

# Grundlagen der Sliding-Mode-Regelung

H. Hebisch

Forschungsbericht Nr. 15/95

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

**Übersicht:** Dieser Forschungsbericht stellt eine Einführung in die Methode der Sliding-Mode-Regelung dar und kann als Grundlage für alle weiteren Untersuchungen im Bereich der Reglersynthese mit Sliding-Mode-Verfahren herangezogen werden. Im Rahmen einer Sliding-Mode-Regelung werden durch Ausnutzen der unterschiedlichen Eigenschaften eines variabel strukturierten Systems neue Dynamiken erzwungen. Dabei kann der mitunter harte Übergang zwischen den verschiedenen Strukturvarianten zu unerwünschtem Systemverhalten führen. Der Bericht beschreibt Ursachen und Methoden zur Unterbindung dieser Phänomene.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg  
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik  
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

# Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	II
<b>1 Einleitende Übersicht</b>	<b>1</b>
<b>2 Leitgedanke der variabel strukturierten Regelung (VSR)</b>	<b>2</b>
2.1 Problemstellung der VSR . . . . .	5
2.2 Mathematische Hilfsmittel . . . . .	6
<b>3 VSR für lineare Systeme</b>	<b>8</b>
3.1 Schaltmuster . . . . .	10
3.2 Erreichbarkeit . . . . .	11
3.3 Das Regelgesetz . . . . .	13
3.4 Anwendung der VSR auf nichtlineare Systeme . . . . .	15
<b>4 Eigenschaften VSR-geregelter Systeme</b>	<b>16</b>
4.1 Charakteristika der Eintreffphase . . . . .	16
4.2 Charakteristika der Sliding-Mode-Phase . . . . .	16
<b>5 Zusammenfassung</b>	<b>23</b>
<b>6 Literaturverzeichnis</b>	<b>25</b>

# Nomenklatur

## Formelzeichen

$\mathbf{A}$	Systemmatrix
$\mathbf{b}, \mathbf{B}$	Eingangsvektor, -matrix
$\mathbf{c}, \mathbf{c}, \mathbf{C}$	Schaltfunktionsparameter, -vektor, -matrix
$\mathbf{f}$	Vektorfunktion
$i, j$	Laufindices
$k$	Verstärkungsfaktor
$\mathbf{K}$	Parameter für Schaltfunktionsdynamik
$L$	Begrenzungsparameter
$m, n$	Dimensionen
$\mathbf{Q}$	Parameter für Schaltfunktionsdynamik
$s, \mathbf{s}, S$	Schaltfunktion, Schaltmannigfaltigkeit
$t$	Zeit
$u, \mathbf{u}$	Stellgröße, Stellgrößenvektor
$V$	Ljapunovfunktion
$x, \mathbf{x}$	Regelgröße, Zustandsgrößenvektor
$\alpha, \beta$	Streckenparameter
$\delta$	Glättungskonstante
$\Delta$	Hystereseparameter
$\mu$	Verhältniszahl
$\psi$	geschaltete Reglerverstärkung
$\sigma$	Schaltlinie mit Sliding-Mode

## Operatoren

$\dot{(\cdot)}$	zeitliche Ableitung
$\partial(\cdot)/\partial(\cdot)$	partielle Ableitung
$\cap$	Schnittmenge
$\wedge$	Konjunktion
$\vee$	Disjunktion
$\dim(\cdot)$	Dimension
$\text{hys}(\cdot)$	Hystereseffunktion
$\text{sat}(\cdot)$	Begrenzungsfunktion
$\text{sgn}(\cdot)$	Signumfunktion
$\text{sgn}(\cdot)$	vektorielle Signumfunktion

**Indices**

0	Anfangszustand
$F$	final
$0^+$	rechtsseitiger Limes für $s \rightarrow 0$
$0^-$	linksseitiger Limes für $s \rightarrow 0$
0	$s = 0$
$\Leftrightarrow$	äquivalent

**Abkürzungen**

VSR	Variabel strukturierte Regelung
SMR	Sliding-Mode-Regelung

# 1 Einleitende Übersicht

Die variabel strukturierte Regelung (VSR) und in diesem Zusammenhang das Auftreten von Gleitzuständen, sogenannten Sliding-Modes, wurde zunächst vor allem in der Sowjetunion durch Emeljanov und einige seiner Mitforscher untersucht (Emeljanov 1969, Utkin 1978). In ihren Arbeiten wurden als Regelstrecken für gewöhnlich lineare Systeme 2. Ordnung in der Phasenebene analysiert. Seitdem hat sich die Regelung mittels variabler Struktur zu einer generell verwendbaren Entwurfsmethode weiterentwickelt, welche schon auf ein sehr breites Spektrum von Systemtypen angewendet wurde. Hierzu zählen nichtlineare Systeme (Sira–Ramírez 1992, Singh 1990, Slotine 1984), MIMO–Systeme (Bartolini u. a. 1993, Zhou und Fisher 1991), zeitdiskrete Systeme (Wang u. a. 1994, Chan 1995), Large-Scale–Systeme (große Systeme) (Khurana u. a. 1986a), unendlich dimensionale Systeme (Orlov und Utkin 1987) und stochastische Systeme. Zusätzlich hat sich die Zielsetzung derartiger Regelungen stark erweitert, so daß nicht mehr allein die Stabilisierung, sondern eine Vielzahl anderer Aufgaben wahrgenommen werden. Dazu zählen Folgeregelungen, Sliding-Mode–Beobachter (Slotine u. a. 1987) und adaptive Regelungskonzepte (Behmenburg 1994). Diejenige Eigenschaft, welche dabei die Regelung mit variabler Struktur am deutlichsten auszeichnet, ist ihre Robustheit. Das bedeutet, daß ein derart geregeltes System weitgehend unabhängig von Parameterungenauigkeiten und äußeren Störungen ist.

Dieser Bericht soll eine Übersicht der Grundlagen der Sliding-Mode–Regelung geben. In Form eines einfachen Beispiels wird zunächst die Idee, auf der die Methode basiert, vorgestellt. Daran schließt sich die Formulierung der allgemeinen Problemstellung beim Entwurf von Sliding-Mode–Regelungen an, und mathematische „Werkzeuge“ zur Behandlung dieser Problemstellung werden erläutert.

Abschnitt 3 des Berichtes behandelt die Regelung von linearen Systemen mittels VSR–Verfahren. Diese Einschränkung geschieht, um die Darstellung nicht durch sekundäre Effekte zu überfrachten. Für diesen vereinfachten Fall werden drei verschiedene Aspekte behandelt. Diese sind: die eingesetzten Schaltmuster, Bedingungen der Erreichbarkeit und die Wahl eines geeigneten Regelgesetzes.

Im vierten Hauptabschnitt des Berichtes werden schließlich die Eigenschaften VSR– geregelter Systeme behandelt. Besonderes Interesse findet dabei die Phase des Sliding-Modes während der Regelung. Die hier eintretenden, als Klappern bezeichneten Effekte stellen das Haupthindernis bei der Anwendung von Sliding-Mode–Reglern dar. Es werden die Auswirkungen der üblicherweise eingesetzten Methoden zur Lösung dieses Problems aufgezeigt und ein Ansatz für weitergehende Untersuchungen formuliert.

Den Abschluß des Berichtes bildet eine Zusammenfassung mit Ausblick auf in nächster Zeit anstehende Arbeiten.

## 2 Leitgedanke der variabel strukturierten Regelung (VSR)

Die grundlegende Idee der VSR soll hier beispielhaft durch ein System zweiter Ordnung erläutert werden:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{x} + x &= u \quad , \\ u &= -\psi x \quad .\end{aligned}\tag{2.1}$$

Dabei gelte:

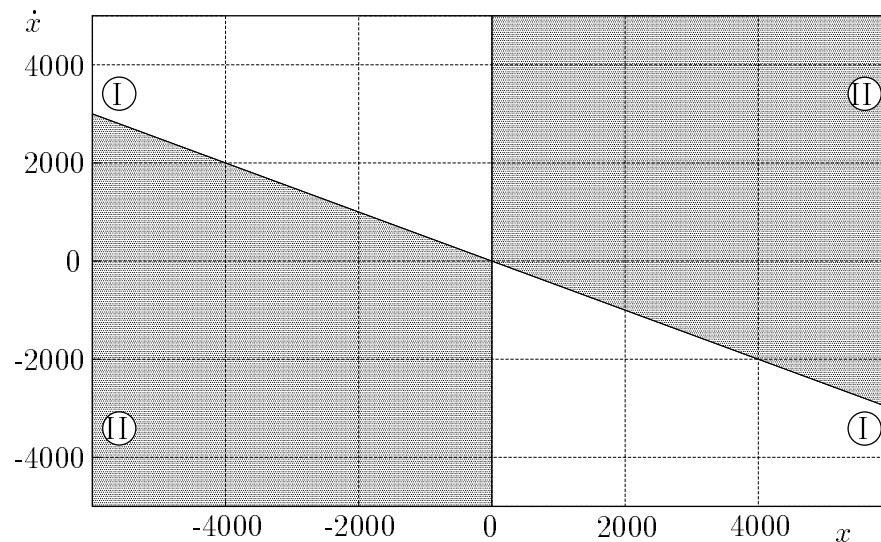
$$\psi = \begin{cases} 4 & , \text{für } s(x, \dot{x}) > 0 \\ -4 & , \text{für } s(x, \dot{x}) < 0 \end{cases}\tag{2.2}$$

und

$$s(x, \dot{x}) = x\dot{x} + 0,5x^2 = x(\dot{x} + 0,5x) \quad .\tag{2.3}$$

Die Größe  $s$  wird zu Null, wenn

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad \dot{x} + 0,5x = 0 \quad .\tag{2.4}$$



**Bild 2.1:** Bereiche in der Phasenebene

Mit diesen Funktionen werden Kurven beschrieben, die die Phasenebene ( $x$ - $\dot{x}$ -Ebene) in Bereiche einteilen, in welchen  $s(x, \dot{x})$  unterschiedliches Vorzeichen hat (Bild 2.1) und  $\psi$  seinen Wert ändert. Aus diesem Grunde werden diese Kurven häufig als Schaltlinien (Föllinger 1970) und  $s(x, \dot{x})$  als Schaltfunktion bezeichnet. An späterer Stelle dieses Berichtes sollen diese Begriffe genauer definiert werden.

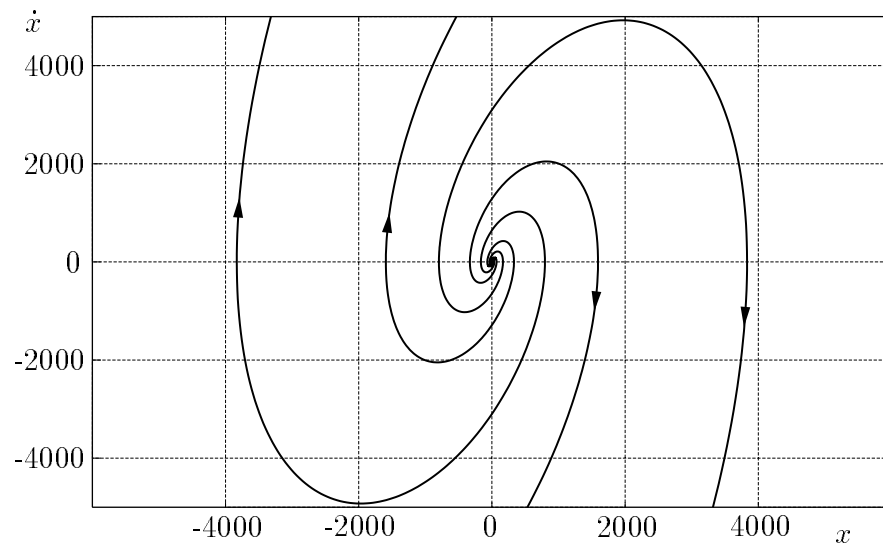
Wird die Rückführverstärkung  $\psi$  gemäß Gl. (2.2) mittels des Vorzeichens von  $s(x, \dot{x})$  geschaltet, ist das geregelte System in den zwei Regionen der Phasenebene analytisch durch zwei unterschiedliche Modelle definiert:

Im Bereich I, mit  $s(x, \dot{x}) > 0$ , lautet die Modellgleichung:

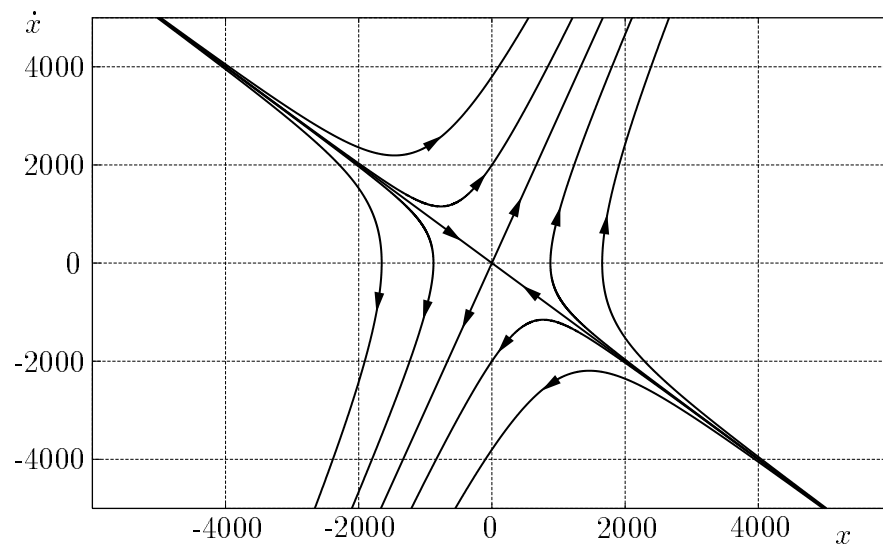
$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0 \quad . \quad (2.5)$$

Im Bereich II, wo  $s(x, \dot{x}) < 0$ , gilt:

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0 \quad . \quad (2.6)$$

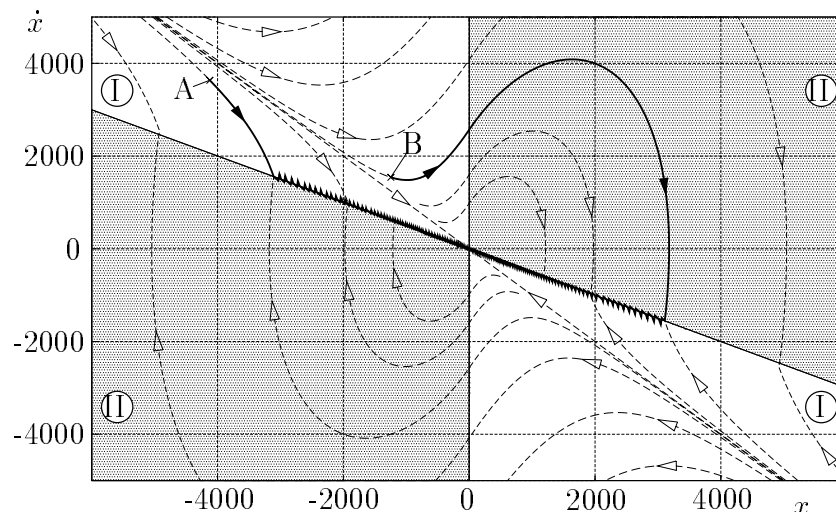


**Bild 2.2:** Trajektorien des instabilen Strudelpunktes



**Bild 2.3:** Trajektorien des Sattelpunktes

In den Bildern 2.2 und 2.3 sind die Trajektorien der Systeme in der Phasebene wiedergegeben. Die Gleichgewichtslage von System (2.5) stellt einen instabilen Strudelpunkt dar. Beim System (2.6) ist die Gleichgewichtslage ein Sattelpunkt, dieser ist naturgemäß ebenfalls instabil.



**Bild 2.4:** Regelung mit Auftreten von Sliding-Moden

Das Phasenportrait für das System mit Gl. (2.1) bis (2.3) läßt sich dadurch bilden, daß im Bereich I der Phasebene für Gl. (2.5) und im Bereich II für Gl. (2.6) eingezeichnet wird. Das Ergebnis ist in Bild 2.4 zu sehen. Um das komplette Phasenportrait zu erhalten, muß die Trajektorie auf der Schaltfläche genauer beschrieben werden. Auf der Kurve  $x = 0$  sind die Trajektorien eindeutig direkt miteinander verbunden. Hingegen stellt die Kurve

$$\sigma = \dot{x} + 0,5x = 0 \quad (2.7)$$

selbst eine dynamische Gleichung dar. Auf dieser Kurve liegen lediglich Endpunkte der von beiden Seiten der Linie her kommenden Trajektorien. Dadurch ergibt sich auf dieser Linie eine spezielle Trajektorie, welche eine neuartige Bewegungsform beschreibt. Diese wird als Sliding-Mode (zu deutsch etwa: Gleitzustand) bezeichnet.

Generell bestehen die Trajektorien des Systems somit aus zwei Teilen, die sich durch unterschiedliche Erscheinungsformen des Systemverhaltens kennzeichnen lassen. Zunächst ist dieses die Eintreffphase, in der sich die Trajektorie ausgehend von einem beliebigen Punkt der Phasebene auf die Schaltfläche zu bewegt und jene in endlicher Zeit erreicht. Der zweite Teil ist der Sliding-Mode, bei dem die Trajektorie dem Ursprung der Phasebene gemäß der Differentialgleichung (2.7) zustrebt.

Anhand des obigen Beispiels lassen sich vier grundlegende Aussagen treffen:



1. Weil der Ursprung des Koordinatensystems den Gleichgewichtszustand des Systems darstellt, repräsentiert der Sliding-Mode das Systemverhalten in der Übergangsphase. Mit anderen Worten, die Kurve  $\sigma = 0$  definiert das Einschwingverhalten des Systems während der Sliding-Mode-Phase.
2. Während der Phase des Gleitzustandes ist die Dynamik der Trajektorie (2.7) von niedrigerer Ordnung als der des Originalsystems (Gl. (2.1), ..., (2.3)).
3. Im Gleitzustand wird die Dynamik des Systems allein durch die Parameter, welche die Kurve  $\sigma = 0$  beschreiben, festgelegt.
4. Der Sliding-Mode ist eine Trajektorie, die in keinem der zwei Teilsysteme (2.5) und (2.6) enthalten ist.

Während des Regelungsprozesses variiert die Systemstruktur zwischen (2.5) und (2.6). Daraus leitet sich der Name des Regelungsverfahrens ab. Man spricht von einer variabel strukturierten Regelung (VSR). Wegen der zentralen Bedeutung des Sliding-Mode verwendet man auch häufig die Bezeichnung Sliding-Mode-Regelung. Es ist festzustellen, daß man sich eine stabile VSR auch ohne Sliding-Mode vorstellen kann. Dieses tritt dann ein, wenn in dem obigen Beispiel die Steigung der Schaltgerade (2.7) gleich der der Separatrizen, auf denen der Zustand beim Sattelpunktverhalten im Bereich I linear in den Ursprung läuft, wäre. Ein solches System würde allerdings nicht über die mit VSR verbundenen Eigenschaften, insbesondere die Robustheit, verfügen.

## 2.1 Problemstellung der VSR

Für ein gegebenes zu regelndes System, welches durch die Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u} \quad , \quad (2.8)$$

repräsentiert wird, wobei  $\dim(\mathbf{x}) = n$  und  $\dim(\mathbf{u}) = m$  gelte, sind für eine VSR zu finden:

1.  $m$  Schaltfunktionen  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$
2. eine Reglergleichung

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \mathbf{u}^+(\mathbf{x}, t) & , \text{für } \mathbf{s}(\mathbf{x}) > 0 \\ \mathbf{u}^-(\mathbf{x}, t) & , \text{für } \mathbf{s}(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad , \quad (2.9)$$

so daß während der Eintreffphase die Schaltfläche  $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = 0$  tatsächlich erreicht wird.

Physikalisch betrachtet bedeutet das ferner,

1. daß eine Schaltfläche  $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = 0$  so zu gestalten ist, daß die gewünschte Dynamik des Systems eintritt, welche in der Regel von niedrigerer Ordnung als die gegebene Anlage ist.
2. daß ein Gesetz  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  so zu entwickeln ist, daß jeder Zustand  $\mathbf{x}$  außerhalb der Schaltfläche in endlicher Zeit zur Schaltfläche überführt wird. Dadurch, daß der Sliding-Mode-Zustand auf der Schaltfläche bis zum Erreichen der Gleichgewichtslage anhält, ist dann das System global asymptotisch stabil.

## 2.2 Mathematische Hilfsmittel

Im Rahmen der Betrachtung der VSR werden verschiedene Methoden und Verfahren genutzt, die ursprünglich zur Analyse in der Schwingungstechnik verwendet wurden. Als ein graphisches Verfahren ist hier vor allem die Betrachtung der Dynamik in der Phasenebene zu nennen. Desweiteren werden verschiedene Ansätze aus der Theorie zur Behandlung von Differentialgleichungen mit diskontinuierlichen rechten Seiten angewendet. Hierbei sind insbesondere zwei Arten von nichtanalytischen Termen zu behandeln:

1. Zweipunktglieder (Schaltrelais)
2. Zweipunktglieder mit Hysterese.

Das Problem der Untersuchung derartiger Systeme besteht darin, daß in dem Punkt, in dem das System nicht analytisch ist, die Differentialgleichung nicht definiert ist, da die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung in diesen Punkten nicht garantiert ist. Somit können die Methoden in der Phasenebene keine komplette Lösung liefern, ohne eine Hilfsfunktion an diesen Stellen zu definieren. Unter einer Hilfsfunktion ist hier ein Modell für das im Rahmen der VSR mit diskontinuierlichem Regelgesetz auftretende Schalten zu verstehen. Verschiedene Lösungsansätze werden bei Hung u. a. (1993) aufgezählt. Besondere Bedeutung hat als einer der ersten der Ansatz nach Filippov (1961):

Betrachtet werde eine Strecke mit der Differentialgleichung:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.10)$$

und der Schaltfunktion  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  mit  $\dim(\mathbf{x}) = n$  und  $\dim(\mathbf{u}) = m$ . Ein System mit variabler Struktur trete auf durch:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \mathbf{f}^+(\mathbf{x}, t) & , \text{für } \mathbf{s}(\mathbf{x}) > 0 \\ \mathbf{f}^-(\mathbf{x}, t) & , \text{für } \mathbf{s}(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

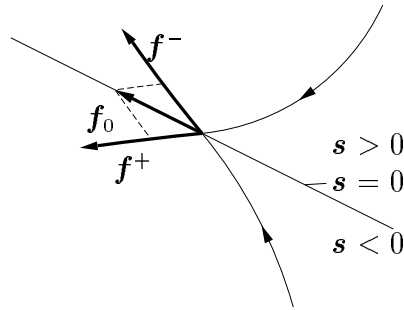
Durch Gl. (2.11) ist die Systemdynamik *auf* der Schaltfläche  $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = 0$  nicht definiert. Filippovs Idee basiert darauf, das Systemverhalten hier als eine Art Mittelwert zwischen demjenigen der beiden Strukturen in Gl. (2.11) aufzufassen:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mu \mathbf{f}_0^+ + (1 - \mu) \mathbf{f}_0^- \quad , \quad 0 \leq \mu \leq 1 \quad , \quad (2.12)$$

wobei

$$\mathbf{f}_0^+ = \lim_{s \rightarrow 0^+} \mathbf{f}^+(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_0^- = \lim_{s \rightarrow 0^-} \mathbf{f}^-(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.13)$$

vom Zustand abhängige Funktionen sind. Auch  $\mu$  ist eine Funktion von  $\mathbf{x}$  und soll derart bestimmt sein, daß die „durchschnittliche“ Dynamik  $\mathbf{f}_0(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  eine Tangente an die Schaltfläche  $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = 0$  bildet (siehe Bild 2.5).



**Bild 2.5:** Entstehung der Hilfsfunktion nach Filippov

Eine weit verbreitete Alternative zu der Methode nach Filippov ist die der äquivalenten Regelung (engl.: equivalent control approach) (Utkin 1971 und 1972). Untersucht wird das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2.14)$$

mit einer Schaltfunktion  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ . Zunächst ist im Rahmen des Entwurfes der äquivalenten Regelung ein Eingangssignal  $\mathbf{u}_{\Leftrightarrow}(\mathbf{x})$  so zu bestimmen, daß die Zustandstrajektorie auf der Schaltfläche  $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = 0$  verbleibt. Dann kann die Dynamik im Sliding-Mode beschrieben werden, indem  $\mathbf{u}_{\Leftrightarrow}(\mathbf{x})$  in Gl. (2.14) substituiert wird.

Um  $\mathbf{u}_{\Leftrightarrow}(\mathbf{x})$  zu bestimmen, geht man von dem Ansatz aus, daß  $\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = 0$  sein muß, damit die Zustandstrajektorie auf der Schaltfläche bleibt. Differentiation von  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  nach der Zeit, entlang der Trajektorie gemäß Gl. (2.14) liefert:

$$\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} = 0 \quad . \quad (2.15)$$

Aufgelöst nach  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  ergibt sich als Forderung für die äquivalente Regelung:

$$\mathbf{u}_{\Leftrightarrow}(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad . \quad (2.16)$$

Lösungsvoraussetzung ist hierbei die Invertierbarkeit der auftretenden Matrix.

### 3 VSR für lineare Systeme

In diesem Abschnitt werden lineare zeitinvariante Systeme mit der allgemeinen Zustandsgleichung:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.1)$$

behandelt. Der Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  ist  $n$ -dimensional, der Eingangsgrößenvektor  $\mathbf{u}$  ist  $m$ -dimensional.

Zunächst sollen die Grundelemente der Sliding-Mode-Terminologie exakter als im einleitenden Abschnitt formuliert werden.

**Definition 3.1** Die Struktur bei einer VSR ist bestimmt durch das Vorzeichen einer Vektorfunktion  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ , welche als *Schaltfunktion* bezeichnet wird. Eine Schaltfunktion wird allgemein als  $m$ -dimensional und linear angesetzt:

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad , \quad (3.2)$$

wobei

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = [s_1(\mathbf{x}), s_2(\mathbf{x}), \dots, s_m(\mathbf{x})]^T \quad (3.3)$$

und

$$\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1^T, \mathbf{c}_2^T, \dots, \mathbf{c}_m^T]^T \quad , \quad (3.4)$$

so daß gilt:

$$s_i(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} \quad . \quad (3.5)$$

Jede der skalaren Schaltfunktionen  $s_i(\mathbf{x})$  beschreibt eine lineare Fläche  $s_i(\mathbf{x}) = 0$ , die als *Schaltfläche* bezeichnet wird. Häufig werden in der Literatur hierfür auch die Ausdrücke *Schaltmannigfaltigkeit* und, aufgrund der Linearität der Funktion, *Schalhyperebene* verwendet.  $\square$

**Definition 3.2** Es sei  $\mathbf{x}_0$  der Anfangszustand eines Systems zur Zeit  $t_0$ ,  $\mathbf{x}(t)$  der Zustand zur Zeit  $t$  und  $S$  eine Schaltebene, die den Ursprung  $\mathbf{x} = 0$  enthält.

Wenn für ein beliebiges  $\mathbf{x}_0$  aus  $S$   $\mathbf{x}(t)$  in  $S$  liegt für alle  $t > t_0$ , dann ist  $\mathbf{x}(t)$  ein *Sliding-Mode* bzw. *Gleitzustand* des Systems.  $\square$

**Definition 3.3** Ist jeder Punkt der Schaltebene  $S$  aus Definition 3.2 ein Endpunkt in dem Sinne, daß in jeden Punkt von  $S$  von beiden Seiten eine Trajektorie hineinläuft, dann wird die Schaltfläche als *Gleitfläche* bezeichnet.  $\square$

**Definition 3.4** Die Bedingung, welche erfüllt sein muß, damit der Anfangszustand sich auf die Gleitfläche bewegt, wird *Erreichbarkeitsbedingung* genannt.  $\square$

Aus obigen Definitionen läßt sich gemäß Utkin (1978) ableiten, daß ein System  $n$ -ter Ordnung mit  $m$  Eingängen  $2^m - 1$  Schaltflächen besitzt:

1. Es sei  $\mathbf{c}_i^T$  der  $i$ -te Zeilenvektor der Matrix  $\mathbf{C}$ . Dann definiert  $\mathbf{c}_i^T \mathbf{x} = 0$  eine Hyperfläche der Dimension  $(n - 1)$ . Die derart definierten  $m$  Hyperflächen werden notiert als:

$$S_i = \{ \mathbf{x} \mid s_i(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} = 0 \} \quad . \quad (3.6)$$

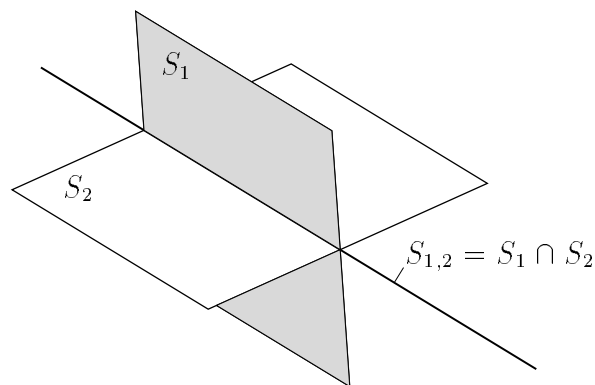
2. Betrachtet man die Schnittmenge zweier unterschiedlicher Schalthyperflächen  $S_i$  und  $S_j$  so ist diese eine Schaltfläche der Ordnung  $(n - 2)$ . Die Gesamtzahl derartiger Schnittmengen ist gleich der Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten für jeweils 2 von  $m$  Hyperflächen:

$$\binom{m}{2} = \frac{m!}{(m-2)!2!} = \frac{m(m-1)}{2} \quad . \quad (3.7)$$

Diese Schaltflächen werden mathematisch definiert durch:

$$\begin{aligned} S_{i,j} &= S_i \cap S_j \\ &= \{ \mathbf{x} \mid s_i(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} = 0 \wedge s_j(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_j^T \mathbf{x} = 0 \} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$i, j = 1, 2, \dots, m, \quad i < j \quad .$



**Bild 3.1:** Geometrische Darstellung der Schnittmenge

Bild 3.1 zeigt eine geometrische Darstellung des Sachverhaltes. Die Schnittmenge der beiden Ebenen  $S_1$  und  $S_2$  ist die Schaltfläche  $S_{1,2}$ , bei der es sich in diesem Fall um eine Gerade handelt.

3. Weitere Schnittmengen zwischen mehreren Hyperflächen  $S_i$  können in der gleichen Art und Weise wie in Gl. (3.8) beschrieben werden. Zum Beispiel sei die Schnittmenge zwischen 3 Hyperflächen  $S_i$ ,  $S_j$  und  $S_k$  die Schaltfläche  $S_{i,j,k}$ . Von der Art dieser Schaltflächen existieren  $\binom{m}{3}$  Exemplare.
4. Schließlich gibt es eine einzelne Schaltebene  $S_F$  mit der Dimension  $(n - m)$ , die die Schnittmenge aller  $m$  Flächen  $S_i$ ,  $i = 1 \dots m$  ist.  $S_F$  kann als *finale Schaltfläche* bezeichnet werden, zu der alle Trajektorien des Systems führen müssen. Mathematisch ist sie definiert durch:

$$S_F = \{\mathbf{x} | \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} = 0\} = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_m \quad . \quad (3.9)$$

Die Gesamtzahl der durch die Gleichungen (3.6) bis (3.9) bestimmten Schaltflächen ist  $2^m - 1$ . Auf jeder dieser Flächen *kann* ein Sliding-Mode auftreten, der durch eine Differentialgleichung beschrieben wird, deren Ordnung gleich der Dimension der Fläche ist. Somit sind auch  $2^m - 1$  verschiedene Sliding-Mode-Formen möglich. Der Sliding-Mode in  $S_F$  wird als finaler Sliding-Mode bezeichnet.

### 3.1 Schaltmuster

Unter der Bezeichnung Schaltmuster wird hier die Reihenfolge der während der Regelung benutzten Schaltebenen verstanden.

Bei einer der ersten Vorgehensweisen, dem *Schaltmuster mit fester Ordnung*, nach Utkin (1978) das *hierarchische VSR Schema*, finden Sliding-Modes in einer fest vorbestimmten Reihenfolge statt. Zum Beispiel kann der Zustand von  $\mathbf{x}_0$  ausgehend zunächst die Schaltebene  $S_1$  mit der Dimension  $n - 1$  treffen, sich dann auf der  $(n - 2)$ -dimensionalen Fläche  $S_{1,2} = S_1 \cap S_2$  weiterbewegen, usw., bis schließlich die finale,  $(n - m)$ -dimensionale Schaltfläche  $S_F$  erreicht wird:

$$\mathbf{x}_0 \rightarrow S_1 \rightarrow (S_1 \cap S_2) \rightarrow (S_1 \cap S_2 \cap S_3) \rightarrow \dots \rightarrow S_F \quad .$$

Dieses Schaltmuster hat verschiedene Nachteile. Hierzu zählt vor allem ein langsamer Übergang des Zustandes in die Gleichgewichtslage, was einen erhöhten Energieaufwand bei der Regelung verursacht.

Das *Schaltmuster mit freier Ordnung* verlangt keine Festlegung der Reihenfolge der Schaltflächen. Es wird auf den jeweils zuerst auf dem Weg durch den Zustandsraum erreichten Schaltflächen geschaltet. Damit ist die Abfolge der Schaltflächen prinzipiell nur noch von der Lage des Ausgangszustandes  $\mathbf{x}_0$  abhängig. Dieses Schaltmuster läßt sich relativ einfach implementieren und die Dynamik wird gegenüber dem Schaltmuster mit fester Ordnung verbessert.

Als *Schaltmuster zum finalen Sliding-Mode* (de Carlo u. a. 1988, Utkin 1978) wird jenes bezeichnet, bei dem der Zustand von einem beliebigen Anfangspunkt des Zustandsraumes zur finalen Sliding-Mode-Schaltfläche  $S_F$  überführt wird, wo dann der Sliding-Mode stattfindet. Dabei wird nicht vorausgesetzt, daß auf den anderen Schaltflächen Sliding-Modes eingetreten sind. Auch dieses Schaltmuster ist einfach zu erzeugen, jedoch läßt sich keine gute Übergangscharakteristik garantieren.

Beim *dezentralisierten Schaltmuster* wird das Gesamtsystem als aus  $m$  Subsystemen mit nur einem Eingang bestehend behandelt. Für gewöhnlich sind die Subsysteme untereinander gekoppelt. Jedes hat eine skalare Schaltfunktion mit zugehörigem Sliding-Mode. Die kombinierte Vektor-Schaltfunktion hat die Form:

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = [s_1(\mathbf{x}), s_2(\mathbf{x}), \dots, s_m(\mathbf{x})]^T \quad (3.10)$$

mit

$$s_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}_i \quad , \quad (3.11)$$

wobei

$$\sum_{i=1}^m n_i = n \quad . \quad (3.12)$$

Dieses Schaltmuster läßt sich mit gutem Erfolg auf Large-Scale-Systeme anwenden (Khurana u. a. 1986b, Slotine 1984).

## 3.2 Erreichbarkeit

Drei Ansätze, um die Erreichbarkeitsbedingung gemäß Definition 3.4 zu bestimmen, sollen hier vorgestellt werden.

1. Ein schon früh formulierter Ansatz ist der *direkte Ansatz der Schaltfunktion*. Die erste vorgeschlagene Bedingung (Emeljanov 1969, Utkin 1978) lautet:

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &> 0 & , \text{ für } s_i < 0 \\ \dot{s}_i &< 0 & , \text{ für } s_i > 0 \end{aligned} \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad , \quad (3.13)$$

beziehungsweise äquivalent:

$$s_i \dot{s}_i < 0 \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad . \quad (3.14)$$

Zwar ist diese Bedingung global, jedoch garantiert sie keine endlich lange Zeit zum Erreichen der Schaltfläche. Eine ähnliche, lokale Bedingung ist (Utkin 1977):

$$\lim_{s_i \rightarrow 0^+} \dot{s}_i < 0 \quad \text{und} \quad \lim_{s_i \rightarrow 0^-} \dot{s}_i > 0 \quad . \quad (3.15)$$

2. Beim *Ljapunov-Ansatz* wird zunächst ein Kandidat für eine Ljapunovfunktion gewählt:

$$V(\mathbf{x}, t) = \mathbf{s}^T \mathbf{s} \quad . \quad (3.16)$$

Eine globale Erreichbarkeitsbedingung (Itkis 1976) ist:

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) < 0 \quad , \text{ für } \mathbf{s} \neq 0 \quad . \quad (3.17)$$

Eine endliche Zeit bis zum Erreichen ist dann garantiert, wenn Gl. (3.17) abgeändert wird zu:

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) < -\epsilon \quad , \text{ für } \mathbf{s} \neq 0, \quad \epsilon > 0 \quad . \quad (3.18)$$

Dieser Ansatz führt schließlich zum Schaltmuster für den finalen Sliding-Mode.

3. Der *Erreichbarkeits-Gesetz-Ansatz* (Gao und Hung 1993) basiert auf folgender Methode, bei der direkt die Dynamik der Schaltfunktion vorgegeben wird:

$$\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{Q} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) - \mathbf{K} \mathbf{f}(\mathbf{s}) \quad , \quad (3.19)$$

wobei  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{K}$  Diagonalmatrizen mit positiven Elementen sind und

$$\operatorname{sgn}(\mathbf{s}) = [\operatorname{sgn}(s_1), \dots, \operatorname{sgn}(s_m)]^T \quad (3.20)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) = [f_1(s_1), \dots, f_m(s_m)]^T \quad . \quad (3.21)$$

Die skalaren Funktionen  $f_i$  erfüllen die Bedingung

$$s_i f_i(s_i) > 0 \quad , \text{ für } s_i \neq 0 \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad . \quad (3.22)$$

Die Gleichung (3.19) wird als Erreichbarkeits-Gesetz bezeichnet. Verschiedene Wahlmöglichkeiten für  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{K}$  führen zu unterschiedlich strukturierten Erreichbarkeits-Gesetzen, z. B.:

- konstante Änderungsrate

$$\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{Q} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) \quad , \quad (3.23)$$

- konstante plus proportionale Änderungsrate

$$\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{Q} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) - \mathbf{K} \mathbf{s} \quad , \quad (3.24)$$

- Potenz-Änderungsrate

$$\dot{s}_i = -k_i |s_i|^\alpha \operatorname{sgn}(s_i) \quad , \quad 0 < \alpha < 1 \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad . \quad (3.25)$$

Dieser Ansatz wird in der Regel zusammen mit dem Schaltmuster mit freier Ordnung eingesetzt.



### 3.3 Das Regelgesetz

In diesem Abschnitt werden verschiedene Entwurfsmethoden für das Regelgesetz einer VSR behandelt. Dazu wird zunächst aufgezeigt, welchen Einfluß die Wahl eines der Schaltmuster hat.

Für das Schaltmuster mit fester Ordnung erfordert die Bestimmung des VSR-Gesetzes die Lösung von  $m$  Ungleichungspaaren (Utkin 1978, Young 1978)

$$\dot{s}_i = \frac{\partial s_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) = \begin{cases} > 0 & , \text{für } s_i > 0 \\ < 0 & , \text{für } s_i < 0 \end{cases} \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad . \quad (3.26)$$

Es sei  $\mathbf{b}_i$  der  $i$ -te Spaltenvektor der Matrix  $\mathbf{B}$ . Unter Verwendung von Gl. (3.1) bis (3.5) ergibt sich das Ungleichungssystem:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1^T \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}_1^T \mathbf{b}_1 u_1 + \dots + \mathbf{c}_1^T \mathbf{b}_m u_m &= \begin{cases} > 0 & , \text{für } s_1 > 0 \\ < 0 & , \text{für } s_1 < 0 \end{cases} \\ &\vdots \\ \mathbf{c}_m^T \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}_m^T \mathbf{b}_1 u_1 + \dots + \mathbf{c}_m^T \mathbf{b}_m u_m &= \begin{cases} > 0 & , \text{für } s_m > 0 \\ < 0 & , \text{für } s_m < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.27)$$

mit  $2m$  Unbekannten. Die Unbekannten sind die Stellsignale  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , für welche jeweils zwei Werte zu bestimmen sind. Die Lösung von Gl. (3.27) ist eine sehr schwierige Aufgabe.

Beim Schaltmuster mit freier Ordnung kann das Regelgesetz direkt aus der Bedingungs-gleichung (3.19) abgeleitet werden.

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) = -\mathbf{Q} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) - \mathbf{K} \mathbf{f}(\mathbf{s}) \quad (3.28)$$

führt auf:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = - \left( \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{B} \right)^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{Q} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) + \mathbf{K} \mathbf{f}(\mathbf{s}) \right] \quad . \quad (3.29)$$

Auf das Regelgesetz beim Schaltmuster zum finalen Sliding-Mode führt die Bedingung, daß als Stabilitätsbedingung nach Ljapunov erfüllt sein muß:

$$\dot{V} = \frac{d}{dt}(\mathbf{s}^T \mathbf{s}) = 2\mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = 2\mathbf{s}^T \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) < 0 \quad . \quad (3.30)$$

Schließlich werden beim dezentralisierten Schaltmuster für alle Subsysteme die Regelgesetze getrennt entworfen. Dabei kann jede Subsystemregelung unabhängig nach einem der

obenstehenden Verfahren entwickelt werden. Betrachtet werde ein Large-Scale-System  $n$ -ter Ordnung bestehend aus  $m$  Subsystemen mit jeweils einem Eingang:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{b}_i u_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \mathbf{A}_{i,j} \mathbf{x}_j \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad . \quad (3.31)$$

Dabei sei  $\dim(\mathbf{x}_i) = n_i$  und  $\sum_{i=1}^m n_i = n$ . Für das  $i$ -te Subsystem symbolisiert  $\mathbf{A}_i$  die interne Dynamik,  $\mathbf{b}_i$  den Steuerungsvektor und  $\mathbf{A}_{i,j}$  die Kopplung mit den anderen Subsystemen. Für jedes der Subsysteme gibt es eine Schaltfunktion:

$$s_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}_i \quad . \quad (3.32)$$

Insgesamt bilden sich so  $m$  unabhängige Sliding-Modes aus. Jeder bewegt sich auf seiner Schaltfläche  $s_i(\mathbf{x}_i)$  so, daß  $\mathbf{x}_i \rightarrow 0$ .

Weitere Ansätze zur Entwicklung des Regelgesetzes sind:

$$\frac{d}{dt} s_i^3 \leq -\eta |s_i| \quad , \quad (\text{Utkin 1983}), \quad (3.33)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{F}(\mathbf{s}) \quad , \quad (\text{Fernandez R. und Hedrick 1987}), \quad (3.34)$$

auf die hier nicht mehr weiter eingegangen werden soll.

Häufig wird bei der Bestimmung des Regelgesetzes kein völlig allgemeiner Ansatz gewählt, sondern die Struktur des Gesetzes schon zu Beginn vorgegeben. Drei oft verwendete Strukturvorgaben sind:

1. Relais-Regelung:

$$u_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} k_i^+ & , \text{für } s_i(\mathbf{x}) > 0 \\ k_i^- & , \text{für } s_i(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad , \quad (3.35)$$

2. Lineare Rückführung mit geschalteten Verstärkungen (siehe einführendes Beispiel):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \mathbf{x} \quad , \quad (3.36)$$

wobei  $\psi = [\psi_{i,j}]$  eine  $(m \times n)$ -Matrix von zustandsabhängigen Verstärkungsfaktoren ist. Meist findet man die folgende Struktur:

$$\psi_{i,j}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \alpha_{i,j} & , \text{für } s_i(\mathbf{x}) x_j > 0 \\ \beta_{i,j} & , \text{für } s_i(\mathbf{x}) x_j < 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{cases} \quad . \quad (3.37)$$

3. Äquivalente Regelung (de Carlo u. a. 1988):

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\Leftrightarrow} + \Delta \mathbf{u} \quad . \quad (3.38)$$

Dabei steht  $\mathbf{u}_{\Leftrightarrow}$  für die gemäß Gl. (2.16) gefundene Regelung und  $\Delta \mathbf{u}$  wird addiert, um die Erreichungsbedingungen zu erfüllen. Häufig wird für  $\Delta \mathbf{u}$  die Relais-Regelung (3.35) eingesetzt.

### 3.4 Anwendung der VSR auf nichtlineare Systeme

Die allgemein formulierte Zustandsgleichung für nichtlineare Systeme lautet:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad , \quad (3.39)$$

wobei  $\dim(\mathbf{x})=n$  und  $\dim(\mathbf{u})=m$ . Für die häufig betrachteten, bezüglich der Steuerung  $\mathbf{u}$  linearen Systeme gilt:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u} \quad . \quad (3.40)$$

Als Ausgangsfunktion wird allgemein notiert:

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad . \quad (3.41)$$

Es läßt sich feststellen, daß die grundlegenden Konzepte zur *Generierung* einer VSR auch bei nichtlinearen Systemen anwendbar sind. Die Analyse der auftretenden Sliding-Modes stellt sich jedoch als bedeutend schwieriger heraus. Um diesem Problem zu begegnen, verwenden einige Autoren (Balestrino u. a. 1984, Byrnes und Isidori 1988, Fernandez R. und Hedrick 1987, Sira-Ramírez 1990, Kwatny und Kim 1990, Liu und Yuan 1989) Transformationen der Zustandsraumdarstellung Gl. (3.40,3.41) in kanonische Formen (Isidori 1989). Gleichzeitig wird dabei versucht, zum Beispiel die Erreichbarkeits-Gesetze so umzuschreiben, daß Vorteile der kanonischen Formen genutzt werden können.

## 4 Eigenschaften VSR-geregelter Systeme

Das vollständige Antwortverhalten eines VSR-geregelten Systems besteht aus drei unterschiedlichen Phasen: der Eintreffphase, dem Sliding-Mode und dem Gleichgewichtszustand. Unter Gleichgewichtszustand sei hier der sich schließlich einstellende periodisch wiederkehrende Systemzustand verstanden, wodurch einerseits Grenzyklen, andererseits aber auch statische Endzustände erfaßt werden.

### 4.1 Charakteristika der Eintreffphase

Um die Dynamik während der Eintreffphase leichter analysieren zu können, wird eine Darstellung im eigens zu definierenden Eintreffraum  $\mathbb{E}$  verwendet (Gao und Hung 1993). Betrachtet werde ein System  $n$ -ter Ordnung mit  $m$  Eingängen und einer Schaltfunktion  $\mathbf{s}$ , wobei  $\dim(\mathbf{s})=m$ . Als Koordinaten des  $m$ -dimensionalen Eintreffraumes  $\mathbb{E}$  werden die  $m$  skalaren Funktionen  $s_i$  gewählt. Ein Gesetz wie

$$\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{Q} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) - \mathbf{K} \mathbf{f}(\mathbf{s}) \quad (4.1)$$

kann damit einfacher als im Originalzustandsraum interpretiert werden. Ist  $\mathbf{f}(\mathbf{s})$  gegeben, kann Gl. (4.1) durch Integration gelöst werden, so daß sich eine Trajektorie  $\mathbf{s}(t)$  im  $\mathbb{E}$  als Lösung ergibt. Anhand dieser Lösung ist es zum Beispiel einfach möglich, die Zeit  $T$  zu bestimmen, welche zwischen den Zeitpunkten mit den Zuständen  $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0$  und  $\mathbf{s} = \mathbf{0}$  verstreicht.

### 4.2 Charakteristika der Sliding-Mode-Phase

Großen Einfluß auf die Dynamik im Sliding-Mode hat, wie schon oben aufgezeigt wurde, die Gestalt der Schaltfunktion. Hier soll nun als weiterer Aspekt die Robustheit bzw. Unempfindlichkeit gegenüber bestimmten Modellfehlern und Störungen behandelt werden.

Robustheit ist eine der entscheidendsten Eigenschaften der VSR-Systeme. – Ein lineares System sei in allgemeiner Form, allerdings mit einem Modellparameterfehler  $\Delta \mathbf{A}$ , gegeben:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{f}(t) \quad ; \quad (4.2)$$

$\mathbf{f}(t)$  repräsentiert eine äußere Störung. Eine Bedingung dafür, daß der Sliding-Mode invariant, d. h. robust gegenüber der Parameteränderung und den äußeren Störungen ist, ist die Existenz von  $\Delta \tilde{\mathbf{A}}$  und  $\tilde{\mathbf{f}}(t)$ , so daß (Draženović 1969, El-Ghezawi u. a. 1983):

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{B}\Delta \tilde{\mathbf{A}} \quad \text{und} \quad \mathbf{f}(t) = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}(t) \quad . \quad (4.3)$$

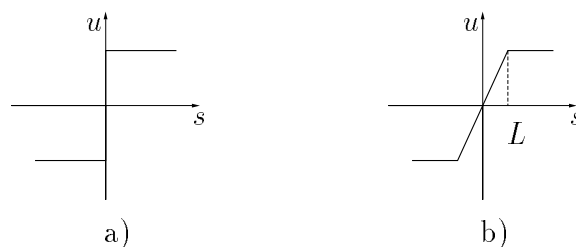
Dessen physikalische Bedeutung ist, daß damit die Ungenauigkeiten und Störungen quasi über das Steuerglied eingehen. Ein gleichartiges Kriterium erbrachten Untersuchungen (Sira–Ramírez 1988, Gao und Hung 1993) an nichtlinearen Systemen der Form:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad . \quad (4.4)$$

Als eines der bedeutendsten Phänomene bei VSR–Systemen gilt das sogenannte *Klappern* (engl.: chattering). – Im Rahmen des Entwurfes einer VSR wird zunächst angenommen, daß das Stellglied beliebig schnell betätigt werden kann. Dieses ist in der Realität allerdings prinzipiell nie der Fall. Ein Grund dafür ist, daß durch die Berechnung der Stellgröße bereits endlich kleine Zeitverzögerungen eintreten. Hinzu kommt, daß reale Stellglieder nicht unendlich schnell reagieren können.

Im Gleichgewichtszustand erscheint das Klappern als eine hochfrequente Oszillation um die gewünschte Gleichgewichtslage und kann so unter anderem unmodellerte schnelle Dynamikanteile des Systems anregen (Kwatny und Siu 1987, Slotine und Li 1991). Wegen der unangenehmen Eigenschaften des Klapperns wurden zahlreiche Versuche zu seiner Vermeidung unternommen:

Bei der Mehrzahl der VSR–Entwürfe enthält das Regelgesetz Terme mit Schaltfunktion (Bild 4.1a). Es wird versucht, die nicht realisierbare Kennlinie eines Schaltgliedes schon beim Entwurf zu umgehen, indem stattdessen eine symmetrische Begrenzung mit linearem Arbeitsbereich angenommen wird (Bild 4.1b) (Slotine und Sastry 1983, Slotine 1984). Dieses bedeutet im Zustandsraum, daß eine Grenzschicht um die Schaltfläche herum eingeführt wird. Innerhalb dieser Grenzschicht wird das Regelgesetz durch eine kontinuierliche Approximation ersetzt. Das läßt sich als eine Regelung mit hoher Verstärkung in der Nähe der Schaltfläche auffassen. Die Konsequenz dieser Methode ist, daß die Robustheit des Systems teilweise verlorengeht. Insbesondere ist die restliche Robustheit von der Dicke  $2L$  der Grenzschicht abhängig.



**Bild 4.1:** Ideale Schaltfunktionen (Relais und Begrenzer)

Ein weiterer Ansatz, das Klappern zu verhindern (Ambrosino u. a. 1984), ersetzt die häufig auftretenden Terme

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{x}}{|\mathbf{c}^T \mathbf{x}|} \quad \text{durch} \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{x}}{|\mathbf{c}^T \mathbf{x}| + \delta} \quad , \quad (4.5)$$

wobei die positive Konstante  $\delta$  die Glättung der Kurve bewirkt.

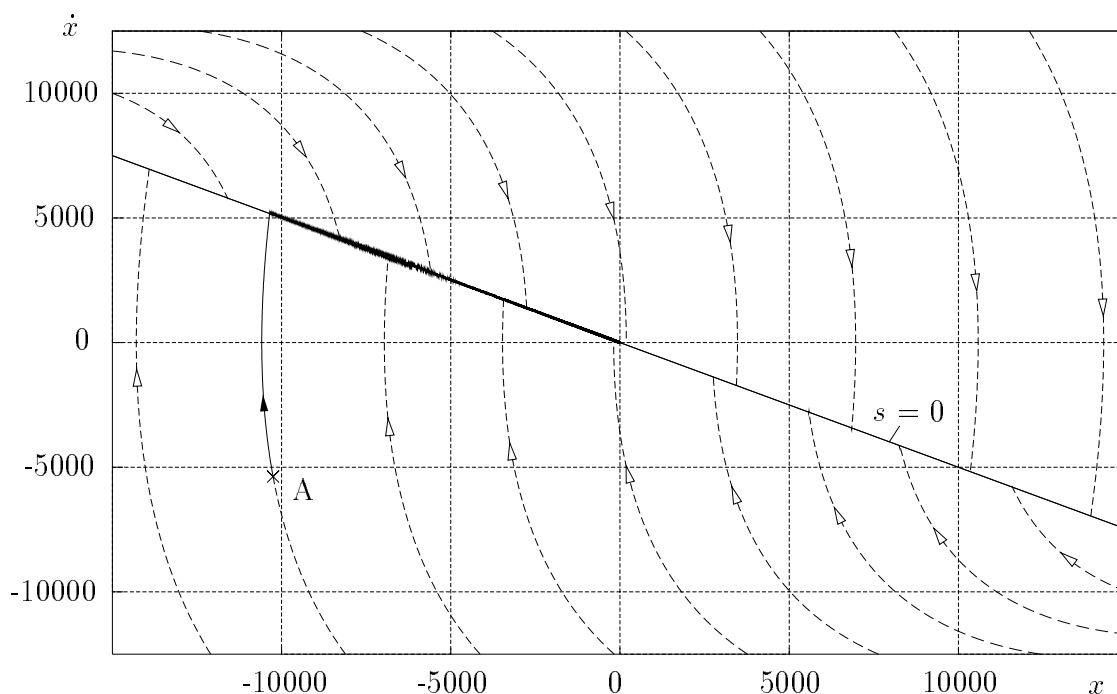
Im Folgenden werden die Effekte der Approximation und die Auswirkungen weiterer Abweichungen vom Idealverhalten des Stellgliedes aufgezeigt. Dabei ist es hilfreich, sich für die zu regelnde Strecke ein System 2. Ordnung und eine lineare *Schaltfunktion* vorzustellen:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x &= -k u(s) \\ s &= \dot{x} + c x \end{aligned} \quad (4.6)$$

### Ideales Schaltglied

Als Referenz werde zunächst das Verhalten unter idealen Bedingungen behandelt (Bild 4.1a). Hier hat das Regelgesetz die Form:

$$u(s) = \text{sgn}(s) = \begin{cases} +1 & , \text{für } s(x, \dot{x}) > 0 \\ -1 & , \text{für } s(x, \dot{x}) < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$



**Bild 4.2:** Trajektorien bei der Regelung mit idealem Schalter

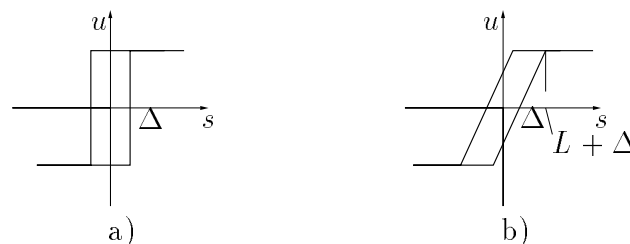
Die Regelung ist ideal, da das Stellglied sofort schaltet, wenn  $s = 0$ . Daraus folgt:

- Ein idealer Sliding-Mode existiert auf der Kurve  $s = 0$ , d. h. es tritt kein Klappern ein, denn die Trajektorie des Zustandspunktes kann unendlich nahe an der Schaltgeraden gehalten werden (siehe Bild 4.2).
- Es gibt keine bleibende Regelabweichung.
- Das System ist robust.

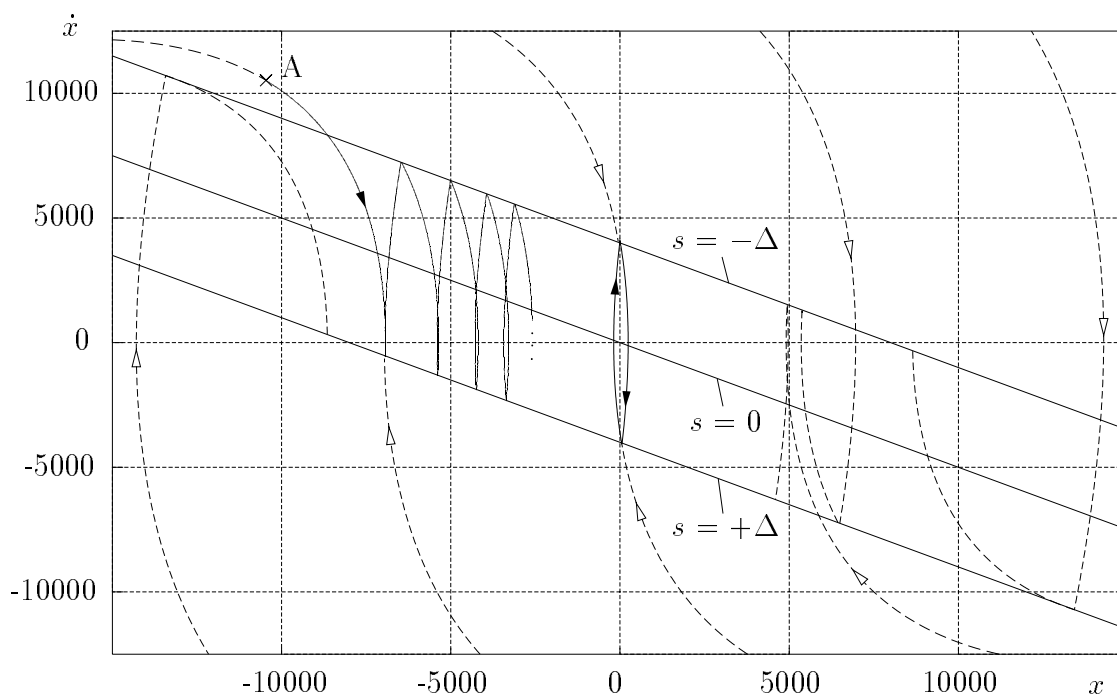
### Reales Schaltglied

Das reale Schaltglied ist hysteresebehaftet (Bild 4.3a). Das läßt sich in etwa beschreiben durch:

$$u(s) = \text{hys}(s) = \begin{cases} +1 & , \text{für } \{s \mid s > \Delta \vee (\dot{s} < 0 \wedge |s| < \Delta)\} \\ -1 & , \text{für } \{s \mid s < -\Delta \vee (\dot{s} > 0 \wedge |s| < \Delta)\} \end{cases} \quad (4.8)$$



**Bild 4.3:** Reale Schaltfunktionen (Relais und Begrenzer)



**Bild 4.4:** Trajektorien bei der Regelung mit einem Schalter mit Hysterese

Das Schalten tritt verspätet jeweils auf den Kurven  $s = \pm\Delta$  ein. Dadurch ist es unmöglich, den Zustand auf der Schaltfläche  $s = 0$  zu halten. Aus dem Phasendiagramm (Bild 4.4) läßt sich ablesen,

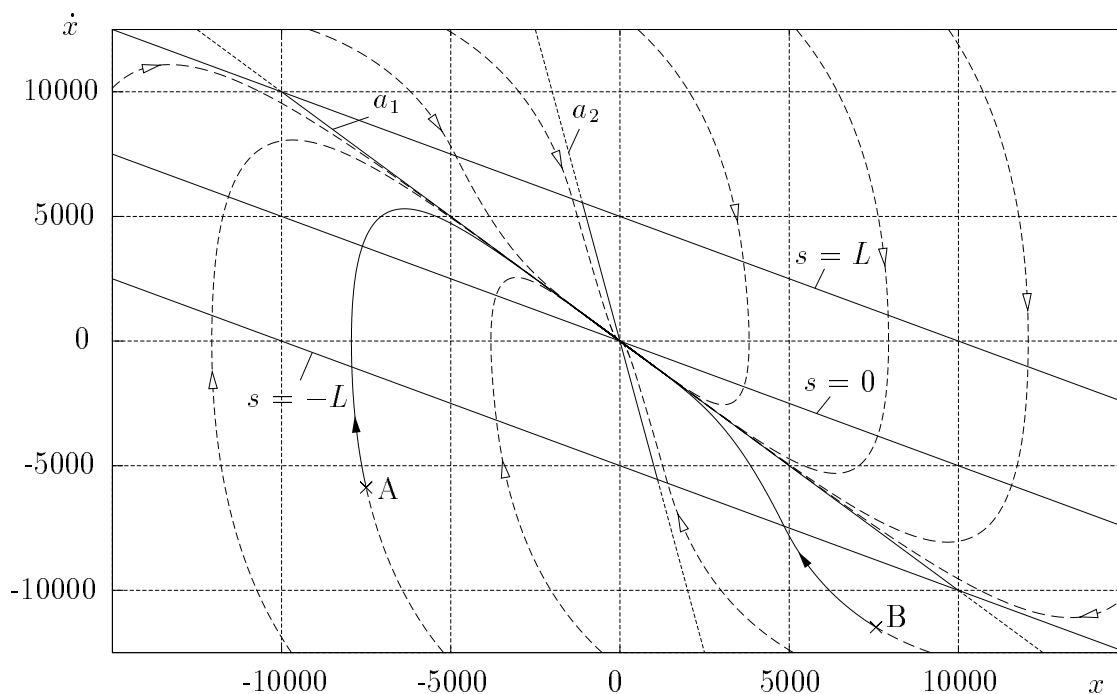
- daß ein nicht idealer Sliding-Mode auftritt. Das heißt, ein mit Klappern behafteter Gleitzustand stellt sich ein.
- daß das System im Gleichgewichtszustand einen stabilen Grenzzyklus durchläuft. Damit wird es unmöglich, das Klappern abzustellen.
- daß der Ursprung selbst kein stabiler Gleichgewichtszustand ist.

### Idealer Begrenzer

Die einfachste Form einer Begrenzerkennlinie ist aus Geradenstücken aufgebaut (Bild 4.1b):

$$u(s) = \text{sat}(s) = \begin{cases} +1 & , \text{für } s > L \\ s/L & , \text{für } |s| \leq L \\ -1 & , \text{für } s < -L \end{cases} . \quad (4.9)$$

Dabei wird durch die positive Konstante  $L$  die Schwelle zum Eintreten in die Grenzschicht eingestellt. Außerhalb dieser Schicht ist das Regelverhalten das eines idealen Schaltgliedes. Innerhalb liegt eine lineare Rückführung mit hoher Verstärkung vor. Daraus folgt, daß der Systemzustand zwar zum Eintreten in die Grenzschicht, jedoch nicht zum Verbleib auf der Linie  $s = 0$  gezwungen werden kann.



**Bild 4.5:** Trajektorien bei der Regelung mit idealem Begrenzer

Die Berechnung des in diesem noch einfachen Fall ermittelbaren Phasendiagrammes führt zu den folgenden Erkenntnissen:

- Es tritt kein Sliding-Mode ein, da wie erwähnt die Trajektorie nicht auf die ( $s = 0$ )–Linie gezwungen werden kann (Bild 4.5).
- Klappern wird nicht beobachtet, da innerhalb der durch die Geraden  $s = \pm L$  eingeschlossenen Grenzschicht das lineare Regelungskonzept angewandt wird.
- Innerhalb der Grenzschicht ist der Verlauf der Trajektorien durch die Annäherung an die Asymptotenisokline  $a_1$ <sup>1</sup> gekennzeichnet.

<sup>1</sup> Steigungen der zwei Asymptotenisoklinen  $a_{1,2}$ :  $m_{1,2} = (\alpha + k/L)/2 \pm \sqrt{(\alpha + k/L)^2/4 - \beta - kc/L}$

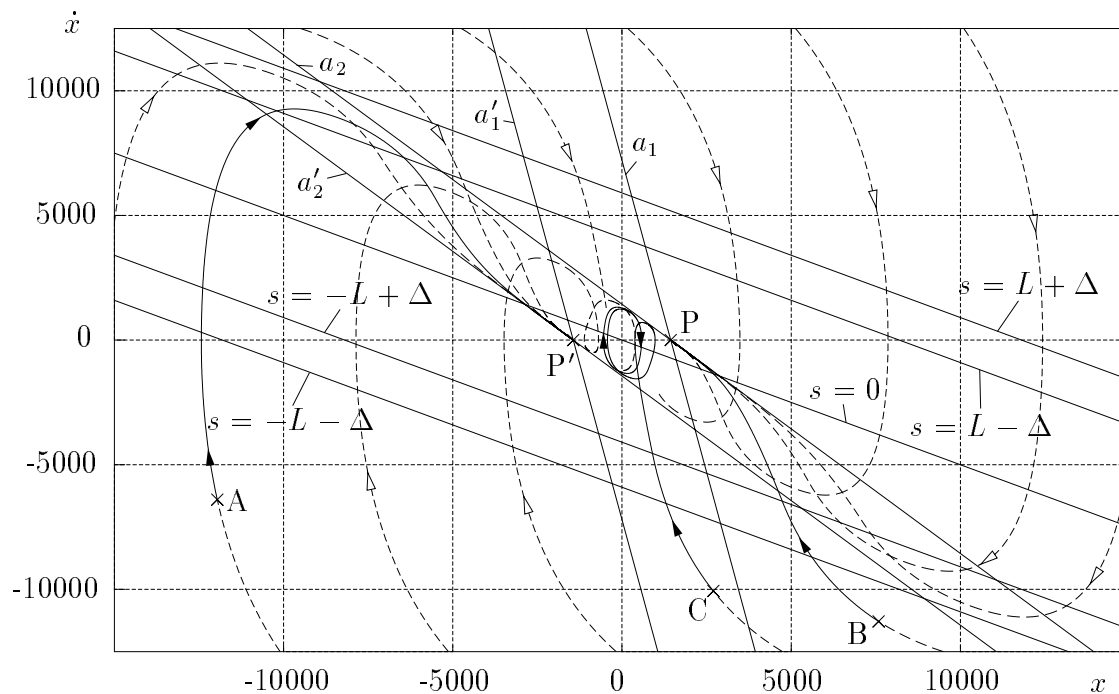


- Es gibt keine bleibende Regelabweichung, wenn keine äußeren Störungen anliegen.
- Das System ist nicht robust gegenüber Parameteränderungen.

Ein alternativer Typ der Grenzschichtgestaltung wurde von Slotine und Li (1991) vorgestellt. Dabei wird die Ausdehnung  $L$  der Grenzschicht adaptiv an den Grad der Systemungewißheit angepaßt.

### Realer Begrenzer

Auch der reale Begrenzer ist hysteresebehaftet (Bild 4.3b). Bei der Analyse des Systemverhaltens kann z. B. das Verfahren der Beschreibungsfunktion herangezogen werden. Aus dem Phasendiagramm (Bild 4.6)



**Bild 4.6:** Trajektorien bei der Regelung mit einem Begrenzer mit Hysterese

ist abzulesen:

- Es tritt wiederum überhaupt kein Sliding-Mode mehr ein.
- Klappern wird nicht beobachtet.
- Das System ist zwar stabil im Großen (Ljapunov 1992), hat allerdings zwei Gleichgewichtszustände  $P$  und  $P'$ , die nicht im Ursprung der Phasenebene liegen<sup>2</sup>.
- Neben diesen Gleichgewichtszuständen existiert ein stabiler Grenzzyklus um den Ursprung herum.

<sup>2</sup>  $P = (k\Delta/(\beta L + kc), 0)$  und  $P' = (-k\Delta/(\beta L + kc), 0)$

- Daraus ergibt sich zwangsläufig eine bleibende Regelabweichung.
- Das System ist nicht robust gegenüber Parameteränderungen.

Zusammenfassend ist bei den Versuchen, das Klappern durch den Einsatz von Begrenzern zu reduzieren, ein Verlust der Robustheit festzustellen. Wie stark sich dieser Effekt auswirkt, ist abhängig von der Grenzsichtbreite  $L$ . Nur wenn diese klein gewählt werden kann, ist das Systemverhalten weitgehend invariant bezüglich Parameteränderungen und die Stabilität im Großen stellt einen reinen Zugewinn an positiver Systemdynamik dar.

Zur Glättung der Stellsignale ließe sich neben den beschriebenen Ansätzen, die auf Änderung der Schaltfunktion beruhen, auch noch eine neue Methode, die insbesondere die Auswirkungen des Klapperns bekämpfen soll, einsetzen. Den Kern dieses Verfahrens stellt der Gedanke dar, daß als unangenehmste Folge des Klapperns die Anregung der schnellen Dynamikanteile der Strecke zu sehen ist. Es reicht also, nicht das gesamte Klappern, wohl aber den Teil seines Frequenzspektrums, der zu dem erwähnten negativen Effekt führt, zu unterbinden. Mögliche Instrumente hierzu sind geeignet angepaßte Saug- oder Bandpaßfilter (Schwarz 1993). Die Untersuchungen zur Abschätzung der Eignung dieses Verfahrens sind zur Zeit in Arbeit.

## 5 Zusammenfassung

Dieser Forschungsbericht stellt eine Einführung in die Methode der Sliding-Mode-Regelung dar und kann als Grundlage für alle weiteren Untersuchungen im Bereich der Reglersynthese mit Sliding-Mode-Verfahren herangezogen werden.

Komplexe dynamische Systeme lassen sich mit Hilfe von diskontinuierlich arbeitenden Reglern gut behandeln. Es ergibt sich so eine variabel strukturierte Regelung (VSR). Führt man die Diskontinuitäten auf geeigneten Unterräumen im Zustandsraum des Systems ein, können Bewegungen in Sliding-Mode-Manier auftreten. Mit Sliding-Mode wird der hier beobachtete Gleitzustand entlang der Unterrraum-Mannigfaltigkeiten bezeichnet. Während der Bewegung im Zustand des Sliding-Mode liegen die Trajektorien im Zustandsraum auf den Schnittmengen der Unterräume, in denen die Stellgröße sich sprungförmig verändert. Da die Trajektorien in einer Mannigfaltigkeit niedrigerer Ordnung als derjenigen des Originalsystems liegen, wird auch die Sliding-Mode-Gleichung von reduzierter Ordnung sein. In den meisten praktisch auftretenden Systemen ist die Sliding-Mode-Bewegung unabhängig von der Regelung und wird lediglich durch die Dynamik der Strecke sowie die Lage und Form der Unterräume mit Diskontinuität bestimmt. Diese Eigenschaften ermöglichen es, das ursprüngliche Problem des Reglerentwurfes zu entkoppeln und so voneinander nicht mehr abhängige Teilprobleme niedrigerer Ordnung zu erhalten. Dabei ist die Regelung primär so auszulegen, daß der Sliding-Mode-Zustand überhaupt erreicht wird, während die geforderte Dynamik bei der Bewegung innerhalb der Sliding-Mode-Unterräume durch deren Gestalt festgelegt ist. Bei einer Reihe von Anlagen, welche durch Differentialgleichungen höherer Ordnung beschrieben werden, kann so der Aufwand, Regler zu entwerfen, deutlich verringert werden.

Anhand eines einfachen Beispiels wird in diesem Bericht der Grundgedanke des Regelungsverfahrens vorgestellt. Als Hilfsmittel zur mathematischen Behandlung werden die Verfahren nach Filippov und Utkin beschrieben. Daran anschließend wird stellvertretend bei linearen Systemen mit VSR eine Reihe von Bezeichnungen definiert.

Eine besondere Eigenschaft des Sliding-Mode-Zustandes ist, daß unter bestimmten Bedingungen keine Abhängigkeit mehr von Änderungen der Parameter der zu regelnden Strecke bzw. von Störungen anderer Art besteht. Im Gegensatz zu kontinuierlichen Systemen mit nicht meßbaren Störungen, bei denen die Bedingung der Unempfindlichkeit unendlich große Verstärkungen nötig macht, ist bemerkenswerter Weise der gleiche Effekt bei diskontinuierlichen Systemen durch endliche Stellsignale erzielbar. Dabei kann der mitunter harte Übergang zwischen den verschiedenen Strukturvarianten allerdings zu unerwünschtem Systemverhalten führen. Denn die mit dem Schalten des Stellsignals verbundenen Eigenschaften bergen die Gefahr der Anregung höherfrequenter, beim Entwurf der Regelung nicht berücksichtigter Dynamiken in sich. Dieser Effekt kann den Wert der Sliding-Mode-Regelung deutlich mindern. Dazu wird hier als eine der gebräuchlichsten

---

Methoden zur Unterbindung dieser Effekte der Einsatz von Begrenzern diskutiert. Es werden Nutzen (Reduzierung des Klapperns) und negative Auswirkungen (Verlust von Robustheit) gegenübergestellt.

Im Rahmen weiterführender Arbeiten soll die Anwendung der Sliding-Mode-Regelung an realen Anlagen, insbesondere an pneumatischen Zylinderantrieben, erfolgen. Dabei ist als weiteres Verfahren zur Reduzierung des negativen Effektes des Klapperns der Einsatz von Filtern beim Ausgangssignal des Reglers zu untersuchen.

## 6 Literaturverzeichnis

- Ambrosino, G., G. Celentano** und **F. Garofalo**. 1984. Variable structure model reference adaptive control systems. *Int. J. Control* 39(6). 1339–1349.
- Balestrino, A., G. de Maria** und **A. S. I. Zinober**. 1984. Nonlinear Adaptive Modelling following Control. *Automatica* 20(5). 559–568.
- Bartolini, G., A. Ferrara** und **V. I. Utkin**. 1993. On robust adaptive control of MIMO linear plants using discrete-time sliding modes. *Proc. 12th IFAC World Congress*. Sydney. Australien. 51–56.
- Behmenburg, C.** 1994. *Zur adaptiven Fuzzy-Regelung technischer Systeme*. Dissertation. MSRT. Universität Duisburg.
- Byrnes, C. I.** und **A. Isidori**. 1988. Local stabilization of minimum-phase nonlinear systems. *Systems & Control Letters* 11. 9–17.
- Chan, C. Y.** 1995. Design of discrete time sliding mode controller. *Control–Theory and Advanced Technology* 10(1). 89–96.
- de Carlo, R. A., S. H. Żak** und **G. P. Matthews**. 1988. Variable Structure Control of Nonlinear Multivariable Systems: A Tutorial. *IEEE Proc.* 76(3). 212–232.
- Draženović, B.** 1969. The Invariance Conditions in Variable Structure Systems. *Automatica* 5. 287–295.
- El-Ghezawi, O. M. E., A. S. I. Zinober** und **S. A. Billings**. 1983. Analysis and design of variable structure systems using a geometric approach. *Int. J. Control* 38(3). 657–671.
- Emeljanov, S. V.** 1969. *Automatische Regelsysteme mit veränderlicher Struktur*. München: Oldenbourg.
- Fernandez R., B.** und **J. K. Hedrick**. 1987. Control of multivariable non-linear systems by the sliding mode method. *Int. J. Control* 46(3). 1019–1040.
- Filippov, A. G.** 1961. Application of the Theory of Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides to Non-linear Problems in Automatic Control. *Proceedings of the 1st IFAC (World) Congress*. 923–927.
- Föllinger, O.** 1970. *Nichtlineare Regelungen II, Anwendungen der Zustandsebene*. München: Oldenbourg.
- Gao, W.** und **J. C. Hung**. 1993. Variable Structure Control of Nonlinear Systems: A New Approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 40(1). 45–55.

- Hung, J. Y., W. Gao** und **J. C. Hung**. 1993. Variable Structure Control: A Survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 40(1). 2–22.
- Isidori, A.** 1989. *Nonlinear Control Systems: An Introduction. Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Berlin: Springer.
- Itkis, Y.** 1976. *Control Systems of Variable Structure*. New York: Wiley.
- Khurana, H., S. I. Ahson** und **S. S. Lamba**. 1986a. Variable Structure Control Design for Large–Scale Systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 16. 573–576.
- Khurana, H., S. I. Ahson** und **S. S. Lamba**. 1986b. On Stabilization of Large–Scale Control Systems Using Variable Structure Systems Theory. *IEEE Transactions on Automatic Control* 31(2). 176–178.
- Kwatny, H. G.** und **H. Kim**. 1990. Variable structure regulation of partially linearizable dynamics. *Systems & Control Letters* 15. 67–80.
- Kwatny, H. G.** und **T. L. Siu**. 1987. Chattering in variable structure feedback systems. *Proc. 10th IFAC World Congress (Preprint)*. München. 334–341.
- Liu, J.-S.** und **K. Yuan**. 1989. On tracking control for affine nonlinear systems by sliding mode. *Systems & Control Letters* 13. 439–443.
- Ljapunov, A. M.** 1992. *The general problem of the stability of motion*. London: Taylor & Francis. (ed. A. T. Fuller).
- Orlov, Y. V.** und **V. I. Utkin**. 1987. Sliding Mode Control in Infinite–dimensional Systems. *Automatica* 23(6). 753–757.
- Schwarz, H.** 1993. *Systemtheoretische Methoden der Meßtechnik*. Vorlesungsumdruck. Universität Duisburg. MSRT.
- Singh, S. K.** 1990. Decentralized variable structure control for tracking non-linear systems. *Int. J. Control* 47(4). 811–831.
- Sira–Ramírez, H.** 1988. Differential geometric methods in variable–structure control. *Int. J. Control* 48(4). 1359–1390.
- Sira–Ramírez, H.** 1990. Structure at infinity, zero dynamics and normal forms of systems undergoing sliding motions. *Int. J. Systems Sci.* 21(4). 665–674.
- Sira–Ramírez, H.** 1992. On the sliding mode control of nonlinear systems. *Systems & Control Letters* 19(4). 303–312.

- Slotine, J.-J. E.** 1984. Sliding controller design for non-linear systems. *Int. J. Control* 40(2). 421–434.
- Slotine, J.-J. E., J. K. Hedrick** und **E. A. Misawa.** 1987. On Sliding Observers for Nonlinear Systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 109. 245–252.
- Slotine, J.-J. E.** und **W. Li.** 1991. *Applied Nonlinear Control*. New Jersey, USA: Prentice Hall Int.
- Slotine, J.-J. E. S.** und **S. S. Sastry.** 1983. Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators. *Int. J. Control* 38(2). 465–492.
- Utkin, V. I.** 1971 und 1972. Equations of the slipping regime in discontinuous systems, Part I/II. *Automation and Remote Control* 1/2. 1897–1907/211–219.
- Utkin, V. I.** 1977. Variable Structure Systems with Sliding Modes. *IEEE Transactions on Automatic Control* 22(2). 212–222.
- Utkin, V. I.** 1978. *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*. Moskau: Mir.
- Utkin, V. I.** 1983. Variable structure systems: Present and future. *Automation and Remote Control* 44(9). 1105–1120.
- Wang, W.-J., G.-H. Wu** und **D.-C. Yang.** 1994. Variable Structure Control Design for Uncertain Discrete-Time Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 39(1). 99–102.
- Young, K.-K. D.** 1978. Controller Design for a Manipulator Using Theory of Variable Structure Systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 8(2). 101–109.
- Zhou, F.** und **D. G. Fisher.** 1991. MIMO Sliding Mode Control: A Lyapunov Approach. *Proceedings of the American Control Conference*. Boston, USA. 1796–1799.