{P} + \text{span} \{ \mathbf{f} \}$ nichtsingulär. Dann existiert für jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ eine Umgebung \mathcal{M}_0 von \mathbf{x}_0 und eine auf \mathcal{M}_0 definierte Koordinatentransformation $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x})$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Menge $\mathcal{R}(\mathbf{x}_0, T)$ der zur Zeit $t = T$ erreichbaren Zustände von einem Startpunkt \mathbf{x}_0 zur Zeit $t = 0$ aus, die auf vollständig in \mathcal{M} enthaltenen Trajektorien liegen, sind unter der Bedingung von stückweise konstanten Eingangsfunktionen eine Teilmenge der Scheibe:

$$S_{\mathbf{x}_0, T} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{M}_0 : \begin{aligned} &\phi_{p+1}(\mathbf{x}) = \phi_{p+1}(\Phi_T^f(\mathbf{x}_0)), \dots, \phi_n(\mathbf{x}) = \phi_n(\Phi_T^f(\mathbf{x}_0)) \end{aligned} \right\} \quad , \quad (3.44)$$

wobei $\Phi_T^f(\mathbf{x}_0)$ die zur Zeit $t = T$ unter $u(t) = 0$ erreichten Zustände für alle $t \in [0, T]$ darstellt.

2. Die Menge $\mathcal{R}(\mathbf{x}_0, T)$ enthält eine offenen Teilmenge von $S_{\mathbf{x}_0, T}$.

□

Das bedeutet, daß die Punkte der Scheibe $S_{\mathbf{x}_0, T}$ der betrachteten Umgebung \mathcal{M}_0 um \mathbf{x}_0 durch die $p+1$ -te bis n -te Koordinatenfunktion nicht unterscheidbar sind. Die Menge der erreichbaren Punkte in \mathcal{M}_0 muß also Teilmenge dieser Scheibe sein.

Globale Systemdekomposition durch Koordinatentransformation

Betrachtet werde ein System, das durch Gleichungen der Form

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i u_i \quad (3.45)$$

beschrieben werden kann. Dabei werde der Zustandsraum des durch Gl.(3.45) beschriebenen Systems mit \mathcal{N} bezeichnet. Wichtig für die Steuerbarkeit eines Systems ist die sog. *Eigenschaft der maximalen Integralmannigfaltigkeit*. Die für diese Eigenschaft notwendige und hinreichende Bedingung ist in dem sog. *Sussmann–Theorem* aufgeführt (für die Definition eines Differentials sei auf Anhang B.9 verwiesen):

Definition 3.30 (Isidori 1989)

Eine Distribution Δ besitzt genau dann die Eigenschaft der maximalen Integralmannigfaltigkeit, wenn für jedes Vektorfeld $\tau \in \Delta$ und für jedes Paar $(t, \mathbf{p}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{N}$, so daß der Fluß $\Phi_t^\tau(\mathbf{p})$ von τ definiert ist, das Differential $(\Phi_t^\tau)_*$ bei \mathbf{p} den Teilraum $\Delta(\mathbf{p})$ in den Teilraum $\Delta(\Phi_t^\tau(\mathbf{p}))$ abbildet. \square

Die kleinste Teilalgebra von $V(\mathcal{N})$, die die Vektorfelder $\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$ enthält wird mit \mathcal{C} bezeichnet und heißt *Kontroll–Lie–Algebra*. Mit \mathcal{C} wird die Distribution $\Delta_{\mathcal{C}}$:

$$\Delta_{\mathcal{C}} = \{\tau : \tau \in \mathcal{C}\} \quad . \quad (3.46)$$

verbunden. Für die Distribution $\Delta_{\mathcal{C}}$ gilt die Beziehung zu den in Abschnitt 3.5 eingeführten Distributionen \mathbf{P} und \mathbf{R} :

$$\Delta_{\mathcal{C}} \subset \mathbf{P} + \text{span} \{\mathbf{f}\} \subset \mathbf{R} \quad . \quad (3.47)$$

Definition 3.31

Das System nach Gl. (3.45) erfüllt die *Rangbedingung der Erreichbarkeit* bei \mathbf{p}_0 , wenn gilt:

$$\dim \Delta_{\mathcal{C}}(\mathbf{p}_0) = n \quad . \quad (3.48)$$

\square

Kriterium 3.6

Eine hinreichende Bedingung eines Kontrollsystems der Form Gl. (3.45) dafür, daß es schwach steuerbar auf \mathcal{N} ist, lautet

$$\dim \Delta_{\mathcal{C}}(\mathbf{p}) = n \quad , \quad (3.49)$$

für alle $\mathbf{p} \in \mathcal{N}$. Falls die Distribution $\Delta_{\mathcal{C}}$ die Eigenschaft der maximalen Integralmannigfaltigkeit besitzt, ist diese Bedingung auch notwendig. \square

Beispiel einer Systemdekomposition

Beispiel 3.2 Anhand dieses Beispiels soll die Vorgehensweise einer lokalen Systemdekomposition entsprechend Isidori (1989) vorgeführt werden. Im Verlauf des Beispiels wird dabei auf die Schwierigkeiten bei der Realisierung einer solchen Aufteilung eingegangen. Die Hauptschwierigkeiten liegen dabei nicht in den Beurteilungskriterien, ob ein System lokal in ein prinzipiell steuerbares/erreichbares und prinzipiell nicht steuerbares/erreichbares System aufteilbar ist, sondern darin, die tatsächlich benötigte (nichtlineare) Koordinatentransformation zu finden, durch die diese Aufteilung erfolgt.

Betrachtet werde hierzu das nichtlineare System:

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^2 x_2 \\ x_2 - x_1 x_2^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}} u \quad . \quad (\text{B 3.2-1})$$

Diesem System sieht man nicht direkt an, daß es in ein prinzipiell nicht erreichbares und ein prinzipiell erreichbares Teilsystem aufteilbar ist. Also soll zunächst nach Isidori (1989) vorgegangen werden, um dies zu überprüfen. Es wird also entsprechend Punkt 1) der Vorgehensweise aus Abschnitt 3.5 eine involutive, minimale Distribution Δ nach Algorithmus (3.38) gebildet. Dabei ist:

$$\Delta_0 = \text{span } \mathbf{g}. \quad (\text{B 3.2-2})$$

Als nächstes müssen die Invarianten dieser Distribution unter Kommutieren mit \mathbf{f} und \mathbf{g} berechnet werden. Da $[\mathbf{g}, \mathbf{g}] = \mathbf{0}$, wird also die Lie-Klammer $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]$ gebildet:

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{B 3.2-3})$$

Der Algorithmus 3.38 besitzt in diesem Beispiel also folgende Form:

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \mathbf{g} \\ \Delta_1 &= \Delta_0 + [\mathbf{f}, \Delta_0] \\ \Delta_2 &= \Delta_1 \end{aligned} \quad . \quad (\text{B 3.2-4})$$

Somit ist $k^* = 1$ und

$$\mathbf{P} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \mid \text{span } \{\mathbf{g}\} \rangle = \Delta_1 \quad . \quad (\text{B 3.2-5})$$

Die Dimension der Distribution ist $\dim \mathbf{P} = 1$, denn es gilt für beliebige Punkte $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$:

$$\text{rang } \left[\mathbf{g}; [\mathbf{f}, \mathbf{g}] \right] = \text{rang } \left[\begin{array}{c|c} x_1 & 0 \\ -x_2 & 0 \end{array} \right] = 1 \quad . \quad (\text{B 3.2-6})$$

Entsprechend Punkt 2) der Vorgehensweise in Abschnitt 3.5 soll nun eine (nicht-lineare) Koordinatentransformation (vgl. Anhang B.15) gefunden werden, die in der Lage ist, das System in prinzipiell erreichbare/steuerbare und nicht erreichbare/steuerbare Teilsysteme aufzuspalten. Für diese gewünschten Systemaufteilung nach Gl. (3.35) und Bild 3.11 sollen die gesuchten Teilkoordinaten ζ_2 invariant

gegenüber \mathbf{g} sein. Es muß also für die gesuchten Teilkoordinaten ζ_2 (in Operator-schreibweise) gelten:

$$\mathbf{g}\zeta_2 = 0 \quad , \quad (\text{B 3.2-7})$$

oder in Vektorschreibweise:

$$\mathbf{g} \cdot \nabla \zeta_2 = 0 \quad . \quad (\text{B 3.2-8})$$

Für die Bestimmung der gesuchten Koordinatentransformation gilt also:

$$\left[x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (-x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \right] \cdot \zeta_2 = 0 \quad . \quad (\text{B 3.2-9})$$

In diesem Beispiel besteht ζ_2 nur aus einer einzigen Koordinate, so daß für $\zeta_2 = \zeta_2$ die oben aufgeführte partielle Differentialgleichung (B 3.2-9) gelöst werden muß. Hier liegt in der Anwendung der Dekompositionssätze von Isidori (1989) auch die eigentliche Schwierigkeit: Lösen von partiellen, im allgemeinen nichtlinearen Differentialgleichungen. In diesem Fall kann eine Lösung geraten werden:

$$\zeta_2 = \zeta_2 = x_1 x_2 \quad . \quad (\text{B 3.2-10})$$

Die restlichen Teilkoordinaten ($\zeta_1 = \zeta_1$) sind dann beliebig. In diesem Beispiel wird gewählt:

$$\zeta_1 = x_1 \quad . \quad (\text{B 3.2-11})$$

Es ergibt sich damit folgende nichtlineare Koordinatentransformation/Umkehrtransformation:

$$\zeta = \phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{x} = \phi^{-1}(\zeta) = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{B 3.2-12})$$

Für die Anwendung dieser Koordinatentransformation (entsprechend Punkt 3) der Vorgehensweise aus Abschnitt 3.5) werden noch die Jakobi-Matrizen der Koordinatentransformationen benötigt:

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad , \quad \frac{\partial \phi^{-1}(\zeta)}{\partial \zeta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\zeta_2}{\zeta_1^2} & \frac{1}{\zeta_1} \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{B 3.2-13})$$

Die Bestimmung der transformierten Systemmatrizen ergibt sich durch:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}} &= \left[\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{x}=\phi^{-1}(\zeta)} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \zeta_2 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{g}} &= \left[\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{x}=\phi^{-1}(\zeta)} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B 3.2-14})$$

Somit ergibt sich folgendes transformiertes System:

$$\dot{\zeta} = \underbrace{\begin{bmatrix} \zeta_1 \zeta_2 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{f}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{g}}} u \quad . \quad (\text{B 3.2-15})$$

Dabei beschreibt dann die ζ_2 -Koordinate den prinzipiell nicht erreichbaren/steuerbaren Systemanteil.

4 Anwendungsbeispiele

4.1 Steuerbarkeit eines Automobils in der Ebene

Ein anschauliches Beispiel für eine Steuerbarkeitsanalyse findet sich z.B. in (Sontag 1991). Dabei handelt es sich um das in der Differentialgeometrie weit verbreitete Beispiel des Steuerns eines Automobils in einer Ebene. Anschaulich würde die Aufgabenstellung dieses Beispiels in etwa so lauten: Kann man ein Automobil auf einem ebenen Parkplatz an einer beliebigen Parklücke mit beliebiger Orientierung einparken? Die Antwort auf eine derartige Fragestellung gibt die Steuerbarkeits- bzw. die Erreichbarkeitsanalyse des Systems „Automobil“ in der Ebene. Eine derartige Fragestellung erscheint für einen Autofahrer aufgrund seiner persönlichen Erfahrungen trivial. Aus systemtheoretischer Sicht ist dieses Problem durchaus nicht trivial. Denn: ein lineares System „Automobil“ ist nach Aussage von Nijmeijer und van der Schaft (1991) nicht steuerbar, während das nichtlineare System steuerbar ist. Anhand dieses Ergebnisses der Systemuntersuchung zeigt sich deutlich, wie wichtig eine exaktere Systembeschreibung als eine rein lineare ist. Wird jedoch ein nichtlineares Modell für das System Automobil aufgestellt und dieses erst für beliebige Arbeitspunkte linearisiert, so läßt sich zeigen, daß das linearisierte Ersatzmodell ebenfalls steuerbar ist, unter der Voraussetzung, daß sich das Auto bewegt. Weiterhin kann an diesem Beispiel gut gesehen werden, warum man in der Kontrollmathematik im allgemeinen Fall mit für den Ingenieur so abschreckenden Konstrukten wie mit Mannigfaltigkeiten rechnet, statt mit den bekannten Vektorräumen in euklidischen Räumen. So ist es für den Autofahrer eine Selbstverständlichkeit, bei der Orientierung des Wagens in der Ebene alle Winkel $\Theta \pm 2\pi n$ als identisch anzusehen: nach einer vollen Umdrehung der Orientierung ist wieder die Ursprüngliche erreicht. In euklidischen Koordinaten ist dies aber nicht der Fall, so daß eine in sich geschlossene Koordinatenachse für die Orientierung des Autos eingeführt werden muß, die nicht mehr den Bedingungen eines euklidischen Raums genügt.

Beispiel 4.1 Für die betrachtete Aufgabenstellung geht man davon aus, daß ein Automobil auf einer Ebene (\mathbb{R}^2) bewegt werden soll. Als Eingangsgrößen des Systems „Automobil“ stehen zwei Größen zur Verfügung. Die erste, u_1 , stellt den Drehwinkel am Lenkrad dar und die zweite, u_2 , repräsentiert die Antriebsgeschwindigkeit durch den Motor (die Massenträgheit wird in diesem Beispiel also vernachlässigt). Das auf der Ebene bewegte Auto wird dabei durch die folgenden Zustandsgrößen beschrieben (Bild 4.1):

- x x -Koordinate des Mittelpunkts der Vorderachse in der Ebene,
- y y -Koordinate des Mittelpunkts der Vorderachse in der Ebene,
- ϕ Orientierung der Vorderachse und
- Θ Winkel zwischen der Orientierung des Automobils und der Vorderradstellung.

Dabei ist davon auszugehen, daß sich der Winkel Θ lediglich im Intervall $[-\Theta_0, \Theta_0]$ bewegen kann, so wie es die maximale Auslenkung des Lenkrades erlaubt.

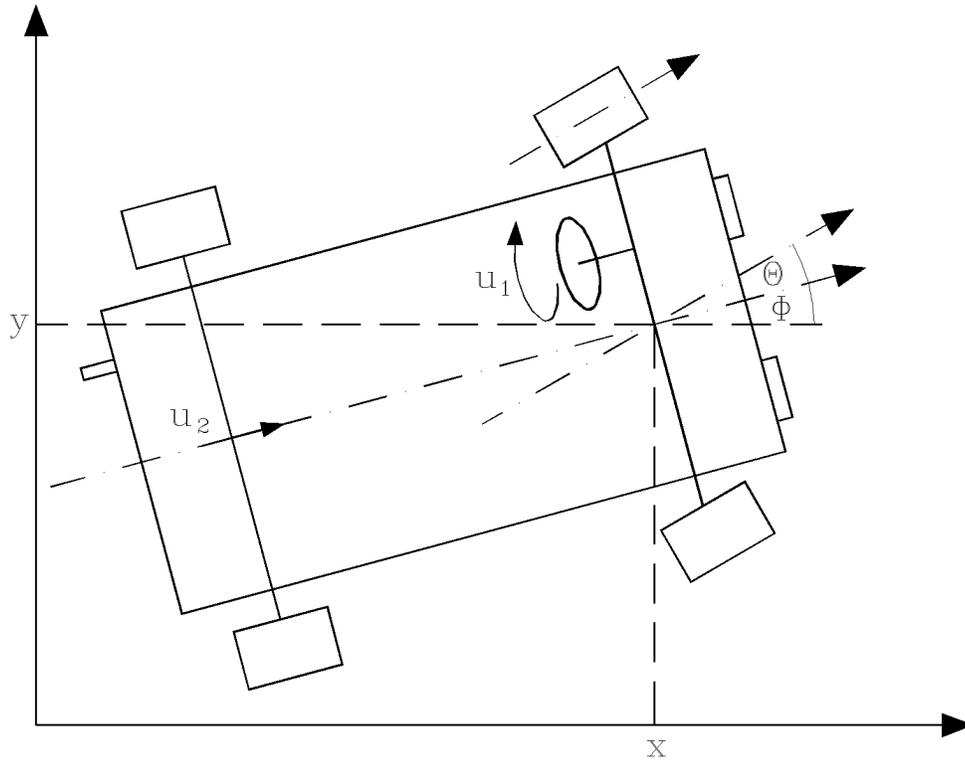


Bild 4.1: Steuerbarkeit eines Automobils.

Dieses idealisierte Modell ist wie folgt beschreibbar (Sontag 1991):

$$\dot{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{g}_1} u_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\phi + \Theta) \\ \sin(\phi + \Theta) \\ \sin \Theta \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{g}_2} u_2 \quad . \quad (\text{B 4.1-1})$$

Dieses Modell besitzt die Eigenschaft, daß es symmetrisch ist ($\mathbf{f}(\mathbf{x}, -\mathbf{u}) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$). Somit ist für dieses System der Begriff der Steuerbarkeit mit dem der Erreichbarkeit identisch. Es läßt sich anhand dieses Modells zeigen, daß das System vollständig steuerbar (bzw. erreichbar) ist. Hier soll jedoch zunächst nur eine lokale Untersuchung der Zustände erfolgen.

Anhand der Zustandsraumdarstellung dieses Modells könnte man meinen, daß der Zustand $\mathbf{z} = (x, y, \phi, \Theta)^T$ zu einem Zustandsraum der Form

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-\Theta_0, \Theta_0] \subseteq \mathbb{R}^4 \quad (\text{B 4.1-2})$$

gehört. Tatsächlich ist es jedoch sehr viel natürlicher die Winkel ϕ und $\phi \pm 2\pi$ als identisch anzusehen, so daß sich für den Zustandsraum die Form

$$\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1 \times [-\Theta_0, \Theta_0] \quad (\text{B 4.1-3})$$

ergibt. Dadurch ist die ϕ -Koordinatenachse in sich geschlossen, d.h. wenn man sich in eine Richtung entlang der ϕ -Koordinate fortbewegt, so wird der Ausgangspunkt wieder erreicht. Das führt dann zu einem Kontrollsystem Automobil, das sich auf

einer Mannigfaltigkeit bewegt, die sich von der des euklidischen Raums grundlegend unterscheidet.

Im weiteren Verlauf des Beispiels wird nun angenommen, daß die Steuerung \mathbf{u} Werte im \mathbb{R}^2 annimmt (Stellgrößenbeschränkungen werden somit vernachlässigt). Stellgrößen mit $u_2 = 0$ erzeugen dann eine reine Steuerbewegung des Lenkrads (*lenken*), also ein Verdrehen der Vorderreifen. Demgegenüber erzeugen Stellgrößen mit $u_1 = 0$ eine reine Vor- oder Rückwärtsbewegung mit festgehaltenem Lenkrad (*bewegen*). Es werden nun die Vektorfelder wie folgt bezeichnet $\mathbf{g}_1 = (0, 0, 0, 1)^T = \textit{lenken}$ und $\mathbf{g}_2 = (\cos(\phi + \Theta), \sin(\phi + \Theta), \sin \Theta, 0)^T = \textit{bewegen}$. Jedem Autofahrer ist intuitiv klar, daß mit dem Automobil jede beliebige Orientierung an jeder beliebigen Position in der Ebene erreicht werden kann, das System also vollständig steuerbar ist. Man kann jedoch auch die Rangbedingung der Erreichbarkeit überprüfen. Dafür werden zunächst die Vektorfelder

$$\textit{schlängeln} = [\textit{bewegen} , \textit{lenken}]$$

und

$$\textit{fahren} = [\textit{schlängeln} , \textit{bewegen}]$$

berechnet. Werden die Vektorfelder in die Berechnungsformel der Lie-Klammer eingesetzt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \textit{schlängeln} = \mathbf{w}\mathbf{r} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] &= \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{g}_1 - \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{g}_2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(\phi + \Theta) & -\sin(\phi + \Theta) \\ 0 & 0 & \cos(\phi + \Theta) & \cos(\phi + \Theta) \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\quad - \mathbf{0} \begin{bmatrix} \cos(\phi + \Theta) \\ \sin(\phi + \Theta) \\ \sin \Theta \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin(\phi + \Theta) \\ \cos(\phi + \Theta) \\ \cos \Theta \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{B 4.1-4}$$

und

$$\begin{aligned}
fahren = \mathbf{sl} = [\mathbf{wr}, \mathbf{g}_2] &= \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{wr} - \frac{\partial \mathbf{wr}}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{g}_2 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(\phi + \Theta) & -\sin(\phi + \Theta) \\ 0 & 0 & \cos(\phi + \Theta) & \cos(\phi + \Theta) \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin(\phi + \Theta) \\ \cos(\phi + \Theta) \\ \cos \Theta \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\cos(\phi + \Theta) & -\cos(\phi + \Theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\phi + \Theta) & -\sin(\phi + \Theta) \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi + \Theta) \\ \sin(\phi + \Theta) \\ \sin \Theta \\ 0 \end{bmatrix} \tag{B 4.1-5} \\
&= \begin{bmatrix} -\sin(\phi + \Theta) \cos \Theta \\ \cos(\phi + \Theta) \cos \Theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\cos(\phi + \Theta) \sin \Theta \\ -\sin(\phi + \Theta) \sin \Theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\phi + \Theta) \sin \Theta - \sin(\phi + \Theta) \cos \Theta \\ \sin(\phi + \Theta) \sin \Theta + \cos(\phi + \Theta) \cos \Theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .
\end{aligned}$$

Die Determinante der Matrix $\mathbf{P}(\mathbf{z}) = [\textit{lenken} : \textit{bewegen} : \textit{schlängeln} : \textit{fahren}]$ ist überall von Null verschieden und im besonderen natürlich auch im Ursprung:

$$\mathbf{P}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \cos(\phi + \Theta) & 0 & -\sin(\phi + \Theta) & -\sin \phi \\ \sin(\phi + \Theta) & 0 & \cos(\phi + \Theta) & -\cos \phi \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{B 4.1-6}$$

rang $\mathbf{P}(\mathbf{z}) = r$ ist im Ursprung $r = 4$ und damit ist das System lokal steuerbar/erreichbar, während das lineare System nach Nijmeijer und van der Schaft (1991) nicht steuerbar ist.

Für $\phi = \Theta = 0$ ergibt sich für beliebige x und y $\textit{schlängeln} = (0, 1, 1, 0)^T$ als eine Mischung aus einer Vorwärtsbewegung in y -Richtung und einer Rotationsbewegung. $\textit{fahren} = (0, 1, 0, 0)^T$ repräsentiert dann eine reine Vorwärtsbewegung in y -Richtung. Daran wird auch die Bedeutung der Lie-Klammer in der Differentialgeometrie deutlich. So setzt sich dann die kreisbogenförmige Bewegung die durch $\textit{schlängeln}$ repräsentiert wird, per Definition der Lie-Klammer (Kommutator) aus schnellen Iterationen der Aktionen

lenken – bewegen – rückwärts lenken – rückwärts bewegen, u.s.w.

zusammen. Auf ähnliche Art und Weise kann man auch die reine Vorwärtsbewegung approximieren:

schlängeln – bewegen – rückwärts schlängeln – rückwärts bewegen, u.s.w.

Das hier vorgestellte Kriterium mit Hilfe der Lie-Klammern soll nun mit dem Rang-Kriterium für das linearisierte Ersatzmodell verglichen werden. Da mit Hilfe der Differentialgeometrie nun einmal Tangentialräume der Zustandsmannigfaltigkeit betrachtet werden, sollte bei einer exakten Linearisierung des Systems für beliebige Arbeitspunkte zumindest für eine lokale Umgebung um den Arbeitspunkt auch das gleiche Ergebnis bezüglich der Steuerbarkeit an dem betrachteten Arbeitspunkt herauskommen. Das linearisierte System besitzt die Form:

$$\dot{\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{A}}\Delta\mathbf{z} + \overline{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{u} \quad . \quad (\text{B 4.1-7})$$

Die Matrizen des linearisierten Modells ergeben sich am Arbeitspunkt $\mathbf{z}_0, \mathbf{u}_0$ zu:

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -u_{2_0} \sin(\phi_0 + \Theta_0) & -u_{2_0} \sin(\phi_0 + \Theta_0) \\ 0 & 0 & u_{2_0} \cos(\phi_0 + \Theta_0) & u_{2_0} \cos(\phi_0 + \Theta_0) \\ 0 & 0 & 0 & u_{2_0} \cos(\Theta_0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B 4.1-8})$$

$$\overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & \cos(\phi_0 + \Theta_0) \\ 0 & \sin(\phi_0 + \Theta_0) \\ 0 & \sin(\Theta_0) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Für das Steuerbarkeitskriterium nach Kalman wird nun die Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S|_{\mathbf{z}_0, \mathbf{u}_0}$ benötigt. Sie ergibt sich zu:

$$\mathbf{Q}_S|_{\mathbf{z}_0, \mathbf{u}_0} = \begin{bmatrix} 0 & \cos(\Phi_0 + \Theta_0) \\ 0 & \sin(\Phi_0 + \Theta_0) \\ 0 & \sin(\Theta_0) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u_{2_0} \sin(\Phi_0 + \Theta_0) \\ u_{2_0} \cos(\Phi_0 + \Theta_0) \\ u_{2_0} \cos(\Theta_0) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B 4.1-9})$$

$$\begin{bmatrix} -u_{2_0} \sin(\Theta_0) \sin(\Phi_0 + \Theta_0) & -u_{2_0}^2 \cos(\Theta_0) \sin(\Phi_0 + \Theta_0) \\ u_{2_0} \sin(\Theta_0) \cos(\Phi_0 + \Theta_0) & u_{2_0}^2 \cos(\Theta_0) \cos(\Phi_0 + \Theta_0) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} .$$

Für $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ ergibt sich:

$$\mathbf{Q}_S|_{\mathbf{0}, \mathbf{u}_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{2_0} & 0 & u_{2_0}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{2_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B 4.1-10})$$

und:

$$\text{rang } \mathbf{Q}_S|_{\mathbf{0}, \mathbf{u}_0} = 4 \quad \forall \quad u_{2_0} \neq 0 \quad . \quad (\text{B 4.1-11})$$

Das um $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ linearisierte System ist also für alle $u_{2_0} \neq 0$ ebenfalls steuerbar. Oder mit Worten ausgedrückt: Das im Ursprung linearisierte System „Automobil“ ist genau dann steuerbar, wenn sich das Auto bewegt.

4.2 Steuerbarkeitsanalyse eines hydraulischen Antriebs

Im Geräteplan von Bild 4.2 ist ein elektrohydraulischer Translationsantrieb dargestellt. Er besteht aus Servoventil und Hydro-Gleichgangzylinder. Die Modellbildung dieses Systems ist in verschiedenen Arbeiten bereits beschrieben worden (z.B. Dorißen (1990), Schwarz (1991) und Jelali (1993)). Mit den Zustandsvariablen $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = p_2 - p_1$ kann das System wie folgt modelliert werden:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{f_1}{m} & \frac{A_w}{m} \\ 0 & -A_w \bar{k} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_0 \bar{k} \sqrt{1 - \frac{x_3}{p_0} \operatorname{sgn}(u)} \end{bmatrix} u \quad , \quad (4.1)$$

dabei sind m die Masse, A_w die wirksame Kolbenfläche, f_1 eine Reibkraftkonstante, Q_0 der maximale Durchfluß bei gegebenem Versorgungsdruck, p_0 der Versorgungsdruck und \bar{k} eine Konstante, mit $\bar{k} \approx k(p_A, p_B, x_1) = \frac{E_{\delta 1}(p_A)}{V_0 + A_w x_1} + \frac{E_{\delta 1}(p_B)}{V_0 - A_w x_1}$.

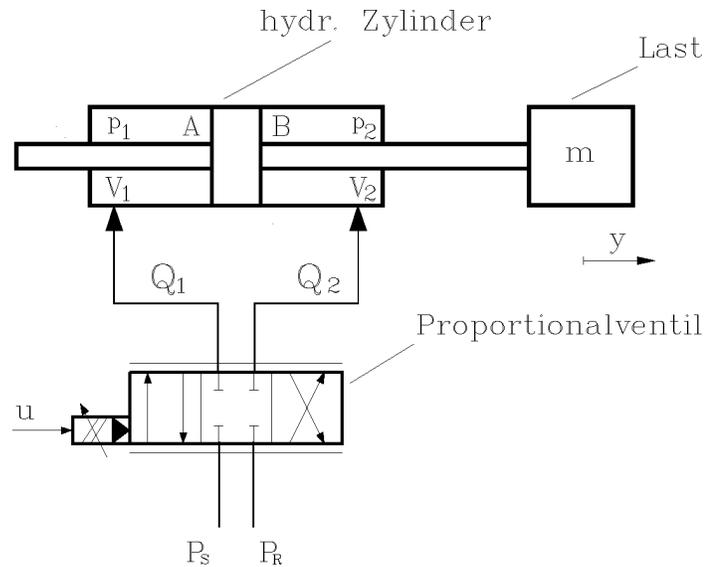


Bild 4.2: Elektrohydraulischer Antrieb

Um die Unstetigkeitsstelle bei $u = 0$ zu umgehen, wird der Bereich $u > 0$ betrachtet. Es ergibt sich somit:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{f_1}{m} x_2 + \frac{A_w}{m} x_3 \\ -A_w \bar{k} x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_0 \bar{k} \sqrt{1 - \frac{x_3}{p_0}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}(\mathbf{x})} u \quad . \quad (4.2)$$

Zur Berechnung der Dimension der schwach erreichbaren Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_0 wird nun entsprechend Kriterium 3.2 vorgegangen:

$$\mathbf{P}_0(\mathbf{x}) = [\mathbf{b}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Q_0 \bar{k} \left(1 - \frac{x_3}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}^T \quad (4.3)$$

Für die nächste Stufe des Algorithmus wird nun der Lie-Kommutator aus $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ und \mathbf{P}_0 berechnet:

$$\mathbf{P}_1(\mathbf{x}) = [\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{P}_0(\mathbf{x})] = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{Q_0 A_w \bar{k}}{m} \left(1 - \frac{x_3}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{Q_0 A_w \bar{k}^2}{2p_0} x_2 \left(1 - \frac{x_3}{p_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Das so erhaltene Vektorfeld stellt also eine neue Richtung dar. Entsprechend dem Algorithmus aus Kriterium 3.2 wird nun der nächste Lie-Kommutator gebildet:

$$\mathbf{P}_2(\mathbf{x}) = [\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{P}_1(\mathbf{x})] = \begin{pmatrix} \frac{Q_0 A_w \bar{k}}{m} \left(1 - \frac{x_3}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} \\ -\frac{Q_0 A_w^2 \bar{k}^2 x_2}{2m \sqrt{p_0} \sqrt{p_0 - x_3}} - \frac{Q_0 A_w \bar{k} (2f_1 p_0 - 2f_1 x_3 + A_w \bar{k} x_2 m)}{m^2 \sqrt{p_0} \sqrt{p_0 - x_3}} \\ -\frac{Q_0 \bar{k}^2 A_w (2f_1 p_0 x_2 - 2f_1 x_2 x_3 - 2A_w p_0 x_3 + 2A_w x_3^2 + \bar{k} A_w m x_2^2)}{4m (p_0 - x_3)^{-3/2} \sqrt{p_0}} - \frac{Q_0 A_w^2 \bar{k}^2 \sqrt{p_0 - x_3}}{m \sqrt{p_0}} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Somit ergibt sich:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{P}_0(\mathbf{x}) : \mathbf{P}_1(\mathbf{x}) : \mathbf{P}_2(\mathbf{x}) \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{Q_0 A_w \bar{k}}{m} \left(1 - \frac{x_3}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & -\frac{Q_0 A_w \bar{k}}{m} \left(1 - \frac{x_3}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} & \mathbf{P}_{2,2}(\mathbf{x}) \\ Q_0 \bar{k} \left(1 - \frac{x_3}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} & \frac{Q_0 A_w \bar{k}^2}{2p_0} x_2 \left(1 - \frac{x_3}{p_0}\right)^{-\frac{1}{2}} & \mathbf{P}_{2,3}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

mit:

$$\mathbf{P}_{2,2}(\mathbf{x}) = -\frac{Q_0 A_w^2 \bar{k}^2 x_2}{2m \sqrt{p_0} \sqrt{p_0 - x_3}} - \frac{Q_0 A_w \bar{k} (2f_1 p_0 - 2f_1 x_3 + A_w \bar{k} x_2 m)}{m^2 \sqrt{p_0} \sqrt{p_0 - x_3}}$$

$$\mathbf{P}_{2,3}(\mathbf{x}) = -\frac{Q_0 \bar{k}^2 A_w (2f_1 p_0 x_2 - 2f_1 x_2 x_3 - 2A_w p_0 x_3 + 2A_w x_3^2 + \bar{k} A_w m x_2^2)}{4m (p_0 - x_3)^{-3/2} \sqrt{p_0}} - \frac{Q_0 A_w^2 \bar{k}^2 \sqrt{p_0 - x_3}}{m \sqrt{p_0}}$$

Aus der rekursiven Berechnung der Lie-Kommutatoren ergibt sich also, daß die Dimension der schwach erreichbaren Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_0 gleich der der Zustandsmannigfaltigkeit ($n = 3$) ist, wenn gilt: $x_3 \neq p_0$. Dieses Ergebnis deckt sich also mit der Erfahrung, daß ein elektrohydraulischer Translationsantrieb steuerbar ist, solange nicht die Grenzbelastung des Systems überschritten wird. Anhand dieses Beispiels ist jedoch auch erkennbar, daß der Rechenaufwand gegenüber einer linearen Steuerbarkeitsanalyse höher ist.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Um den Übergang von der Behandlung linearer Systeme zu nichtlinearen zu erleichtern, werden bevorzugt auch diejenigen Methoden einer nichtlinearen Systemtheorie verwendet, die eine Erweiterung der Methoden für lineare Systeme darstellen. Als Beispiel einer solchen Erweiterung wird in dieser Arbeit die Steuerbarkeitsanalyse dynamischer Systeme behandelt.

Am Anfang dieser Arbeit stellt ein kurzer Abriß die bekanntesten Kriterien für eine Steuerbarkeitsanalyse linearer zeitkontinuierlicher Systeme zusammen.

Für eine allgemeine Klasse nichtlinearer Systeme, den analytischen Systemen (Σ_{AS}), werden die Begriffe Steuerbarkeit, Erreichbarkeit und Zugänglichkeit eingeführt und gegeneinander abgegrenzt, um dann für unterschiedliche Steuerbarkeitsbegriffe verschiedene Beurteilungskriterien für die wichtige Systemklasse der analytischen Systeme mit linearem Eingang (Σ_{ALS}) herzu-leiten und gegenüberzustellen. Der Vergleich der Kriterien geschieht anhand des Beispiels der Steuerbarkeitsuntersuchung eines Automobils in der Ebene, unter Veranschaulichung des Lie-Kommutators bzw. der Lie-Klammer der Differentialgeometrie.

Für ein nicht steuerbares System dieser Klasse ergibt sich die Möglichkeit einer Aufteilung (Systemdekomposition) in einen prinzipiell nicht steuerbaren/erreichbaren und einen prinzipiell steuerbaren/erreichbaren Anteil. Das Problem liegt hierbei nicht bei der Erkennung der Möglichkeit zur Systemaufteilung, sondern in der dazu notwendigen Bestimmung der (nichtlinearen) Koordinatentransformationsmatrix, für die (nichtlineare) partielle Differentialgleichungen zu lösen sind.

Die Arbeit schließt mit dem technischen Beispiel eines elektrohydraulischen Translationsantriebs, welches die Leistungsfähigkeit der Untersuchungsmethoden demonstriert.

Für zukünftige Arbeiten ist es sinnvoll, die verschiedenen, in der Literatur vorhandenen differentialalgebraischen Algorithmen, sowie andere Ansätze zur Systembeschreibung, wie z.B. geometrische zusammenzustellen und auf ihre Wirksamkeit hin zu untersuchen. Bei einer derartigen Zusammenstellung entstehen jedoch Probleme hinsichtlich der Übertragbarkeit von Definitionen, Sätzen und Kriterien. Dies liegt an der fehlenden internationalen Normung der Begriffe. So definieren unterschiedliche Autoren dieselben Begriffe (z.B. die Steuerbarkeit selbst) unterschiedlich, woraus keine uneingeschränkte Vergleichbarkeit der Systemeigenschaften resultiert.

Desweiteren schließt die Beschränkung auf Kriterien der Systemklasse der Σ_{ALS} eine Anzahl von technisch relevanten Fragestellungen aus. Bei einer Erweiterung der betrachteten Systemklasse gilt jedoch generell, daß mit steigender Komplexität der Systemklasse auch die Komplexität der Kriterien zunimmt – oder aber die damit verbundenen Systemeigenschaften immer schwächer werden.

Literaturverzeichnis

- Brocket, R.** 1976. Nonlinear Systems and Differential Geometry. *Proc. of the IEEE*. 61 – 72.
- Bronsteijn, I.** und **K. Semendjajew.** 1991. *Taschenbuch der Mathematik*. Frankfurt/Main: Harry Deutsch.
- Casti, J.** 1985. *Nonlinear System Theory*. London: Academic Press.
- Dorißen, H.** 1990. *Zur Minimalrealisierung und Identifikation bilinearer Systeme durch Markovparameter*. Dissertation. Universität – GH – Duisburg. Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8 Nr. 221. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Gellert, W., H. Kästner** und **D. S. Neuber.** 1981. *Lexikon der Mathematik*. Leipzig: VEB Bibliographisches Institut.
- Herman, R.** und **A. Krener.** 1977. Nonlinear Controllability and Observability. *IEEE Transactions on Automatic Control* 22. 728 – 742.
- Isidori, A.** 1989. *Nonlinear Control Systems*. Berlin: Springer.
- Jelali, M.** 1993. *Beobachter und Filter für im Zustand quadratische Systeme mit linearer Steuerung (QLS)*. Diplomarbeit. MSRT, Universität – GH – Duisburg.
- Knobloch, H. W.** und **H. Kwakernaak.** 1985. *Lineare Kontrolltheorie*. Berlin: Springer.
- Krener, A. J.** 1985. $(Ad_{f,g})$, $(ad_{f,g})$ And Locally $(ad_{f,g})$ Invariant Controllability Distributions. *SIAM J. Control and Optimization* 23. 523 – 549.
- Nijmeijer, H.** und **A. van der Schaft.** 1991. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Berlin: Springer.
- Olah, N.** 1993. *Symmetrietheoretische Untersuchungen von Fokker–Planck–Gleichungen*. Diplomarbeit. Institute für Theoretische Physik I, Heinrich–Heine–Universität Düsseldorf.
- Olver, P.** 1986. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Berlin: Springer.
- Rough, W.** 1981. *Nonlinear System Theory*. Baltimore: John Hopkins University Press.
- Schwarz, H.** 1971. *Mehrfachregelungen: Grundlagen einer Systemtheorie*. Berlin: Springer.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme: Systemtheoretische Grundlagen*. München: Oldenbourg.
- Sontag, E.** 1990. *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*. New York: Springer-Verlag.
- Sontag, E.** 1991. Kalman’s Controllability Rank Condition: From Linear to Nonlinear. *Mathematical System Theory. The Influence of R.E. Kalman*, hg. von A. E. Anatoulas. Berlin: Springer.

- Storey, C.** 1973. Stability and Controllability. *Recent Math. Developments in Control*, hg. von J. Bell. New York: Academic Press.
- Sussman, H.** 1985. A General Theorem On Symmetries And Local Controllabilty. *Proc. of 24th Conference on Decision and Control*. Ft. Lauderdale (USA).
- Svaricek, F.** 1994. *Zur rechnergestützten Analyse linearer Regelungssysteme*. Habilitationsschrift. MSRT, Universität – GH – Duisburg.
- Unbehauen, H.** 1989. *Regelungstechnik I-III*. Braunschweig: Vieweg.

A Allgemeine mathematische Hilfsmittel

A.1 Glatte und analytische Funktionen

Sei \mathcal{M} eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n und $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Der zum Punkt $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ gehörige Wert von f wird geschrieben als $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Die Funktion f heißt zur Klasse C^∞ gehörig (oder auch: ist C^∞ , oder auch *glatte Funktion*), wenn ihre partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung nach ihren Argumenten x_1, \dots, x_n existieren und stetig sind.

Eine Funktion f heißt analytisch (manchmal wird dies durch C^ω gekennzeichnet), wenn sie C^∞ ist und für jeden Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$ eine Umgebung \mathcal{M}_0 von \mathbf{x}_0 derart existiert, daß die Taylor-Reihenentwicklung von f um \mathbf{x}_0 bezüglich $f(\mathbf{x})$ für jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_0$ konvergiert.

Beispiel A.1 Ein typisches Beispiel einer Funktion, die zwar glatt (C^∞), nicht jedoch analytisch ist, stellt die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{wenn } x \leq 0 \\ f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{wenn } x > 0 \end{cases} \quad (\text{B 1.1-1})$$

dar. Diese Funktion besitzt zwar beliebig viele Ableitungen für jedes $x \in \mathbb{R}$ ($\hat{=}$ Glattheit), sie kann jedoch nicht durch eine konvergierende Taylorreihenentwicklung approximiert werden.

Eine Abbildung $\mathbf{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei eine Sammlung von m Funktionen $f_i : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Abbildung \mathbf{F} ist dann C^∞ , wenn alle f_i C^∞ sind.

A.2 Linearisierung

Gegeben sei eine nichtlineare Funktion

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \quad . \quad (\text{A.1})$$

Die Linearisierung um einen Arbeitspunkt $\mathbf{U}_0, \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0$ lautet dann:

$$\mathbf{y} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0} \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0} \mathbf{u} \quad . \quad (\text{A.2})$$

A.3 Bild und Nullraum (Kern)

Wird einem Element $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ durch die Abbildung \mathbf{F} das Element $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ zugeordnet, so nennt man \mathbf{y} ein *Bild* von \mathbf{x} bzgl. \mathbf{F} . Faßt man die Abbildung $\mathbf{F} : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{Y}$ als Operator auf, so schreibt man symbolisch: $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ oder $\mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{x}$. \mathbf{y} ist dann ein Bild von \mathbf{x} bzgl. \mathbf{F} . (nach Gellert u. a. (1981)). Ist die Abbildung linear, so kann man den bild-Operator mit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und \mathbf{A} als $m \times n$ -Matrix wie folgt definieren (Schwarz 1991):

$$\text{bild } \mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \quad . \quad (\text{A.3})$$

In der Algebra versteht man nach Gellert u. a. (1981) unter einem *Kern* (oder auch *Nullraum*) die Teilmenge einer Gruppe oder eines Rings A , die bei dem Homomorphismus φ von A in B auf das Einselement bzw. das Nullelement von B abgebildet wird. Der Kern eines Ringhomomorphismus φ ist ein Ideal von A . Für lineare Abbildungen φ gilt:

$$\text{kern } \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{x} \in \mathbf{V} \mid \varphi \mathbf{x} = \mathbf{0} \} \quad . \quad (\text{A.4})$$

A.4 Rangberechnungen

Definition A.1 (Svaricek 1994)

Der *Rang* einer Matrix ist identisch mit der Dimension der größten von Null verschiedenen Unterdeterminante der Matrix. \square

Der Rang einer Matrix stellt also die maximale Anzahl der linear unabhängigen Zeilen bzw. Spalten der Matrix dar. Besitzt eine $n \times n$ Matrix den vollen Rang, so wird sie auch *regulär* genannt.

Definition A.2 (Svaricek 1994)

Der *Normalrang* einer rationalen Matrix $\mathbf{F}(s)$ bzw. einer Polynommatrix $\mathbf{P}(s)$ ist der maximale Rang der Matrix $\mathbf{F}(s)$ bzw. $\mathbf{P}(s)$, der sich für feste Werte des komplexen Parameters s ergibt. \square

B Differentialgeometrische Hilfsmittel

B.1 Topologien, offene Mengen und Umgebung

Sei S eine Menge. Dann ist eine *topologische Struktur* oder kurz *Topologie* auf S eine Sammlung von Untermengen von S , *offene Mengen* genannt, die folgenden Axiomen genügt:

- i) die Vereinigung einer beliebigen Anzahl von offenen Mengen ist ebenfalls offen,
- ii) der Schnitt (engl. intersection) jeder finiten Anzahl von offener Mengen ist offen und
- iii) die Menge S und die leere Menge \emptyset sind offen.

Eine Menge S mit einer Topologie wird *topologischer Raum* genannt. Eine *Umgebung* \mathcal{M}_0 eines Punktes \mathbf{x} eines topologischen Raumes ist eine offene Menge, die den Punkt \mathbf{x} enthält. Ein topologischer Raum S befriedigt das *Hausdorffsche Separationsaxiom* (oder kurz: S ist ein *Hausdorff-Raum*), wenn zwei beliebige verschiedene Punkte \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 disjunkte Umgebungen besitzen.

B.2 Homeomorphismus

Seien S_1 und S_2 topologische Räume und \mathbf{F} eine Abbildung $\mathbf{F} : S_1 \rightarrow S_2$. Die Abbildung \mathbf{F} heißt *stetig*, wenn das inverse Bild jeder offenen Menge von S_2 eine offene Menge von S_1 ist. Die Abbildung \mathbf{F} ist *offen*, wenn das Bild einer offenen Menge von S_1 eine offene Menge von S_2 darstellt. Die Abbildung \mathbf{F} stellt einen *Homeomorphismus* dar, wenn sie eine Bijektion ist, die sowohl stetig als auch offen ist.

Zwei topologisch Räume S_1, S_2 werden werden *homeomorph* genannt, wenn ein Homeomorphismus $\mathbf{F} : S_1 \rightarrow S_2$ existiert.

B.3 Diffeomorphismus für Koordinatentransformationen

Sei $\phi(\mathbf{x})$ eine \mathbb{R}^n -wertige Funktion von n Veränderlichen, also $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}) \\ \phi_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \phi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \phi_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \phi_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \mathbf{z}(\mathbf{x}) \quad , \quad (\text{B.1})$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\phi(\mathbf{x})$ ist invertierbar, d.h. es existiert eine Funktion $\phi^{-1}(\mathbf{z})$, für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in der Art, daß

$$\phi^{-1}(\phi(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \quad . \quad (\text{B.2})$$

2. $\phi(\mathbf{x})$ und $\phi^{-1}(\mathbf{z})$ sind je glatte Abbildungen, d.h. sie besitzen stetige partielle Ableitungen beliebiger Ordnung, sind also C^∞ .

Die so definierte Transformation heißt *globaler Diffeomorphismus* auf \mathbb{R}^n . Ist eine derartige Transformation lediglich auf einer Umgebung um einen gegebenen Punkt herum definiert, so spricht man von einem *lokalen Diffeomorphismus*.

Satz B.1 (Isidori 1989)

Sei $\phi(\mathbf{x})$ eine glatte auf einer Teilmenge \mathcal{M} von \mathbb{R}^n definierte Funktion. Es sei weiterhin die Jakobi-Matrix von ϕ bei einem Punkt \mathbf{x}_0 nichtsingulär. Dann definiert $\phi(\mathbf{x})$ auf einer geeigneten offenen Teilmenge \mathcal{M}_0 von \mathcal{M} einen lokalen Diffeomorphismus. \square

Mit anderen Worten bedeutet das, daß $\phi(\mathbf{x})$ das Kriterium des maximalen Rangs erfüllt – bzw. $\dim \phi(\mathbf{x}) = \dim \mathcal{M}_0$. So definierte Koordinatentransformationen bilden im übrigen auch eine Gruppe (siehe Anhang B.10), was soviel bedeutet wie, daß eine Koordinatentransformation, angewandt auf einer Koordinatentransformation wiederum eine (neue) Koordinatentransformation darstellt.

B.4 Glatte Mannigfaltigkeiten, Koordinatennetze, Koordinatenfunktionen

Definition B.1

Ein *lokal euklidischer Raum* \mathbf{X} der Dimension n ist ein topologischer Raum derart, daß für jeden beliebigen Punkt $\mathbf{p} \in \mathbf{X}$ ein Homeomorphismus ϕ existiert, der eine Umgebung von \mathbf{p} in eine offene Menge in \mathbb{R}^n abbildet. \square

Definition B.2

Eine *Mannigfaltigkeit* \mathcal{N} der Dimension n ist ein topologischer, lokal euklidischer Raum der Dimension n , der einen Hausdorff-Raum darstellt und eine endlich abzählbare Basis besitzt. \square

Wird eine Mannigfaltigkeit in lokalen Koordinaten dargestellt, so sieht diese lokal auch exakt wie ein – in der Ingenieurwissenschaft bekannter – euklidischer Raum aus (vgl. Olver (1986)). Da im Bereich der Ingenieurwissenschaften sehr häufig Probleme lokaler Natur auftreten, ist es für den Anwender sehr wohl möglich, den Begriff der Mannigfaltigkeit durch den einer offenen Teilmenge eines euklidischen Raums zu ersetzen, ohne – lokal betrachtet – einen falschen Eindruck der notwendigen Theorie zu bekommen.

Ein *Koordinatennetz* auf einer Mannigfaltigkeit \mathcal{N} ist ein Zwei-Tupel (U, ϕ) für das gilt: U ist eine offene Menge von \mathcal{N} und ϕ ein Homeomorphismus von U auf eine offene Menge von \mathbb{R}^n . Manchmal wird ϕ als eine Menge (ϕ_1, \dots, ϕ_n) dargestellt, wobei $\phi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ die i -te Koordinatenfunktion genannt wird. Für $\mathbf{p} \in U$ heißt das n -Tupel von reellwertigen Zahlen $(\phi_1(\mathbf{p}), \dots, \phi_n(\mathbf{p}))$ *lokale Koordinaten* von \mathbf{p} im Koordinatennetz (U, ϕ) .

Seien (U, ϕ) und (V, ψ) zwei Koordinatennetze auf einer Mannigfaltigkeit \mathcal{N} , mit $U \cap V \neq \emptyset$. Seien ferner (ψ_1, \dots, ψ_n) die Koordinatenfunktionen der Abbildung ψ . Der Homeomorphismus

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V) \quad , \quad (\text{B.3})$$

der für jeden Punkt $\mathbf{p} \in U \cap V$ die Menge von lokalen Koordinaten $(\phi_1(\mathbf{p}), \dots, \phi_n(\mathbf{p}))$ in eine Menge lokaler Koordinaten $(\psi_1(\mathbf{p}), \dots, \psi_n(\mathbf{p}))$ überführt, heißt *Koordinatentransformation* auf $U \cap V$. Eine Koordinatentransformation $\boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\phi}^{-1}$ kann in der folgenden Form dargestellt werden:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \mathbf{y}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.4})$$

und die inverse Transformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}) \quad . \quad (\text{B.5})$$

Zwei Koordinatennetze $(U, \boldsymbol{\phi})$ und $(V, \boldsymbol{\psi})$ heißen C^∞ -kompatibel, wenn für jede $U \cap V \neq \emptyset$ die Koordinatentransformation $\boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\phi}^{-1}$ einen Diffeomorphismus darstellt, d.h. wenn $y(x)$ und $x(y)$ jeweils C^∞ Abbildungen sind.

Die Kompatibilität von Koordinatennetzen ist dann wichtig, wenn man aus mehreren lokalen Koordinatennetzen ein globales „zusammenkleben“ möchte. Dafür ist es dann wichtig, daß in den Bereichen an denen sich diese Koordinatennetze überlappen keine „Ecken“ und „Kanten“ oder gar Unstetigkeitsstellen erzeugt werden. Ein derart „zusammengeklebtes“ System von lokalen Koordinatennetzen heißt dann *Atlas*:

Ein C^∞ *Atlas* auf einer Mannigfaltigkeit \mathcal{N} ist eine Sammlung $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i : i \in I)\}$ von paarweise C^∞ -kompatiblen Koordinatennetzen mit der Eigenschaft $\bigcup_{i \in I} V_i = \mathcal{N}$.

Definition B.3

Eine glatte oder C^∞ *Mannigfaltigkeit* ist eine mit einem kompletten C^∞ Atlas versehene Mannigfaltigkeit. \square

B.5 Untermannigfaltigkeiten

Definition B.4

Sei $\mathbf{F} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ eine glatte Abbildung von Mannigfaltigkeiten.

- i) \mathbf{F} heißt *Immersion*, wenn $\text{Rang}(\mathbf{F}) = \dim(\mathcal{N})$ für alle $\mathbf{p} \in \mathcal{N}$ gilt.
- ii) \mathbf{F} heißt *univalente Immersion*, wenn \mathbf{F} eine Immersion und injektiv ist.
- iii) \mathbf{F} heißt *Einbettung*, wenn \mathbf{F} eine univalente Immersion ist und die auf $\mathbf{F}(\mathcal{N})$ induzierte Topologie mit der von \mathcal{N} zusammenfällt und eine Teilmenge von \mathcal{M} ist.

\square

Eine Immersion dient dazu, eine Parametrisierung einer Untermannigfaltigkeit zu definieren (Olver 1986).

Definition B.5

Das Bild $\mathbf{F}(\mathcal{N})$ einer univalenten Immersion heißt *immerse Untermannigfaltigkeit* von \mathcal{M} . Das Bild $\mathbf{F}(\mathcal{N})$ einer Einbettung heißt *eingebettete Untermannigfaltigkeit* von \mathcal{M} . \square

B.6 Tangentenvektoren und Tangentialräume

Sei \mathcal{N} eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n . Dann heißt eine reellwertige Funktion λ *glatt in einer Umgebung von \mathbf{p}* , wenn der Bereich von λ eine offene Menge U von \mathcal{N} einschließt, die den Punkt \mathbf{p} einschließt und die Restriktion erfüllt, daß λ nach U eine glatte Funktion ist.

Die Menge aller glatten Funktionen innerhalb einer Umgebung von \mathbf{p} wird mit $C^\infty(\mathbf{p})$ bezeichnet. Dabei bildet $C^\infty(\mathbf{p})$ einen Vektorraum über den Körper \mathbb{R} .

Definition B.6

Ein *Tangentenvektor* \mathbf{v} an dem Punkt \mathbf{p} ist eine Abbildung $\mathbf{v} : C^\infty(\mathbf{p}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- i) Linearität: $\mathbf{v}(a\lambda + b\gamma) = a\mathbf{v}(\lambda) + b\mathbf{v}(\gamma)$ für alle $\lambda, \gamma \in C^\infty(\mathbf{p})$, und $a, b \in \mathbb{R}$ und
- ii) Leibnitzregel: $\mathbf{v}(\lambda\gamma) = \gamma(\mathbf{p})\mathbf{v}(\lambda) + \lambda(\mathbf{p})\mathbf{v}(\gamma)$, für alle $\lambda, \gamma \in C^\infty(\mathbf{p})$.

□

Die Sammlung aller Tangentenvektoren zu allen nur möglichen Kurven, die durch einen gegebenen Punkt $\mathbf{p} \in \mathcal{N}$ verlaufen, heißt *Tangentialraum* (mit $T_{\mathbf{p}}\mathcal{N}$ bezeichnet) zu \mathcal{N} bei \mathbf{p} . Ist \mathcal{N} eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit, so stellt $T_{\mathbf{p}}\mathcal{N}$ einen n -dimensionalen Vektorraum dar, für den $\{\partial/\partial p_1, \dots, \partial/\partial p_n\}$ eine Basis in den gegebenen lokalen Koordinaten darstellt (Olver 1986).

Definition B.7 (Isidori 1989)

Sei \mathcal{N} eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann ist der *Tangentialraum* zu \mathcal{N} am Punkt \mathbf{p} die Menge aller Tangentenvektoren bei \mathbf{p} . Der Tangentialraum wird durch $T_{\mathbf{p}}\mathcal{N}$ gekennzeichnet. □

Definition B.8

Seien \mathcal{N} und \mathcal{M} glatte Mannigfaltigkeiten. Sei ferner $F : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ eine glatte Abbildung. Das *Differential* F_* von F beim Punkt \mathbf{p} ist dann die Abbildung:

$$F_* : T_{\mathbf{p}}\mathcal{N} \rightarrow T_{F(\mathbf{p})}\mathcal{M} \quad , \quad (\text{B.6})$$

die wie folgt definiert wird:

$$(F_*(\mathbf{v}))(\lambda) = \mathbf{v}(\lambda \circ F) \quad . \quad (\text{B.7})$$

□

Dabei ist F_* eine Abbildung vom Tangentialraum von \mathcal{N} am Punkt \mathbf{p} auf den Tangentialraum von \mathcal{M} beim Punkt $F(\mathbf{p})$.

B.7 Vektorfelder, Integralkurven, Fluß

Definition B.9

Sei \mathcal{N} eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n . Dann ist ein *Vektorfeld* \mathbf{f} auf \mathcal{N} eine Abbildung, die zu jedem Punkt $\mathbf{p} \in \mathcal{N}$ einen Tangentenvektor $\mathbf{f}(\mathbf{p})$ in $T_{\mathbf{p}}\mathcal{N}$ zuordnet. □

Definition B.10

Ein Vektorfeld \mathbf{f} heißt *glatt*, wenn für jeden Punkt $\mathbf{p} \in \mathcal{N}$ ein Koordinatennetz (U, ϕ) über \mathbf{p} und n reellwertige glatte Funktionen f_1, \dots, f_n , die auf U definiert sind, existieren, in der Art, daß für alle $\mathbf{q} \in U$ gilt:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{q}) \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \right)_{\mathbf{q}} . \quad (\text{B.8})$$

□

Wird diese Gleichung in lokalen Koordinaten aufgeschrieben, so wird verdeutlicht, daß man ein Vektorfeld als einen Operator auffassen kann. Dabei ist dann ein Vektorfeld als Erzeuger einer Transformation anzusehen. Es ergibt sich die Gleichung

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} . \quad (\text{B.9})$$

Dabei spannen dann die $\partial/\partial x_i$ den Tangentialraum auf. Ein Vektorfeld kann also als ein Operator (auf den Systemzustand oder den Stellwert) interpretiert werden, der dieser Größe neue Größen in Richtung der Koordinaten des Tangentialraumes an diesem Punkt zuweist. Für den Fall, daß der Zustandsraum im \mathbb{R}^n ist, spannen die $\partial/\partial x_i$ (lokal) den \mathbb{R}^n selbst auf.

Mit Hilfe der Vektorfelder kann nun ein Konzept der *Differentialgleichungen auf einer Mannigfaltigkeit* \mathcal{N} eingeführt werden. Die Menge aller glatten Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit \mathcal{N} wird durch die Schreibweise $V(\mathcal{N})$ gekennzeichnet. Diese Menge stellt einen *Vektorraum* über \mathbb{R} dar.

Sei \mathbf{f} ein Vektorfeld. Dann heißt die eine glatte Kurve $\sigma : (t_1, t_2) \rightarrow \mathcal{N}$ *Integralkurve* auf \mathbf{f} , wenn für alle $t \in [t_1, t_2]$ gilt:

$$\sigma_* \left(\frac{d}{dt} \right)_t = \mathbf{f}(\sigma(t)) . \quad (\text{B.10})$$

Oder anders ausgedrückt (Olver 1986): Eine Integralkurve eines Vektorfelds \mathbf{v} ist eine glatte parametrisierte Kurve, deren Tangentenvektoren zu jedem Punkt mit dem Wert von \mathbf{v} am selben Punkt zusammenfällt.

Die Schreibweise $\Phi_t^{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ bezeichne den *Fluß* eines Vektorfelds \mathbf{f} , also die glatte Funktion von t und \mathbf{x} mit der Eigenschaft, daß $\mathbf{x}(t) = \Phi_t^{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$ die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit der Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ löst. Anders ausgedrückt heißt das, daß $\Phi_t^{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ eine glatte Funktion von t und \mathbf{x} ist, die

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_t^{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\Phi_t^{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) \quad ; \quad \mathbf{f}(\Phi_0^{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) = \mathbf{x} , \quad (\text{B.11})$$

erfüllt. Für ein beliebiges vorgegebenes \mathbf{x}_0 existiert ein (hinreichend kleines) t derart, daß die Abbildung

$$\Phi_t^{\mathbf{f}} : \mapsto \Phi_t^{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) , \quad (\text{B.12})$$

die für alle \mathbf{x} auf einer Umgebung von \mathbf{x}_0 definiert ist, einen lokalen Diffeomorphismus (auf ihr Bild) darstellt.

B.8 Kovektorfelder, duale Vektorfelder

Bei einigen Berechnungen mit Hilfe von Vektorfeldern ist es bequemer statt ausschließlich mit Vektorfeldern, auch zu ihnen *duale* Objekte, die *Kovektorfelder*, zu berücksichtigen. Dabei stellt ein Kovektorfeld eine Abbildung eines Punktes \boldsymbol{x} (einer Untermenge \mathcal{M}) auf ein Element eines *dualen Raums* (\mathbb{R}^*) dar. Anschaulich kann man sich glatte Kovektorfelder (die auf einer Untermenge des \mathbb{R}^n definiert seien) als Zeilen- ($1 \times n$)-vektoren vorstellen. Der zu einem Vektorraum V (z.B. \mathbb{R}^n) dualen Raum V^* (\mathbb{R}^m) stellt dabei die Menge aller *linearen* reell-wertigen Funktionen dar, die auf V definiert sind. Der duale Raum eines n -dimensionalen Vektorraums ist ebenfalls ein n -dimensionaler Vektorraum, dessen Elemente *Kovektoren* genannt werden. So wie jede andere lineare Abbildung kann auch ein Element $\boldsymbol{\omega}^*$ von V^* als eine Matrix aufgefaßt werden. Da im besonderen $\boldsymbol{\omega}^*$ eine Abbildung eines n -dimensionalen Raums V auf den eindimensionalen Raum \mathbb{R} darstellt, besteht diese Matrix dann aus nur einer Zeile, stellt also einen Zeilenvektor dar.

Vor diesem Hintergrund kann man $(\mathbb{R}^n)^*$ als die Menge aller n -dimensionalen Zeilenvektoren und jede Untermenge von $(\mathbb{R}^n)^*$ als eine Sammlung aller Linearkombinationen einer Menge von n -dimensionalen Zeilenvektoren (z.B. die Zeilen einer Matrix mit n Spalten) auffassen. Ein Vektor

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

stellt also ein Element von V und

$$\boldsymbol{\omega}^* = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdots \quad \omega_n] \quad (\text{B.14})$$

ein Element von V^* dar. Der „Wert“ von $\boldsymbol{\omega}^*$ bei \boldsymbol{v} wird durch das Produkt

$$\boldsymbol{\omega}^* \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n \omega_i v_i \quad (\text{B.15})$$

berechnet.

Seien nun $\omega_1, \dots, \omega_n$ glatte reell-wertige Funktionen der Veränderlichen x_1, \dots, x_n , die auf einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n definiert seien. Betrachtet werde dann der Zeilenvektor:

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}) = [\omega_1(x_1, \dots, x_n) \quad \omega_2(x_1, \dots, x_n) \quad \dots \quad \omega_n(x_1, \dots, x_n)] \quad (\text{B.16})$$

Auf der Grundlage der obigen Diskussion erscheint es natürlich, diesen Zeilenvektor (Gl. (B.15)) als eine (glatte) Abbildung aufzufassen, die jedem Punkt \boldsymbol{x} einer Teilmenge \mathcal{M} ein Element $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$ eines dualen Raums $(\mathbb{R}^n)^*$ zuordnet, also dem Objekt, welches als Kovektorfeld bezeichnet wird.

B.9 Differential, Gradient, (Lie–) Ableitungen

Ein Kovektorfeld besonderer Bedeutung stellt das sog. *Differential*, oder auch der *Gradient* einer reellwertigen Funktion λ dar, wobei λ auf einer offenen Menge \mathcal{M} des \mathbb{R}^n definiert sei. Das mit $d\lambda$ bezeichnete Kovektorfeld ist definiert als der $1 \times n$ Zeilenvektor, dessen i -tes Element die partielle Ableitung von λ nach x_i beinhaltet. Der Wert zu einem bestimmten Punkt \mathbf{x} ist dann:

$$d\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} \right] \quad . \quad (\text{B.17})$$

Die rechte Seite der Gleichung (B.17) stellt exakt die Jakobi-Matrix von λ dar.

Definition B.11

Sei \mathbf{f} ein glattes Vektorfeld auf \mathcal{N} und λ eine glatte reellwertige Funktion auf \mathcal{N} . Dann ist die *Ableitung von λ entlang \mathbf{f}* eine Funktion $\mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$, die mit $L_{\mathbf{f}}\lambda$ bezeichnet wird und wie folgt definiert ist:

$$(L_{\mathbf{f}}\lambda)(\mathbf{p}) = (\mathbf{f}(\mathbf{p}))(\lambda) \quad (\text{B.18})$$

□

Die Funktion $L_{\mathbf{f}}\lambda$ ist ebenfalls eine glatte Funktion. In lokalen Koordinaten dargestellt ergibt sich für $L_{\mathbf{f}}\lambda$:

$$(L_{\mathbf{f}}\lambda)(\mathbf{x}) = (L_{\mathbf{f}}\lambda)(x_1, \dots, x_n) = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

Gebräuchlich sind auch die folgenden Schreibweisen:

$$L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}) = \langle d\lambda(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{B.20})$$

Wird Gl. (B.20) leicht umgeschrieben, fällt einem die Operatorauffassung dieser Funktion auf. Die Ableitung von λ entlang eines Vektorfelds \mathbf{f} stellt also einen Operator dar:

$$L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}) = \langle d\lambda(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \quad . \quad (\text{B.21})$$

Seien $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ Vektorfelder und λ eine reellwertige Funktion, so schreibt man

$$L_{\mathbf{f}_1} L_{\mathbf{f}_2} \lambda = L_{\mathbf{f}_1} (L_{\mathbf{f}_2} \lambda) \quad . \quad (\text{B.22})$$

Ähnlich zur Definition B.11 (bzw. B.20) ist auch die nächste Operation erklärt.

Seien das Kovektorfeld ω und das Vektorfeld \mathbf{f} auf einer offenen Teilmenge \mathcal{M} des \mathbb{R}^n definiert. Dann erzeugt diese Operation ein neues Vektorfeld, das mit $L_{\mathbf{f}}\omega$ bezeichnet wird und für jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ wie folgt definiert ist (der Hochindex T steht dabei für die transponierte Matrix):

$$L_{\mathbf{f}}(\omega)(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \left[\frac{\partial \omega^T}{\partial \mathbf{x}} \right]^T + \omega(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \quad . \quad (\text{B.23})$$

Der so erzeugte Kovektor heißt *Ableitung von ω entlang \mathbf{f}* .

B.10 Gruppe und Lie-Gruppe

Für die Anwendung der Theorien von Lie innerhalb der Kontrollmathematik und im besonderen der Differentialgeometrie, sind im Grunde nur die Lie-Algebra und die Lie-Klammer (auch Lie-Produkt oder Kommutator) von großem Interesse. Für ein besseres Verständnis werden an dieser Stelle jedoch auch die Lie-Gruppen erwähnt.

Definition B.12 (Olver 1986)

Eine Gruppe ist eine Menge G zusammen mit einer Gruppenoperation, üblicherweise Multiplikation genannt, in der Art, daß für zwei beliebige Elemente g, h aus G das Produkt $g \cdot h$ wiederum ein Element von G ist. Die Gruppenoperation muß den folgenden Axiomen unterliegen:

1. *Assoziativität*: Sind g, h und k Elemente der Menge G , so gilt:

$$g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k \quad , \quad (\text{B.24})$$

2. *Identität*: Es gibt ein Element e von G , das sogenannte Identitätselement, das die folgende Eigenschaft besitzt:

$$e \cdot g = g \cdot e = g \quad , \quad (\text{B.25})$$

3. *Invertierbarkeit*: Für jedes g aus G existiert ein inverses mit g^{-1} bezeichnetes Element mit der Eigenschaft:

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e \quad . \quad (\text{B.26})$$

□

Als *Untergruppe* bezeichnet man eine Teilmenge H einer Gruppe G , die den Gruppenaxiomen (Gl.(B.24) – (B.26)) genügt. (Gellert u. a. 1981). Die Untergruppe N von G ist genau dann *Normalteiler*, wenn für beliebige $a \in G$ gilt: $a \cdot N = N \cdot a$. Für jedes Element a der Gruppe G und jedes Element b der Untergruppe N muß dazu $a \cdot b \cdot a^{-1}$ wieder in N liegen. (Gellert u. a. 1981). Eine kommutative Gruppe wird auch abelsche Gruppe genannt und es gilt (Gellert u. a. 1981): In einer *abelschen Gruppe* ist jede Untergruppe Normalteiler.

Beispiel B.1 (Olver 1986)

- a) Sei $G = GL(n, \mathbb{Q})$ die Menge der invertierbaren $n \times n$ Matrizen mit rationalen Zahlen als Elementen. Die Gruppenoperation ist dann durch die Matrizenmultiplikation gegeben. Das Identitätselement ist die Einheitsmatrix und die zu A inverse Matrix ist die gewöhnliche inverse Matrix, die wiederum nur rationale Zahlen als Elemente besitzt.
- b) Ähnlich zu a) stelle $GL(n, \mathbb{R})$ die Menge aller invertierbaren $n \times n$ Matrizen mit rationalen Zahlen als Matrizenelemente dar, so ist diese Menge ebenfalls eine Gruppe unter der Matrizenmultiplikation. Die Identitätsmatrix und die Inverse sind genauso definiert wie in a). Als abkürzende Schreibweise für die *generelle lineare Gruppe* $GL(n, \mathbb{R})$ wird im folgenden $GL(n)$ benutzt.

Die besondere Eigenschaft einer *Lie-Gruppe* ist, daß diese Gruppe zusätzlich noch die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit besitzt, die Gruppenelemente können also stetig variieren.

B.11 Lie–Algebra und Lie–Klammer

Eine der wichtigsten Operationen auf einem Vektorfeld ist ihre *Lie–Klammer* oder *Kommutator*. Diese ist am einfachsten in ihrem Sinn als Ableitung entlang Funktionen definiert. Im besonderen, wenn \mathbf{v} und \mathbf{w} Vektorfelder auf \mathcal{M} darstellen, ist ihre *Lie–Klammer* $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ als das Vektorfeld definiert, für das gilt:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}](f) = \mathbf{v}(\mathbf{w}(f)) - \mathbf{w}(\mathbf{v}(f)) \quad (\text{B.27})$$

für alle glatten Funktionen $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ (Olver 1986).

Beispiele solcher Lie–Klammern sind (Olah 1993):

- Das Kreuzprodukt in der Vektorrechnung,
- die Poisson–Klammer in der klassischen Mechanik und
- der Kommutator aus der Quantenmechanik.

Stellt G eine Lie–Gruppe dar, dann existieren herausragende Vektorfelder in G , die dadurch charakterisiert sind, daß sie invariant unter der Gruppenmultiplikation sind. Diese Vektorfelder bilden einen endlich dimensionalen Vektorraum, der Lie–Algebra von G genannt wird, die in einer präziseren Deutung die „infinitesimalen Erzeuger“ von G sind. Tatsächlich sind nahezu alle Informationen über die Gruppe G in ihrer Lie–Algebra enthalten. Diese fundamentale Beobachtung stellt einen der Eckpfeiler der Lie–Gruppen–Theorie dar. So wird es dadurch z.B. möglich, komplizierte nichtlineare Invarianzbedingungen unter einer Gruppenoperation durch einfacherere, infinitesimale lineare Bedingungen zu ersetzen. Nahezu alle Anwendungen der Lie–Gruppen auf Differentialgleichungen basieren letztlich auf dieser Konstruktion (Olver 1986).

Für die exakte Definition der Lie–Algebra werden jedoch noch die *Rechts–Multiplikation* und die *Rechtsinvarianz* benötigt:

Definition B.13 (Olver 1986)

Sei eine Lie–Gruppe G gegeben. Für jedes Gruppenelement $g \in G$ ist dann die *Rechts–Multiplikation*

$$R_g : G \rightarrow G \quad (\text{B.28})$$

definiert durch:

$$R_g(h) = h \cdot g \quad (\text{B.29})$$

und stellt einen Diffeomorphismus mit der inversen

$$R_{g^{-1}} = (R_g)^{-1} \quad (\text{B.30})$$

dar. □

Definition B.14 (Olver 1986)

Ein Vektorfeld \mathbf{v} auf G heißt *rechtsinvariant*, wenn für alle g und h in G gilt:

$$dR_g(v|_h) = \mathbf{v}|_{R_g(h)} = \mathbf{v}|_{hg} \quad . \quad (\text{B.31})$$

gilt. □

Sind die beiden Vektorfelder \mathbf{v} und \mathbf{w} rechtsinvariant, so gilt dies auch für alle Linearkombinationen $a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Die Menge aller rechtsinvarianten Vektorfelder bildet einen Vektorraum.

Definition B.15 (Olver 1986)

Die *Lie–Algebra* einer Gruppe G ist der Vektorraum aller rechtsinvarianten Vektorfelder auf G . □

Eine andere Möglichkeit der Definition der Lie–Algebra und des Kommutators sieht dagegen wie folgt aus (Isidori 1989):

Definition B.16

Ein Vektorraum V über \mathbb{R} heißt *Lie–Algebra*, wenn zusätzlich zu seiner Vektorraumstruktur es möglich ist, eine binäre Operation $V \times V \rightarrow V$ zu definieren, die Lie–Klammer genannt und als $[\cdot, \cdot]$ geschrieben wird, mit den Eigenschaften $[\cdot, \cdot]$:

i) ist *schief kommutativ*, d.h.

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}] \quad (\text{B.32})$$

ii) ist *bilinear* über \mathbb{R} , d.h.

$$[\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2, \mathbf{w}] = \alpha_1 [\mathbf{v}_1, \mathbf{w}] + \alpha_2 [\mathbf{v}_2, \mathbf{w}] \quad (\text{B.33})$$

wobei α_1, α_2 reelle Zahlen darstellen

iii) besitzt eine *Jacobi–Identität*, d.h.

$$[\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{z}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{z}, \mathbf{v}]] + [\mathbf{z}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] = 0 \quad . \quad (\text{B.34})$$

□

Es läßt sich nun ein Lie–Produkt (Lie–Klammer) $[\cdot, \cdot]$ wie folgt definieren: Seien \mathbf{f} und \mathbf{g} Vektorfelder. $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]$ ist dann ein neues Vektorfeld, dessen Werte beim Punkt \mathbf{p} , einen Tangentenvektor in $T_{\mathbf{p}}\mathcal{N}$, $C^\infty(\mathbf{p})$ abbildet auf \mathbb{R} . Das geschieht nach der Rechenvorschrift:

$$([\mathbf{f}, \mathbf{g}]) = (L_{\mathbf{f}}L_{\mathbf{g}}\lambda)(\mathbf{p}) - (L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}\lambda)(\mathbf{p}) \quad . \quad (\text{B.35})$$

Man kann auch vereinfacht schreiben:

$$L_{[\mathbf{f}, \mathbf{g}]} = L_{\mathbf{f}}L_{\mathbf{g}}\lambda - L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}\lambda \quad . \quad (\text{B.36})$$

In lokalen Koordinaten ergibt sich mit der Jacobi-Matrix:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})] &= \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{B.37})
 \end{aligned}$$

Gilt im speziellen Fall $\mathcal{N} = \mathbb{R}^n$ und

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x} \quad , \quad (\text{B.38})$$

dann gilt auch

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x} \quad . \quad (\text{B.39})$$

Als Operator aufgefaßt ergibt sich für den Kommutator:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A} \quad . \quad (\text{B.40})$$

Die Matrix $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ wird *Kommutator* von \mathbf{A}, \mathbf{B} genannt.

Anschaulich betrachtet ist der Kommutator ein Maß dafür, wie abhängig ein System von der Reihenfolge der Anwendung der Operatoren ist. Ist der Kommutator gleich Null, so ist es egal, welcher Operator zuerst angewendet wird, das System ist dann also bezüglich der betrachteten Operatoren kommutativ. Da im Rahmen der Differentialgeometrie die Lie-Klammer in Form des Kommutators benutzt wird, die Vektorfelder in einen Tangentialraum abbildet, kann man diese Lie-Klammer auch als Ableitung der Vektorfelder nach ihren Veränderlichen ansehen, wobei das Ergebnis in den Koordinaten der partiellen Ableitungen der ursprünglichen Vektorfelder ausgerechnet wird.

Satz B.2 Der Kommutator (Gl. (B.39)) bildet zusammen mit $V(\mathcal{M})$ eine Lie-Algebra. \square

Als Umkehrschluß läßt sich auch formulieren, daß eine Lie-Algebra eine Vektorraumstruktur und eine Kommutatorstruktur besitzt. Die Lie-Klammer bzw. der oben definierte Kommutator spielt eine große Rolle bei der differentialgeometrischen Beschreibung nichtlinearer Systeme. Darum sei an dieser Stelle noch eine wichtige Eigenschaft erwähnt:

- Sei \mathcal{N}' eine eingebettete Mannigfaltigkeit von \mathcal{N} . Seien ferner U' eine offene Menge von \mathcal{N}' und \mathbf{f}, \mathbf{g} glatte Vektorfelder von \mathcal{N}' , so daß für alle $\mathbf{p} \in U'$ gilt:

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{N}' \quad \text{und} \quad \mathbf{g}(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{N}' \quad , \quad (\text{B.41})$$

dann gilt auch

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{N}' \quad , \quad (\text{B.42})$$

für alle $\mathbf{p} \in U'$. In anderen Worten bedeutet dies, daß eine Lie-Klammer „tangential“ zu einer fixen Untermannigfaltigkeit immer noch eine tangentielle Untermannigfaltigkeit darstellt.

Ebenfalls wichtig ist die Erkenntnis, daß der Kommutator invariant unter Koordinatentransformationen ist (Olah 1993). Wird also mit Hilfe dieses Kommutators eine Distribution (Anhang B.12) dadurch erzeugt, daß Vektorfelder in lokalen Koordinaten benutzt werden, so ist das erzeugte Objekt (z.B. die Distribution \mathbf{P} aus Abschnitt 3.3 oder 3.5) unabhängig von den ursprünglich gewählten Koordinaten.

B.12 Distribution, Regulärität, Singulärität

Es seien d glatte Vektorfelder $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d$ gegeben, die alle auf derselben offenen Menge U definiert seien. Zu jedem fixen Punkt $\mathbf{x} \in U$ spannen die Vektoren $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_d(\mathbf{x})$ einen Vektorraum (einen Unterraum des Vektorraums, auf dem die Vektoren $\mathbf{f}_i(\mathbf{x})$ definiert sind, d.h. ein Unterraum von \mathbb{R}^n) auf. Dieser, von \mathbf{x} abhängige Vektorraum sei mit $\Delta(\mathbf{x})$ bezeichnet, also die Menge:

$$\Delta(\mathbf{x}) = \text{span} \{ \mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_d(\mathbf{x}) \} \quad . \quad (\text{B.43})$$

Durch diese Definition wird jedem Punkt \mathbf{x} aus U ein Vektorraum zugeordnet. $\Delta(\mathbf{x})$ stellt also den Vektorraum am Punkt \mathbf{x} dar. Da die Vektorfelder $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d$ glatt sind, wird auch die so definierte Menge als glatt bezeichnet. Das so charakterisierte Objekt heißt *glatte Distribution*.

Definition B.17

Der Vektorraum, der durch d Vektorfelder $\mathbf{f}_i, i = 1, 2, \dots, d$ aufgespannt wird, heißt *Distribution* Δ :

$$\Delta = \text{span} \{ \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_d \} \quad . \quad (\text{B.44})$$

□

Δ stellt somit den Vektorraum als ganzes dar. $\Delta(\mathbf{x})$ bezeichnet dann den „Wert“ von Δ bei einem Punkt \mathbf{x} . Punktweise ist eine Distribution also ein Vektorraum, bzw. ein Unterraum von \mathbb{R}^n . Daraus ergeben sich die folgenden Rechenregeln für Distributionen.

Die Summe zweier Distributionen Δ_1, Δ_2 wird berechnet, indem Punktweise die Summe der Unterräume $\Delta_1(\mathbf{x}), \Delta_2(\mathbf{x})$ berechnet wird:

$$(\Delta_1 + \Delta_2)(\mathbf{x}) = \Delta_1(\mathbf{x}) + \Delta_2(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{B.45})$$

Die Schnittmenge berechnet sich zu:

$$(\Delta_1 \cap \Delta_2)(\mathbf{x}) = \Delta_1(\mathbf{x}) \cap \Delta_2(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{B.46})$$

Sei \mathbf{F} eine Matrix, die aus n Zeilen aufgebaut ist und deren Elemente glatte Funktionen in Abhängigkeit von \mathbf{x} seien. Die Spalten der Matrix können als glatte Vektorfelder aufgefaßt werden. Somit kann jede derart aufgebaute Matrix eine glatte Distribution erzeugen, die durch

die Spalten der Matrix aufgespannt wird. Der Wert einer solchen Distribution zu einem beliebigen Punkt \mathbf{x} ist gleich dem *Bild* der Matrix $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ zu diesem Punkt:

$$\mathbf{\Delta}(\mathbf{x}) = \text{bild}(\mathbf{F}(\mathbf{x})) \quad . \quad (\text{B.47})$$

Dabei ist $\text{bild}(\mathbf{F})$ für eine $m \times n$ -Matrix gemäß Gl. (A.3) definiert. Aus dieser Überlegung ist ersichtlich, daß für eine Distribution $\mathbf{\Delta}$, die durch die Spalten einer Matrix \mathbf{F} aufgespannt wird, die Dimensionsbestimmung von $\mathbf{\Delta}$ identisch mit einer Rangbestimmung von \mathbf{F} ist. Für diesen Fall gilt dann:

$$\dim \mathbf{\Delta}(\mathbf{x}) = r = \text{rang} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.48})$$

Eine Distribution $\mathbf{\Delta}(\mathbf{x})$ heißt *nichtsingulär*, wenn eine nichtnegative ganze Zahl r existiert, so daß für alle $\mathbf{x} \in U$ gilt:

$$\dim(\mathbf{\Delta}(\mathbf{x})) = r \quad . \quad (\text{B.49})$$

Für eine nichtsinguläre Distribution $\mathbf{\Delta}(\mathbf{x})$ bzw. deren erzeugende Matrix $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ gilt dann, daß $\dim \mathbf{\Delta}(\mathbf{x})$ und $\text{rang} \mathbf{F}(\mathbf{x})$ konstant sind. Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in U$ heißt *regulärer* Punkt einer Distribution $\mathbf{\Delta}$, wenn eine Umgebung U_0 von \mathbf{x}_0 existiert, die die Eigenschaft besitzt, daß $\mathbf{\Delta}$ nichtsingulär auf U_0 ist.

Die so definierte Distribution $\mathbf{\Delta}(\mathbf{x})$ besitzt einige wichtige Eigenschaften:

Satz B.3

Es sei $\mathbf{\Delta}(\mathbf{x})$ eine glatte Distribution, \mathbf{x}_0 ein regulärer Punkt von $\mathbf{\Delta}(\mathbf{x})$ sowie $\dim \mathbf{\Delta}(\mathbf{x}_0) = d$, dann existiert eine offene Umgebung U_0 von \mathbf{x}_0 und eine Menge über U_0 definierter Vektorfelder:

$$\{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_d(\mathbf{x})\} \quad (\text{B.50})$$

mit den Eigenschaften:

- i) Die Vektoren $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_d(\mathbf{x})$ sind linear unabhängig für alle $\mathbf{x} \in U_0$.
- ii) $\mathbf{\Delta}(\mathbf{x}) = \text{span} \{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_d(\mathbf{x})\}$, für alle $\mathbf{x} \in U_0$.
- iii) Jedes glatte Vektorfeld $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$, das in $\mathbf{\Delta}(\mathbf{x})$ enthalten ist, läßt sich als Linearkombination der $\mathbf{f}_i(\mathbf{x})$ darstellen zu:

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d c_i(\mathbf{x}) \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \quad , \quad (\text{B.51})$$

worin die $c_i(\mathbf{x})$ reellwertige, über U_0 definierte Funktionen von \mathbf{x} sind.

□

Mit Hilfe der Lie-Klammer lassen sich im folgenden nun einige Eigenschaften von Distributionen erklären.

Definition B.18

Eine Distribution $\Delta(\mathbf{x})$ ist *involutiv*, wenn die Lie-Klammer $[\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x})]$ eines beliebigen zu $\Delta(\mathbf{x})$ gehörenden Paares von Vektorfeldern $\mathbf{f}_1(\mathbf{x})$ und $\mathbf{f}_2(\mathbf{x})$ ein Vektorfeld ist, das wiederum in $\Delta(\mathbf{x})$ enthalten ist:

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \in \Delta(\mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \in \Delta(\mathbf{x}) \Rightarrow [\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x})] \in \Delta(\mathbf{x}) \quad (\text{B.52})$$

□

Eine solche Eigenschaft wird auch mit *Abgeschlossenheit unter Kommutieren* bezeichnet. Die Überprüfung einer solchen involutiven Eigenschaft kann mit Hilfe des folgenden Rangkriteriums erfolgen:

Satz B.4

Eine Distribution $\Delta(\mathbf{x}) = \text{span} \{ \mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_d(\mathbf{x}) \}$ mit der Dimension $\dim \Delta(\mathbf{x}) = d$ ist involutiv, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \text{rang} \quad & [\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) : \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) : \dots : \mathbf{f}_d(\mathbf{x})] \\ & = \text{rang} \quad [\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) : \dots : \mathbf{f}_d(\mathbf{x}) [\mathbf{f}_i(\mathbf{x}), \mathbf{f}_j(\mathbf{x})]] \\ & \quad \text{für alle } i, j = 1, 2, \dots, d \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

□

Eine Distribution $\Delta(\mathbf{x})$ heißt *invariant* unter einem Vektorfelder \mathbf{f} , wenn die Lie-Klammer $[\mathbf{f}, \tau]$ von \mathbf{f} und jedem Vektorfeld τ von Δ wiederum ein Vektorfeld von Δ erzeugt. Also wenn:

$$\tau \in \Delta \Rightarrow [\mathbf{f}, \tau] \in \Delta \quad . \quad (\text{B.54})$$

Dieselbe Aussage liefert die dichtere Schreibweise, in der $[\mathbf{f}, \Delta]$ die Distribution bezeichnet, die von allen Vektorfeldern der Form $[\mathbf{f}, \tau]$ mit $\tau \in \Delta$ aufgespannt wird:

$$[\mathbf{f}, \Delta] = \text{span} \{ [\mathbf{f}, \tau], \tau \in \Delta \} \quad . \quad (\text{B.55})$$

Satz B.5

Es seien eine glatte Distribution Δ und eine Menge von Vektorfeldern τ_1, \dots, τ_q gegeben. Die Familie aller Distributionen, die invariant unter τ_1, \dots, τ_q sind und Δ enthalten, besitzen ein kleinstes Element, welches ebenfalls eine glatte Distribution darstellt. □

Diese kleinste Δ beinhaltende Distribution, die invariant unter den Vektorfeldern τ_1, \dots, τ_q ist, wird durch die folgende Schreibweise dargestellt:

$$\langle \tau_1, \dots, \tau_q \mid \Delta \rangle \quad . \quad (\text{B.56})$$

B.13 Kodistributionen, Annulatoren

Häufig lassen sich Rechnungen bezüglich Distributionen vereinfachen, indem zu ihnen *duale* Objekte, die sog. *Kodistributionen* betrachtet werden: Gegeben sei ein auf einer offenen Teilmenge \mathcal{M} von \mathbb{R}^n definiertes glattes Kovektorfeld ω . Das kann als eine glatte Zuordnung – für jeden Punkt $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ – zu einem Element des dualen Raums $(\mathbb{R}^n)^*$ aufgefaßt werden. Mit einer Menge glatter Kovektorfelder $\omega_1, \dots, \omega_d$, die alle auf derselben Teilmenge \mathcal{M} von \mathbb{R}^n definiert seien, kann eine Zuordnung – für jeden Punkt \mathbf{x} aus \mathcal{M} – zu einem Punkt einer Teilmenge von $(\mathbb{R}^n)^*$, die durch die Kovektoren $\omega_1, \dots, \omega_d$ aufgespannt, wird assoziiert werden. Da die Kovektorfelder $\omega_1, \dots, \omega_d$ glatt sind, nennt man das so charakterisierte Objekt *glatte Kodistribution*. Analog zur Schreibweise der Distributionen wird vereinbart:

$$\Omega = \text{span} \{ \omega_1, \dots, \omega_d \} \quad (\text{B.57})$$

$$\Omega(\mathbf{x}) = \text{span} \{ \omega_1(\mathbf{x}), \dots, \omega_d(\mathbf{x}) \} \quad . \quad (\text{B.58})$$

Manchmal ist es möglich Kodistributionen durch Distributionen zu konstruieren, oder auch umgekehrt. Auf diese Weise soll nun eine Kodistribution und eine Distribution festgelegt werden. Es sei eine Distribution Δ gegeben. Für jedes \mathbf{x} aus \mathcal{M} ist der *Annulator* von $\Delta(\mathbf{x})$ die Menge von Kovektoren, die alle Vektoren in $\Delta(\mathbf{x})$ annullieren:

$$\Delta^\perp(\mathbf{x}) = \{ \omega^* \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle \omega^*, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in \Delta(\mathbf{x}) \} \quad . \quad (\text{B.59})$$

Da $\Delta^\perp(\mathbf{x})$ eine Teilmenge des $(\mathbb{R}^n)^*$ darstellt, wird dadurch exakt eine Kodistribution erzeugt, in der – zu jedem Punkt \mathbf{x} aus \mathcal{M} – eine Teilmenge von $(\mathbb{R}^n)^*$ zugeordnet wird. Diese Kodistribution Δ^\perp heißt *Annulator* von Δ .

Sehr anschaulich wird die Einführung einer Kodistribution anhand des sehr bekannten Beispiels des orthogonalen Komplements nach Bronsteijn und Semendjajew (1991). Demnach sind die Kovektoren, die die Vektoren der Distribution Δ annullieren orthogonal zu diesen Vektoren. Die Kodistribution Δ^\perp ist dann die Vereinigungsmenge aller nur möglichen Vektoren, die zu allen Vektoren der Distribution Δ orthogonal sind. Diese Kodistribution Δ^\perp stellt somit nach Bronsteijn und Semendjajew (1991) das orthogonale Komplement zur Distribution Δ dar (Formal geht das jedoch nur, wenn gilt: $\mathbb{R}^m = (\mathbb{R}^n)^*$.)

Umgekehrt kann zu einer gegebenen Kodistribution Ω eine Distribution Ω^\perp konstruiert werden, der sog. Annulator von Ω , mit:

$$\Omega^\perp(\mathbf{x}) = \{ v \in \mathbb{R}^n : \langle \omega^*, v \rangle = 0 \text{ für alle } \omega^* \in \Omega(\mathbf{x}) \} \quad . \quad (\text{B.60})$$

Sei eine nichtsinguläre Distribution Δ mit der Dimension d gegeben und auf einer offenen Teilmenge \mathcal{M} von \mathbb{R}^n definiert. Dann gibt es in einer Umgebung \mathcal{M}_0 von \mathbf{x}_0 d glatte und linear unabhängige Vektorfelder $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d$, die auf \mathcal{M}_0 definiert sind, die Δ aufspannen, also:

$$\Delta(\mathbf{x}) = \text{span} \{ \mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_d(\mathbf{x}) \} \quad , \quad (\text{B.61})$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_0$. Die Kodistribution $\Omega = \Delta^\perp$ ist dann ebenfalls glatt und nichtsingulär. Ihre Dimension beträgt $n - d$ und wird lokal um jeden Punkt \mathbf{x}_0 durch $n - d$ Kovektorfelder $\omega_1, \dots, \omega_{n-d}$ aufgespannt. Das heißt:

$$\Omega(\mathbf{x}) = \Delta^\perp(\mathbf{x}) = \text{span} \{ \omega_1, \dots, \omega_{n-d} \} \quad , \quad (\text{B.62})$$

mit

$$\dim \Omega = \dim \Delta^\perp = n - d \quad . \quad (\text{B.63})$$

Per Konstruktion besitzt das Kovektorfeld ω_j für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_0$ die Form

$$\langle \omega_j(\mathbf{x}), \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \rangle = 0 \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n - d \quad ; \quad (\text{B.64})$$

d.h. sie lösen die Gleichung

$$\omega_j(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \quad , \quad (\text{B.65})$$

mit der $n \times d$ Matrix \mathbf{F}

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_d(\mathbf{x})] \quad . \quad (\text{B.66})$$

Es sollen nun jedoch nicht jegliche Lösungen von Gl.(B.65) akzeptiert werden, sondern mit Hilfe der reell-wertigen glatten Funktionen $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}$ sollen die Lösungen der Gleichung

$$\omega_j = \frac{\partial \lambda_j}{\partial \mathbf{x}} \quad (\text{B.67})$$

genügen. Ist das der Fall, so können die Funktionen $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}$ dazu benutzt werden, eine Koordinatentransformation (lokal um \mathbf{x}_0) zu definieren, durch die die Vektorfelder der Distribution Δ besonders einfach dargestellt werden kann. Das Problem sei also die Lösbarkeit einer partiellen Differentialgleichung der Form:

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \dots \mathbf{f}_d(\mathbf{x})] = \frac{\partial \lambda_j}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \quad . \quad (\text{B.68})$$

Diese Fragestellung führt dann zu dem Begriff der vollständigen Integrierbarkeit, der im nächsten Abschnitt erläutert werden soll.

B.14 Frobenius–Theorem, vollständige Integrierbarkeit

Eine auf einer offenen Teilmenge \mathcal{M} von \mathbb{R}^n definierte, nichtsinguläre, d -dimensionale Distribution Δ heißt *vollständig integrierbar*, wenn für jeden Punkt \mathbf{x}_0 von \mathcal{M} eine Umgebung \mathcal{M}_0 von \mathbf{x}_0 und $n - d$ auf \mathcal{M}_0 definierte reell-wertige, glatte Funktionen $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}$ existieren, so daß gilt:

$$\text{span} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_{n-d} \} = \Delta^\perp \quad . \quad (\text{B.69})$$

Darauf aufbauend ergibt sich die folgende sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingung für die vollständige Integrierbarkeit:

Satz B.6 (Isidori 1989)

Eine nichtsinguläre Distribution ist vollständig integrierbar genau dann, wenn sie involutiv ist. \square

B.15 Koordinatentransformation

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Beschreibung nichtlinearer Systeme stellt die Koordinatentransformation im Zustandsraum dar. Durch eine Koordinatentransformation ist es oft möglich, bestimmte Eigenschaften wie z.B. die in dieser Arbeit untersuchte Steuerbarkeit bestimmter Systeme hervorzuheben. Bei der Betrachtung linearer Systeme werden üblicherweise *lineare* Koordinatentransformationen in Betracht gezogen. Dabei wird dann der ursprüngliche Zustandsvektor \mathbf{x} durch einen neuen Vektor \mathbf{z} ersetzt, der nach der Transformationsvorschrift

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad (\text{B.70})$$

berechnet wird. Dabei stellt \mathbf{T} eine nichtsinguläre $n \times n$ -Matrix dar. Wird also das ursprüngliche lineare System

$$\sum_{LS} \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{array} \quad (\text{B.71})$$

durch die Beschreibung

$$\sum_{LS} \begin{array}{l} \dot{\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \overline{\mathbf{C}}\mathbf{z} \end{array} \quad (\text{B.72})$$

ersetzt, so gilt

$$\begin{array}{l} \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} \\ \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\mathbf{B} \\ \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1} \end{array} \quad (\text{B.73})$$

Bei nichtlinearen Systemen hingegen erscheint eine *nichtlineare* Koordinatentransformation oft sinnvoller. Eine nichtlineare Koordinatentransformation kann wie folgt beschrieben werden:

$$\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x}) \quad (\text{B.74})$$

Dabei ist ϕ eine nach Anhang B.3 beschriebene Funktion, die einen globalen Diffeomorphismus auf \mathbb{R}^n darstellt. Dabei stellt die 2. Eigenschaft in dem eben erwähnten Abschnitt die Notwendigkeit dafür dar, daß eine Umkehrtransformation existiert und der ursprüngliche Zustandsvektor berechnet werden kann:

$$\mathbf{x} = \phi^{-1}(\mathbf{z}) \quad (\text{B.75})$$

Für nichtlineare Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x})u_i \quad (\text{B.76})$$

eignet sich die folgende Beschreibung. Sei

$$\mathbf{z}(t) = \phi(\mathbf{x}(t)) \quad (\text{B.77})$$

Durch Ableitung nach der Zeit ergibt sich:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t)] \quad (\text{B.78})$$

Wird die Beziehung $\mathbf{x}(t) = \phi^{-1}(\mathbf{z}(t))$ ausgenutzt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}(t) &= \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}(t)) + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{z}(t))\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{z}(t)) \quad .\end{aligned}\tag{B.79}$$

Für die Umrechnung in das neue Koordinatensystem gilt somit:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) &= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{x}=\phi^{-1}(\mathbf{z})} \\ \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{z}) &= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{x}=\phi^{-1}(\mathbf{z})} \\ \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{z}) &= [\mathbf{h}(\mathbf{x})]_{\mathbf{x}=\phi^{-1}(\mathbf{z})} \quad .\end{aligned}\tag{B.80}$$

Auch für diese Umrechnung können die Vektorfelder als Operatoren aufgefaßt werden. Dies soll durch Umschreiben der ersten Gleichung verdeutlicht werden:

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) = \left[\mathbf{f}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \phi \right]_{\mathbf{x}=\phi^{-1}(\mathbf{z})}\tag{B.81}$$

Ist die betrachtete Transformation linear, so ergibt sich mit $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{T}\mathbf{x}$ für die Gleichung (B.80) die gleiche Transformationsvorschrift wie in Gleichung (B.73).