

Über logische Bewertung und Anwendung von Verknüpfungs–Operatoren in der Fuzzy–Regelung

Michael Berger

Forschungsbericht Nr. 5/95

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: In diesem Bericht wird ein neues Bewertungskriterium zur Auswahl von Verknüpfungs–Operatoren in der Fuzzy–Regelung vorgestellt. Bewertet werden die Verknüpfungs–Operatoren zur Regelung von technischen Prozessen durch einen Vergleich der Abhängigkeiten der Stellgröße. Verglichen wird die durch die aufgestellten linguistischen Regeln beschriebene Abhängigkeit der Stellgröße mit der aus der analytischen Beschreibung des Fuzzy–Reglers berechnete Abhängigkeit der Stellgröße.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	II
1 Einleitende Übersicht	1
2 Analytische Darstellung	5
3 Bewertungskriterium	8
3.1 Operatoren	12
3.2 t -Norm-basierte Operatoren	14
4 Algebraisches Produkt	16
5 Minimum-Operator	24
6 Lukasiewicz-Operator (Beschränkte Differenz)	34
7 Einstein Produkt	43
8 Hamacher Produkt	47
9 Durchschnitts-Operatoren (Kompensatorische Operatoren)	51
9.1 Harmonisches Mittel	52
9.2 Geometrisches Mittel	55
9.3 Arithmetisches Mittel	61
10 Zusammenfassung und Ausblick	63
11 Literaturverzeichnis	66
Anhang	71
A Kennfelder	71
B Binäre Fuzzy-Relationen	75

Nomenklatur

α_z	:	Erfülltheitsgrad der Prämisse
α_A	:	linke Spannweite der Fuzzy-Menge A
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$:	partielle Fuzzy-Unterräume
β_A	:	rechte Spannweite der Fuzzy-Menge A
γ	:	Parameter der parametrischen Operatoren
m_A	:	Modalwert der Fuzzy-Referenzmenge A
m_E	:	Anzahl der Fuzzy-Referenzmengen X_i
$m_{\Delta E}$:	Anzahl der Fuzzy-Referenzmengen Y_j
m_U	:	Anzahl der Fuzzy-Referenzmengen U_k
$m_{\Delta U}$:	Anzahl der Fuzzy-Referenzmengen ΔU_l
e	:	Regelabweichung
Δe	:	Änderung der Regelabweichung
k	:	diskretes Zeitargument
$pr(R)$:	Projektion einer Relation
R	:	unscharfe Relation
R^{\otimes}	:	unscharfe kartesische Relation
R_z	:	z -te Regel
T	:	Abtastzeit
$T(R)$:	Träger einer unscharfen Relation
$T(A)$:	Träger einer Fuzzy-Menge
u	:	Stellgröße
u^R	:	Abhängigkeit der Stellgröße durch die linguistischen Regeln
u^f	:	Abhängigkeit der Stellgröße durch die analytische Berechnung des Fuzzy-Reglers
z	:	Anzahl der Regeln

Mengen:

A, B, C, D	:	Fuzzy-Menge
\mathbb{D}	:	Definitionsbereich
\mathbb{D}_N	:	Definitionsbereich normierter Größen $\mathbb{D}_N = [-1; 1]$
\mathbb{D}_N^+	:	Definitionsbereich normierter positiver Größen $\mathbb{D}_N^+ = [0; 1]$
\mathbb{N}	:	Menge der natürlichen Zahlen
NG	:	Fuzzy-Menge <i>negativ groß</i>
NM	:	Fuzzy-Menge <i>negativ mittel</i>
NP	:	Fuzzy-Menge <i>in der Nähe des Nullpunktes</i>
PG	:	Fuzzy-Menge <i>positiv groß</i>
PM	:	Fuzzy-Menge <i>positiv mittel</i>
U_k	:	Fuzzy-Referenzmenge der Ausgangsgröße „Stellgröße u “

\mathbb{U}	:	Menge der Fuzzy-Referenzmengen der Ausgangsgröße „Stellgröße u “
ΔU_l	:	Fuzzy-Referenzmenge der Ausgangsgröße „Änderung der Stellgröße Δu “
$\Delta \mathbb{U}$:	Menge der Fuzzy-Referenzmengen der Ausgangsgröße „Änderung der Stellgröße Δu “
X_i	:	Fuzzy-Referenzmenge der Eingangsgröße „Regelabweichung e “
\mathbb{X}	:	Menge der Fuzzy-Referenzmengen der Eingangsgröße „Regelabweichung e “
Y_j	:	Fuzzy-Referenzmenge der Eingangsgröße „Änderung der Regelabweichung Δe “
\mathbb{Y}	:	Menge der Fuzzy-Referenzmengen der Eingangsgröße „Änderung der Regelabweichung Δe “
\mathcal{Z}	:	Grundbereich der Projektionen

Unscharfe Größe:

E	:	fuzzifizierte Größe e
ΔE	:	fuzzifizierte Größe Δe
U	:	fuzzifizierte Größe u
ΔU	:	fuzzifizierte Größe Δu

Vektoren und Matrizen:

\mathbf{x}	:	Vektor der Eingangsgrößen
\mathbf{R}^\otimes	:	Fuzzy-Relationalmatrix (unscharfe kartesische Relation)
\mathbf{R}	:	Fuzzy-Relationalmatrix (unscharfe Relation)

Operatoren:

$D(\cdot)$:	Durchschnitts-Operator
D_{am}	:	Arithmetisches Mittel
D_{gm}	:	Geometrisches Mittel
D_{hm}	:	Harmonisches Mittel
$\min(\cdot)$:	Minimum-Operator
$\max(\cdot)$:	Maximum-Operator
$\sup(\cdot)$:	Supremum
\otimes	:	unscharfes kartesisches Produkt
\in	:	Element von
\notin	:	kein Element von
\forall	:	Allquantor
$(\cdot)^T$:	transponierte Größe

$(\cdot)^{-1}$:	Inverse
\Rightarrow	:	Fuzzy-Implikation
\Leftrightarrow	:	Äquijunktion
\cap	:	Durchschnitt
\cup	:	Vereinigung
\top	:	t -Norm
$\prod_{i=1}^n$:	t -Norm Operator (n -dimensional)
\top_s	:	Fundamental t -Norm
\perp	:	t -Conorm (s -Norm)
\perp_{max}	:	Maximum-Operator
\perp_{ds}	:	Drastische Summe
\top_{ap}	:	Algebraisches Produkt
\top_{min}	:	Minimum-Operator
\top_{Luk}	:	Lukasiewicz-Operator
\top_{hp}	:	Hamacher Produkt
\top_{ep}	:	Einstein Produkt
\top_{dp}	:	Drastisches Produkt
H_γ^\top	:	HAMACHER Produkt (algebraischen t -Quotienten)
H_γ^\perp	:	HAMACHER Summe (algebraischen s -Quotienten)

Funktionen:

$\exp(\cdot)$:	Exponentialfunktion
fbf^z	:	Fuzzy-Basisfunktion der z -ten Regel
$f(\cdot)$:	allgemeine Funktion
$M(\cdot)$:	Funktion des Durchschnitts-Operators
$\ln(\cdot)$:	natürlicher Logarithmus
$\log(\cdot)$:	Zehnerlogarithmus
μ_A	:	Zugehörigkeitsgrad zur Menge A

1 Einleitende Übersicht

Bei der kognitiven Analyse zur Regelung technischer Prozesse wird das Expertenwissen in Form von linguistischen Regeln formuliert. Linguistisch formulierte Regeln bestehen im allgemeinen aus einer Prämisse, die eine bestimmte Situation in Form einer (unscharfen) Spezifikation der Werte für die Meßgrößen beschreibt, und einer Konklusion, die den geeigneten Stellenwert für diese Situation (unscharf) angibt. Neben dem Partitionieren der durch die linguistischen Terme assoziierten Fuzzy-Mengen und der Defuzzifizierungsmethode müssen geeignete Verknüpfungs-Operatoren wie Durchschnitt (Konjunktion) und Vereinigung (Disjunktion) (Böhme 1993) für die Fuzzy-Mengen definiert werden. Die wesentlichen Verknüpfungen im Zusammenhang mit Fuzzy-Mengen können durch die t -Normen \top bzw. t -Conormen (s -Normen) \perp (Kaufmann und Gupta 1991, Kruse, Gebhardt und Klawonn 1994, Gottwald 1989, 1993, Böhme 1993, Butnariu und Klement 1993, Bertram u. a. 1994) realisiert werden. Sie entsprechen dem Durchschnitt (fuzzy-logisches UND) zweier Fuzzy-Mengen

$$A \cap B = \{(x, \mu_{A \cap B}(x)) \mid \mu_{A \cap B}(x) := \top(\mu_A(x), \mu_B(x)) \wedge x \in \mathbb{D}\} \quad (1.1)$$

bzw. der Vereinigung (fuzzy-logisches ODER)

$$A \cup B = \{(x, \mu_{A \cup B}(x)) \mid \mu_{A \cup B}(x) := \perp(\mu_A(x), \mu_B(x)) \wedge x \in \mathbb{D}\} \quad (1.2)$$

(Kacprzyk und Ziółkowski 1986, Kacprzyk und Iwánski 1987). t -Normen bzw. t -Conormen genügen den Minimalvoraussetzungen für einen Durchschnittsoperator bzw. einem Vereinigungsoperator (Nauck, Klawonn und Kruse 1994) wie z. B. Monotonie und die Anwendbarkeit des Kommutativ- und Assoziativgesetzes (Böhme 1992). Zur Auswahl von t -Normen bzw. t -Conormen können verschiedene Ziele verfolgt werden, wie z. B. (Grimm 1992, 1994):

- Erhaltung von möglichst vielen Eigenschaften der klassischen Mengenlehre,
- anwendungsbezogene Abbildung von semantischen Bedeutungen.

In diesem Bericht werden die Fuzzy-Operatoren (Verknüpfungs-Operatoren) bezüglich ihres charakteristischen Ein- und Ausgangsverhaltens untersucht. Ausgangspunkt der Untersuchungen sind Standard-Fuzzy-Regler (Berger 1994a, b) (Abschnitt 2) (Hierbei werden die Standard-Fuzzy-Regler unabhängig von der Art der Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_{X_i}(e(kT))$ und $\mu_{Y_j}(\Delta e(kT))$ betrachtet.). Da bei der Defuzzifizierung die Schwerpunktmethod für Fuzzy-Einermengen (Kahlert und Frank 1993, Bertram u. a. 1994) angewandt werden soll

$$u(kT) = \frac{\sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z(e(kT), \Delta e(kT)) m_z}{\sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z(e(kT), \Delta e(kT))} , \quad (1.3)$$

welche die Operatoren Aktivierung, Aggregation und Defuzzifizierung zu einem Rechenschritt zusammenfaßt (Kroll 1993, Bertram u. a. 1994), werden hier nur die t -Normen untersucht (Operator zur Prämissenauswertung). Der Erfülltheitsgrad (Bertram 1991)

$$\alpha_z(e(kT), \Delta e(kT)) = \top(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT))) \quad (1.4)$$

der Regel R_z wird in Abhängigkeit der t -Norm \top berechnet. Die Ergebnisse sind unabhängig von den Zugehörigkeitsfunktionen (Repräsentation der Fuzzy-Referenzmenge), wenn die Fuzzy-Referenzmengen konvex (Lowen 1980), normalisiert, einfach überlappend und orthogonal sind (Rommelfanger 1994, Bandemer und Gottwald 1993, Böhme 1993, Driankov, Hellendoorn und Reinfrank 1993, Leichtfried und Heiss 1995).

Definition 1.1 (Lowen 1980)

Eine Fuzzy-Menge $\mu : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}_N^+$ ist konvex, wenn für alle $x, y \in \mathbb{D}$ und $a \in \mathbb{D}_N^+$

$$\mu(ax + (1-a)y) \geq \min(\mu(x), \mu(y))$$

ist. □

Nach Kacprzyk (1983) werden die Operatoren einer

- intuitiven,
- axiomatischen¹ oder
- experimentellen

Klasse zugeteilt. Die experimentelle Klasse, in der der Operator experimentell für den speziellen Anwendungsfall bestimmt wird (Zimmermann 1978), wird hier nicht betrachtet. Untersucht werden in den Abschnitten 4 bis 8 die in der Tabelle 1.1 aufgeführten t -Normen, welche zur intuitiven und axiomatischen Klasse gehören (nicht parametrische und kontinuierliche t -Normen) (Wangming 1988, Lee 1990, Mayer u. a. 1993, Ying 1993, Mesiar 1994). Es erfolgt eine Beschreibung der binäre Darstellung $\overset{2}{\top} : \mathbb{D}_N^+ \times \mathbb{D}_N^+ \rightarrow \mathbb{D}_N^+$.

Eine Erweiterung auf $\overset{n}{\top} : \mathbb{D}_N^+ \times \cdots \times \mathbb{D}_N^+ \rightarrow \mathbb{D}_N^+$ ist jedoch möglich. Zusätzlich zu den t -Normen werden im Abschnitt 9 die Durchschnitts-Operatoren (Kompensatorische-Operatoren) (Mizumoto 1989b, Böhme 1993), welche in der Tabelle 1.2 aufgeführt sind, behandelt.

¹Die grundlegende Arbeit zur Erstellung der axiomatischen Systeme wurden von Bellmann und Giertz (1973) geleistet.

Algebraisches Produkt	$\top_{ap}(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \mu_{X_i} \mu_{Y_j}$
Minimum-Operator	$\top_{min}(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \min(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j})$
Lukasiewicz-Operator	$\top_{Luk}(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \max(0, \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - 1)$
Hamacher Produkt	$\top_{hp}(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \frac{\mu_{X_i} \mu_{Y_j}}{\mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - \mu_{X_i} \mu_{Y_j}}$
Einstein Produkt	$\top_{ep}(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \frac{\mu_{X_i} \mu_{Y_j}}{2 - (\mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - \mu_{X_i} \mu_{Y_j})}$

Tabelle 1.1: Untersuchte t -Normen

Durch die Anwendung von Durchschnitts-Operatoren können kompensatorische Effekte erzielt werden. Der Begriff „kompensatorisch“ bezieht sich hier auf die Neigung des menschlichen Sprachverständnisses zwischen den Formulierungen UND und ODER zu gewichten. Der resultierende Wert des Durchschnitts-Operators liegt zwischen dem Minimum- und Maximum-Operator. Der Erfülltheitsgrad

$$\alpha_z(e(kT), \Delta e(kT)) = D(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT))) \quad (1.5)$$

wird in diesem Abschnitt in Abhängigkeit vom Durchschnitt-Operator D untersucht.

Harmonisches Mittel	$D_{hm}(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \frac{2 \mu_{X_i} \mu_{Y_j}}{\mu_{X_i} + \mu_{Y_j}}$
Geometrisches Mittel	$D_{gm}(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \sqrt{\mu_{X_i} \mu_{Y_j}}$
Arithmetisches Mittel	$D_{am}(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \frac{\mu_{X_i} + \mu_{Y_j}}{2}$

Tabelle 1.2: Untersuchte Durchschnitts-Operatoren (Kompensatorische Operatoren)

In diesem Bericht wird ein neues Bewertungskriterium zur Auswahl von Fuzzy-Operatoren (t -Normen, Durchschnitts-Operatoren) hergeleitet. Bewertet wird der Einsatz von t -Normen bzw. Durchschnitts-Operatoren zur Regelung von technischen Prozessen anhand der durch die aufgestellten linguistischen Regeln (relationale Regeln) beschriebenen Abhängigkeit der Stellgröße z. B.

$$u^R(kT) = R(\epsilon(kT), \Delta\epsilon(kT)) \quad (1.6)$$

und dem charakteristischen Ausgangsverhalten (Approximation der relationalen Regeln durch den Fuzzy-Regler) (Abschnitt 3) z. B.

$$u^f(kT) = f(\epsilon(kT), \Delta\epsilon(kT)) \quad (1.7)$$

Untersucht wird die Abhängigkeit der Stellgröße $u^f(kT)$ von der Regelabweichung $\epsilon(kT)$ und/oder der Änderung der Regelabweichung $\Delta\epsilon(kT)$ im Zusammenhang mit den aufgestellten relationalen Regeln $u^R(kT)$. Zu diesem Zweck werden die Standard-Fuzzy-Regler analytisch (Ying, Silver und Backley 1990, Bertram 1992, Behmenburg 1993, Behmenburg und Bertram 1993, Berger 1994c) in einem Fuzzy-Unterraum dargestellt. Die Einteilung der Fuzzy-Unterräume entstehen aufgrund der Partitionierung (Kruse, Gebhardt und Klawonn 1994) der Fuzzy-Referenzmengen

$$X_i = \{\epsilon(kT), \mu_{X_i}(\epsilon(kT)) \mid \epsilon(kT) \in \mathbb{D}_N\} \quad (1.8)$$

und

$$Y_j = \{\Delta\epsilon(kT), \mu_{Y_j}(\Delta\epsilon(kT)) \mid \Delta\epsilon(kT) \in \mathbb{D}_N\} \quad (1.9)$$

mit $i = 1, \dots, m_E$ und $j = 1, \dots, m_{\Delta E}$ (Berger 1994c). Innerhalb eines Fuzzy-Unterraumes wird das Regelungsverhalten des Fuzzy-Reglers durch maximal vier aktive (Frenck 1993, 1994) relationale Regeln beschrieben. Die vier aktiven relationalen Regeln entstehen aufgrund der einfachen Überlappung der Fuzzy-Referenzmengen X_i und Y_j mit $i = 1, \dots, m_E$ und $j = 1, \dots, m_{\Delta E}$ über den normierten Definitionbereich \mathbb{D}_N . Eine aktive relationale Regel entspricht einem partiellen Fuzzy-Unterraum \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} oder \mathcal{D} (Berger 1994c).

Untersucht wird das Regelungsverhalten der Standard-Fuzzy-Regler für verschiedene t -Normen bzw. Durchschnitts-Operatoren für unterschiedliche Anordnungen der Konklusionen im Fuzzy-Unterraum. Die hier dokumentierten Ergebnisse können als weiteres Auswahlkriterium zur Anwendung von t -Normen bzw. Durchschnitts-Operatoren zur konjunktiven Verknüpfung von Partiaprämissen zur Regelung technischer Prozesse mit der Fuzzy-Logik dienen. Dem Anwender ist somit neben den Gesichtspunkten der Relationalitätsanforderungen wie z. B. Kommutativität, Assoziativität, Stetigkeit, Monotonie und Idempotenz (Böhme 1993) und den pragmatischen Aspekten wie z. B. sensitives und interaktives Verhalten, empirische Relevanz, Adaptionsfähigkeit, numerische Effizienz und Skalenniveau der Zugehörigkeitsfunktionen (Zimmermann 1987, Grimm 1992, 1994, Pedrycz 1993, Driankov Hellendoorn und Reinfrank 1993, Mayer u. a. 1994) von t -Normen bzw. Durchschnitts-Operatoren eine weitere Entscheidungshilfe an die Hand gelegt. Der Bericht schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick in Abschnitt 10.

2 Analytische Darstellung

Innerhalb der Fuzzy–Unterräume lassen sich die relationalen Fuzzy–Regler durch eine analytische Funktion (Ying, Silver und Backley 1990, Grimm 1992, Bertram 1992, Behmenburg und Bertram 1993 und Berger 1994c) beschreiben. Die Fuzzy–Unterräume entstehen aufgrund der Partitionierung (Kruse, Gebhardt und Klawonn 1994) der Fuzzy–Referenzmengen über dem normierten Definitionsbereich \mathbb{D}_N (Bild 2.1).

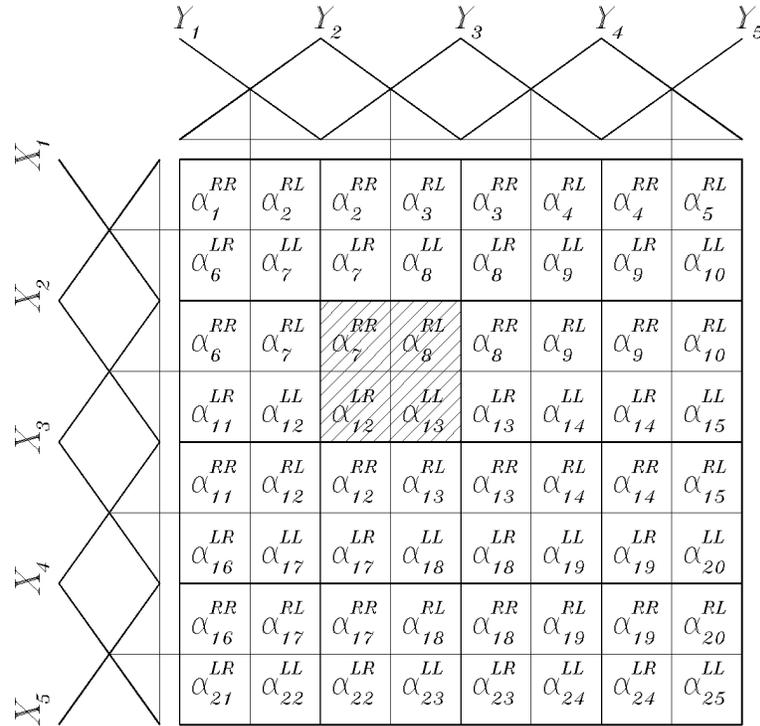


Bild 2.1: Fuzzy–Unterräume und Fuzzy–Referenzmengen X_i und Y_j der Partialprämissen in der e - Δe -Ebene

In einem Fuzzy–Unterraum wird der Fuzzy–Regler durch maximal vier aktive (Frenck 1993, 1994) relationale Regeln beschrieben, wobei ein partieller Fuzzy–Unterraum \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} oder \mathcal{D} (Berger 1994c) eine aktive relationale Regel charakterisiert (Bild 3.2) (z. B. markiertes Quadrat im Bild 2.1).

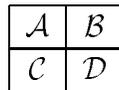


Bild 2.2: Fuzzy–Unterraum mit zusätzlicher Unterteilung in partielle Fuzzy–Unterräume \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} und \mathcal{D}

Zur Darstellung der Fuzzy–Unterräume werden die Erfülltheitsgrade $\alpha_z(e(kT), \Delta e(kT))$ für $z = 1, \dots, m_E m_{\Delta E}$ bzw. die Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_{X_i}(e(kT))$ und $\mu_{Y_j}(\Delta e(kT))$

(Bild 2.3) weiter unterschieden in

$$\alpha_z^{LR}(e(kT), \Delta e(kT)) = \mu_{X_i}^L(e(kT)) \mu_{Y_j}^R(\Delta e(kT)) , \quad (2.1)$$

$$\alpha_z^{RL}(e(kT), \Delta e(kT)) = \mu_{X_i}^R(e(kT)) \mu_{Y_j}^L(\Delta e(kT)) , \quad (2.2)$$

$$\alpha_z^{RR}(e(kT), \Delta e(kT)) = \mu_{X_i}^R(e(kT)) \mu_{Y_j}^R(\Delta e(kT)) , \quad (2.3)$$

und

$$\alpha_z^{LL}(e(kT), \Delta e(kT)) = \mu_{X_i}^L(e(kT)) \mu_{Y_j}^L(\Delta e(kT)) , \quad (2.4)$$

wobei die Indizierung X_i und Y_j verweisen

: Fuzzy-Referenzmengen

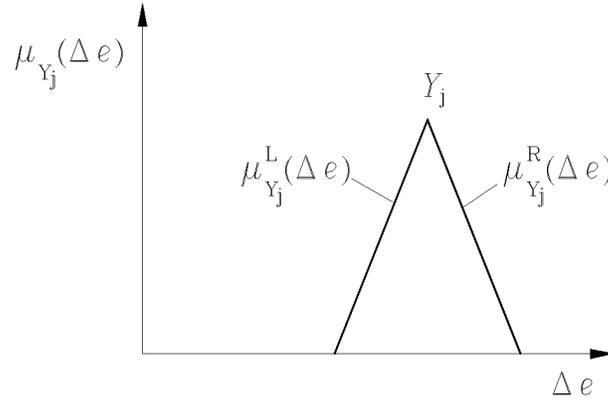


Bild 2.3: Unterscheidung der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{Y_j}(\Delta e(kT))$ in $\mu_{Y_j}^L(\Delta e(kT))$ und $\mu_{Y_j}^R(\Delta e(kT))$

Die Stellgröße

$$u(kT) = \frac{\sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z(e(kT), \Delta e(kT)) m_z}{\sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z(e(kT), \Delta e(kT))} , \quad (2.5)$$

welche nach der Schwerpunktmethod für Fuzzy-Einermengen (Kahlert und Frank 1993, Bertram u. a. 1994) berechnet wird, kann im Fuzzy-Unterraum durch folgende allgemeine Form dargestellt werden

$$u(kT) = fbf^z m_A + fbf^{z+1} m_B + fbf^{z+m_{\Delta E}} m_C + fbf^{z+m_{\Delta E}+1} m_D . \quad (2.6)$$

Mit fbf^z der Fuzzy-Basisfunktion (Wang 1994a, b, Leichtfried und Heiss 1995) im partiellen Fuzzy-Unterraum \mathcal{A} der Regel R_z und den damit direkt daraus folgenden Fuzzy-Basisfunktionen fbf^{z+1} , $fbf^{z+m_{\Delta E}}$ und $fbf^{z+m_{\Delta E}+1}$ der anderen partiellen Fuzzy-Unterräume \mathcal{B} , \mathcal{C} und \mathcal{D} sowie dem Modalwerten m (Böhme 1993, Pedrycz 1993) der Fuzzy-

Referenzmengen $U_A, U_B, U_C, U_D \in \mathbb{U}$. Die Fuzzy-Basisfunktionen zu jedem Fuzzy-Unterraum $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ und \mathcal{D} berechnen sich zu

$$fbf^z = \frac{\alpha_z^{RR} \left(\mu_{X_i}^R(e(kT)), \mu_{Y_j}^R(\Delta e(kT)) \right)}{\sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z \left(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)) \right)}, \quad (2.7)$$

$$fbf^{z+1} = \frac{\alpha_{z+1}^{RL} \left(\mu_{X_i}^R(e(kT)), \mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT)) \right)}{\sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z \left(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)) \right)}, \quad (2.8)$$

$$fbf^{z+m_{\Delta E}} = \frac{\alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR} \left(\mu_{X_{i+1}}^L(e(kT)), \mu_{Y_j}^R(\Delta e(kT)) \right)}{\sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z \left(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)) \right)} \quad (2.9)$$

und

$$fbf^{z+m_{\Delta E}+1} = \frac{\alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL} \left(\mu_{X_{i+1}}^L(e(kT)), \mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT)) \right)}{\sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z \left(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)) \right)}, \quad (2.10)$$

wobei

$$\begin{aligned} \sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z \left(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)) \right) &= \alpha_z^{RR} \left(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_j}^R \right) \\ &+ \alpha_{z+1}^{RL} \left(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_{j+1}}^L \right) + \alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR} \left(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_j}^R \right) + \alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL} \left(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_{j+1}}^L \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

ist.

3 Bewertungskriterium

Das Bewertungskriterium überprüft anhand der aufgestellten relationalen Regeln die Anwendbarkeit von t -Normen bzw. Durchschnitts-Operatoren zur konjunktiven Verknüpfung von Partialprämissen zur Regelung technischer Prozesse. Dabei werden die aktiven Regeln im Fuzzy-Unterraum bei verschiedenen Anordnungen der Konklusionen in den partiellen Fuzzy-Unterräumen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ und \mathcal{D} untersucht. Eine Anordnung der Konklusionen, welche in der Bild 3.1 dargestellt ist,

U_A	U_A
U_B	U_B

Bild 3.1: Fuzzy-Unterraum mit zwei gleichen in den Konklusionen zugewiesenen Fuzzy-Referenzmengen U_A und U_B

kann z. B. durch folgende vier relationale Regeln beschrieben werden:

$$\text{WENN } (E \text{ IST } X_4) \text{ UND } (\Delta E \text{ IST } Y_4) \text{ DANN } (U \text{ IST } U_A), \quad (3.1)$$

$$\text{WENN } (E \text{ IST } X_4) \text{ UND } (\Delta E \text{ IST } Y_5) \text{ DANN } (U \text{ IST } U_A), \quad (3.2)$$

$$\text{WENN } (E \text{ IST } X_5) \text{ UND } (\Delta E \text{ IST } Y_4) \text{ DANN } (U \text{ IST } U_B) \text{ und} \quad (3.3)$$

$$\text{WENN } (E \text{ IST } X_5) \text{ UND } (\Delta E \text{ IST } Y_5) \text{ DANN } (U \text{ IST } U_B). \quad (3.4)$$

Bei den relationalen Regeln ist zu erkennen, daß, unabhängig mit welchem Zugehörigkeitswert $\mu_{Y_4}(\Delta e(kT))$ und $\mu_{Y_5}(\Delta e(kT))$ die Änderung der Regelabweichung $\Delta e(kT)$ auf die Fuzzy-Referenzmengen Y_4 und Y_5 abgebildet wird, die Konklusion immer $(U \text{ IST } U_A)$ bzw. $(U \text{ IST } U_B)$ ist, dieses ist jedoch nicht von der fuzzifizierten Änderung der Regelabweichung ΔE selbst abhängig, sondern von der fuzzifizierten Regelabweichung E . Das heißt, die relationalen Regeln beschreiben das Regelungsverhalten unabhängig von der Änderung der Regelabweichung $\Delta e(kT)$. Diese kann durch die Fuzzy-Relationalmatrizen (unscharfe kartesische Relation²) (Wu, Böming und Schneider 1994)

$$\mathbf{R}_z^\otimes = E \otimes \Delta E \otimes U \quad (3.5)$$

$$\Leftrightarrow \mu_{\mathbf{R}_z^\otimes} = [\mu_{X_i}(e(kT))^T \otimes \mu_{Y_j}(\Delta e(kT))]^T \otimes \mu_{U_k}(u(kT)) \quad (3.6)$$

der z -ten Regeln dokumentiert werden. Zur Erstellung der Fuzzy-Relationalmatrizen \mathbf{R}_z^\otimes werden die diskreten Zustände $e(kT), \Delta e(kT), u(kT) \in \{0, 5; 0, 75; 1\}$ betrachtet. Nach

$$\mu_{X_4}(\mathbf{x}) = \mu_{Y_4}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \notin]0; 0, 5[\\ \frac{\mathbf{x}}{0, 5} & \forall \mathbf{x} \in [0; 0, 5[\\ 1 & \forall \mathbf{x} = 0, 5 \\ \frac{1 - \mathbf{x}}{0, 5} & \forall \mathbf{x} \in]0, 5; 1[\end{cases} \quad (3.7)$$

²Das kartesische Produkt $A \otimes B : \mathbb{D}_1 \times \mathbb{D}_2 \rightarrow \mathbb{D}_N^+$ ist definiert als $A \otimes B = \{(a, b, \mu_{A \otimes B}(a, b)) \mid (a, b) \in \mathbb{D}_1 \times \mathbb{D}_2, \mu_{A \otimes B}(a, b) = \min(\mu_A(a), \mu_B(b))\}$ (Freeling 1980).

$$\mu_{X_5}(\mathbf{x}) = \mu_{Y_5}(\mathbf{x}) \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} < 0,5 \\ \frac{\mathbf{x} - 0,5}{0,5} & \forall \mathbf{x} \in [0,5; 1[\\ 1 & \forall \mathbf{x} \geq 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\mu_{U_A}(u(kT)) = \begin{cases} 0 & \forall u \neq 0,5 \\ 1 & \forall u = 0,5 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\mu_{U_B}(u(kT)) = \begin{cases} 0 & \forall u \neq 1 \\ 1 & \forall u = 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

mit $\mathbf{x} = [e(kT), \Delta e(kT)]^T$, ergeben sich somit die Fuzzy-Mengen

$$X_4 = Y_4 = 1/0,5 + 0,5/0,75 + 0/1 \quad (3.11)$$

$$X_5 = Y_5 = 0/0,5 + 0,5/0,75 + 1/1 \quad (3.12)$$

$$U_A = 1/0,5 + 0/0,75 + 0/1 \quad (3.13)$$

$$U_B = 0/0,5 + 0/0,75 + 1/1 \quad (3.14)$$

aufgrund der Partitionierung der Fuzzy-Referenzmengen X_i, Y_j und U_k mit $i = 1, \dots, m_E$, $j = 1, \dots, m_{\Delta E}$ und $k = 1, \dots, m_U$ über \mathbb{D}_N nach der Notation von Zadeh (1973, 1986) ($A = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)/x_i$). Schrägstrich und Summationszeichen sind hier rein formal-syntaktisch zu verstehen, haben also nicht die Bedeutung wie in der klassischen Mathematik (Kaufmann 1975). Die vier Fuzzy-Relationalmatrizen \mathbf{R}_z^{\otimes} berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1^{\otimes} &= [\mu_{X_4}(e(kT))^T \otimes \mu_{Y_4}(\Delta e(kT))]^T \otimes \mu_{U_A}(u(kT)) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \otimes [1 \ 0 \ 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2^{\otimes} &= [\mu_{X_4}(e(kT))^T \otimes \mu_{Y_5}(\Delta e(kT))]^T \otimes \mu_{U_A}(u(kT)) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \otimes [1 \ 0 \ 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_3^\otimes &= [\mu_{X_5}(e(kT))^T \otimes \mu_{Y_4}(\Delta e(kT))]^T \otimes \mu_{U_B}(u(kT)) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}^T \otimes [0 \ 0 \ 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_4^\otimes &= [\mu_{X_5}(e(kT))^T \otimes \mu_{Y_5}(\Delta e(kT))]^T \otimes \mu_{U_B}(u(kT)) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}^T \otimes [0 \ 0 \ 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Es ist zu erkennen, daß bei gleicher Partialprämisse $\mu_{X_4}(e(kT))$ bzw. $\mu_{X_5}(e(kT))$ die Belegung der Spalten der Relationalmatrizen \mathbf{R}_z^\otimes mit $z = 1, 2, \dots, 4$ nicht von den Partialprämissen $\mu_{Y_4}(\Delta e(kT))$ und $\mu_{Y_5}(\Delta e(kT))$ beeinflußt wird. In der Bild 3.2 ist eine weitere Anordnung der Konklusionen dargestellt.

U_A	U_B
U_A	U_B

Bild 3.2: Fuzzy–Unterraum mit zwei gleichen in den Konklusionen zugewiesenen Fuzzy–Referenzmengen U_A und U_B

Diese Anordnung kann z. B. durch folgende vier relationale Regeln beschrieben werden:

$$\text{WENN } (E \text{ IST } X_4) \text{ UND } (\Delta E \text{ IST } Y_4) \text{ DANN } (U \text{ IST } U_A), \tag{3.19}$$

$$\text{WENN } (E \text{ IST } X_4) \text{ UND } (\Delta E \text{ IST } Y_5) \text{ DANN } (U \text{ IST } U_B), \tag{3.20}$$

$$\text{WENN } (E \text{ IST } X_5) \text{ UND } (\Delta E \text{ IST } Y_4) \text{ DANN } (U \text{ IST } U_A) \text{ und} \tag{3.21}$$

$$\text{WENN } (E \text{ IST } X_5) \text{ UND } (\Delta E \text{ IST } Y_5) \text{ DANN } (U \text{ IST } U_B). \tag{3.22}$$

Bei diesen relationalen Regeln ist zu erkennen, daß unabhängig mit welchem Zugehörigkeitswert $\mu_{X_4}(e(kT))$ und $\mu_{X_5}(e(kT))$ die Regelabweichung $e(kT)$ auf die Fuzzy–Referenzmengen X_4 und X_5 abgebildet wird, die Konklusion immer $(U \text{ IST } U_A)$ bzw. $(U \text{ IST } U_B)$ ist.

U_B ist. Dieses ist jedoch nicht von der fuzzifizierten Regelabweichung E selbst abhängig, sondern von der fuzzifizierten Änderung der Regelabweichung ΔE . Das heißt, die relationalen Regeln beschreiben das Regelungsverhalten unabhängig von der Regelabweichung $e(kT)$.

Insgesamt werden die Operatoren bezüglich drei unterschiedlichen Anordnungen (Fälle) der Konklusionen im Fuzzy-Unterraum hin untersucht. Die drei Fälle und die damit aus den linguistischen Regeln vorgegebene Abhängigkeit der Stellgröße $u(kT)$ von der Regelabweichung $e(kT)$ und/oder der Änderung der Regelabweichung $\Delta e(kT)$ ist in der Tabelle 3.3 dargestellt.

Anordnung der Fuzzy-Ausgangsmengen	Abhängigkeit des Stellgrößenverlaufes				
<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td>U_A</td> <td>U_A</td> </tr> <tr> <td>U_B</td> <td>U_B</td> </tr> </table>	U_A	U_A	U_B	U_B	abhängig von der Regelabweichung e
U_A	U_A				
U_B	U_B				
<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td>U_A</td> <td>U_B</td> </tr> <tr> <td>U_A</td> <td>U_B</td> </tr> </table>	U_A	U_B	U_A	U_B	abhängig von der Änderung der Regelabweichung Δe
U_A	U_B				
U_A	U_B				
<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td>U_A</td> <td>U_B</td> </tr> <tr> <td>U_B</td> <td>U_A</td> </tr> </table>	U_A	U_B	U_B	U_A	abhängig von der Regelabweichung e und deren Änderung Δe
U_A	U_B				
U_B	U_A				

Tabelle 3.3: Abhängigkeit des Stellgrößenverlaufes im Zusammenhang mit der Anordnung der Fuzzy-Ausgangsmengen im Fuzzy-Unterraum

Verglichen wird die aus den linguistischen Regeln vorgegebene Abhängigkeit der Stellgröße

$$u^R(kT) = R(e(kT), \Delta e(kT)) \quad (3.23)$$

mit der aus der analytischen Beschreibung des Fuzzy-Reglers berechneten Abhängigkeit der Stellgröße

$$u^f(kT) = f(e(kT), \Delta e(kT)) \quad (3.24)$$

Ist

$$u^R = u^f \quad (3.25)$$

so approximiert der Fuzzy-Regler (in Abhängigkeit des Operators für die konjunktive Verknüpfung) die linguistischen Regeln. Gleichung (3.25) dient somit zur Beurteilung der Anwendung von t -Normen bzw. Durchschnitts-Operatoren in der Fuzzy-Regelung (Tabelle 3.4).

Vergleich der Stellgrößenabhängigkeiten	Aussage über die Operatoren
$u^R = u^f$	approximiert die linguistischen Regeln
$u^R \neq u^f$	approximiert nicht die linguistischen Regeln

Tabelle 3.4: Bewertungskriterium zur Anwendung von Operatoren zur Konjunktiven-Verknüpfung in der Fuzzy-Regelung

3.1 Operatoren

Neben dem allgemein bekannten Minimum- und Maximum-Operator (Zadeh 1965) gibt es weitere Operatoren zur Verknüpfung unscharfer Mengen. Diese Operatoren lassen sich hinsichtlich der zu realisierenden Verknüpfungen in t -Normen für die konjunktive Verknüpfung (fuzzy-logisches UND) und t -Conormen (s -Normen) für die disjunktive Verknüpfung (fuzzy-logische ODER) kategorisieren. Im folgenden werden die Begriffe t -Norm und t -Conorm definiert und im nächsten Abschnitt die t -Normen vorgestellt, welche in diesem Bericht untersucht werden.

Definition 3.1 (Nauck, Klawonn und Kruse 1994)

Eine Funktion $\top : \mathbb{D}_N^+ \times \mathbb{D}_N^+ \rightarrow \mathbb{D}_N^+$ heißt t -Norm, wenn sie die Bedingungen

- (i) $\top(\mu_{X_i}, 1) = \mu_{X_i}$ (Einselement)
- (ii) $\mu_{X_i} \leq \mu_{Y_j} \implies \top(\mu_{X_i}, \mu_{Z_k}) \leq \top(\mu_{Y_j}, \mu_{Z_k})$ (Monotonie)
- (iii) $\top(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \top(\mu_{Y_j}, \mu_{X_i})$ (Kommutativität)
- (iv) $\top(\mu_{X_i}, \top(\mu_{Y_j}, \mu_{Z_k})) = \top(\top(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}), \mu_{Z_k})$ (Assoziativität)

erfüllt.

□

Die interessanteste Eigenschaft einer t -Norm ist die Assoziativität, weil dadurch die (re-kursive) Berechnung des Durchschnitts von mehr als zwei Mengen ermöglicht wird. Aus praktischer Sicht ist außerdem erfreulich, daß die Reihenfolge der Argumente bei der Berechnung keine Rolle spielt (Kommutativität). Als wünschenswert, aber nicht notwendige Eigenschaft einer den Durchschnitt \cap zwischen unscharfen Mengen repräsentierenden Funktionen seien noch die Stetigkeit sowie die Idempotenz zu nennen (Fathi-Torbaghan und Höffmann 1994).

Definition 3.2 (Nauck, Klawonn und Kruse 1994)

Eine Funktion $\perp : \mathbb{D}_N^+ \times \mathbb{D}_N^+ \rightarrow \mathbb{D}_N^+$ heißt t -Conorm, wenn sie die Bedingungen

- | | | |
|-------|--|------------------|
| (i) | $\perp(\mu_{X_i}, 0) = \mu_{X_i}$ | (Einselement) |
| (ii) | $\mu_{X_i} \leq \mu_{Y_j} \implies \perp(\mu_{X_i}, \mu_{Z_k}) \leq \perp(\mu_{Y_j}, \mu_{Z_k})$ | (Monotonie) |
| (iii) | $\perp(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \perp(\mu_{Y_j}, \mu_{X_i})$ | (Kommutativität) |
| (iv) | $\perp(\mu_{X_i}, \perp(\mu_{Y_j}, \mu_{Z_k})) = \perp(\perp(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}), \mu_{Z_k})$ | (Assoziativität) |

erfüllt.

□

t -Normen und t -Conormen sind duale Operatoren. Man erhält aus einer t -Norm \top eine t -Conorm mittels

$$\perp(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = 1 - \top(1 - \mu_{X_i}, 1 - \mu_{Y_j}) \quad (3.26)$$

und umgekehrt aus einer t -Conorm \perp eine t -Norm durch

$$\top(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = 1 - \perp(1 - \mu_{X_i}, 1 - \mu_{Y_j}) . \quad (3.27)$$

Weiterhin gelten für die t -Normen

$$\top(\mu_{X_i}, 0) = 0 \quad \forall \quad \mu_{X_i} \in \mathbb{D}_N^+ \quad (3.28)$$

bzw. für die t -Conormen

$$\perp(\mu_{X_i}, 1) = 1 \quad \forall \quad \mu_{X_i} \in \mathbb{D}_N^+ , \quad (3.29)$$

welches, wie im Abschnitt 9 dargelegt wird, grundentscheidend für die Verwendung von Operatoren zur Fuzzy-Regelung ist. An dieser Stelle sei noch einmal erwähnt, daß t -Normen \top und t -Conormen \perp nicht für bestimmte, konkrete Verknüpfungen stehen, sondern als Platzhalter für all diejenigen Verknüpfungen zu verstehen sind, welche die von t -Normen und t -Conormen geforderten Eigenschaften besitzen (Definition 3.1 und 3.2).

3.2 t -Norm-basierte Operatoren

t -Normen und t -Conormen werden weiter in nicht-parametrische Operatoren und parametrische Operatoren unterteilt (Zimmermann 1987, Kruse, Gebhardt und Klawonn 1994, Mayer u. a. 1994). Parametrische Operatoren, welche hier nicht behandelt werden, aber aus Gründen der Vollständigkeit erwähnt werden, umfassen möglichst viele t -Normen bzw. t -Conormen. Der Parameter γ kann ein bestimmtes Intervall reeller Zahlen durchlaufen, für jeden festen Wert des Parameters γ ergibt sich ein spezieller Operator der t -Norm bzw. t -Conorm. Zu nennen sind hier z. B. die HAMACHER-Operatoren

$$H_{\gamma}^{\top}(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \frac{\mu_{X_i} \mu_{Y_j}}{\gamma + (1 - \gamma)(\mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - \mu_{X_i} \mu_{Y_j})} \quad (3.30)$$

$$H_{\gamma}^{\perp}(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \frac{\mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - (2 - \gamma)\mu_{X_i} \mu_{Y_j}}{1 - (1 - \gamma)\mu_{X_i} \mu_{Y_j}} \quad (3.31)$$

dessen Parameter γ alle nicht-negativen reellen Zahlen annehmen darf ($0 \leq \gamma \leq \infty$). Der Laufbereich (Böhme 1993) der HAMACHER-Operatoren H_{γ}^{\top} bzw. H_{γ}^{\perp} erstreckt sich vom Hamacher Produkt (algebraischer t -Quotient) über das algebraische Produkt bis hin zum drastischen Produkt bzw. von Hamacher Summe (algebraischer s -Quotient) über die algebraische Summe bis hin zur drastischen Summe. Zu den parametrischen Operatoren gehören weiterhin der YAGER-, WEBER-, DUBOIS-PRADE-, FRANK-, SCHWEIZER-SKALAR- und DOMBI-Operator (Böhme 1993, Bothe 1993, Mayer u. a. 1993, Gottwald 1993, Butnariu und Klement 1993).

Im folgenden werden die t -Normen, welche für die Standard-Fuzzy-Regler untersucht werden, aufgeführt (\top_{ap} , \top_{min} und \top_{Luk} gehören zu der Fundamental t -Norm \top_s (Klement 1982)).:

Algebraisches Produkt:

$$\top_{ap}(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \mu_{X_i} \mu_{Y_j} \quad (3.32)$$

Minimum-Operator:

$$\top_{min}(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \min(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) \quad (3.33)$$

Lukasewicz-Operator (Beschränkte Differenz):

$$\top_{Luk}(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \max(0, \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - 1) \quad (3.34)$$

Einstein Produkt:

$$\top_{ep}(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \frac{\mu_{X_i} \mu_{Y_j}}{2 - (\mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - \mu_{X_i} \mu_{Y_j})} \quad (3.35)$$

Hamacher Produkt (algebraischen t -Quotienten):

$$\top_{hp}(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \frac{\mu_{X_i} \mu_{Y_j}}{\mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - \mu_{X_i} \mu_{Y_j}} \quad (3.36)$$

Das drastische Produkt

$$\top_{dp}(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \begin{cases} \min(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) & \forall \max(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.37)$$

wird aufgrund seines diskontinuierlichen Verhaltens (Wangming 1988) nicht untersucht.

4 Algebraisches Produkt

Das algebraische Produkt (Hamacher 1976) zeichnet sich besonders durch sein interaktives und sensitives Verhalten aus, wodurch eine „glatte“ Stellgrößengenerierung zu erreichen ist (Pedrycz 1981, Brown und Harris 1991) (Anhang A, B). Über Projektionen pr (Yager 1980, Bandemer und Näther 1992) einer Relation R kann bestimmt werden, ob ein Operator ein interaktives oder ein nicht–interaktives Verhalten besitzt (Nguyen 1977, Dubois und Prade 1979). Im allgemeinen Fall einer unscharfen n –stelligen Relation $R_{\top} \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1} \times X_n$ mit $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \in \mathbb{D}$ für ein $1 \leq k < n$ mit $j_1 < j_2 < \cdots < j_{k-1} < j_k$ wachsende Folge von Indizes $\leq n$ können die Projektionen³ $pr_{j_k}(R_{\top})$

$$\begin{aligned} pr_{j_1, j_2, \dots, j_{k-1}, j_k}(R_{\top}) &= \top_{pr_{j_1, j_2, \dots, j_{k-1}, j_k}}(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{k-1}}, x_{j_k}) = \\ &= \sup_{\substack{x \in \mathbb{D} \\ x_{j_i} \forall i=1, \dots, k}} \top(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \quad \forall x_{j_k} \in \mathcal{Z} \end{aligned} \quad (4.1)$$

auf $\mathcal{Z} = X_{j_1} \times X_{j_2} \times \cdots \times X_{j_{k-1}} \times X_{j_k}$ berechnet werden. Der Index \top soll darauf hinweisen, daß die Relation durch eine t –Norm berechnet wurde. Wird die Relation durch einen Durchschnitts–Operator berechnet, dann ist der Index \top durch D zu ersetzen. Da man aus einer unscharfen n –stelligen Relation $R_{\top} \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1} \times X_n$ jeweils n „eindimensionale“ Projektionen $pr_j(R_{\top})$ für $j = 1, \dots, n$ erhält, kann der Satz 4.1 zur Überprüfung von interaktivem Verhalten angesetzt werden.

Satz 4.1 (Bandemer und Gottwald 1993)

Kann eine unscharfe Relation $R_{\top} \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1} \times X_n$ aus allen Projektionen (eindimensional) $pr_j(R_{\top})$, $j = 1, \dots, n$ zurückgewonnen werden, und zwar als unscharfes kartesisches Produkt

$$R_{\top}^{\otimes} = pr_1(R_{\top}) \otimes pr_2(R_{\top}) \otimes \cdots \otimes pr_{n-1}(R_{\top}) \otimes pr_n(R_{\top}), \quad (4.2)$$

dann ist die Relation nicht–interaktiv (separabel).

□

Im Falle der Standard–Fuzzy–Regler (Berger 1994a, b) ergibt sich eine unscharfe binäre kartesische Relation

$$R_{\top}^{\otimes} = pr_E(R_{\top}) \otimes pr_{\Delta E}(R_{\top}) \quad \forall E, \forall \Delta E \in \mathbb{D}_N, \quad (4.3)$$

mit den Projektionen

$$pr_E(R_{\top}) = \top_E(e(kT)) = \sup_{E \in \mathbb{D}_N} \top(e(kT), \Delta e(kT)) \quad \forall E \in \mathbb{D}_N, \quad (4.4)$$

³In diesem Fall spricht man von einer „ $n - 1$ –dimensionalen“ Projektion (Bandemer und Gottwald 1993).

$$pr_{\Delta E}(R_{\top}) = \top_{\Delta E}(\Delta e(kT)) = \sup_{\Delta E \in \mathbb{D}_N} \top(e(kT), \Delta e(kT)) \quad \forall \Delta E \in \mathbb{D}_N . \quad (4.5)$$

Im Beispiel 4.1 wird an diskreten Zuständen gezeigt, daß das algebraische Produkt interaktiv ist.

Beispiel 4.1

Betrachtet werden die diskreten Zustände $e(kT), \Delta e(kT) \in \{0, 5; 0, 75; 1\}$. Es ergibt sich so eine binäre Relation $R_{\top_{ag}}$ (Fuzzy-Relationsmatrix $\mathbf{R}_{\top_{ag}}$) mit dem algebraischen Produkt \top_{ag} von

$$\mathbf{R}_{\top_{ag}} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,375 & 0,5 \\ 0,375 & 0,5625 & 0,75 \\ 0,5 & 0,75 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

mit den Projektionen

$$pr_E(\mathbf{R}_{\top_{ag}}) = [0,5; 0,75; 1] , \quad (4.7)$$

$$pr_{\Delta E}(\mathbf{R}_{\top_{ag}}) = [0,5; 0,75; 1] . \quad (4.8)$$

Das unscharfe binäre kartesische Produkt $R_{\top_{ag}}^{\otimes}$ (Fuzzy-Relationalmatrix $\mathbf{R}_{\top_{ag}}^{\otimes}$) berechnet sich dann zu

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\top_{ag}}^{\otimes} &= pr_E^T(\mathbf{R}_{\top_{ag}}) \otimes pr_{\Delta E}(\mathbf{R}_{\top_{ag}}) \\ &= [0,5; 0,75; 1]^T \otimes [0,5; 0,75; 1] \\ &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,75 & 0,75 \\ 0,5 & 0,75 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{R}_{\top_{ag}}^{\otimes} \neq \mathbf{R}_{\top_{ag}} . \quad (4.10)$$

Damit ist gezeigt worden, daß \top_{ag} ein interaktives Verhalten besitzt.

□

Im Bild 4.1 ist exemplarisch ein Träger $T(\alpha_{\top})$ einer binären Relation für interaktives und nicht-interaktives Verhalten dargestellt.

Aus mathematischer Sicht (Rationalitätsanforderungen) erfüllt das algebraische Produkt das Identitätsgesetz, die Monotonie, die Kommutativität sowie die Assoziativität und gehört nach Kacprzyk (1983) zur axiomatischen Klasse der Operatoren. Weiterhin handelt es sich bei dieser t -Norm um eine *archimedische* t -Norm (Alsina, Trillas und Valverde 1983, Bandemer und Nähter 1992, Butnariu und Klement 1993) nach der

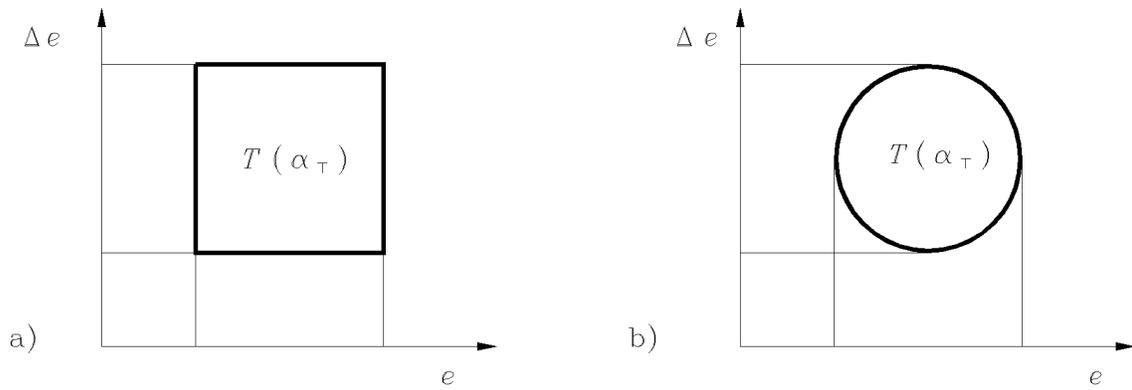


Bild 4.1: Träger $T(\alpha_\tau)$ einer binären Relation a) nicht-interaktiv b) interaktiv

Definition 4.1 (Kruse, Gebhardt und Klawonn 1994)

Es sei $\tau : \mathbb{D}_N^+ \times \mathbb{D}_N^+ \rightarrow \mathbb{D}_N^+$, so heißt τ *Archimedische t -Norm* genau dann, wenn τ eine stetige t -Norm ist und für alle $a \in]0; 1[$ die Ungleichung $\tau(a, a) < a$ gilt.

□

Archimedische t -Normen sind mathematisch besonders attraktiv (Kruse, Gebhardt und Klawonn 1994, Butnariu und Klement 1993) da sie z. B. die Bedeutungspostulate von Hamacher (1978) genügen. Sie lassen sich wie folgt repräsentieren:

Satz 4.2 (Kruse, Gebhardt und Klawonn 1994)

Eine Funktion $\tau : \mathbb{D}_N^+ \times \mathbb{D}_N^+ \rightarrow \mathbb{D}_N^+$ ist genau dann eine *Archimedische t -Norm*, wenn eine streng monoton fallende stetige Funktion $f : \mathbb{D}_N^+ \times \mathbb{D}_N^+ \rightarrow [0; \infty]$ existiert mit $f(1) = 0$ und

$$\tau(a, b) = f^{(-1)}(f(a) + f(b)),$$

wobei $f^{(-1)}$ die *Pseudo-Inverse* von f ist, d. h.

$$f^{(-1)}(y) = \begin{cases} \{x \in [0; 1] \mid f(x) = y\} & , \text{ falls } y \in [0; f(0)] \\ 0 & , \text{ falls } y \in [f(0); \infty] \end{cases} . \quad (4.11)$$

Für $f(0) = \infty$ ist τ streng monoton fallend in beiden Argumenten.

□

Die Funktion f wird als *additive generator* der *archimedischen t -Norm* bezeichnet (Alsina, Trillas und Valverde 1983).

Beispiel 4.2

Gegeben ist folgende Funktion

$$f : [0; \infty] \rightarrow [0; 1], \quad f(x) = \begin{cases} -\ln(x) & , \forall x \in]0; 1] \\ \infty & , \forall x = 0 \end{cases}.$$

Die Funktion f erfüllt die Voraussetzungen vom Satz 4.2. Es ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \top(a, b) &= f^{(-1)}(f(a) + f(b)) \\ &= f^{(-1)}(-\ln(a) - \ln(b)) \\ &= \exp(\ln(a) + \ln(b)) \\ &= a b \quad (\text{algebraisches Produkt}) . \end{aligned}$$

□

Eine weitere Überprüfung von *archimedischen* t -Normen besteht in der Betrachtung

$$\overset{\infty}{\top} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{n}{\top} x_i \tag{4.12}$$

für $x_i \in \mathbb{D}_N$ und $\left(\overset{n}{\top} x_i \right)_{n \in \mathbb{N} \cap \{\infty\}}$ mit $\overset{n}{\top} x_i := \top \left(\overset{n-1}{\top} x_i, x_n \right)$

oder mit der Verwendung der Funktion f

$$\overset{n}{\top} x_i = f^{(-1)} \left(\sum_{i=1}^n f(x_i) \right).$$

Satz 4.3 (Butnariu und Klement 1993)

Ist \top eine *Archimedische* t -Norm, und ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N} \cap \{\infty\}}$ eine konstante Sequenz in $[0; 1[$ für alle $n \in \mathbb{N} \cap \{\infty\}$ dann gilt

$$\overset{\infty}{\top} x_n = 0 .$$

□

Eine *archimedische t*-Norm heißt strikt nach Bandemer und Näther (1992), d. h. sie ist streng monoton und stetig, wenn \top zunimmt im Bereich $\mathbb{D}_N^+ \times \mathbb{D}_N^+$. Allgemein gilt, daß jede strikte *t*-Norm eine *archimedische t*-Norm ist. Umgekehrt gilt dies nicht, ein Beispiel ist hier der Lukasiewicz-Operator \top_{Luk} (Abschnitt 6).

Es ergibt sich ein Erfülltheitsgrad

$$\alpha_z \left(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)) \right) = \mu_{X_i}(e(kT)) \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)) \quad (4.13)$$

der z -ten Regel. Die einzelnen Erfülltheitsgrade in den partiellen Fuzzy-Unterräumen \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} und \mathcal{D} berechnen sich wie folgt:

$$\alpha_z^{RR} \left(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_j}^R \right) = \mu_{X_i}^R(e(kT)) \mu_{Y_j}^R(\Delta e(kT)) \ , \quad (4.14)$$

$$\alpha_{z+1}^{RL} \left(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_{j+1}}^L \right) = \mu_{X_i}^R(e(kT)) \mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT)) \ , \quad (4.15)$$

$$\alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR} \left(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_j}^R \right) = \mu_{X_{i+1}}^L(e(kT)) \mu_{Y_j}^R(\Delta e(kT)) \ , \quad (4.16)$$

$$\alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL} \left(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_{j+1}}^L \right) = \mu_{X_{i+1}}^L(e(kT)) \mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT)) \ . \quad (4.17)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (4.14)–(4.17) in (2.11) erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z \left(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)) \right) &= \\ &= \mu_{X_i}^R \mu_{Y_j}^R + \mu_{X_i}^R \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_j}^R + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L \ , \end{aligned} \quad (4.18)$$

wobei die Indizierungen i und j der Fuzzy-Referenzmengen der Eingangsgrößen in folgender Beziehung zum Index

$$z = m_{\Delta E} i - m_{\Delta E} + j \quad (4.19)$$

stehen.

Durch die einfache Überlappung (Leichtfried und Heiss 1995) und Orthogonalität (Romelfanger 1994) der Fuzzy-Referenzmengen X_i und Y_j lassen sich die Zugehörigkeitsfunktionen zu

$$\mu_{X_i}^R(e(kT)) + \mu_{X_{i+1}}^L(\Delta e(kT)) = 1 \quad (4.20)$$

und

$$\mu_{Y_j}^R(e(kT)) + \mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT)) = 1 \quad (4.21)$$

schreiben mit $i = 1, \dots, m_E - 1$ und $j = 1, \dots, m_{\Delta E} - 1$. Es ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z \left(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)) \right) &= \\ &= \left(1 - \mu_{X_{i+1}}^L \right) \left(1 - \mu_{Y_{j+1}}^L \right) + \left(1 - \mu_{X_{i+1}}^L \right) \mu_{Y_{j+1}}^L \\ &\quad + \mu_{X_{i+1}}^L \left(1 - \mu_{Y_{j+1}}^L \right) + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L \\ &= 1 \ . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Die Fuzzy-Basisfunktionen im Fuzzy-Unterraum $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ und \mathcal{D} berechnen sich dann zu

$$fbf^z = \alpha_z^{RR} \left(\mu_{X_i}^R(e(kT)), \mu_{Y_j}^R(\Delta e(kT)) \right), \quad (4.23)$$

$$fbf^{z+1} = \alpha_{z+1}^{RL} \left(\mu_{X_i}^R(e(kT)), \mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT)) \right), \quad (4.24)$$

$$fbf^{z+m_{\Delta E}} = \alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR} \left(\mu_{X_{i+1}}^L(e(kT)), \mu_{Y_j}^R(\Delta e(kT)) \right) \quad (4.25)$$

und

$$fbf^{z+m_{\Delta E}+1} = \alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL} \left(\mu_{X_{i+1}}^L(e(kT)), \mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT)) \right). \quad (4.26)$$

Für die allgemeine Beschreibung der Stellgröße ergibt sich dann

$$\begin{aligned} u(kT) &= \alpha_z^{RR} \left(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_j}^R \right) m_A + \alpha_{z+1}^{RL} \left(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_B \\ &\quad + \alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR} \left(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_j}^R \right) m_C + \alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL} \left(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_D. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (4.23)–(4.26) in die Gleichung (2.6) erhält man

$$\begin{aligned} u(kT) &= \left(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_A \\ &\quad + \left(\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_B + \left(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_C \\ &\quad + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L m_D. \end{aligned} \quad (4.28)$$

1. Fall:

Im ersten Fall besitzen die partiellen Fuzzy-Unterräume \mathcal{A}, \mathcal{B} bzw. die partiellen Fuzzy-Unterräume \mathcal{C}, \mathcal{D} die Konklusionen mit den Fuzzy-Referenzmengen U_A bzw. U_B (Bild 4.2).

U_A	U_A
U_B	U_B

Bild 4.2: Fuzzy-Unterraum mit zwei gleichen in der Konklusion zugewiesenen Fuzzy-Referenzmengen U_A und U_B

Für die Stellgröße ergibt sich dann

$$\begin{aligned} u(kT) &= \left(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_A \\ &\quad + \left(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L \right) m_B \\ &= \left(1 - \mu_{X_{i+1}}^L \right) m_A + \mu_{X_{i+1}}^L m_B \\ u^f(kT) &= f(e(kT)). \end{aligned} \quad (4.29)$$

2. Fall:

Im zweiten Fall besitzen die partiellen Fuzzy-Unterräume \mathcal{A}, \mathcal{C} bzw. die partiellen Fuzzy-Unterräume \mathcal{B}, \mathcal{D} die Konklusionen mit den Fuzzy-Referenzmengen U_A bzw. U_B (Bild 4.3).

U_A	U_B
U_A	U_B

Bild 4.3: Fuzzy–Unterraum mit zwei gleichen in der Konklusion zugewiesenen Fuzzy–Referenzmengen U_A und U_B

Die Stellgröße berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
u(kT) &= \left(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L\right) m_A \\
&\quad + \left(\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L\right) m_B \\
&= \left(1 - \mu_{Y_{j+1}}^L\right) m_A + \mu_{Y_{j+1}}^L m_B \\
u^f(kT) &= f(\Delta e(kT)) .
\end{aligned} \tag{4.30}$$

3. Fall:

Im dritten Fall besitzen die partiellen Fuzzy–Unterräume \mathcal{A}, \mathcal{D} bzw. die partiellen Fuzzy–Unterräume \mathcal{B}, \mathcal{C} die Konklusionen mit den Fuzzy–Referenzmengen U_A bzw. U_B (Bild 4.4).

U_A	U_B
U_B	U_A

Bild 4.4: Fuzzy–Unterraum mit zwei gleichen in der Konklusion zugewiesenen Fuzzy–Referenzmengen U_A und U_B

Für die Stellgröße ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
u(kT) &= \left(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L + 2\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L\right) m_A + \left(\mu_{Y_{j+1}}^L - 2\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L\right. \\
&\quad \left.+ \mu_{X_{i+1}}^L\right) m_B \\
u^f(kT) &= f(e(kT), \Delta e(kT)) .
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Wie in drei Fällen gezeigt wurde, approximiert die t –Norm \top_{ag} die relationalen Gleichungen. Im ersten Fall, wo die relationalen Regeln eine Stellgrößengenerierung unabhängig von der Änderung der Regelabweichung $\Delta e(kT)$ (durch die Belegung der Konklusionen in den partiellen Fuzzy–Unterräumen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ und \mathcal{D}) fordern, kann dieses durch die analytische Beschreibung der Standard–Fuzzy–Regler $u^f(kT) = f(e(kT))$ dokumentiert werden. Auch im zweiten Fall, wo die relationalen Regeln eine Stellgrößengenerierung unabhängig von der Regelabweichung $e(kT)$ fordert, wird dieses durch die analytische Funktion $u^f(kT) = f(\Delta e(kT))$ dokumentiert. Die Ergebnisse sind in der Tabelle 4.1 zusammengefaßt.

Anordnungen der Konklusionen	Vergleich der Stellgrößenabhängigkeiten
1. Fall	$u^R = u^f$
2. Fall	$u^R = u^f$
3. Fall	$u^R = u^f$

Tabelle 4.1: Ergebnisse der Anwendung von \top_{ag} in der Fuzzy-Regelung

5 Minimum-Operator

Der Minimum-Operator (Zadeh 1965), der nach Zadeh (1973) als Regel der maximalen Restriktion bezeichnet wird, entspricht der Verallgemeinerung der gewöhnlichen Konjunktion (Grimm 1992), wie sie aus der Booleschen Algebra (Böhme 1992) her bekannt ist. Für den Minimum-Operator gelten die Eigenschaften der klassischen Mengenlehre wie die Gültigkeit des Identitätsgesetzes, Monotonie, Kommutativität, Assoziativität, Existenz einer Komplementfunktion sowie die Gültigkeit des Distributivgesetzes und gehört nach Kacprzyk (1983) zur intuitiven Klasse der Operatoren. Der Minimum-Operator weist ein nicht-interaktives Verhalten auf, da das Verknüpfungsergebnis immer nur von einem Argument abhängt und sich nur dann ändert, wenn ein Argument kleiner als das andere wird, weshalb es auch als „hart“ bezeichnet wird (Bellman und Zadeh 1970). In diesem Zusammenhang spricht man auch von einem „Informationsverlust“.

Beispiel 5.1

Betrachtet werden die diskreten Zustände $e(kT), \Delta e(kT) \in \{0, 5; 0, 75; 1\}$. Es ergibt sich so eine binäre Relation $R_{\top_{min}}$ (Fuzzy-Relationalmatrix $\mathbf{R}_{\top_{min}}$) mit dem Minimum-Operator \top_{min} von

$$\mathbf{R}_{\top_{min}} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,75 & 0,75 \\ 0,5 & 0,75 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

mit den Projektionen

$$pr_E(\mathbf{R}_{\top_{min}}) = [0, 5; 0, 75; 1], \quad (5.2)$$

$$pr_{\Delta E}(\mathbf{R}_{\top_{min}}) = [0, 5; 0, 75; 1]. \quad (5.3)$$

Das unscharfe binäre kartesische Produkt $R_{\top_{min}}^{\otimes}$ (Fuzzy-Relationalmatrix $\mathbf{R}_{\top_{min}}^{\otimes}$) berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\top_{min}}^{\otimes} &= pr_E^T(\mathbf{R}_{\top_{min}}) \otimes pr_{\Delta E}(\mathbf{R}_{\top_{min}}) \\ &= [0, 5; 0, 75; 1]^T \otimes [0, 5; 0, 75; 1] \\ &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,75 & 0,75 \\ 0,5 & 0,75 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{R}_{\top_{min}}^{\otimes} = \mathbf{R}_{\top_{min}}. \quad (5.5)$$

Damit ist gezeigt worden, daß \top_{min} ein nicht-interaktives Verhalten besitzt.

□

Weiterhin ist der Minimum-Operator keine *archimedische t*-Norm, weil er idempotent und damit nicht strikt ist. Da die Untersuchungen zur Anwendung von *t*-Normen in der Fuzzy-Regelung analytisch durchgeführt werden, ist es notwendig, den Minimum-Operator analytisch zu beschreiben. Zu diesem Zweck wird die analytische Beschreibung des Minimum-Operators nach Bertram (1992) verwendet, welche ohne Beweis hier dargestellt wird:

$$\min(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = 0,5 \left(-|\mu_{X_i} - \mu_{Y_j}| + \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} \right) \quad (5.6)$$

$$= 0,5 \left(-\sqrt{(\mu_{X_i} - \mu_{Y_j})^2} + \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} \right) . \quad (5.7)$$

Die Reihenfolge der Argumente hat bei der Berechnung keinen Einfluß, da der Minimum-Operator das Gesetz der Kommutativität erfüllt. Es ergibt sich somit ein Erfülltheitsgrad von

$$\alpha_z(\mu_{X_i}(\epsilon(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta\epsilon(kT))) = 0,5 \left(-\sqrt{(\mu_{X_i}(\epsilon(kT)) - \mu_{Y_j}(\Delta\epsilon(kT)))^2} + \mu_{X_i}(\epsilon(kT)) + \mu_{Y_j}(\Delta\epsilon(kT)) \right) . \quad (5.8)$$

Ausgangspunkt sind die Gleichungen (2.5)–(2.11), wobei hier wieder zuerst

$$\begin{aligned} \sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z(\mu_{X_i}(\epsilon(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta\epsilon(kT))) &= \alpha_z^{RR}(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_j}^R) \\ &+ \alpha_{z+1}^{RL}(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_{j+1}}^L) + \alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR}(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_j}^R) + \alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL}(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_{j+1}}^L) \end{aligned} \quad (5.9)$$

berechnet wird. Die einzelnen Erfülltheitsgrade berechnen sich wie folgt

$$\alpha_z^{RR}(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_j}^R) = 0,5 \left(-\sqrt{(\mu_{X_i}^R - \mu_{Y_j}^R)^2} + \mu_{X_i}^R + \mu_{Y_j}^R \right) , \quad (5.10)$$

$$\alpha_{z+1}^{RL}(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_{j+1}}^L) = 0,5 \left(-\sqrt{(\mu_{X_i}^R - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} + \mu_{X_i}^R + \mu_{Y_{j+1}}^L \right) , \quad (5.11)$$

$$\alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR}(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_j}^R) = 0,5 \left(-\sqrt{(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_j}^R)^2} + \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_j}^R \right) , \quad (5.12)$$

$$\alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL}(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_{j+1}}^L) = 0,5 \left(-\sqrt{(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} + \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \right) . \quad (5.13)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (5.10)–(5.13) in (5.9) erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z(\mu_{X_i}(\epsilon(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta\epsilon(kT))) &= 0,5 \left[-\sqrt{(\mu_{X_i}^R - \mu_{Y_j}^R)^2} \right. \\ &- \sqrt{(\mu_{X_i}^R - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} - \sqrt{(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_j}^R)^2} - \sqrt{(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} \\ &\left. + \mu_{X_i}^R + \mu_{Y_j}^R + \mu_{X_i}^R + \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_j}^R + \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \right] , \end{aligned} \quad (5.14)$$

wobei die Indizierungen i, j und z nach der Gleichung (4.19) in Beziehung stehen. Durch Anwendung der Gleichungen (4.20) und (4.21) erhält man

$$\begin{aligned}
& \sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z \left(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)) \right) = \\
& = 0,5 \left[-\sqrt{\left(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - 1 + \mu_{Y_{j+1}}^L\right)^2} - \sqrt{\left(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L\right)^2} \right. \\
& \quad - \sqrt{\left(\mu_{X_{i+1}}^L - 1 + \mu_{Y_{j+1}}^L\right)^2} - \sqrt{\left(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L\right)^2} + 1 - \mu_{X_{i+1}}^L + 1 - \mu_{Y_{j+1}}^L \\
& \quad \left. + 1 - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L + 1 - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \right] \\
& = 0,5 \left[-\sqrt{\left(-\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L\right)^2} - \sqrt{\left(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L\right)^2} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\left(\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L - 1\right)^2} - \sqrt{\left(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L\right)^2} + 4 \right]. \tag{5.15}
\end{aligned}$$

Weiterhin sind die Terme

$$\sqrt{\left(-\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L\right)^2} = \sqrt{\left(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L\right)^2},$$

$$\sqrt{\left(\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L - 1\right)^2} = \sqrt{\left(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L\right)^2}$$

betragsgleich, wodurch Gleichung (5.15) zu

$$\begin{aligned}
& \sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z \left(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)) \right) = \\
& = 2 - \sqrt{\left(\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L\right)^2} - \sqrt{\left(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L\right)^2} \tag{5.16}
\end{aligned}$$

beschrieben werden kann. Die Fuzzy-Basisfunktionen im Fuzzy-Unterraum berechnen sich dann zu

$$fbf^z = \frac{\alpha_z^{RR} \left(\mu_{X_i}^R(e(kT)), \mu_{Y_j}^R(\Delta e(kT)) \right)}{2 - \sqrt{\left(\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L\right)^2} - \sqrt{\left(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L\right)^2}}, \tag{5.17}$$

$$fbf^{z+1} = \frac{\alpha_{z+1}^{RL} \left(\mu_{X_i}^R(e(kT)), \mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT)) \right)}{2 - \sqrt{\left(\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L\right)^2} - \sqrt{\left(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L\right)^2}}, \tag{5.18}$$

$$fbf^{z+m_{\Delta E}} = \frac{\alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR} \left(\mu_{X_{i+1}}^L(e(kT)), \mu_{Y_j}^R(\Delta e(kT)) \right)}{2 - \sqrt{\left(\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \right)^2} - \sqrt{\left(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \right)^2}} \quad (5.19)$$

und

$$fbf^{z+m_{\Delta E}+1} = \frac{\alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL} \left(\mu_{X_{i+1}}^L(e(kT)), \mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT)) \right)}{2 - \sqrt{\left(\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \right)^2} - \sqrt{\left(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \right)^2}}. \quad (5.20)$$

Für die allgemeine Beschreibung der Stellgröße ergibt sich dann

$$u(kT) = \frac{1}{q_{min,\alpha}} \left[\alpha_z^{RR} \left(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_j}^R \right) m_A + \alpha_{z+1}^{RL} \left(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_B \right. \\ \left. + \alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR} \left(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_j}^R \right) m_C + \alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL} \left(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_D \right], \quad (5.21)$$

wobei $q_{min,\alpha}$ gleich der Gleichung (5.16) gesetzt wird. Durch Einsetzen der Gleichungen (5.10)–(5.13) in die Gleichung (2.6) erhält man

$$u(kT) = \frac{0,5}{q_{min,\alpha}} \left[\left(-\sqrt{\left(\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \right)^2} + 2 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_A \right. \\ \left. + \left(-\sqrt{\left(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \right)^2} + 1 - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_B \right. \\ \left. + \left(-\sqrt{\left(\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L - 1 \right)^2} + 1 + \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_C \right. \\ \left. + \left(-\sqrt{\left(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \right)^2} + \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \right) m_D \right]. \quad (5.22)$$

Genau wie bei der Untersuchung des algebraischen Produktes für die Standard-Fuzzy-Regler wird hier der Minimum-Operator in einem Fuzzy-Unterraum mit verschiedenen angeordneten Konklusionen in den partiellen Fuzzy-Unterräumen \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} und \mathcal{D} untersucht. Bei dem Minimum-Operator ist es jedoch aufgrund der Beträge notwendig, weitere Annahmen zu treffen (Tabelle 5.1).

1. Annahme	$\mu_{X_{i+1}}^L > \mu_{Y_{j+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L < 1$
2. Annahme	$\mu_{Y_{j+1}}^L > \mu_{X_{i+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L < 1$
3. Annahme	$\mu_{X_{i+1}}^L > \mu_{Y_{j+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L > 1$
4. Annahme	$\mu_{Y_{j+1}}^L > \mu_{X_{i+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L > 1$

Tabelle 5.1: Annahmen zur geschlossenen analytischen Darstellung der Stellgröße

1. Fall:

Für die Stellgröße ergibt sich

$$\begin{aligned}
u(kT) = & \frac{0,5}{q_{min,\alpha}} \left[\left(-\sqrt{(\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L)^2} - \sqrt{(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} \right. \right. \\
& + 3 - 2 \mu_{X_{i+1}}^L) m_A + \left(-\sqrt{(\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L - 1)^2} \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} + 1 + 2 \mu_{X_{i+1}}^L \right) m_B \right] . \quad (5.23)
\end{aligned}$$

Die Fälle werden in vier Annahmen (Tabelle 5.1), welche im folgenden aufgeführt sind, unterteilt.

1. Annahme $\mu_{X_{i+1}}^L > \mu_{Y_{j+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L < 1$:

Aufgrund dieser Annahme ergibt sich die Stellgröße

$$u(kT) = \frac{0,5}{q_{min,\alpha}} \left[(2 + 2\mu_{Y_{j+1}}^L - 2\mu_{X_{i+1}}^L) m_A + (2\mu_{X_{i+1}}^L + 2\mu_{Y_{j+1}}^L) m_B \right] . \quad (5.24)$$

Mit

$$q_{min,\alpha} = 1 + 2\mu_{Y_{j+1}}^L \quad (5.25)$$

aus der Gleichung (5.16) erhält man die Stellgröße

$$u(kT) = \frac{(1 - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L) m_A + (\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L) m_B}{1 + 2\mu_{Y_{j+1}}^L} \quad (5.26)$$

$$u^f(kT) = f(e(kT), \Delta e(kT)) ,$$

welche eine Funktion der Regelabweichung $e(kT)$ und der Änderung der Regelabweichung $\Delta e(kT)$ ist.

2. Annahme $\mu_{Y_{j+1}}^L > \mu_{X_{i+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L < 1$:
Es ergibt sich eine Stellgröße von

$$u(kT) = \frac{0,5}{q_{min,\alpha}} (2m_A + 4\mu_{X_{i+1}}^L m_B) \quad (5.27)$$

mit der Gleichung (5.16)

$$q_{min,\alpha} = 1 + 2\mu_{X_{i+1}}^L \quad (5.28)$$

erhält man die Stellgröße

$$u(kT) = \frac{m_A + 2\mu_{X_{i+1}}^L m_B}{1 + 2\mu_{X_{i+1}}^L} \quad (5.29)$$

$$u^f(kT) = f(e(kT)) ,$$

welche eine Funktion der Regelabweichung $e(kT)$ ist.

3. Annahme $\mu_{X_{i+1}}^L > \mu_{Y_{j+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L > 1$:
Mit der Gleichung (5.16)

$$q_{min,\alpha} = 3 - 2\mu_{X_{i+1}}^L \quad (5.30)$$

erhält man die Stellgröße

$$u(kT) = \frac{(2 - 2\mu_{X_{i+1}}^L) m_A + 0,5 m_B}{3 - 2\mu_{X_{i+1}}^L} \quad (5.31)$$

$$u^f(kT) = f(e(kT)) .$$

4. Annahme $\mu_{Y_{j+1}}^L > \mu_{X_{i+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L > 1$:
Es ergibt sich die Stellgröße

$$u(kT) = \frac{0,5}{q_{min,\alpha}} [(4 - 2\mu_{X_{i+1}}^L - 2\mu_{Y_{j+1}}^L) m_A + (2 + 2\mu_{X_{i+1}}^L - 2\mu_{Y_{j+1}}^L) m_B] \quad (5.32)$$

mit

$$q_{min,\alpha} = 3 - 2\mu_{Y_{j+1}}^L \quad (5.33)$$

resultiert

$$u(kT) = \frac{(2 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L) m_A + (1 + \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L) m_B}{3 - 2\mu_{Y_{j+1}}^L} \quad (5.34)$$

$$u^f(kT) = f(e(kT), \Delta e(kT)) ,$$

welche eine Funktion der Regelabweichung $e(kT)$ und der Änderung der Regelabweichung $\Delta e(kT)$ ist.

Die Auswertung der anderen beiden Anordnungen der Konklusionen im Fuzzy-Unterraum ist äquivalent zu der im ersten Fall, aus diesem Grund werden die Ergebnisse nur noch in einer tabellarischen Form dargestellt.

2. Fall:

Für die Stellgröße ergibt sich

$$\begin{aligned}
 u(kT) = & \frac{0,5}{q_{min,\alpha}} \left[\left(-\sqrt{(\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L)^2} - \sqrt{(\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L - 1)^2} \right. \right. \\
 & + 3 - 2\mu_{Y_{j+1}}^L \Big) m_A + \left(-\sqrt{(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} \right. \\
 & \left. \left. - \sqrt{(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} + 1 + 2\mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_B \right]. \quad (5.35)
 \end{aligned}$$

In der Tabelle 5.2 sind die Ergebnisse für die verschiedenen Annahmen dargelegt.

3. Fall:

Für die Stellgröße ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
 u(kT) = & \frac{0,5}{q_{min,\alpha}} \left[\left(-\sqrt{(\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L)^2} - \sqrt{(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} + 2 \right) m_A \right. \\
 & \left. + \left(-\sqrt{(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} + \sqrt{(\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L - 1)^2} + 2 \right) m_B \right]. \quad (5.36)
 \end{aligned}$$

In der Tabelle 5.3 sind die Ergebnisse für die verschiedenen Annahmen dargelegt.

Die Fälle zeigen, daß der Minimum-Operator die relationalen Regeln hinsichtlich der gestellten Anforderungen (Bewertungskriterium) nicht über den ganzen Fuzzy-Unterraum erfüllt (Tabelle 5.4). In den Fällen 1 und 2 ist deutlich zu erkennen, daß die Abhängigkeit des Stellgrößenverlaufes u^f im Fuzzy-Unterraum nicht nur von den Anordnungen der Konklusionen bezüglich den partiellen Fuzzy-Unterräumen \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} und \mathcal{D} , sondern auch von den Werten der Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_{X_{i+1}}^L(e(kT))$ und $\mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT))$ der Fuzzy-Referenzmengen X_{i+1} und Y_{j+1} untereinander abhängig ist. So geben im Fall 1 die relationalen Regeln eine Abhängigkeit des Stellgrößenverlaufes u^R von der Regelabweichung $e(kT)$ vor, als Ergebnis erhält man jedoch eine wechselnde Abhängigkeit des Stellgrößenverlaufes u^f von der Regelabweichung $e(kT)$ sowie von der Regelabweichung $\Delta e(kT)$. Auch im zweiten Fall ist eine wechselnde Abhängigkeit des Stellgrößenverlaufes festzustellen.

<p>1. Annahme $\mu_{X_{i+1}}^L > \mu_{Y_{j+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L < 1$:</p>
$u(kT) = \frac{m_A + 2\mu_{Y_{j+1}}^L m_B}{1 + 2\mu_{Y_{j+1}}^L}$ $u^f(kT) = f(\Delta e(kT))$
<p>2. Annahme $\mu_{Y_{j+1}}^L > \mu_{X_{i+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L < 1$:</p>
$u(kT) = \frac{(1 - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L) m_A + (\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L) m_B}{1 + 2\mu_{X_{i+1}}^L}$ $u^f(kT) = f(e(kT), \Delta e(kT))$
<p>3. Annahme $\mu_{X_{i+1}}^L > \mu_{Y_{j+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L > 1$:</p>
$u(kT) = \frac{(2 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L) m_A + (1 + \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L) m_B}{3 - 2\mu_{X_{i+1}}^L}$ $u^f(kT) = f(e(kT), \Delta e(kT))$
<p>4. Annahme $\mu_{Y_{j+1}}^L > \mu_{X_{i+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L > 1$:</p>
$u(kT) = \frac{(2 - 2\mu_{Y_{j+1}}^L) m_A + m_B}{3 - 2\mu_{Y_{j+1}}^L}$ $u^f(kT) = f(\Delta e(kT))$

Tabelle 5.2: Stellgrößen für den 2. Fall unter verschiedenen Annahmen

1. Annahme $\mu_{X_{i+1}}^L > \mu_{Y_{j+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L < 1$:
$u(kT) = \frac{(1 + \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L) m_A + (\mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L) m_B}{1 + 2\mu_{Y_{j+1}}^L}$ $u^f(kT) = f(e(kT), \Delta e(kT))$
2. Annahme $\mu_{Y_{j+1}}^L > \mu_{X_{i+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L < 1$:
$u(kT) = \frac{(1 + \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L) m_A + (\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L) m_B}{1 + 2\mu_{X_{i+1}}^L}$ $u^f(kT) = f(e(kT), \Delta e(kT))$
3. Annahme $\mu_{X_{i+1}}^L > \mu_{Y_{j+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L > 1$:
$u(kT) = \frac{(1 + \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L) m_A + (2 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L) m_B}{3 - 2\mu_{X_{i+1}}^L}$ $u^f(kT) = f(e(kT), \Delta e(kT))$
4. Annahme $\mu_{Y_{j+1}}^L > \mu_{X_{i+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L > 1$:
$u(kT) = \frac{(1 + \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L) m_A + (2 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L) m_B}{3 - 2\mu_{Y_{j+1}}^L}$ $u^f(kT) = f(e(kT), \Delta e(kT))$

Tabelle 5.3: Stellgrößen für den 3. Fall unter verschiedenen Annahmen

Anordnungen der Konklusionen	Vergleich der Stellgrößenabhängigkeiten
1. Fall	
1. Annahme 2. Annahme 3. Annahme 4. Annahme	$u^R \neq u^f$ $u^R = u^f$ $u^R = u^f$ $u^R \neq u^f$
2. Fall	
1. Annahme 2. Annahme 3. Annahme 4. Annahme	$u^R = u^f$ $u^R \neq u^f$ $u^R \neq u^f$ $u^R = u^f$
3. Fall	
1. Annahme 2. Annahme 3. Annahme 4. Annahme	$u^R = u^f$ $u^R = u^f$ $u^R = u^f$ $u^R = u^f$

Tabelle 5.4: Ergebnisse der Anwendung von \top_{min} in der Fuzzy-Regelung

6 Lukasiewicz–Operator (Beschränkte Differenz)

Der Lukasiewicz–Operator \top_{Luk} (Buckley und Silver 1988, Gottwald 1989) zeigt sich über einen sehr großen Bereich sensitiv und besitzt ein interaktives Verhalten.

Beispiel 6.1

Betrachtet werden die diskreten Zustände $e(kT), \Delta e(kT) \in \{0, 5, 0, 75, 1\}$. Es ergibt sich so eine binäre Relation $R_{\top_{Luk}}$ (Fuzzy–Relationsmatrix $\mathbf{R}_{\top_{Luk}}$) mit dem Lukasiewicz–Operator \top_{Luk} von

$$\mathbf{R}_{\top_{Luk}} = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,5 & 0,75 \\ 0,5 & 0,75 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

mit den Projektionen

$$pr_E(\mathbf{R}_{\top_{Luk}}) = [0, 5; 0, 75; 1], \quad (6.2)$$

$$pr_{\Delta E}(\mathbf{R}_{\top_{Luk}}) = [0, 5; 0, 75; 1]. \quad (6.3)$$

Das unscharfe binäre kartesische Produkt $R_{\top_{Luk}}^{\otimes}$ (Fuzzy–Relationalmatrix $\mathbf{R}_{\top_{Luk}}^{\otimes}$) berechnet sich dann zu

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\top_{Luk}}^{\otimes} &= pr_E^T(\mathbf{R}_{\top_{Luk}}) \otimes pr_{\Delta E}(\mathbf{R}_{\top_{Luk}}) \\ &= [0, 5; 0, 75; 1]^T \otimes [0, 5; 0, 75; 1] \\ &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,75 & 0,75 \\ 0,5 & 0,75 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\mathbf{R}_{\top_{Luk}}^{\otimes} \neq \mathbf{R}_{\top_{Luk}} \quad (6.5)$$

Damit ist gezeigt worden, daß \top_{Luk} ein interaktives Verhalten besitzt.

□

Weiterhin erfüllt der Lukasiewicz–Operator die Anforderungen des Identitätsgesetzes, der Monotonie, der Kommutativität und der Assoziativität und ist eine *archimedische t*–Norm mit dem *additive generator* $f(x) = 1 - x$. Der Lukasiewicz–Operator ist aber nicht strikt (Bandemer und Näther 1992, Butnariu und Klement 1993). Da die Untersuchungen wie beim Minimum–Operator zur Anwendung von *t*–Normen analytisch durchgeführt werden, wird der Lukasiewicz–Operator analytisch dargestellt. Zu diesem Zweck wird die analytische Darstellung des Maximum–Operators (Bertram 1992) auf den Lukasiewicz–Operator übertragen. Der Lukasiewicz–Operator läßt sich wie folgt analytisch darstellen.

$$\max(0, \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - 1) = 0,5 \left(|1 + \mu_{X_i} + \mu_{Y_j}| + \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - 1 \right) \quad (6.6)$$

$$= 0,5 \left(\sqrt{(1 - \mu_{X_i} - \mu_{Y_j})^2} + \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - 1 \right), \quad (6.7)$$

wobei die Reihenfolge der Argumente bei der Berechnung keinen Einfluß hat, da der Lukasiewicz-Operator das Gesetz der Kommutativität erfüllt.

Beweis:

Fall 1: $\mu_{X_i} + \mu_{Y_j} > 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \max(0, \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - 1) &= & \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - 1 \\
& f(0, \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - 1) &= & 0,5 \left(\sqrt{(1 - \mu_{X_i} - \mu_{Y_j})^2} + \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - 1 \right) \\
\text{mit} \quad & \sqrt{(1 - \mu_{X_i} - \mu_{Y_j})^2} &= & \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - 1 \\
\text{folgt} \quad & f(0, \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - 1) &= & \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - 1 + \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - 1 \\
& &= & \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - 1 \\
& &= & \max(0, \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - 1)
\end{aligned}$$

Fall 2: $\mu_{X_i} + \mu_{Y_j} < 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \max(0, \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - 1) &= & 0 \\
& f(0, \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - 1) &= & 0,5 \left(\sqrt{(1 - \mu_{X_i} - \mu_{Y_j})^2} + \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - 1 \right) \\
\text{mit} \quad & \sqrt{(1 - \mu_{X_i} - \mu_{Y_j})^2} &= & 1 - \mu_{X_i} - \mu_{Y_j} \\
\text{folgt} \quad & f(0, \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - 1) &= & \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - 1 - \mu_{X_i} - \mu_{Y_j} + 1 \\
& &= & 0 \\
& &= & \max(0, \mu_{X_i} + \mu_{Y_j} - 1)
\end{aligned}$$

□

Es ergibt sich somit ein Erfülltheitsgrad von

$$\begin{aligned}
\alpha_z(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT))) &= 0,5 \left(\sqrt{(1 - \mu_{X_i}(e(kT)) - \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)))^2} \right. \\
&\quad \left. + \mu_{X_i}(e(kT)) + \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)) - 1 \right) . \quad (6.8)
\end{aligned}$$

Die einzelnen Erfülltheitsgrade berechnen sich wie folgt

$$\alpha_z^{RR}(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_j}^R) = 0,5 \left(\sqrt{(1 - \mu_{X_i}^R - \mu_{Y_j}^R)^2} + \mu_{X_i}^R + \mu_{Y_j}^R - 1 \right) , \quad (6.9)$$

$$\alpha_{z+1}^{RL}(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_{j+1}}^L) = 0,5 \left(\sqrt{(1 - \mu_{X_i}^R - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} + \mu_{X_i}^R + \mu_{Y_{j+1}}^L - 1 \right) , \quad (6.10)$$

$$\alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR}(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_j}^R) = 0,5 \left(\sqrt{(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_j}^R)^2} + \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_j}^R - 1 \right) , \quad (6.11)$$

$$\alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL}(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_{j+1}}^L) = 0,5 \left(\sqrt{(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} + \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L - 1 \right). \quad (6.12)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (6.9)–(6.12) in (2.11) erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT))) &= 0,5 \left[\sqrt{(1 - \mu_{X_i}^R - \mu_{Y_j}^R)^2} \right. \\ &+ \sqrt{(1 - \mu_{X_i}^R - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} + \sqrt{(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_j}^R)^2} + \sqrt{(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} \\ &\left. + 2\mu_{X_i}^R + 2\mu_{Y_j}^R + 2\mu_{X_{i+1}}^L + 2\mu_{Y_{j+1}}^L - 4 \right]. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Durch Anwendung der Gleichungen (4.20) und (4.21) erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT))) &= \\ &= 0,5 \left[\sqrt{(1 - (1 - \mu_{X_{i+1}}^L) - (1 - \mu_{Y_{j+1}}^L))^2} + \sqrt{(1 - (1 - \mu_{X_{i+1}}^L) - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} \right. \\ &+ \sqrt{(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - (1 - \mu_{Y_{j+1}}^L))^2} + \sqrt{(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} + 2(1 - \mu_{X_{i+1}}^L) \\ &+ 2(1 - \mu_{Y_{j+1}}^L) + 2\mu_{X_{i+1}}^L + 2\mu_{Y_{j+1}}^L - 4 \left. \right] \\ &= 0,5 \left[\sqrt{(-1 + \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} + \sqrt{(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} \right. \\ &\left. + \sqrt{(\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L)^2} + \sqrt{(-\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L + 1)^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Weiterhin sind die Terme

$$\begin{aligned} \sqrt{(-1 + \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} &= \sqrt{(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} \\ \sqrt{(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} &= \sqrt{(-\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} \end{aligned}$$

betragsgleich, wodurch Gleichung (6.14) zu

$$\begin{aligned} \sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT))) &= \\ &= \sqrt{(\mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L - 1)^2} + \sqrt{(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} \end{aligned} \quad (6.15)$$

beschrieben werden kann. Die Fuzzy-Basisfunktionen im Fuzzy-Unterraum berechnen sich dann zu

$$fbf^z = \frac{\alpha_z^{RR}(\mu_{X_i}^R(e(kT)), \mu_{Y_j}^R(\Delta e(kT)))}{\sqrt{(\mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L - 1)^2} - \sqrt{(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2}}, \quad (6.16)$$

$$fbf^{z+1} = \frac{\alpha_{z+1}^{RL} (\mu_{X_i}^R(e(kT)), \mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT)))}{\sqrt{(\mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L - 1)^2} - \sqrt{(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2}}, \quad (6.17)$$

$$fbf^{z+m_{\Delta E}} = \frac{\alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR} (\mu_{X_{i+1}}^L(e(kT)), \mu_{Y_j}^R(\Delta e(kT)))}{\sqrt{(\mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L - 1)^2} - \sqrt{(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2}} \quad (6.18)$$

und

$$fbf^{z+m_{\Delta E}+1} = \frac{\alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL} (\mu_{X_{i+1}}^L(e(kT)), \mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT)))}{\sqrt{(\mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L - 1)^2} - \sqrt{(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2}}. \quad (6.19)$$

Für die allgemeine Beschreibung der Stellgröße ergibt sich dann

$$u(kT) = \frac{1}{q_{Luk,\alpha}} \left[\alpha_z^{RR} (\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_j}^R) m_A + \alpha_{z+1}^{RL} (\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_{j+1}}^L) m_B \right. \\ \left. + \alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR} (\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_j}^R) m_C + \alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL} (\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_{j+1}}^L) m_D \right] \quad (6.20)$$

wobei $q_{Luk,\alpha}$ gleich der Gleichung (6.15) gesetzt wird. Durch Einsetzen der Gleichungen (6.16)–(6.19) in die Gleichung (2.6) erhält man

$$u(kT) = \frac{0,5}{q_{Luk,\alpha}} \left[\left(\sqrt{(-1 + \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L)^2} + 1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_A \right. \\ + \left(\sqrt{(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} + \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \right) m_B \\ + \left(\sqrt{(\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L)^2} + \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_C \\ \left. + \left(\sqrt{(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} + \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L - 1 \right) m_D \right]. \quad (6.21)$$

Genau wie bei den bisherigen Untersuchungen wird hier der Lukasiewicz-Operator in einem Fuzzy-Unterraum mit verschiedenen angeordneten Konklusionen in den partiellen Fuzzy-Unterräumen \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} und \mathcal{D} untersucht. Beim Lukasiewicz-Operator sind genauso wie beim Minimum-Operator aufgrund der Beträge weitere Annahmen zu treffen.

1. Fall:

Für die Stellgröße ergibt sich dann

$$u(kT) = \frac{0,5}{q_{Luk,\alpha}} \left[\left(\sqrt{(-1 + \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L)^2} + \sqrt{(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} \right. \right. \\ \left. \left. + 1 - 2\mu_{X_{i+1}}^L \right) m_A + \left(\sqrt{(\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L)^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L)^2} + 2\mu_{X_{i+1}}^L - 1 \right) m_B \right]. \quad (6.22)$$

1. Annahme $\mu_{X_{i+1}}^L > \mu_{Y_{j+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L < 1$:

Aufgrund dieser Annahme ergibt sich die Stellgröße

$$u(kT) = \frac{0,5}{q_{Luk,\alpha}} \left[\left(2 - 2\mu_{Y_{j+1}}^L - 2\mu_{X_{i+1}}^L \right) m_A + \left(2\mu_{X_{i+1}}^L - 2\mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_B \right] . \quad (6.23)$$

Mit

$$q_{Luk,\alpha} = 1 - 2\mu_{Y_{j+1}}^L \quad (6.24)$$

aus der Gleichung (6.15) erhält man die Stellgröße

$$u(kT) = \frac{\left(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_A + \left(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_B}{1 - 2\mu_{Y_{j+1}}^L} \quad (6.25)$$

$$u^f(kT) = f(e(kT), \Delta e(kT)) ,$$

welche eine Funktion der Regelabweichung $e(kT)$ und der Änderung der Regelabweichung $\Delta e(kT)$ ist. Weiterhin besitzt die Stellgrößengenerierung bei einem Zugehörigkeitswert von $\mu_{Y_{j+1}}^L = 0,5$ eine Singularität.

2. Annahme $\mu_{Y_{j+1}}^L > \mu_{X_{i+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L < 1$:

Es ergibt sich die Stellgröße

$$u(kT) = \frac{0,5}{q_{Luk,\alpha}} \left(2 - 4\mu_{X_{i+1}}^L \right) m_B . \quad (6.26)$$

Mit

$$q_{Luk,\alpha} = 1 - 2\mu_{Y_{j+1}}^L \quad (6.27)$$

erhält man

$$\begin{aligned} u(kT) &= m_A \\ u^f(kT) &= \text{const.} , \end{aligned} \quad (6.28)$$

welche konstant dem Modalwert der Fuzzy-Referenzmenge U_A ist.

3. Annahme $\mu_{X_{i+1}}^L > \mu_{Y_{j+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L > 1$:

Es ergibt sich die Stellgröße

$$u(kT) = \frac{0,5}{q_{Luk,\alpha}} \left(4\mu_{X_{i+1}}^L - 2 \right) m_B . \quad (6.29)$$

Mit

$$q_{Luk,\alpha} = 2\mu_{X_{i+1}}^L - 1 \quad (6.30)$$

erhält man

$$\begin{aligned} u(kT) &= m_B \\ u^f(kT) &= \text{const.} , \end{aligned} \tag{6.31}$$

welche konstant dem Modalwert der Fuzzy-Referenzmenge U_B ist.

4. Annahme $\mu_{Y_{j+1}}^L > \mu_{X_{i+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L > 1$:

Mit der Gleichung (6.13)

$$q_{Luk,\alpha} = 2\mu_{Y_{j+1}}^L - 1 \tag{6.32}$$

erhält man die Stellgröße

$$u(kT) = \frac{(\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L) m_A + (\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L - 1) m_B}{2\mu_{Y_{j+1}}^L - 1} \tag{6.33}$$

$$u^f(kT) = f(e(kT), \Delta e(kT)) ,$$

welche eine Funktion der Regelabweichung $e(kT)$ und der Änderung der Regelabweichung $\Delta e(kT)$ ist.

Die Auswertungen der anderen beiden Anordnungen der Konklusionen im Fuzzy-Unterraum sind in den Tabellen 6.1 und 6.2 dargestellt .

<p>1. Annahme $\mu_{X_{i+1}}^L > \mu_{Y_{j+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L < 1$:</p>
$\begin{aligned} u(kT) &= m_A \\ u^f(kT) &= \text{const.} \end{aligned}$
<p>2. Annahme $\mu_{Y_{j+1}}^L > \mu_{X_{i+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L < 1$:</p>
$\begin{aligned} u(kT) &= \frac{(1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L) m_A + (\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L) m_B}{1 - 2\mu_{X_{i+1}}^L} \\ u^f(kT) &= f(e(kT), \Delta e(kT)) \end{aligned}$
<p>3. Annahme $\mu_{X_{i+1}}^L > \mu_{Y_{j+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L > 1$:</p>
$\begin{aligned} u(kT) &= \frac{(\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L) m_A + (\mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L - 1) m_B}{2\mu_{X_{i+1}}^L - 1} \\ u^f(kT) &= f(e(kT), \Delta e(kT)) \end{aligned}$
<p>4. Annahme $\mu_{Y_{j+1}}^L > \mu_{X_{i+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L > 1$:</p>
$\begin{aligned} u(kT) &= m_B \\ u^f(kT) &= \text{const.} \end{aligned}$

Tabelle 6.1: Stellgrößen für den 2. Fall unter verschiedenen Annahmen

<p>1. Annahme $\mu_{X_{i+1}}^L > \mu_{Y_{j+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L < 1$:</p>
$u(kT) = \frac{(1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L) m_A + (\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L) m_B}{1 - 2\mu_{Y_{j+1}}^L}$ $u^f(kT) = f(e(kT), \Delta e(kT))$
<p>2. Annahme $\mu_{Y_{j+1}}^L > \mu_{X_{i+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L < 1$:</p>
$u(kT) = \frac{(1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L) m_A + (\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L) m_B}{1 - 2\mu_{X_{i+1}}^L}$ $u^f(kT) = f(e(kT), \Delta e(kT))$
<p>3. Annahme $\mu_{X_{i+1}}^L > \mu_{Y_{j+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L > 1$:</p>
$u(kT) = \frac{(\mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L - 1) m_A + (\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L) m_B}{2\mu_{X_{i+1}}^L - 1}$ $u^f(kT) = f(e(kT), \Delta e(kT))$
<p>4. Annahme $\mu_{Y_{j+1}}^L > \mu_{X_{i+1}}^L$ und $\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L > 1$:</p>
$u(kT) = \frac{(\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L - 1) m_A + (\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L) m_B}{2\mu_{Y_{j+1}}^L - 1}$ $u^f(kT) = f(e(kT), \Delta e(kT))$

Tabelle 6.2: Stellgrößen für den 3. Fall unter verschiedenen Annahmen

Die Fälle zeigen, daß der Lukasiewicz-Operator die relationalen Regeln hinsichtlich der gestellten Anforderungen (Bewertungskriterium) nicht erfüllt (Tabelle 6.3). In den Fällen 1 und 2 ist deutlich zu erkennen, daß die Abhängigkeit des Stellgrößenverlaufes im Fuzzy-Unterraum nicht nur von den Anordnungen der Konklusionen bezüglich den partiellen Fuzzy-Unterräumen \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} und \mathcal{D} , sondern auch von den Werten der Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_{X_{i+1}}^L(e(kT))$ und $\mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT))$ der Fuzzy-Referenzmengen X_{i+1} und Y_{j+1}

untereinander abhängig ist. So ergeben sich beim Lukasiewicz-Operator neben der wechselnden Abhängigkeit der Stellgröße $u(kT)$ von der Regelabweichung $e(kT)$ und der Änderung der Regelabweichung $\Delta e(kT)$ sogar ein konstanter Stellgrößenverlauf. Weiterhin ergeben sich bei bestimmten Konstellationen der Zugehörigkeitswerte $\mu_{X_{i+1}}^L(e(kT))$ und $\mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT))$ Singularitäten.

Anordnungen der Konklusionen	Vergleich der Stellgrößenabhängigkeiten
1. Fall	
1. Annahme	$u^R \neq u^f$
2. Annahme	$u^R \neq u^f$
3. Annahme	$u^R \neq u^f$
4. Annahme	$u^R \neq u^f$
2. Fall	
1. Annahme	$u^R \neq u^f$
2. Annahme	$u^R \neq u^f$
3. Annahme	$u^R \neq u^f$
4. Annahme	$u^R \neq u^f$
3. Fall	
1. Annahme	$u^R = u^f$
2. Annahme	$u^R = u^f$
3. Annahme	$u^R = u^f$
4. Annahme	$u^R = u^f$

Tabelle 6.3: Ergebnisse der Anwendung von \top_{Luk} in der Fuzzy-Regelung

7 Einstein Produkt

Das Einstein Produkt \top_{ep} zeichnet sich genauso wie das algebraische Produkt \top_{ap} durch sein interaktives und sensitives Verhalten aus, nur das hier der numerische Aufwand zur Berechnung des Operators größer ist.

Beispiel 7.1

Betrachtet werden die diskreten Zustände $e(kT), \Delta e(kT) \in \{0, 5; 0, 75; 1\}$. Es ergibt sich so eine binäre Relation $R_{\top_{ep}}$ (Fuzzy-Relationsmatrix $\mathbf{R}_{\top_{ep}}$) mit dem Einstein Produkt \top_{ep} von

$$\mathbf{R}_{\top_{ep}} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,333 & 0,5 \\ 0,333 & 0,529 & 0,75 \\ 0,5 & 0,75 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

mit den Projektionen

$$pr_E(\mathbf{R}_{\top_{ep}}) = [0, 5; 0, 75; 1] \quad (7.2)$$

$$pr_{\Delta E}(\mathbf{R}_{\top_{ep}}) = [0, 5; 0, 75; 1]. \quad (7.3)$$

Das unscharfe binäre kartesische Produkt $R_{\top_{ep}}^{\otimes}$ (Fuzzy-Relationalmatrix $\mathbf{R}_{\top_{ep}}^{\otimes}$) berechnet sich dann zu

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\top_{ep}}^{\otimes} &= pr_E^T(\mathbf{R}_{\top_{ep}}) \otimes pr_{\Delta E}(\mathbf{R}_{\top_{ep}}) \\ &= [0, 5; 0, 75; 1]^T \otimes [0, 5; 0, 75; 1] \\ &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,75 & 0,75 \\ 0,5 & 0,75 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\mathbf{R}_{\top_{ep}}^{\otimes} \neq \mathbf{R}_{\top_{ep}} \quad (7.5)$$

Damit ist gezeigt worden, daß \top_{ep} ein interaktives Verhalten besitzt.

□

Aus mathematischer Sicht (Rationalitätsanforderungen) erfüllt das Einstein Produkt das Identitätsgesetz, die Monotonie, die Kommutativität und die Assoziativität. Weiterhin ist das Einstein Produkt strikt und damit eine *archimedische t-Norm* mit dem *additive generator* $f(x) = \log\left(\frac{2-x}{x}\right)$. Der Erfüllungtheitsgrad der z -ten Regel berechnet sich wie folgt,

$$\alpha_z(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \frac{\mu_{X_i}(e(kT)) \mu_{Y_j}(\Delta e(kT))}{2 - (\mu_{X_i}(e(kT)) + \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)) - \mu_{X_i}(e(kT)) \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)))}. \quad (7.6)$$

Für die Erfülltheitsgrade in den partiellen Fuzzy-Unterräumen \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} und \mathcal{D} ergibt sich dann

$$\alpha_z^{RR}(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_j}^R) = \frac{\mu_{X_i}^R \mu_{Y_j}^R}{2 - (\mu_{X_i}^R + \mu_{Y_j}^R - \mu_{X_i}^R \mu_{Y_j}^R)}, \quad (7.7)$$

$$\alpha_{z+1}^{RL}(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_{j+1}}^L) = \frac{\mu_{X_i}^R \mu_{Y_{j+1}}^L}{2 - (\mu_{X_i}^R + \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_i}^R \mu_{Y_{j+1}}^L)}, \quad (7.8)$$

$$\alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR}(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_j}^R) = \frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_j}^R}{2 - (\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_j}^R - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_j}^R)}, \quad (7.9)$$

$$\alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL}(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_{j+1}}^L) = \frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{2 - (\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L)}. \quad (7.10)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (7.7)–(7.10) in (2.11) erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT))) &= \\ &= \frac{\mu_{X_i}^R \mu_{Y_j}^R}{2 - (\mu_{X_i}^R + \mu_{Y_j}^R - \mu_{X_i}^R \mu_{Y_j}^R)} + \frac{\mu_{X_i}^R \mu_{Y_{j+1}}^L}{2 - (\mu_{X_i}^R + \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_i}^R \mu_{Y_{j+1}}^L)} \\ &+ \frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_j}^R}{2 - (\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_j}^R - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_j}^R)} + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{2 - (\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L)}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Mit (4.20) und (4.21) ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT))) &= \\ &= \frac{(1 - \mu_{X_{i+1}}^L)(1 - \mu_{Y_{j+1}}^L)}{2 - (1 - \mu_{X_{i+1}}^L + 1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - (1 - \mu_{X_{i+1}}^L)(1 - \mu_{Y_{j+1}}^L))} \\ &+ \frac{(1 - \mu_{X_{i+1}}^L) \mu_{Y_{j+1}}^L}{2 - (1 - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L - (1 - \mu_{X_{i+1}}^L) \mu_{Y_{j+1}}^L)} \\ &+ \frac{\mu_{X_{i+1}}^L (1 - \mu_{Y_{j+1}}^L)}{2 - (\mu_{X_{i+1}}^L + 1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L (1 - \mu_{Y_{j+1}}^L))} \\ &+ \frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{2 - (\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L)} \\ &= \frac{1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} + \frac{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 + \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} \\ &+ \frac{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}{1 + \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{2 + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L} \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$= q_{ep,\alpha}. \quad (7.13)$$

Die Fuzzy-Basisfunktionen im Fuzzy-Unterraum berechnen sich zu

$$fbf^z = \frac{\alpha_z^{RR} \left(\mu_{X_i}^R(e(kT)), \mu_{Y_j}^R(\Delta e(kT)) \right)}{q_{ep,\alpha}}, \quad (7.14)$$

$$fbf^{z+1} = \frac{\alpha_{z+1}^{RL} \left(\mu_{X_i}^R(e(kT)), \mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT)) \right)}{q_{ep,\alpha}}, \quad (7.15)$$

$$fbf^{z+m_{\Delta E}} = \frac{\alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR} \left(\mu_{X_{i+1}}^L(e(kT)), \mu_{Y_j}^R(\Delta e(kT)) \right)}{q_{ep,\alpha}} \quad (7.16)$$

und

$$fbf^{z+m_{\Delta E}+1} = \frac{\alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL} \left(\mu_{X_{i+1}}^L(e(kT)), \mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT)) \right)}{q_{ep,\alpha}}. \quad (7.17)$$

Für die allgemeine Beschreibung der Stellgröße ergibt sich

$$\begin{aligned} u(kT) = & \frac{1}{q_{ep,\alpha}} \left[\alpha_z^{RR} \left(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_j}^R \right) m_A + \alpha_{z+1}^{RL} \left(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_B \right. \\ & \left. + \alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR} \left(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_j}^R \right) m_C + \alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL} \left(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_D \right]. \quad (7.18) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (7.14)–(7.17) in die Gleichung (2.6) erhält man

$$\begin{aligned} u(kT) = & \frac{1}{q_{ep,\alpha}} \left[\left(\frac{1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_A \right. \\ & + \left(\frac{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 + \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} \right) m_B + \left(\frac{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}{1 + \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_D \\ & \left. + \left(\frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{2 + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_D \right]. \quad (7.19) \end{aligned}$$

Im folgenden werden die Anordnungen der Konklusionen im Fuzzy-Unterraum nicht mehr explizit angegeben, sondern nur noch die Ergebnisse dargestellt.

1. Fall:

$$\begin{aligned} u(kT) = & \frac{1}{q_{ep,\alpha}} \left[\left(\frac{1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right. \right. \\ & + \left. \frac{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 + \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} \right) m_A + \left(\frac{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}{1 + \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right. \\ & \left. \left. + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{2 + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_B \right] \quad (7.20) \end{aligned}$$

$$u^f(kT) = f(e(kT), \Delta e(kT))$$

2. Fall:

$$\begin{aligned}
u(kT) &= \frac{1}{q_{ep,\alpha}} \left[\left(\frac{1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}{1 + \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_A + \left(\frac{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 + \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{2 + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_B \right] \quad (7.21) \\
u^f(kT) &= f(e(kT), \Delta e(kT))
\end{aligned}$$

3. Fall:

$$\begin{aligned}
u(kT) &= \frac{1}{q_{ep,\alpha}} \left[\left(\frac{1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{2 + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_A + \left(\frac{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 + \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}{1 + \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_D \right] \quad (7.22) \\
u^f(kT) &= f(e(kT), \Delta e(kT))
\end{aligned}$$

Bei Verwendung des Einstein Produktes \top_{ep} als t -Norm ergibt sich in allen drei Fällen eine Abhängigkeit der Stellgröße $u(kT)$ von der Regelabweichung $e(kT)$ und von der Änderung der Regelabweichung $\Delta e(kT)$. Die Ergebnisse sind in der Tabelle 7.1 dargestellt.

Anordnungen der Konklusionen	Vergleich der Stellgrößenabhängigkeiten
1. Fall	$u^R \neq u^f$
2. Fall	$u^R \neq u^f$
3. Fall	$u^R = u^f$

Tabelle 7.1: Ergebnisse der Anwendung von \top_{ep} in der Fuzzy-Regelung

8 Hamacher Produkt

Das Hamacher Produkt \top_{hp} (Hamacher 1978) zeichnet sich ebenso wie das algebraische Produkt \top_{ap} durch sein interaktives und sensitives Verhalten aus, nur das hier wie beim Einstein Produkt \top_{ep} der numerische Aufwand zur Berechnung des Operators größer ist.

Beispiel 8.1

Betrachtet werden die diskreten Zustände $e(kT), \Delta e(kT) \in \{0, 5; 0, 75; 1\}$. Es ergibt sich so eine binäre Relation $R_{\top_{hp}}$ (Fuzzy-Relationsmatrix $\mathbf{R}_{\top_{hp}}$) mit dem Hamacher Produkt \top_{hp} von

$$\mathbf{R}_{\top_{hp}} = \begin{bmatrix} 0,333 & 0,428 & 0,5 \\ 0,428 & 0,5625 & 0,75 \\ 0,5 & 0,75 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

mit den Projektionen

$$pr_E(\mathbf{R}_{\top_{hp}}) = [0, 5; 0, 75; 1] , \quad (8.2)$$

$$pr_{\Delta E}(\mathbf{R}_{\top_{hp}}) = [0, 5; 0, 75; 1] . \quad (8.3)$$

Das unscharfe binäre kartesische Produkt $R_{\top_{hp}}^{\otimes}$ (Fuzzy-Relationalmatrix $\mathbf{R}_{\top_{hp}}^{\otimes}$) berechnet sich dann zu

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\top_{hp}}^{\otimes} &= pr_E^T(\mathbf{R}_{\top_{hp}}) \otimes pr_{\Delta E}(\mathbf{R}_{\top_{hp}}) \\ &= [0, 5; 0, 75; 1]^T \otimes [0, 5; 0, 75; 1] \\ &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,75 & 0,75 \\ 0,5 & 0,75 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$\mathbf{R}_{\top_{hp}}^{\otimes} \neq \mathbf{R}_{\top_{hp}} . \quad (8.5)$$

Damit ist gezeigt worden, daß \top_{hp} ein interaktives Verhalten besitzt.

□

Aus mathematischer Sicht (Rationalitätsanforderungen) erfüllt das Hamacher Produkt das Identitätsgesetz, die Monotonie, die Kommutativität und die Assoziativität. Weiterhin ist das Hamacher Produkt strikt und damit eine *archimedische t*-Norm mit dem *additive generator* $f(x) = \log\left(\frac{1-x}{x}\right)$. Der Erfülltheitsgrad der z -ten Regel berechnet sich wie folgt

$$\alpha_z(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \frac{\mu_{X_i}(e(kT)) \mu_{Y_j}(\Delta e(kT))}{\mu_{X_i}(e(kT)) + \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)) - \mu_{X_i}(e(kT)) \mu_{Y_j}(\Delta e(kT))} . \quad (8.6)$$

Die Erfülltheitsgrade in den partiellen Fuzzy–Unterräumen \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} und \mathcal{D} berechnen sich zu

$$\alpha_z^{RR} \left(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_j}^R \right) = \frac{\mu_{X_i}^R \mu_{Y_j}^R}{\mu_{X_i}^R + \mu_{Y_j}^R - \mu_{X_i}^R \mu_{Y_j}^R}, \quad (8.7)$$

$$\alpha_{z+1}^{RL} \left(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_{j+1}}^L \right) = \frac{\mu_{X_i}^R \mu_{Y_{j+1}}^L}{\mu_{X_i}^R + \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_i}^R \mu_{Y_{j+1}}^L}, \quad (8.8)$$

$$\alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR} \left(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_j}^R \right) = \frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_j}^R}{\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_j}^R - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_j}^R}, \quad (8.9)$$

$$\alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL} \left(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_{j+1}}^L \right) = \frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}. \quad (8.10)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (8.7)–(8.10) in (2.11) erhält man

$$\begin{aligned} & \sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z \left(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)) \right) = \\ & = \frac{\mu_{X_i}^R \mu_{Y_j}^R}{\mu_{X_i}^R + \mu_{Y_j}^R - \mu_{X_i}^R \mu_{Y_j}^R} + \frac{\mu_{X_i}^R \mu_{Y_{j+1}}^L}{\mu_{X_i}^R + \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_i}^R \mu_{Y_{j+1}}^L} \\ & + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_j}^R}{\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_j}^R - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_j}^R} + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Mit (4.20) und (4.21) ergibt sich somit

$$\begin{aligned} & \sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z \left(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)) \right) = \\ & = \frac{(1 - \mu_{X_{i+1}}^L) (1 - \mu_{Y_{j+1}}^L)}{1 - \mu_{X_{i+1}}^L + 1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - (1 - \mu_{X_{i+1}}^L) (1 - \mu_{Y_{j+1}}^L)} \\ & + \frac{(1 - \mu_{X_{i+1}}^L) \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L - (1 - \mu_{X_{i+1}}^L) \mu_{Y_{j+1}}^L} \\ & + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L (1 - \mu_{Y_{j+1}}^L)}{\mu_{X_{i+1}}^L + 1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L (1 - \mu_{Y_{j+1}}^L)} \\ & + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \\ & = \frac{1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} + \frac{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} \\ & + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{-\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L} \\ & = q_{hp,\alpha} \end{aligned} \quad (8.12)$$

Die Fuzzy-Basisfunktionen im Fuzzy-Unterraum berechnen sich dann zu

$$fbf^z = \frac{\alpha_z^{RR} \left(\mu_{X_i}^R(e(kT)), \mu_{Y_j}^R(\Delta e(kT)) \right)}{q_{hp,\alpha}}, \quad (8.13)$$

$$fbf^{z+1} = \frac{\alpha_{z+1}^{RL} \left(\mu_{X_i}^R(e(kT)), \mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT)) \right)}{q_{hp,\alpha}}, \quad (8.14)$$

$$fbf^{z+m_{\Delta E}} = \frac{\alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR} \left(\mu_{X_{i+1}}^L(e(kT)), \mu_{Y_j}^R(\Delta e(kT)) \right)}{q_{hp,\alpha}} \quad (8.15)$$

und

$$fbf^{z+m_{\Delta E}+1} = \frac{\alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL} \left(\mu_{X_{i+1}}^L(e(kT)), \mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT)) \right)}{q_{hp,\alpha}}. \quad (8.16)$$

Für die allgemeine Beschreibung der Stellgröße ergibt sich dann

$$u(kT) = \frac{1}{q_{hp,\alpha}} \left[\alpha_z^{RR} \left(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_j}^R \right) m_A + \alpha_{z+1}^{RL} \left(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_B \right. \\ \left. + \alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR} \left(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_j}^R \right) m_C + \alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL} \left(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_D \right]. \quad (8.17)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (8.13)–(8.16) in die Gleichung (2.6) erhält man

$$u(kT) = \frac{1}{q_{hp,\alpha}} \left[\left(\frac{1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_A \right. \\ \left. + \left(\frac{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 + \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} \right) m_B + \left(\frac{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}{1 + \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_C \right. \\ \left. + \left(\frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{-\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_D \right]. \quad (8.18)$$

1. Fall:

$$u(kT) = \frac{1}{q_{hp,\alpha}} \left[\left(\frac{1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 + \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} \right) m_A + \left(\frac{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}{1 + \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{-\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_B \right] \quad (8.19)$$

$$u^f(kT) = f(e(kT), \Delta e(kT))$$

2. Fall:

$$\begin{aligned}
u(kT) &= \frac{1}{q_{hp,\alpha}} \left[\left(\frac{1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}{1 + \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_A + \left(\frac{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 + \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{-\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_B \right] \quad (8.20) \\
u^f(kT) &= f(e(kT), \Delta e(kT))
\end{aligned}$$

3. Fall:

$$\begin{aligned}
u(kT) &= \frac{1}{q_{hp,\alpha}} \left[\left(\frac{1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{-\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_A + \left(\frac{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 + \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}{1 + \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_D \right] \quad (8.21) \\
u^f(kT) &= f(e(kT), \Delta e(kT))
\end{aligned}$$

Bei Verwendung des Hamacher Produktes \top_{hp} als t -Norm ergibt sich in allen drei Fällen eine Abhängigkeit der Stellgröße $u(kT)$ von der Regelabweichung $e(kT)$ und von der Änderung der Regelabweichung $\Delta e(kT)$ (Tabelle 8.1).

Anordnungen der Konklusionen	Vergleich der Stellgrößenabhängigkeiten
1. Fall	$u^R \neq u^f$
2. Fall	$u^R \neq u^f$
3. Fall	$u^R = u^f$

Tabelle 8.1: Ergebnisse der Anwendung von \top_{hp} in der Fuzzy-Regelung

9 Durchschnitts-Operatoren

Die Durchschnitts-Operatoren sind eine flexible Verknüpfung zweier Fuzzy-Mengen, die den Zweck hat, den Grad der Zugehörigkeit zu einer Fuzzy-Menge zu berechnen, wenn die Zugehörigkeitsgrade zu zwei verschiedenen Fuzzy-Mengen bekannt sind. Die Durchschnitts-Operatoren sind eine Verknüpfung zweier Fuzzy-Mengen, die den Zweck hat, den Grad der Zugehörigkeit zu einer Fuzzy-Menge zu berechnen, wenn die Zugehörigkeitsgrade zu zwei verschiedenen Fuzzy-Mengen bekannt sind.

rische

lar. Eine grundlegende Sprache im Alltag ist es berechnen des Durchschnitts (Zysno 1979). Er-Operatoren, dann Minimum- und Maximum-Operatoren. Auf dieser Weise



Bild 9.1: Laufbereich von Durchschnitts-Operatoren

kommt es zu einer Kombination der beiden Operatoren.

Definition 9.1 (Mizumoto 1989a)

Ein Durchschnitts-Operator ist eine Funktion $M : \mathbb{D}_N^+ \times \mathbb{D}_N^+ \rightarrow \mathbb{D}_N^+$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $\min(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) \leq M(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) \leq \max(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j})$ und $M \notin \{\min, \max\}$
- (ii) $M(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = M(\mu_{Y_j}, \mu_{X_i})$ (Symmetrie)
- (iii) M ist monoton und stetig
- (iv) $M(0, 0) = 0$; $M(1, 1) = 1$
- (v) $M(\mu_{X_i}, \mu_{X_i}) = \mu_{X_i}$ (Idempotenz)

□

Weiterhin wurde von Mizumoto (1989a) gezeigt, daß alle streng monoton steigenden Durchschnitts-Operatoren die Bedingung der Assoziativität verletzen, weshalb die Verknüpfung von mehr als zwei Werten nicht erlaubt ist. Im folgenden werden die Durchschnitts-Operatoren (nicht-parametrisierte Operatoren), welche für die Standard-Fuzzy-Regler untersucht werden, aufgeführt.

Harmonisches Mittel:

$$D_{hm}(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \frac{2\mu_{X_i}\mu_{Y_j}}{\mu_{X_i} + \mu_{Y_j}} \quad (9.1)$$

Geometrisches Mittel:

$$D_{gm}(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \sqrt{\mu_{X_i} \mu_{Y_j}} \quad (9.2)$$

Arithmetisches Mittel:

$$D_{am}(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \frac{\mu_{X_i} + \mu_{Y_j}}{2} \quad (9.3)$$

9.1 Harmonisches Mittel

Das Harmonische Mittel D_{hm} besitzt genauso wie alle t -Normen⁴, welche zur axiomatischen Klasse gehören, ein interaktives und sensitives Verhalten. Aus mathematischer Sicht erfüllt das Harmonische Mittel das Identitätsgesetz, die Monotonie, die Kommutativität und die Assoziativität. Der Erfülltheitsgrad der z -ten Regel berechnet sich wie folgt,

$$\alpha_z(\mu_{X_i}, \mu_{Y_j}) = \frac{2 \mu_{X_i}(e(kT)) \mu_{Y_j}(\Delta e(kT))}{\mu_{X_i}(e(kT)) + \mu_{Y_j}(\Delta e(kT))}. \quad (9.4)$$

Für die Erfülltheitsgrade in den partiellen Fuzzy-Unterräumen \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} und \mathcal{D} ergibt sich dann

$$\alpha_z^{RR}(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_j}^R) = \frac{2 \mu_{X_i}^R \mu_{Y_j}^R}{\mu_{X_i}^R + \mu_{Y_j}^R}, \quad (9.5)$$

$$\alpha_{z+1}^{RL}(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_{j+1}}^L) = \frac{2 \mu_{X_i}^R \mu_{Y_{j+1}}^L}{\mu_{X_i}^R + \mu_{Y_{j+1}}^L}, \quad (9.6)$$

$$\alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR}(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_j}^R) = \frac{2 \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_j}^R}{\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_j}^R}, \quad (9.7)$$

$$\alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL}(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_{j+1}}^L) = \frac{2 \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L}. \quad (9.8)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (9.5)–(9.8) in (2.11) erhält man

$$\begin{aligned} & \sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT))) = \\ & = \frac{2 \mu_{X_i}^R \mu_{Y_j}^R}{\mu_{X_i}^R + \mu_{Y_j}^R} + \frac{2 \mu_{X_i}^R \mu_{Y_{j+1}}^L}{\mu_{X_i}^R + \mu_{Y_{j+1}}^L} + \frac{2 \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_j}^R}{\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_j}^R} + \frac{2 \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

⁴Beschränkt auf die t -Normen, welche in diesem Bericht behandelt wurden.

Mit (4.20) und (4.21) ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
& \sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z \left(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)) \right) = \\
& = \frac{2 \left(1 - \mu_{X_{i+1}}^L \right) \left(1 - \mu_{Y_{j+1}}^L \right)}{1 - \mu_{X_{i+1}}^L + 1 - \mu_{Y_{j+1}}^L} + \frac{2 \left(1 - \mu_{X_{i+1}}^L \right) \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L} + \frac{2 \mu_{X_{i+1}}^L \left(1 - \mu_{Y_{j+1}}^L \right)}{\mu_{X_{i+1}}^L + 1 - \mu_{Y_{j+1}}^L} \\
& + \frac{2 \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L} \\
& = 2 \left[\frac{1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{2 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L} + \frac{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L} \right. \\
& \left. + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L} + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L} \right] \\
& = q_{hm,\alpha} .
\end{aligned} \tag{9.10}$$

Die Fuzzy-Basisfunktionen im Fuzzy-Unterraum berechnen sich dann zu

$$fbf^z = \frac{\alpha_z^{RR} \left(\mu_{X_i}^R(e(kT)), \mu_{Y_j}^R(\Delta e(kT)) \right)}{q_{hm,\alpha}}, \tag{9.11}$$

$$fbf^{z+1} = \frac{\alpha_{z+1}^{RL} \left(\mu_{X_i}^R(e(kT)), \mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT)) \right)}{q_{hm,\alpha}}, \tag{9.12}$$

$$fbf^{z+m_{\Delta E}} = \frac{\alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR} \left(\mu_{X_{i+1}}^L(e(kT)), \mu_{Y_j}^R(\Delta e(kT)) \right)}{q_{hm,\alpha}} \tag{9.13}$$

und

$$fbf^{z+m_{\Delta E}+1} = \frac{\alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL} \left(\mu_{X_{i+1}}^L(e(kT)), \mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT)) \right)}{q_{hm,\alpha}} . \tag{9.14}$$

Für die allgemeine Beschreibung der Stellgröße ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
u(kT) & = \frac{1}{q_{hm,\alpha}} \left[\alpha_z^{RR} \left(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_j}^R \right) m_A + \alpha_{z+1}^{RL} \left(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_B \right. \\
& \left. + \alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR} \left(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_j}^R \right) m_C + \alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL} \left(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_{j+1}}^L \right) m_D \right] .
\end{aligned} \tag{9.15}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (9.11)–(9.14) in die Gleichung (2.6) erhält man

$$\begin{aligned}
u(kT) & = \frac{2}{q_{hm,\alpha}} \left[\left(\frac{1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{2 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_A \right. \\
& + \left(\frac{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_B + \left(\frac{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L} \right) m_C \\
& \left. + \left(\frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_D \right] .
\end{aligned} \tag{9.16}$$

1. Fall:

$$\begin{aligned}
u(kT) &= \frac{2}{q_{hm,\alpha}} \left[\left(\frac{1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{2 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L} + \frac{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_A \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L} + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_B \right] \quad (9.17) \\
u^f(kT) &= f(e(kT), \Delta e(kT))
\end{aligned}$$

2. Fall:

$$\begin{aligned}
u(kT) &= \frac{2}{q_{hm,\alpha}} \left[\left(\frac{1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{2 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L} + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L} \right) m_A \right] \\
&\quad \left. + \left(\frac{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) + \left(\frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_B \right] \quad (9.18) \\
u^f(kT) &= f(e(kT), \Delta e(kT))
\end{aligned}$$

3. Fall:

$$\begin{aligned}
u(kT) &= \frac{1}{q_{hm,\alpha}} \left[\left(\frac{1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{2 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L} + \frac{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{\mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_A \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}{1 - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) + \left(\frac{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L} \right) m_D \right] \quad (9.19) \\
u^f(kT) &= f(e(kT), \Delta e(kT))
\end{aligned}$$

Bei Verwendung des Harmonischen-Mittel D_{hm} als Durchschnitts-Operator ergibt sich in allen drei Fällen eine Abhängigkeit der Stellgröße u^f von der Regelabweichung $e(kT)$ und von der Änderung der Regelabweichung $\Delta e(kT)$ (Tabelle 9.1). Weiterhin treten bei $\mu_{X_{i+1}}^L = 1$ und $\mu_{Y_{j+1}}^L = 1$ Singularitäten auf.

Anordnungen der Konklusionen	Vergleich der Stellgrößenabhängigkeiten
1. Fall	$u^R \neq u^f$
2. Fall	$u^R \neq u^f$
3. Fall	$u^R = u^f$

Tabelle 9.1: Ergebnisse der Anwendung von D_{hm} in der Fuzzy-Regelung

9.2 Geometrisches Mittel

Für das Geometrische Mittel gelten die Eigenschaften der klassischen Mengenlehre wie die Gültigkeit des Identitätsgesetzes, Monotonie, Kommutativität sowie Assoziativität. Das Geometrische Mittel weist ein interaktives und sensitives Verhalten auf. Es ergibt sich ein Erfülltheitsgrad von

$$\alpha_z \left(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)) \right) = \sqrt{\mu_{X_i}(e(kT)) \mu_{Y_j}(\Delta e(kT))}. \quad (9.20)$$

Die einzelnen Erfülltheitsgrade berechnen sich wie folgt

$$\alpha_z^{RR} \left(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_j}^R \right) = \sqrt{\mu_{X_i}^R \mu_{Y_j}^R}, \quad (9.21)$$

$$\alpha_{z+1}^{RL} \left(\mu_{X_i}^R, \mu_{Y_{j+1}}^L \right) = \sqrt{\mu_{X_i}^R \mu_{Y_{j+1}}^L}, \quad (9.22)$$

$$\alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR} \left(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_j}^R \right) = \sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_j}^R}, \quad (9.23)$$

$$\alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL} \left(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_{j+1}}^L \right) = \sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}. \quad (9.24)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (9.21)–(9.24) in (2.11) erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z \left(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)) \right) &= \\ &= \sqrt{\mu_{X_i}^R \mu_{Y_j}^R} + \sqrt{\mu_{X_i}^R \mu_{Y_{j+1}}^L} + \sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_j}^R} + \sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Durch Anwendung der Gleichungen (4.20) und (4.21) erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{z=1}^{m_E m_{\Delta E}} \alpha_z \left(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)) \right) &= \\ &= \sqrt{(1 - \mu_{X_{i+1}}^L) (1 - \mu_{Y_{j+1}}^L)} + \sqrt{(1 - \mu_{X_{i+1}}^L) \mu_{Y_{j+1}}^L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L (1 - \mu_{Y_{j+1}}^L)} + \sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \\
= & \sqrt{1 - \mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L + \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} + \sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \\
& + \sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} + \sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \\
= & q_{gm,\alpha}
\end{aligned} \tag{9.26}$$

Die Fuzzy-Basisfunktionen im Fuzzy-Unterraum berechnen sich dann zu

$$fbf^z = \frac{\alpha_z^{RR} (\mu_{X_i}^R(e(kT)), \mu_{Y_j}^R(\Delta e(kT)))}{q_{gm,\alpha}}, \tag{9.27}$$

$$fbf^{z+1} = \frac{\alpha_{z+1}^{RL} (\mu_{X_i}^R(e(kT)), \mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT)))}{q_{gm,\alpha}}, \tag{9.28}$$

$$fbf^{z+m_{\Delta E}} = \frac{\alpha_{z+m_{\Delta E}}^{LR} (\mu_{X_{i+1}}^L(e(kT)), \mu_{Y_j}^R(\Delta e(kT)))}{q_{gm,\alpha}} \tag{9.29}$$

und

$$fbf^{z+m_{\Delta E}+1} = \frac{\alpha_{z+m_{\Delta E}+1}^{LL} (\mu_{X_{i+1}}^L(e(kT)), \mu_{Y_{j+1}}^L(\Delta e(kT)))}{q_{gm,\alpha}}. \tag{9.30}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (9.27)–(9.30) in die Gleichung (2.6) erhält man

$$\begin{aligned}
u(kT) = & \frac{1}{q_{gm,\alpha}} \left(\sqrt{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} m_A \right. \\
& + \sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} m_B + \sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} m_C \\
& \left. + \sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} m_D \right). \tag{9.31}
\end{aligned}$$

1. Fall:

$$\begin{aligned}
u(kT) = & \frac{1}{q_{gm,\alpha}} \left[\left(\sqrt{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} \right. \right. \\
& + \left. \sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_A + \left(\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right. \\
& \left. \left. + \sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_B \right] \\
u^f(kT) = & f(e(kT))
\end{aligned} \tag{9.32}$$

Beweis:

$$\frac{\partial u(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_{j+1}}^L)}{\partial \mu_{Y_{j+1}}^L} = \left[\frac{0,5(-1 + \mu_{X_{i+1}}^L)}{\sqrt{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} - \frac{0,5 \mu_{X_{i+1}}^L}{\sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} \right] \frac{1}{q_{gm,\alpha}}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\sqrt{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} + \sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}}{(q_{gm,\alpha})^2} \\
& + \frac{0,5(-1 - \mu_{X_{i+1}}^L)}{\sqrt{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} + \frac{0,5(1 + \mu_{X_{i+1}}^L)}{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} \\
& + \left. \frac{-0,5 \mu_{X_{i+1}}^L}{\sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} + \frac{0,5 \sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L}}{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L}} \right\} m_A \\
& + \left[\frac{-0,5(1 - \mu_{X_{i+1}}^L)}{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} + \frac{0,5 \mu_{X_{i+1}}^L}{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L}} \right. \\
& - \frac{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} + \sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}}{(q_{gm,\alpha})^2} \\
& + \frac{0,5(-1 + \mu_{X_{i+1}}^L)}{\sqrt{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} + \frac{0,5(1 - \mu_{X_{i+1}}^L)}{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} \\
& + \left. \frac{0,5 \mu_{X_{i+1}}^L}{\sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} + \frac{0,5 \sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L}}{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L}} \right\} m_B \\
& = 0 \quad \forall \quad \mu_{Y_{j+1}}^L, \mu_{X_{i+1}}^L \in [0; 1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_{j+1}}^L)}{\partial \mu_{X_{i+1}}^L} & = \left[\frac{0,5(-1 + \mu_{Y_{j+1}}^L)}{\sqrt{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} - \frac{0,5(1 - \mu_{Y_{j+1}}^L)}{\sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} \right. \\
& - \frac{\sqrt{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} + \sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}}{(q_{gm,\alpha})^2} \\
& + \left. \frac{0,5(-1 + \mu_{Y_{j+1}}^L)}{\sqrt{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} + \frac{0,5 \mu_{Y_{j+1}}^L}{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left. \frac{\frac{-0,5(1 - \mu_{Y_{j+1}}^L)}{\sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} + \frac{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L}}{\sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L}}}{(q_{gm,\alpha})^2} \right] m_a \\
& + \left[\frac{\frac{-0,5 \mu_{Y_{j+1}}^L}{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} + \frac{0,5 \mu_{Y_{j+1}}^L}{\sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L}}}{q_{gm,\alpha}} \right. \\
& - \frac{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} + \sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}}{(q_{gm,\alpha})^2} \\
& + \frac{\frac{0,5(-1 + \mu_{Y_{j+1}}^L)}{\sqrt{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} + \frac{0,5 \mu_{Y_{j+1}}^L}{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}}}{(q_{gm,\alpha})^2} \\
& + \left. \frac{\frac{0,5(1 - \mu_{Y_{j+1}}^L)}{\sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} + \frac{0,5 \sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L}}{\sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L}}}{(q_{gm,\alpha})^2} \right] m_B \\
& \neq 0 \quad \forall \quad \mu_{Y_{j+1}}^L, \mu_{X_{i+1}}^L \in [0; 1]
\end{aligned}$$

□

2. Fall:

$$\begin{aligned}
u(kT) &= \frac{1}{q_{gm,\alpha}} \left[\left(\sqrt{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_A + \left(\sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_B \right] \tag{9.33} \\
u^f(kT) &= f(\Delta e(kT))
\end{aligned}$$

Beweis:

$$\frac{\partial u(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_{j+1}}^L)}{\partial \mu_{Y_{j+1}}^L} = \left[\frac{\frac{0,5(-1 + \mu_{X_{i+1}}^L)}{\sqrt{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} - \frac{0,5(1 - \mu_{X_{i+1}}^L)}{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}}}{q_{gm,\alpha}} \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\sqrt{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} + \sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}}{(q_{gm,\alpha})^2} \\
& + \frac{0,5(-1 + \mu_{X_{i+1}}^L)}{\sqrt{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} + \frac{0,5(1 - \mu_{X_{i+1}}^L)}{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} \\
& + \left. \frac{-0,5 \mu_{X_{i+1}}^L}{\sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} + \frac{0,5 \sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L}}{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L}} \right\} m_A \\
& + \left[\frac{-0,5 \mu_{X_{i+1}}^L}{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} + \frac{0,5 \mu_{X_{i+1}}^L}{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L}} \right] \\
& - \frac{\sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} + \sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}}{(q_{gm,\alpha})^2} \\
& + \frac{0,5(-1 + \mu_{X_{i+1}}^L)}{\sqrt{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} + \frac{0,5(1 - \mu_{X_{i+1}}^L)}{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} \\
& + \left. \frac{0,5 \mu_{X_{i+1}}^L}{\sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} + \frac{0,5 \sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L}}{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L}} \right\} m_B \\
& \neq 0 \quad \forall \quad \mu_{Y_{j+1}}^L, \mu_{X_{i+1}}^L \in [0; 1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(\mu_{X_{i+1}}^L, \mu_{Y_{j+1}}^L)}{\partial \mu_{X_{i+1}}^L} &= \left[\frac{0,5(-1 + \mu_{Y_{j+1}}^L)}{\sqrt{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} - \frac{0,5 \mu_{Y_{j+1}}^L}{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} \right] \\
& - \frac{\sqrt{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} + \sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}}{(q_{gm,\alpha})^2} \\
& + \frac{0,5(-1 + \mu_{Y_{j+1}}^L)}{\sqrt{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} + \frac{0,5 \mu_{Y_{j+1}}^L}{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left. \frac{\frac{-0,5(1 - \mu_{Y_{j+1}}^L)}{\sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} + \frac{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L}}{\sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L}}}{(q_{gm,\alpha})^2} \right\} m_a \\
& + \left[\frac{\frac{-0,5(1 + \mu_{Y_{j+1}}^L)}{\sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} + \frac{0,5 \mu_{Y_{j+1}}^L}{\sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L}}}{q_{gm,\alpha}} \right. \\
& - \frac{\sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} + \sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}}{(q_{gm,\alpha})^2} \\
& + \frac{\frac{0,5(-1 + \mu_{Y_{j+1}}^L)}{\sqrt{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} + \frac{0,5 \mu_{Y_{j+1}}^L}{\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}}}{(q_{gm,\alpha})^2} \\
& + \left. \frac{\frac{0,5(1 - \mu_{Y_{j+1}}^L)}{\sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L}} + \frac{0,5 \sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L}}{\sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L}}}{(q_{gm,\alpha})^2} \right\} m_B \\
& = 0 \quad \forall \quad \mu_{Y_{j+1}}^L, \mu_{X_{i+1}}^L \in [0; 1]
\end{aligned}$$

□

3. Fall:

$$\begin{aligned}
u(kT) &= \frac{1}{q_{gm,\alpha}} \left[\left(\sqrt{1 - \mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L + \mu_{Y_{j+1}}^L \mu_{X_{i+1}}^L} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_A + \left(\sqrt{\mu_{Y_{j+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sqrt{\mu_{X_{i+1}}^L - \mu_{X_{i+1}}^L \mu_{Y_{j+1}}^L} \right) m_B \right] \tag{9.34} \\
u^f(kT) &= f(e(kT), \Delta e(kT))
\end{aligned}$$

Das Geometrische Mittel D_{hm} als Durchschnitts-Operator approximiert in allen drei Fällen über den ganzen partiellen Fuzzy-Unterraum die linguistischen Regeln. (Tabelle 9.2).

Anordnungen der Konklusionen	Vergleich der Stellgrößenabhängigkeiten
1. Fall	$u^R = u^f$
2. Fall	$u^R = u^f$
3. Fall	$u^R = u^f$

Tabelle 9.2: Ergebnisse der Anwendung von D_{gm} in der Fuzzy-Regelung

9.3 Arithmetisches Mittel

Bei der Anwendung des Arithmetischen-Mittels (Dubois und Prade 1980) berechnet sich der Erfülltheitsgrad der z -ten Regel zu

$$\alpha_z \left(\mu_{X_i}(e(kT)), \mu_{Y_j}(\Delta e(kT)) \right) = \frac{\mu_{X_i}(e(kT)) + \mu_{Y_j}(\Delta e(kT))}{2}. \quad (9.35)$$

Wie man aus der Gleichung (9.35) erkennt, ist eine Regel auch dann aktiv ($\alpha_z > 0$), wenn eine Partialprämisse nicht erfüllt⁵ ist. In diesem Fall sind nicht maximal vier Regeln aktiv sondern maximal zehn Regeln, obwohl jeder Eingang nur auf zwei Fuzzy-Referenzmengen abgebildet wird. Dadurch, daß

$$D_{am}(\mu_{X_i}, 0) \neq 0 \quad \forall \mu_{X_i} \in [0; 1] \quad (9.36)$$

bzw.

$$D_{am}(\mu_{Y_j}, 0) \neq 0 \quad \forall \mu_{Y_j} \in [0; 1] \quad (9.37)$$

ist, wird eine Stellgrößengenerierung erzielt, die nicht annähernd die linguistischen Regeln approximiert. Betrachtet man z. B. ein Fuzzy-Unterraum mit gleichen Konklusionen (Bild 9.2),

U_A	U_A
U_A	U_A

Bild 9.2: Fuzzy-Unterraum mit vier gleichen in der Konklusion zugeordneten Fuzzy-Referenzmengen U_A

so ist in diesem Fall die Stellgröße bei allen hier behandelten Operatoren konstant. Beim arithmetischen Mittel ist die Stellgröße eine Funktion der Regelabweichung $e(kT)$ und

⁵Bei Fuzzy-Regler mit einer Fuzzifizierung über Fuzzy-Einermengen ist dies der Fall, wenn die Zugehörigkeitsfunktion μ gleich Null ist.

der Änderung der Regelabweichung $\Delta e(kT)$. Das arithmetische Mittel ist somit für die Anwendung in der Fuzzy-Regelung völlig ungeeignet. Die Gleichungen (3.21) und (3.22) sind somit Grundgleichungen zur Auswahl von Operatoren zur disjunktiven Verknüpfung von Fuzzy-Mengen in der Fuzzy-Regelung. Das heißt, der Träger einer binären Fuzzy-Relation

$$T(R) = \{\mu_A(x), \mu_B(y) \mid \mu_A(x), \mu_B(y) \in \mathbb{D}_N, \alpha(\mu_A(x), \mu_B(y)) > 0\} \quad (9.38)$$

sollte nicht größer sein als der Träger der Fuzzy-Mengen der binären Relation

$$T(A) = \{x \mid x \in \mathbb{D}_N, \mu_A(x) > 0\} \quad (9.39)$$

bzw.

$$T(B) = \{y \mid y \in \mathbb{D}_N, \mu_B(y) > 0\} . \quad (9.40)$$

10 Zusammenfassung und Ausblick

Bei der Anwendung von geeigneten Verknüpfungs-Operatoren zur konjunktiven Verknüpfung (fuzzy-logisches UND) gibt es zahlreiche Bewertungskriterien (Relationalitätsanforderungen, pragmatische Aspekte) zur Auswahl dieser Verknüpfungs-Operatoren. Jedoch lassen all diese Bewertungskriterien eine Verbindung zwischen der Fuzzy-Logik und der Regelungstechnik vermissen.

In diesem Bericht⁶ wurde ein neues Bewertungskriterium zur Auswahl von Verknüpfungs-Operatoren in der Fuzzy-Regelung vorgestellt. Bewertet wurden die Verknüpfungs-Operatoren zur Regelung von technischen Prozessen durch einen Vergleich der durch die aufgestellten linguistischen Regeln beschriebene Abhängigkeit der Stellgröße u^R mit der aus der analytischen Beschreibung des Fuzzy-Reglers berechneten Abhängigkeit der Stellgröße u^f .

Die Fuzzy-Regler wurden innerhalb eines Fuzzy-Unterraumes durch eine analytische Gleichung beschrieben. Innerhalb des Fuzzy-Unterraumes wurden die Anordnung der Konklusionen in den partiellen Fuzzy-Unterräumen so verändert, daß eine bestimmte Abhängigkeit der Stellgröße von der Regelabweichung und/oder der Änderung der Regelabweichung durch die linguistischen Regeln vorgegeben ist (Tabelle 10.1).

Anordnungen der Konklusionen	Abhängigkeit der Stellgröße
1. Fall	$u^R = R(e)$
2. Fall	$u^R = R(\Delta e)$
3. Fall	$u^R = R(e, \Delta e)$

Tabelle 10.1: Unterscheidung der einzelnen Fälle

Die Anordnungen der Konklusionen im Fuzzy-Unterraum (drei Fälle) entsprachen jeweils vier linguistischen Regeln. Untersucht wurden die aus der Literatur bekanntesten t -Normen; Algebraisches Produkt, Minimum-Operator, Lukasiewicz-Operator, Hamacher Operator, Einstein Produkt und Durchschnitts-Operatoren; Harmonisches Mittel, Geometrisches Mittel, Arithmetisches Mittel.

⁶Die Ergebnisse dieses Berichtes entstanden im Rahmen des Projektes „Fuzzy-Regler für lineare und bilineare Systeme bei veränderlichen Systemparametern“, das von der DFG Az.: schw 120/53-1 gefördert wurde.

Bei den Untersuchungen zeigte sich, daß nur das algebraische Produkt und das geometrische Mittel die linguistischen Regeln über den ganzen Fuzzy–Unterraum approximiert (Tabelle 10.2).

Anordnungen der Konklusionen	Vergleich der Stellgrößenabhängigkeiten
1. Fall	$u^R = u^f$
2. Fall	$u^R = u^f$
3. Fall	$u^R = u^f$

Tabelle 10.2: Ergebnisse der Anwendung des algebraischen Produktes und des geometrischen Mittels in der Fuzzy–Regelung

Beim algebraischen Produkt und beim geometrischen Mittel kann der Anwender sicher sein, daß sein Wissen zur Regelung eines Prozesses in Form z. B. einer Karnaugh–Tafel auch wirklich von dem Fuzzy–Regler approximiert wird (Kennfeld). So wird z. B. vom Anwender durch seine linguistische Beschreibung bei einem Fehler in der Nähe des Nullpunktes, d. h. beim Erreichen der Führungsgröße, eine Stellgrößenabhängigkeit nur von der Regelabweichung gefordert (z. B. um einen ruhigeren Führungsverlauf um den Arbeitspunkt zu erzielen). Ist dies nicht der Fall, hängt z. B. die Stellgröße von der Regelabweichung und der Änderung der Regelabweichung ab, so kann sich dieses negativ auf die Regelung ausüben. In diesem Fall ist es jedoch nicht auf falsch aufgestellte linguistische Regeln zurückzuführen, sondern auf eine schlechte Approximation des Fuzzy–Reglers durch den Verknüpfungs–Operator. Neben der sehr guten Approximation der linguistischen Regeln zeichnet sich das algebraische Produkt weiterhin durch sein interaktives und sensitives Verhalten aus, welches besonders in der Fuzzy–Regelung wichtig ist. Weshalb vom Standpunkt der Fuzzy–Regelung aus und auf der Grundlage der hier gezeigten Ergebnisse das algebraische Produkt allen hier behandelten Verknüpfungs–Operatoren vorzuziehen ist.

Beim Minimum–Operator wirkt sich besonders sein nicht–interaktives Verhalten und die nicht vorhandene Approximation der linguistischen Regeln über den ganzen Fuzzy–Unterraum negativ aus. Weiterhin wurde festgestellt, daß die Abhängigkeit des Stellgrößenverlaufes u^f im Fuzzy–Unterraum nicht nur von den Anordnungen der Konklusionen, bezüglich den partiellen Fuzzy–Unterräumen, sondern auch von den Werten der Zugehörigkeitsfunktionen der Fuzzy–Referenzmengen untereinander abhängig ist.

Der Lukasiewicz–Operator konnte die linguistischen Regeln nicht approximieren. So ergaben sich beim Lukasiewicz–Operator neben der wechselnden Abhängigkeit der Stellgröße

u^f von der Regelabweichung und der Änderung der Regelabweichung im Fuzzy–Unterraum ein konstanter Stellgrößenverlauf. Weiterhin ergaben sich bei bestimmten Konstellationen der Zugehörigkeitswerte der Fuzzy–Referenzmengen sogar Singularitäten, welche programmtechnisch zu berücksichtigen wären.

Das Einstein– sowie das Hamacher– Produkt zeichnen sich besonders durch ihr interaktives Verhalten aus, erfüllen jedoch das Bewertungskriterium nicht. So das hier kein Vorteil gegenüber dem algebraischen Produkt festzustellen war, zumal mit der Anwendung des Einstein– bzw. des Hamacher– Produktes ein wesentlich größerer numerischer Aufwand zur Berechnung der Operatoren verbunden ist. Weiterhin konnte festgestellt werden, daß die Durchschnitts–Operatoren (mit Ausnahme des geometrischen Mittels) in keinster Weise eine Alternative zu den t –Normen darstellen.

Das hier aufgestellte Bewertungskriterium ist nicht nur auf die Überprüfung von Verknüpfungs–Operatoren beschränkt, so daß dieses Bewertungskriterium auch auf andere Probleme in der Fuzzy–Regelung angewandt werden kann. Im weiteren soll überprüft werden, ob eine allgemeine Regel zur Anwendung von Verknüpfungs–Operatoren in der Fuzzy–Regelung hergeleitet werden kann, um nicht bei jedem Verknüpfungs–Operator eine analytische Darstellung des Fuzzy–Reglers berechnen zu müssen.

11 Literaturverzeichnis

- Alsina, C., E. Trillas und L. Valverde.** 1983. On some Logical Connectives for Fuzzy Sets Theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 85. 543–565.
- Bandemer, H. und S. Gottwald.** 1993. *Einführung in die Fuzzy-Methoden*. Berlin: Akademie-Verlag.
- Bandemer, H. und W. Näther.** 1992. *Fuzzy Data Analysis*. Boston: Kluwer Academic.
- Behmenburg, C.** 1993. Modell reference adaptive systems with fuzzy logic controllers. *Proc. of the 2nd IEEE Conference on Control and Applications, Vol. I, Vancouver, Kanada*. 171–176.
- Behmenburg, C. und T. Bertram.** 1993. Analytische Beschreibung eines Fuzzy-Systemes und ihre Anwendung. *Fuzzy Logic: Theorie und Praxis*. B. Reusch (Hrsg.). *Reihe: Informatik aktuell*. Berlin: Springer. 111–120.
- Bellman, R. und M. Giertz.** 1973. On the analytic formalism of the theory of fuzzy sets. *Information Sciences* 5. 149–157.
- Bellman, R. und L.A. Zadeh.** 1970. Decision-making in a fuzzy environment. *Management Sciences* 17 141–164.
- Berger, M.** 1994a. *Konfektionierte relationale Fuzzy-Regler für Systemklassen*. Forschungsbericht 16/94, MSRT. Universität Duisburg.
- Berger, M.** 1994b. *Klassifizierung und Reglersynthese für Prozesse, die sich aus verschiedenen Systemklassen zusammensetzen*. Forschungsbericht 17/94, MSRT. Universität Duisburg.
- Berger, M.** 1994c. *Analytische Darstellung von Standard-Fuzzy-Reglern*. Forschungsbericht 19/94, MSRT. Universität Duisburg.
- Bertram, T.** 1991. *Einführung in die Fuzzy-Regelung*. Forschungsbericht 4/91, MSRT. Universität Duisburg.
- Bertram, T.** 1992. *Herleitung einer analytischen Darstellung für ein Fuzzy-System*. Forschungsbericht 13/92, MSRT. Universität Duisburg.
- Bertram, T., F. Svaricek, T. Bindel, R. Böhm, H. Kiendl, B. Pfeiffer, und M. Weber.** 1994. Fuzzy Control. Zusammenstellung und Beschreibung wichtiger Begriffe. *Automatisierungstechnik at 42*. 322–326.

- Böhme, G.** 1992. *Algebra*. Berlin: Springer.
- Böhme, G.** 1993. *Fuzzy-Logik: Einführung in die algebraischen und logischen Grundlagen*. Berlin: Springer.
- Bothe, H.** 1993. *Fuzzy-Logic*. Berlin: Springer.
- Brown, M. und C.J. Harris.** 1991. A Nonlinear Adaptive Controller: A Comparison between Fuzzy Logic Control and Neurocontrol. *IMA Journal of Mathematical Control Information* 8. 239–265.
- Buckley, J.J. und W. Silver.** 1988. Fuzzy Numbers for Expert Systems. *Fuzzy Logic in Knowledge-Based Systems, Decision and Control*. Hrsg. M.M. Guta und T. Yamakawa. Amsterdam: North-Holland. 153–172.
- Buckley, J.J.** 1992. Universal Fuzzy Controllers. *Automatica* 28. 1245–1248.
- Butnariu, D. und E. Klement.** 1993. *Triangular Norm-Based Measures and Games with Fuzzy Coalitions*. Dordrecht: Kluwer Academic.
- Driankov, D., H. Hellendoorn und M. Reinfrank.** 1993. *An Introduction to Fuzzy-Control*. Berlin: Springer.
- Dubois, D. und H. Prade.** 1979. Outline of Fuzzy Sets Theory. *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*. Hrsg. M.M. Guta, R.K. Ragade und R.R. Yager. Amsterdam: North-Holland. 27–48.
- Dubois, D. und H. Prade.** 1980. New Results about Properties and Semantics of Fuzzy Set-Theoretic. *Fuzzy Sets: Theory and Applications to Policy Analysis and Information Systems*. Hrsg. P.P. Wang und S.K. Chang. New York: Plenum Press. 170–194.
- Fahni-Torbaghan, M. und A. Höffmann.** 1994. *Fuzzy Logik und Blackboard-Modelle*. München: Oldenbourg.
- Freeling, A.** 1980. Fuzzy Sets and Decision Analysis. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 10. 341–354.
- Frenck, C.** 1993. Ein Verfahren zur Untersuchung der Verträglichkeit der Regelbasen von Fuzzy-Reglern. 3. *Workshop Fuzzy Control*. Dortmund.
- Frenck, C.** 1994. Ein Verfahren zur Untersuchung der Konsistenz der Regelbasen von Fuzzy-Reglern. *VDI Bericht 1113. Fuzzy Control*, 471–481.
- Gottwald, S.** 1989. *Mehrwertige Logik: Eine Einführung in Theorie und Anwendung*. Berlin: Akademie-Verlag.

- Gottwald, S.** 1993. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Braunschweig: Vieweg.
- Grimm, W.** 1992. Ein- Ausgangsverhalten von Fuzzy Reglern. 2. *Workshop Fuzzy Control*. Dortmund.
- Grimm, W.** 1994. Regelungstechnische Bedeutung von linguistischen Fuzzy-Operatoren. *VDI-Berichte 1113. Fuzzy Control*. 483–496.
- Hamacher, H.** 1976. On logical connective of fuzzy statements and their affiliated truth values. *3rd European Meeting Cybernetics Systems Research*. Vienna.
- Hamacher, H.** 1978. *Über logische Aggregationen nicht-binär explizierter Entscheidungskriterien: Ein axiomatischer Beitrag zur normativen Entscheidungstheorie*. Frankfurt: Rita G. Fischer.
- Kacprzyk, J.** 1983. *Multistage decision-making under fuzziness: theory and applications*. Köln: TÜV-Rheinland.
- Kacprzyk, J. und A. Ziólkowski.** 1986. Database Queries with Fuzzy Linguistic Quantifiers. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 16. 474–479.
- Kacprzyk, J. und C. Iwański.** 1987. Generalization of discounted multistage decision making and control through fuzzy linguistic quantifiers: an attempt to introduce commonsense knowledge. *International Journal Control* 45. 1909–1930.
- Kahlert, J. und H. Frank.** 1993. *Fuzzy-Logic und Fuzzy-Control*. Braunschweig: Vieweg.
- Kaufmann, A.** 1975. *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets, Volume I*. New York: Academic Press.
- Kaufmann, A. und M.M. Gupta.** 1991. *Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science*. Amsterdam: North-Holland.
- Klement, E.P.** 1982. Construction of Fuzzy σ -Algebras Using Triangular Norms. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 85. 543–565.
- Kroll, A.** 1993. *Verfahren für adaptive Regelungen mit der Fuzzy-Logik*. Forschungsbericht Nr. 10/93, MSRT. Universität Duisburg.
- Kruse, R., J. Gebhardt und F. Klawonn.** 1994. *Foundations of Fuzzy Systems*. New York: John Wiley & Sons.
- Kitainik, L.** 1993. *Fuzzy decision procedures with binary relations*. Boston: Kluwer Academic.

- Lee, C.C.** 1990. Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller, Part II. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 20. 419–435.
- Lowen, R.** 1980. Convex Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems* 3. 291–310.
- Leichfried, J. und M. Heiss.** 1995. Ein kennfeldorientiertes Konzept für Fuzzy-Regler. *Automatisierungstechnik at 1.* 31–40.
- Mayer, A., B. Mechler, A. Schlindwein und R. Wolke.** 1994. *Fuzzy Logic: Einführung und Leitfaden zur praktischen Anwendung. Mit Fuzzy-Shell in C++*. Bonn: Addison-Wesley.
- Mesiar, R.** 1994. Fuzzy Implications. *EUFIT, Aachen* .
- Mizumoto, M.** 1989a. Pictarical Representation of Fuzzy Connectives, Part I: Case of t -Norms, t -Conorms and Averaging Operators. *Fuzzy Sets and Systems* 31. 217–242.
- Mizimoto, M.** 1989b. Pictarical Representation of Fuzzy Connectives, Part II: Case of Compensatory Operators and Self-Dual Operators. *Fuzzy Sets and Systems* 32. 45–79.
- Nauck, D., F. Klawonn und R. Kruse.** 1994. *Neuronale Netze und Fuzzy-Systeme*. Braunschweig: Vieweg.
- Nguyen, H.T.** 1977. On Fuzziness and Linguistic Probabilities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 61. 658–671.
- Pedrycz, W.** 1981. An approach to the analysis of fuzzy systems. *Interantional Journal of Control* 34. 403–421.
- Pedrycz, W.** 1993. *Fuzzy Control and Fuzzy Systems*. New York: John Wiley & Sons.
- Rommelfanger, H.** 1994. *Fuzzy Decision Support-Systeme*. Berlin: Springer.
- Thole, U., H.J. Zimmermann und P. Zysno.** 1979. On Suitability of Minimum and Product Operators for the Intersection of Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*. 2. 167–180.
- Wang, L.** 1994a. *Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and Stability Anaysis* Englewood Cliffs New Jersey: Prentice Hall.
- Wang, L.** 1994b. A Supervisory Controller for Fuzzy Control Systems that Guarantees Stability. *IEEE Transactions on Automatic Control* 39. 1845–1847.

- Wangming, W.** 1988. A Multivalued Logic System with respect to T-Norms. *Fuzzy Computing*. Hrsg. M.M. Guta und T. Yamakawa. Amsterdam: North-Holland. 355–364.
- Wu, Q., D. Böming und E. Schneider.** 1994. Realisierung von Fuzzy-Reglern mit Hilfe von Relationsmatrizen. *Automatisierungstechnik at 42*. 162–169.
- Yager, R.R.** 1980. Satisfaction and Fuzzy Decision Functions. *Fuzzy Sets: Theory and Applications to Policy Analysis and Information Systems*. Hrsg. P.P. Wang und S.K. Chang. New York: Plenum Press. 170–194.
- Ying, H., W. Silver und J.J. Buckley.** 1990. Fuzzy Control Theory: A Nonlinear Case. *Automatica* 26. 513–520.
- Ying, H.** 1993. The Simplest Fuzzy Controller using Different Inference Methods are Different Nonlinear Proportional–integral Controllers with Variable Gains. *Automatica* 29. 1579–1589.
- Zadeh, L.A.** 1965. Fuzzy Sets. *Information and Control* 8. 338–353.
- Zadeh, L.A.** 1973. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics SMC* 3. 28–44.
- Zadeh, L.A.** 1986. Outline of a Theory of Usuality on Fuzzy Logic. *Fuzzy Sets Theory and Applications*. Hrsg. A.J. Jones, A. Kaufmann und H.J. Zimmermann. Boston: D. Reidel Publishing Company. 79–97.
- Zimmermann, H.J.** 1978. Results of empirical studies in fuzzy set theory. *Applied General System Research*. Hrsg. G.J. Klir. New York: Plenum.
- Zimmermann, H.J.** 1987. *Fuzzy Sets, Decision Making and Expert Systems*. Boston: Kluwer Academic.

A Kennfelder

Im folgenden sind die Kennfelder eines Standard-Fuzzy-PI-Reglers (Berger 1994a) für unterschiedliche Verknüpfungs-Operatoren dargestellt.

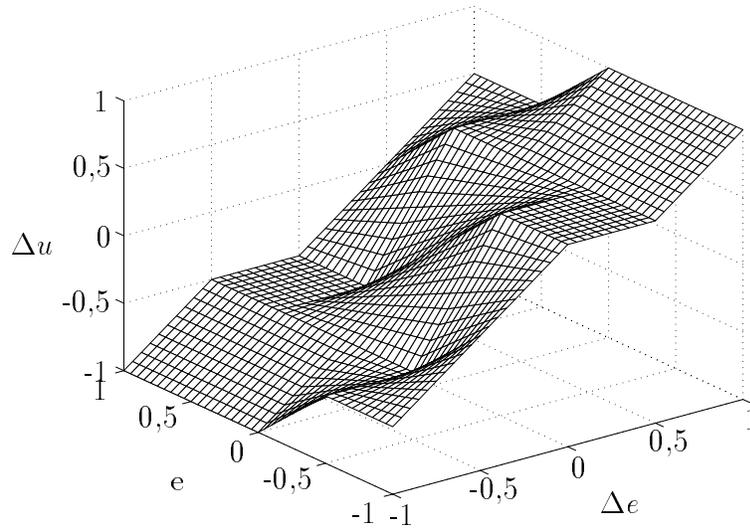


Bild A.1: Kennfeld des Fuzzy-Reglers unter Anwendung des algebraischen Produktes

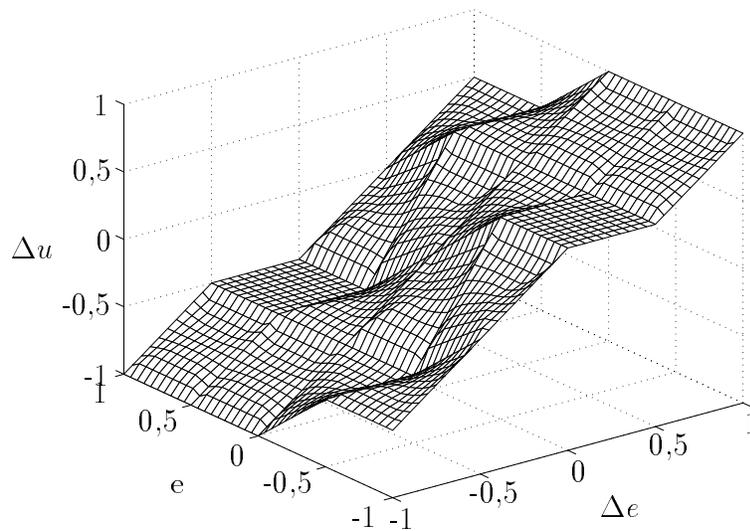


Bild A.2: Kennfeld des Fuzzy-Reglers unter Anwendung des Minimum-Operators

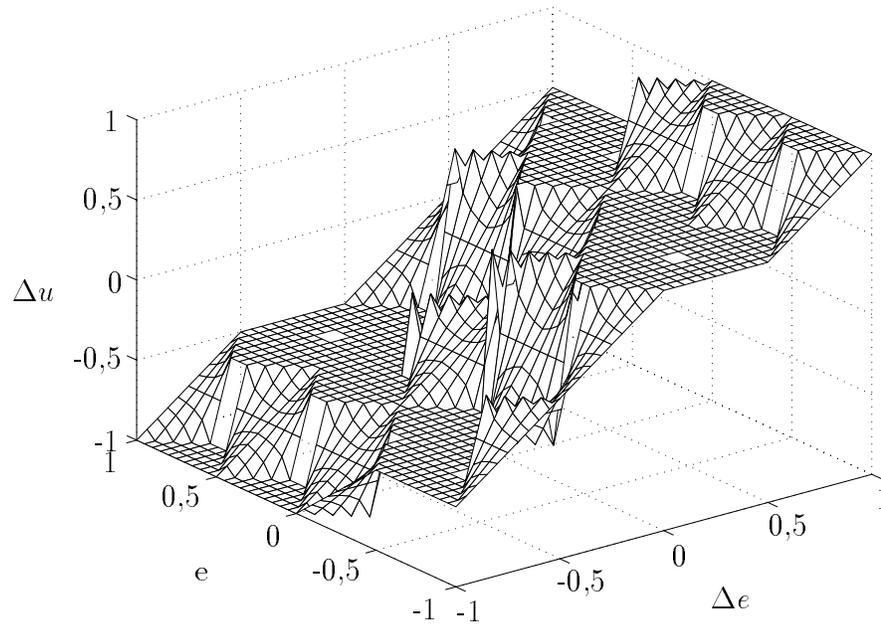


Bild A.3: Kennfeld des Fuzzy-Reglers unter Anwendung des Łukasiewicz-Operators

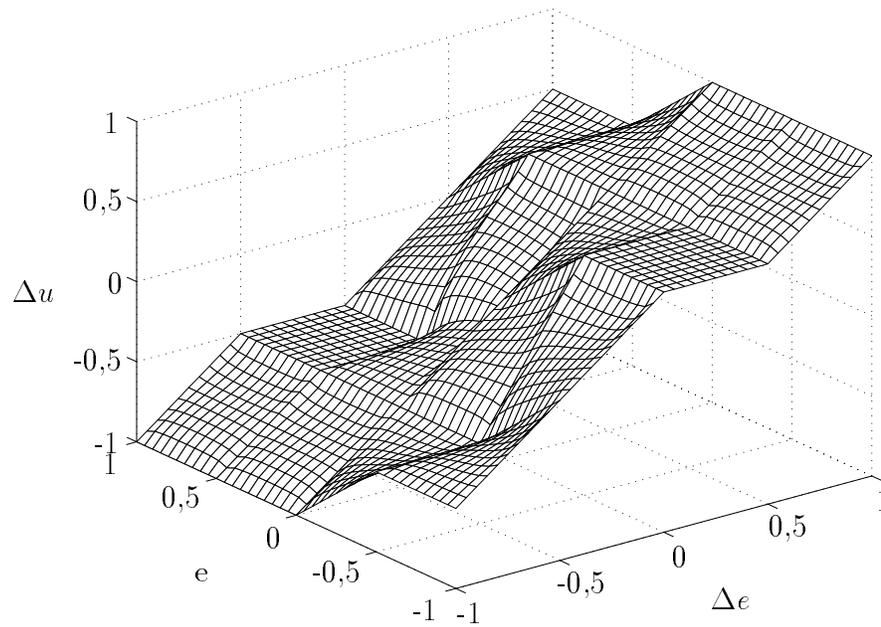


Bild A.4: Kennfeld des Fuzzy-Reglers unter Anwendung des Hamacher Produktes

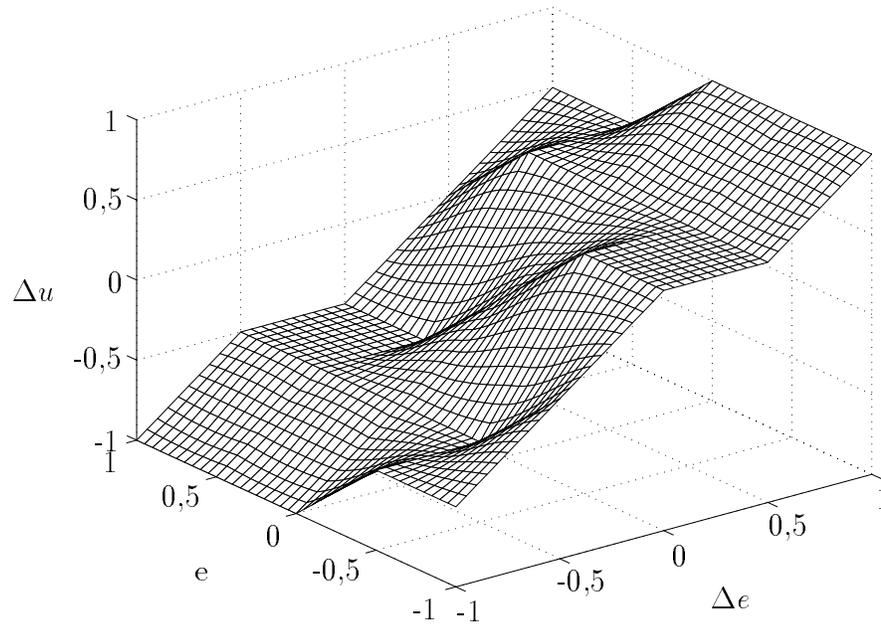


Bild A.5: Kennfeld des Fuzzy-Reglers unter Anwendung des Einstein Produktes

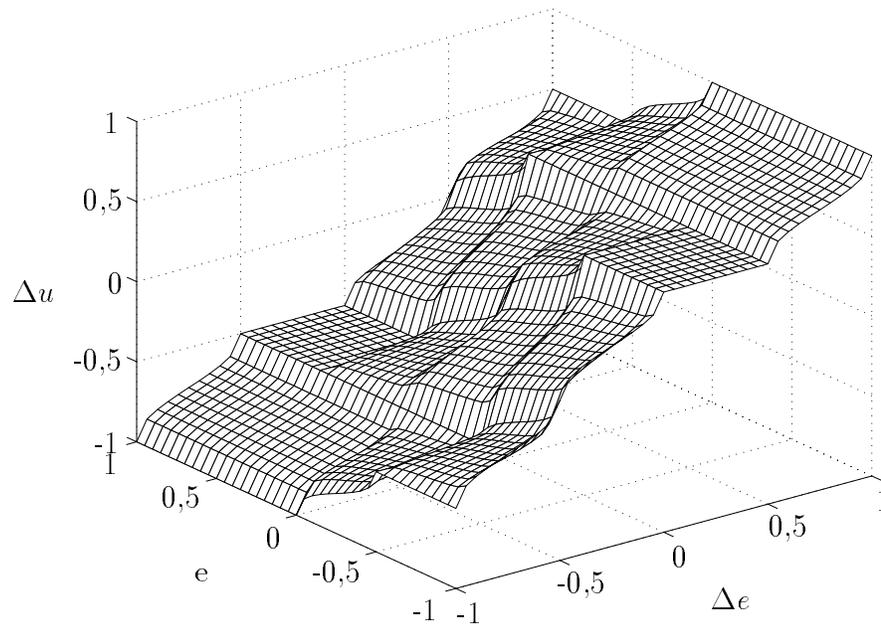


Bild A.6: Kennfeld des Fuzzy-Reglers unter Anwendung des Geometrischen Mittels

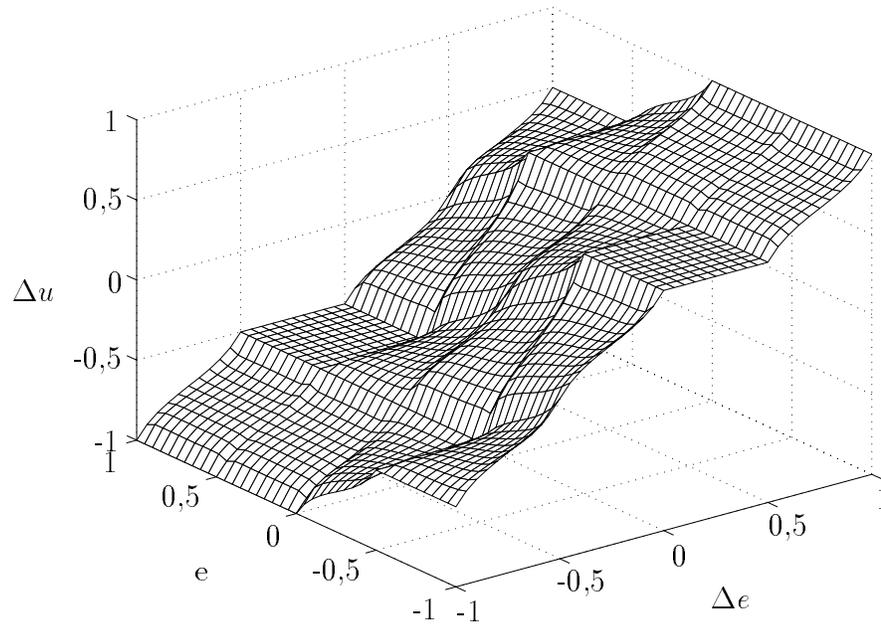


Bild A.7: Kennfeld des Fuzzy-Reglers unter Anwendung des Harmonischen Mittels

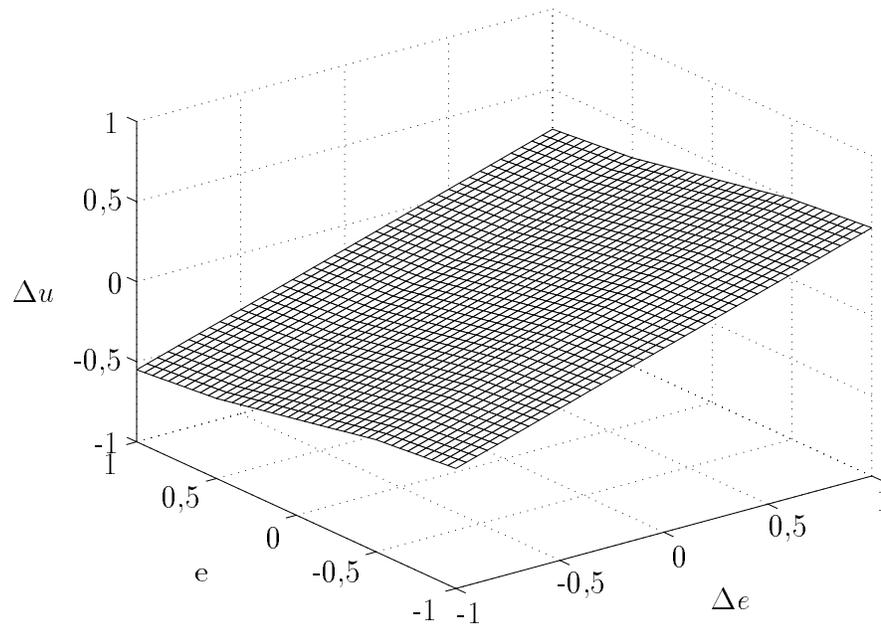


Bild A.8: Kennfeld des Fuzzy-Reglers unter Anwendung des Arithmetischen Mittels

B Binäre Fuzzy-Relationen

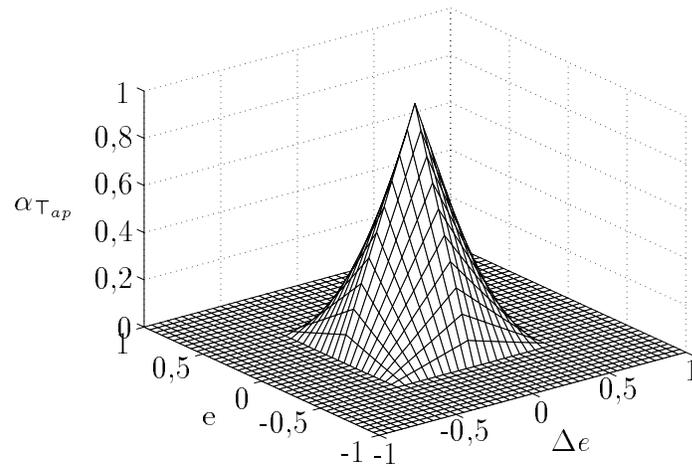


Bild B.1: Binäre Fuzzy-Relation $R = \{((e, \Delta e), \alpha(e, \Delta e)) \mid e \in \mathbb{X}, \Delta e \in \mathbb{Y}\}$ über das algebraische Produkt (Produkt-Operator)

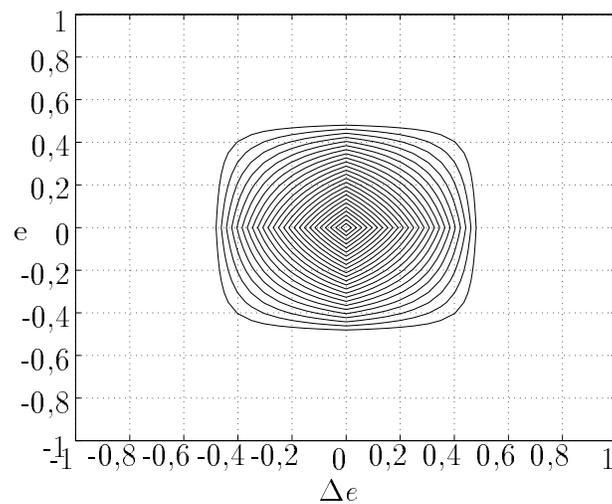


Bild B.2: Konturdarstellung der binären Fuzzy-Relation $R = \{((e, \Delta e), \alpha_{\tau_{ap}}(e, \Delta e)) \mid e \in \mathbb{X}, \Delta e \in \mathbb{Y}\}$

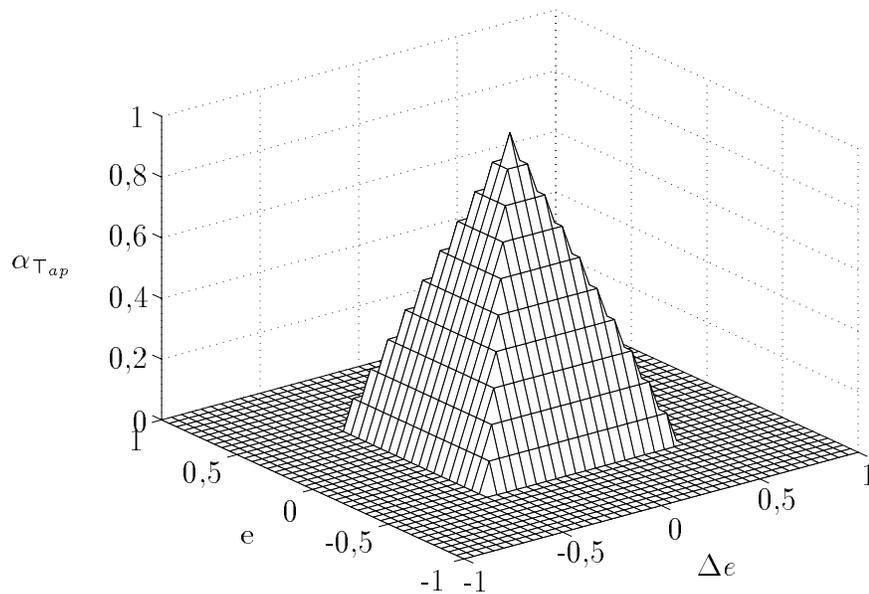


Bild B.3: Binäre Fuzzy-Relation $R = \{((e, \Delta e), \alpha(e, \Delta e)) \mid e \in \mathbb{X}, \Delta e \in \mathbb{Y}\}$ über den Minimum-Operator

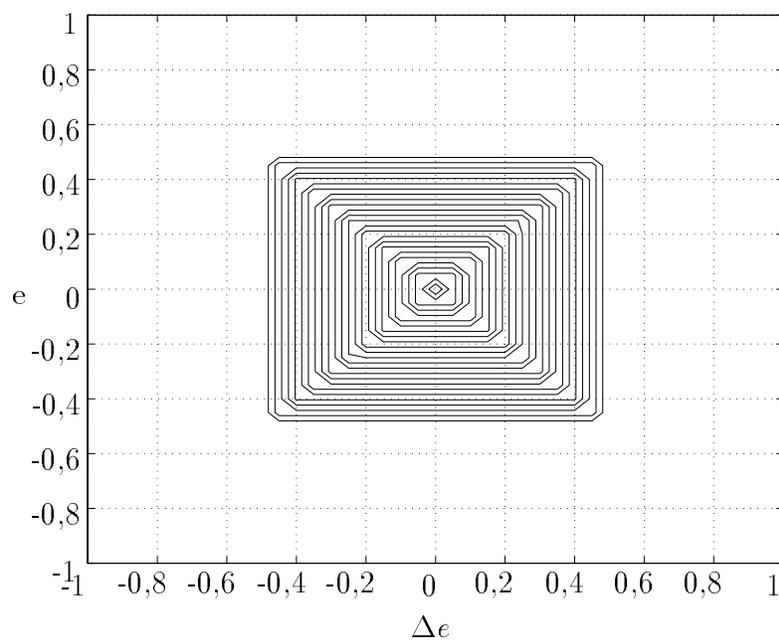


Bild B.4: Konturdarstellung der binären Fuzzy-Relation $R = \{((e, \Delta e), \alpha_{\tau_{min}}(e, \Delta e)) \mid e \in \mathbb{X}, \Delta e \in \mathbb{Y}\}$

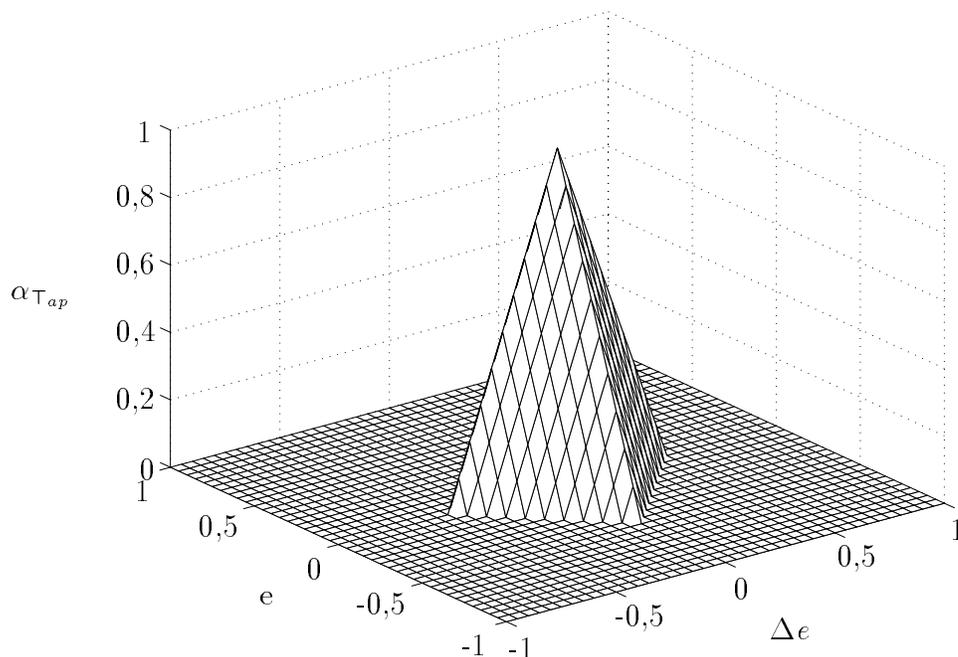


Bild B.5: Binäre Fuzzy-Relation $R = \{((e, \Delta e), \alpha(e, \Delta e)) \mid e \in \mathbb{X}, \Delta e \in \mathbb{Y}\}$ über den Lukasiewicz-Operator

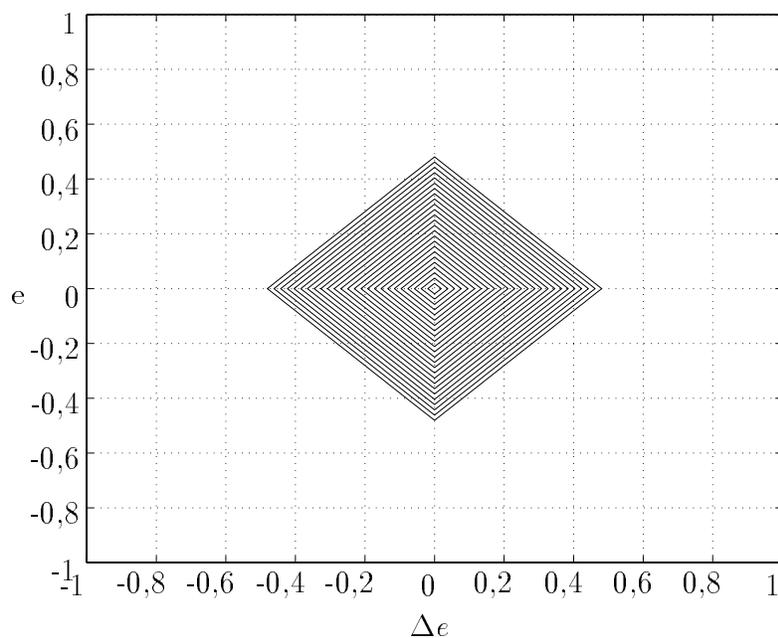


Bild B.6: Konturdarstellung der binären Fuzzy-Relation $R = \{((e, \Delta e), \alpha_{\tau_{Luk}}(e, \Delta e)) \mid e \in \mathbb{X}, \Delta e \in \mathbb{Y}\}$

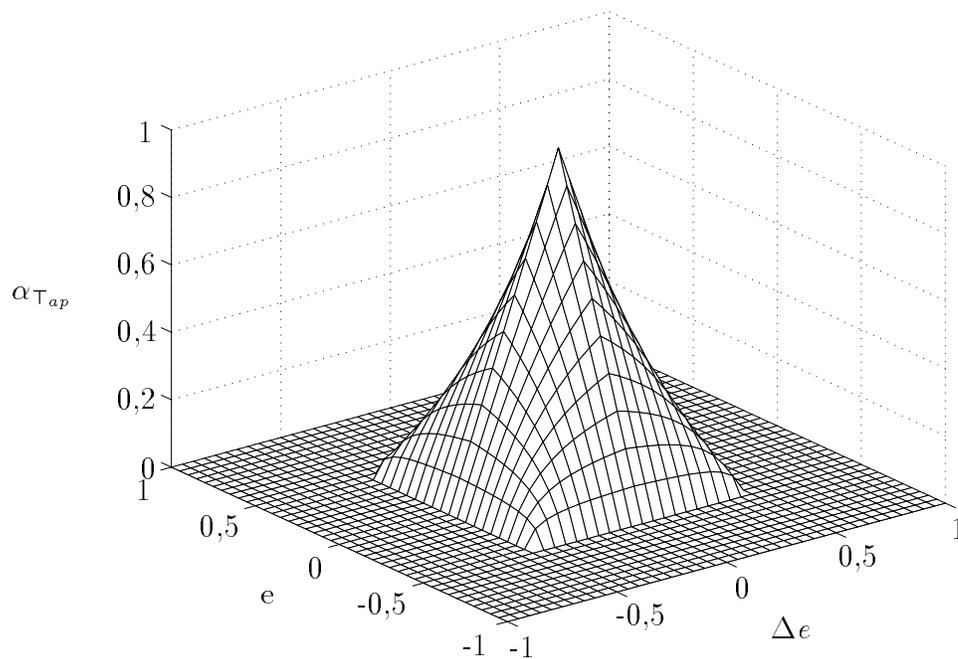


Bild B.7: Binäre Fuzzy-Relation $R = \{((e, \Delta e), \alpha(e, \Delta e)) \mid e \in \mathbb{X}, \Delta e \in \mathbb{Y}\}$ über das Hamacher Produkt

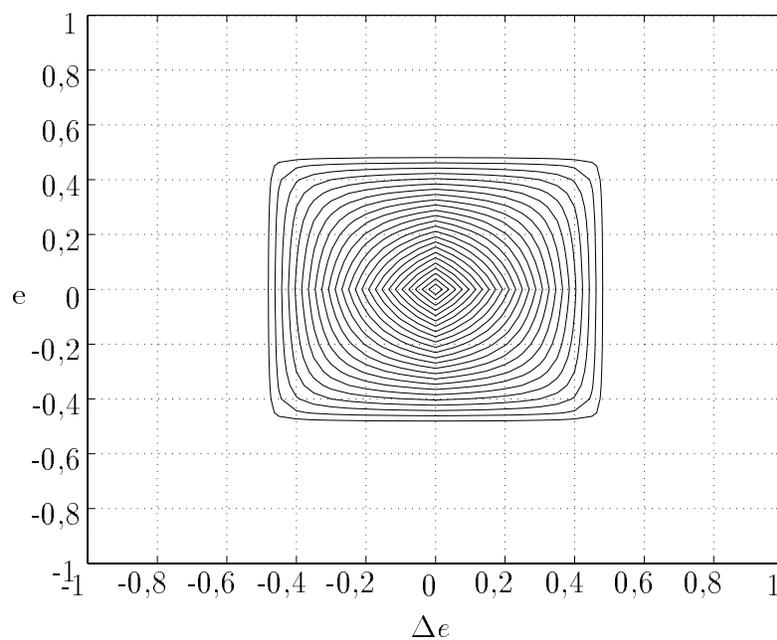


Bild B.8: Konturdarstellung der binären Fuzzy-Relation $R = \{((e, \Delta e), \alpha_{\tau_{hp}}(e, \Delta e)) \mid e \in \mathbb{X}, \Delta e \in \mathbb{Y}\}$

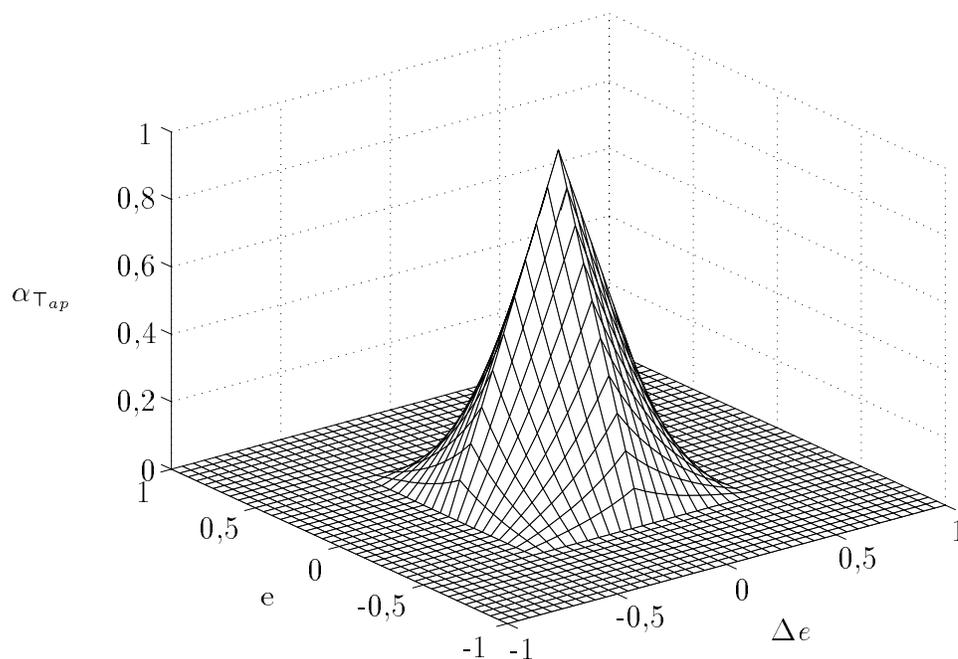


Bild B.9: Binäre Fuzzy-Relation $R = \{((e, \Delta e), \alpha(e, \Delta e)) \mid e \in \mathbb{X}, \Delta e \in \mathbb{Y}\}$ über das Einstein Produkt

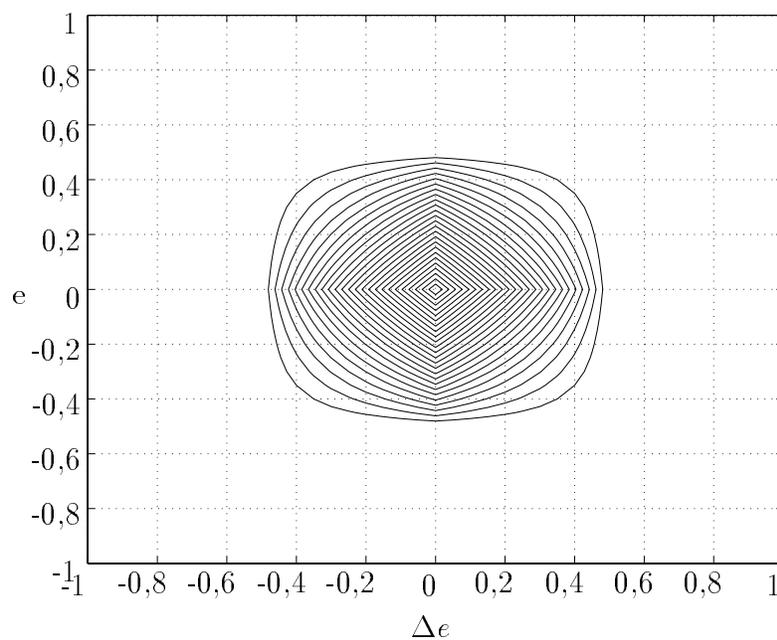


Bild B.10: Konturdarstellung der binären Fuzzy-Relation $R = \{((e, \Delta e), \alpha_{\tau_{ep}}(e, \Delta e)) \mid e \in \mathbb{X}, \Delta e \in \mathbb{Y}\}$

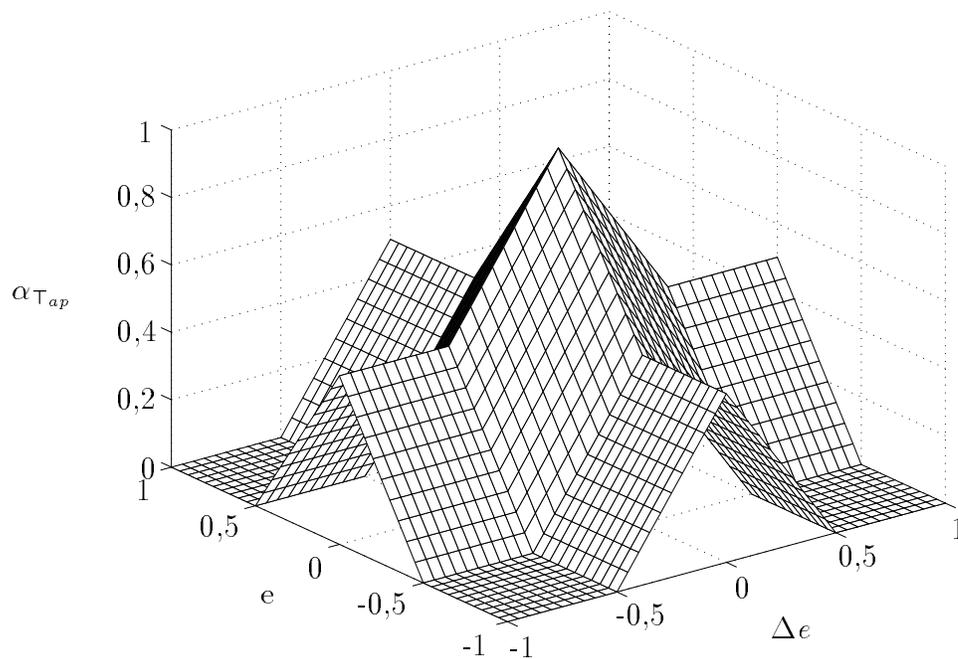


Bild B.11: Binäre Fuzzy-Relation $R = \{(e, \Delta e), \alpha(e, \Delta e)\} \mid e \in \mathbb{X}, \Delta e \in \mathbb{Y}\}$ über das Arithmetische Mittel

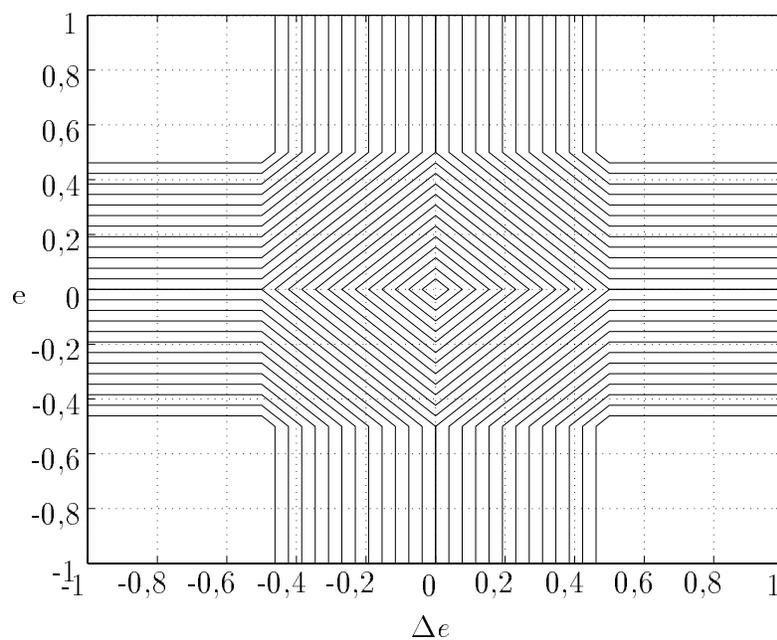


Bild B.12: Konturdarstellung der binären Fuzzy-Relation $R = \{(e, \Delta e), \alpha_{T_{am}}(e, \Delta e)\} \mid e \in \mathbb{X}, \Delta e \in \mathbb{Y}\}$

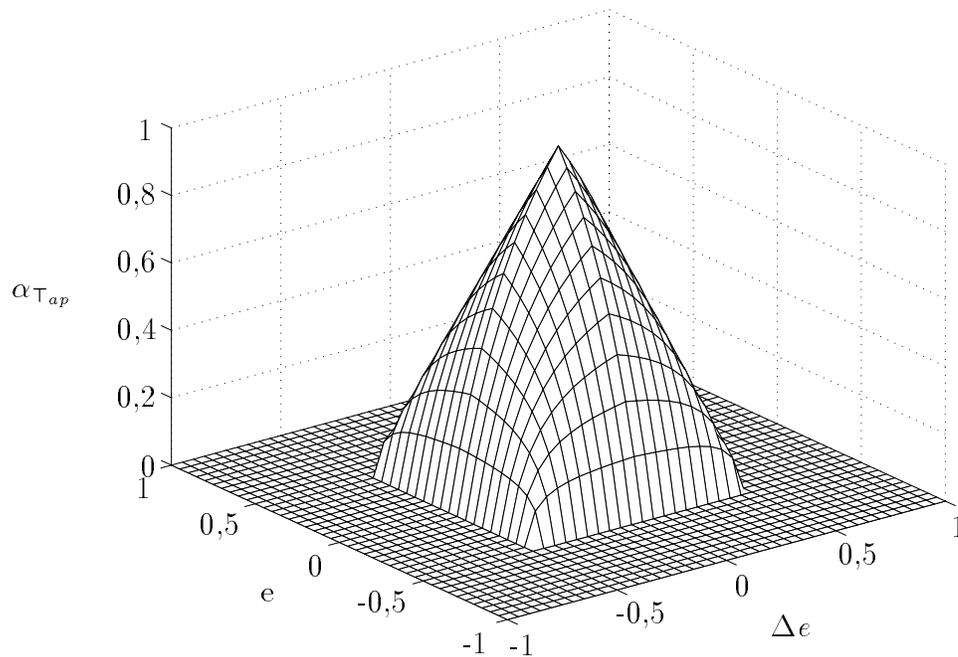


Bild B.13: Binäre Fuzzy-Relation $R = \{((e, \Delta e), \alpha(e, \Delta e)) \mid e \in \mathbb{X}, \Delta e \in \mathbb{Y}\}$ über das Harmonische Mittel

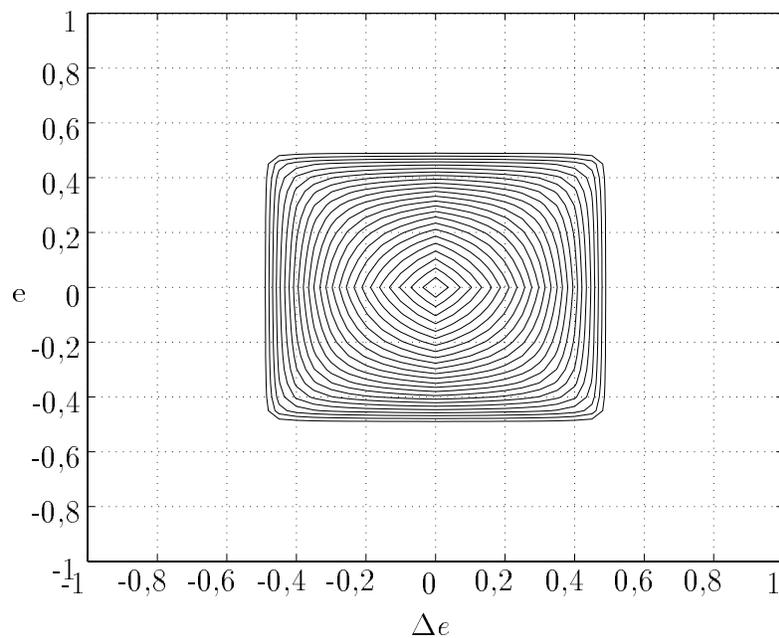


Bild B.14: Konturdarstellung der binären Fuzzy-Relation $R = \{((e, \Delta e), \alpha_{\tau_{hm}}(e, \Delta e)) \mid e \in \mathbb{X}, \Delta e \in \mathbb{Y}\}$

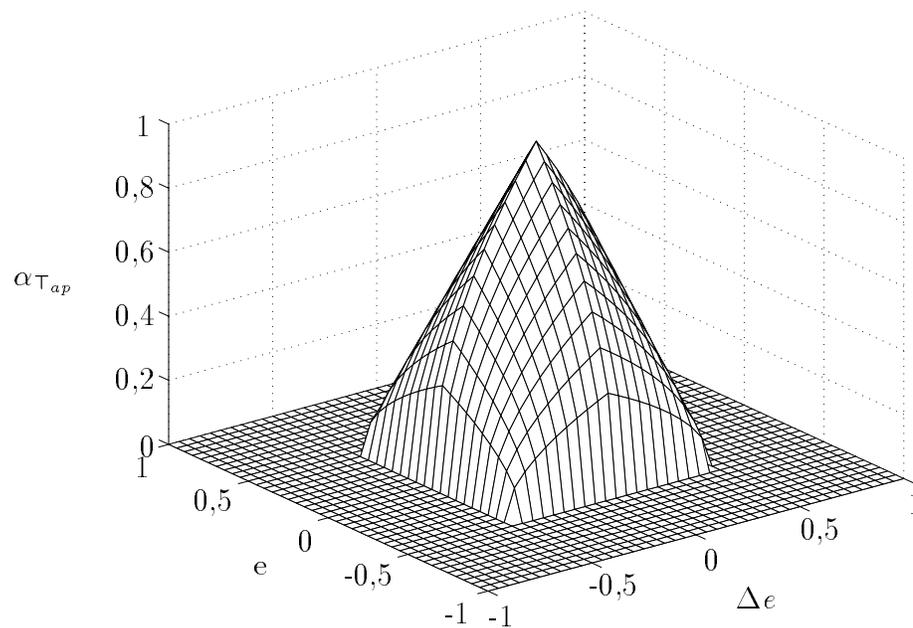


Bild B.15: Binäre Fuzzy-Relation $R = \{((e, \Delta e), \alpha(e, \Delta e)) \mid e \in \mathbb{X}, \Delta e \in \mathbb{Y}\}$ über das Geometrische Mittel

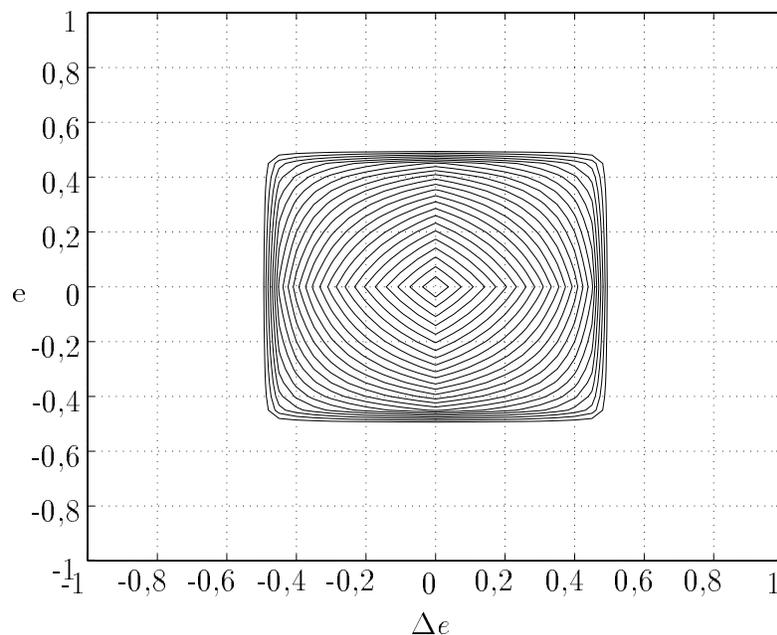


Bild B.16: Konturdarstellung der binären Fuzzy-Relation $R = \{((e, \Delta e), \alpha_{T_{gm}}(e, \Delta e)) \mid e \in \mathbb{X}, \Delta e \in \mathbb{Y}\}$