

Über die Eigenschaften des Modells eines elastischen Roboters

Marco Antonio Arteaga Pérez

Forschungsbericht Nr. 17/95

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Ein elastischer Roboter mit rotatorischen Gelenken läßt sich durch die Anwendung der Euler–Lagrange–Theorie systematisch modellieren, wenn man annimmt, daß die Deformationen der elastischen Glieder klein sind. Der vorliegende Forschungsbericht beschreibt die wichtigsten Eigenschaften des durch die Euler–Langrange–Bewegungsgleichungen ermittelten Modells.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	II
1 Einleitung	1
2 Modellbildung eines elastischen Roboters	2
3 Modelleigenschaften	8
3.1 Matrizeneigenschaften	8
3.2 Normbegrenzungen	12
3.3 Eigenschaften des gesamten Modells	17
4 Zusammenfassung und Ausblick	21
Literaturverzeichnis	22

Nomenklatur

Skalare Größen

m	:	Masse [kg]
M_i	:	Masse des i -ten Gliedes [kg]
EI	:	Biegesteifigkeit eines elastischen Balkens [Nm^2]
E_G	:	Gleitmodul [Nm^2]
J	:	Polares Widerstandsmoment [m^3]
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$:	Rotatorische Komponenten einer homogenen Transformation durch die Deformation eines elastischen Balkens
$\delta_x, \delta_y, \delta_z$:	Deformationen in die x -, y - und z -Richtungen eines elastischen Balkens
l	:	Länge eines elastischen Balkens ohne Deformation
\bar{n}	:	Freiheitsgrade eines elastischen Roboters
n	:	Anzahl verallgemeinerter starrer Koordinaten
\bar{m}	:	Anzahl verallgemeinerter elastischer Koordinaten
m_i	:	Anzahl verallgemeinerter elastischer Koordinaten des i -ten Gliedes
ϕ_r	:	r -te Eigenfunktion eines elastischen Balkens
T	:	Kinetische Energie
U	:	Potentielle Energie
L	:	Lagrange-Funktion
H	:	Hamilton-Funktion
\mathcal{F}	:	Rayleighsche Funktion
q_{ij}	:	Element des Vektors \mathbf{q}
δ_{ij}	:	Element des Vektors δ
u_{ij}	:	Element des Vektors \mathbf{u}
τ_{ij}	:	Element des Vektors τ
p_{ij}	:	Element des Vektors \mathbf{p}
m_{ijhk}	:	Element der Matrix $\mathbf{M}(\mathbf{q})$
c_{ijhk}	:	Element der Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

Operatoren

$\text{sp}(\cdot)$:	Spur einer Matrix
$\ \cdot\ $:	Norm eines Vektors oder einer Matrix
$ \cdot $:	Absolutbetrag
$\lambda_{\min}(\cdot)$:	Minimaler Eigenwert einer Matrix
$\lambda_{\max}(\cdot)$:	Maximaler Eigenwert einer Matrix
$\langle \cdot, \cdot \rangle_T$:	Skalar Produkt

Vektoren und Matrizen

${}^j\mathbf{T}_i$:	Homogene Transformationsmatrix zur Umrechnung eines Ortsvektors vom i -ten ins j -te Koordinatensystem
\mathbf{A}_i	:	Homogene Transformationsmatrix für das i -te Drehgelenk eines elastischen Roboters
\mathbf{E}_i	:	Homogene Transformationsmatrix für das i -te Glied eines elastischen Roboters
${}^i\mathbf{r}_i$:	Position eines Punktes im i -ten Koordinatensystem hinsichtlich des i -ten Koordinatensystems
$\mathbf{q}(t)$:	Vektor verallgemeinerter elastischer und starrer Koordinaten
$\delta(t)$:	Vektor verallgemeinerter elastischer Koordinaten
$\mathbf{q}_s(t)$:	Vektor verallgemeinerter starrer Koordinaten
$\boldsymbol{\tau}(t)$:	Vektor verallgemeinerter Kräfte für die starren Eingänge
$\mathbf{u}(t)$:	Vektor verallgemeinerter Kräfte
$\boldsymbol{\psi}(t)$:	Vektor nichtkonservativer Kräfte
$\mathbf{p}(t)$:	Vektor verallgemeinerter Impulse
$\boldsymbol{\varphi}$:	Parametervektor
$\mathbf{M}(\mathbf{q})$:	Trägheitsmatrix
$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$:	Coriolis- und Zentrifugalkraftvektor
$\mathbf{e}(\mathbf{q})$:	Gravitationsvektor
\mathbf{K}	:	Starrheitsmatrix
\mathbf{F}	:	Matrix der viskosen Gelenkreibung und der Strukturdämpfung der Glieder
$\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$:	Regressor

Abkürzungen

EIG	:	Eigenschaft
-----	---	-------------

1 Einleitung

Die Regelung elastischer Roboter ist eine anspruchsvolle Aufgabe. Daher besteht die Notwendigkeit eines guten Modells. Eine Möglichkeit liegt darin, eine Modellstruktur vorzugeben und deren Parameter zu identifizieren. Da der elastische Roboter ein nichtlineares System darstellt, ist in diesem Fall ein bilineares Modell ein adäquater Ansatz, weil dieses eine bessere Approximation als ein lineares gibt (Schwarz 1991). Es ist aber auch möglich, den Roboter theoretisch zu modellieren, was unter der Annahme der kleinen Deformationen systematisch durchgeführt werden kann. Der vorliegende Bericht beschäftigt sich mit der Modellbildung elastischer Roboter und den wichtigsten Eigenschaften des ermittelten Modells.

Ein starrer Roboter läßt sich relativ einfach modellieren. Zwei Standardmethoden sind die Anwendung der Euler–Lagrange Gleichungen und das Newton–Euler Verfahren (Spong und Vidyasagar 1989, Fu u. a. 1989). Obwohl beide Methoden zum gleichen Modell führen, wird das Euler–Lagrange Verfahren am häufigsten benutzt, da es auf der Kenntnis der potentiellen und kinetischen Energie des Roboters basiert, was die Durchführung erleichtert (Spong und Vidyasagar 1989). Das Ergebnis ist ein hochgradig nichtlineares Modell zweiter Ordnung, dessen Differentialgleichungen gut bestimmte Eigenschaften besitzen, die aus physikalischen Gründen entstehen (Ortega und Spong 1989).

Wenn man in der Lage ist, die potentielle und kinetische Energie eines elastischen Roboters zu beschreiben, kann das Euler–Lagrange Verfahren auch in diesem Fall verwendet werden. Spong (1987) hat elastische Roboter modelliert, deren Elastizität auf die Gelenke beschränkt ist. De Luca und Siciliano (1991) betrachten den Fall, daß die Glieder elastisch sind und sich der Roboter in einer Ebene bewegt. Yuan u. a. (1993) haben Bewegungsgleichungen für Roboter mit Elastizitäten in Gliedern und Gelenken berechnet. Sie schränken die Bewegung in einer Ebene nicht ein. Das Ergebnis ist, daß das Modell des elastischen dem Modell des starren Roboters ähnlich ist. Der größte (und allerdings sehr wichtige) Unterschied besteht darin, daß der elastische Roboter mehr Freiheitsgrade als Eingänge hat, während der starre Roboter die gleiche Anzahl besitzt. Wie für den starren Roboter sind für den elastischen Roboter nützliche Modelleigenschaften bestimmbar, die die Auslegung verschiedener Regelungskonzepte deutlich erleichtern. Nicosia und Tomei (1995) haben zum Beispiel einen Beobachter für Roboter entworfen, deren Gelenke elastisch sind. Einige interessante Ergebnisse über Punkt zu Punkt Regelung und adaptive Regelung mit Robotern, deren Glieder elastisch sind, geben De Luca und Siciliano (1993) und Lammerts u. a. (1995) an.

Das Verfahren nach Yuan u. a. (1993) wird in Abschnitt 2 erläutert. Hierbei wird angenommen, daß keine Elastizität in den Gelenken auftritt. Abschnitt 3 analysiert das ermittelte Modell und diskutiert dessen wichtigste Eigenschaften. Eine Zusammenfassung und Ausblick im Abschnitt 4 schließen den Forschungsbericht ab.

2 Modellbildung eines elastischen Roboters

Mit dem Euler–Lagrange Verfahren lassen sich die Differentialgleichungen bestimmen, die das dynamische Verhalten eines Systems beschreiben. Ein System mit \bar{n} Freiheitsgraden muß \bar{n} Bewegungsgleichungen der Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} = u_i, \quad i = 1, \dots, \bar{n} \quad (2.1)$$

erfüllen (Wellstead 1979, Goldstein 1991), wobei die Lagrange–Funktion L durch

$$L = T - U \quad (2.2)$$

gegeben ist.

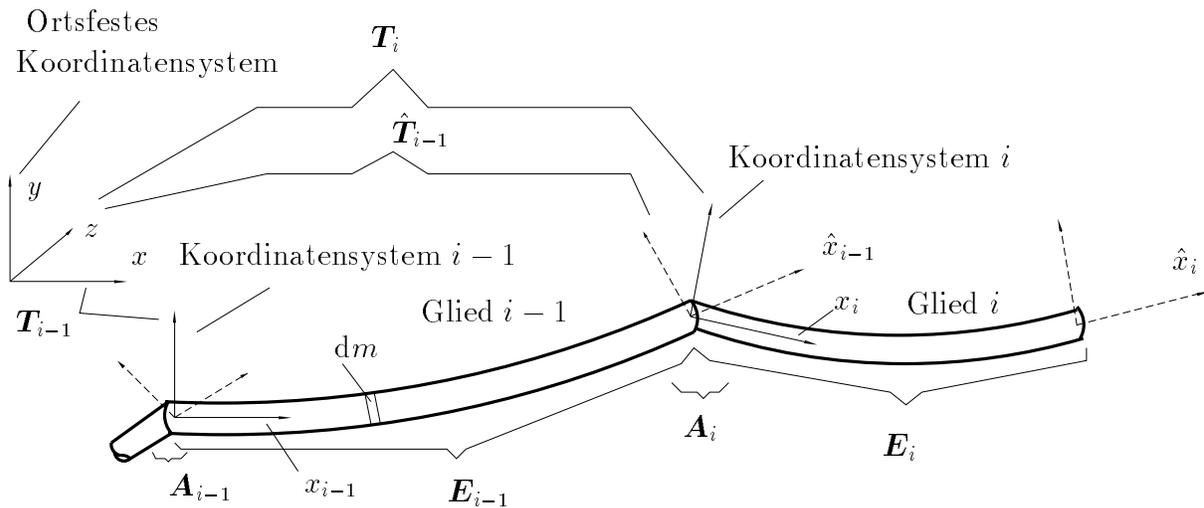


Bild 2.1: Elastische Kette (Book 1984)

Um einen elastischen Roboter modellieren zu können, muß man sowohl dessen potentielle Energie U als auch dessen kinetische Energie T kennen. Der erste Schritt besteht darin, die Kinematik des Handhabungssystems zu beschreiben, was sich durch ein Verfahren nach Book (1979, 1984) (siehe auch Arteaga Pérez (1995)) ausführen läßt. Die Methode ermittelt die Position eines bestimmten Punktes als

$${}^0\mathbf{r}_i \triangleq \mathbf{r}_i = {}^0\mathbf{T}_i^i \mathbf{r}_i = \mathbf{T}_i^i \mathbf{r}_i, \quad (2.3)$$

$${}^0\mathbf{T}_i \triangleq \mathbf{T}_i = \mathbf{A}_1 \mathbf{E}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{E}_2 \cdots \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{E}_{i-1} \mathbf{A}_i = \hat{\mathbf{T}}_{i-1} \mathbf{A}_i, \quad (2.4)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_{i-1} \triangleq \mathbf{T}_{i-1} \mathbf{E}_{i-1}. \quad (2.5)$$

Bild 2.1 skizziert einen Teil eines elastischen Roboters. Weitere Erklärungen gibt Arteaga Pérez (1995). Durch Anwendung von Gl. (2.3) kann die kinetische Energie des i -ten Gliedes als

$$T_i = \int_{\text{Glieder}_i} dT_i = \frac{1}{2} \int_{\text{Glieder}_i} \text{sp} \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \frac{d\mathbf{r}_i^T}{dt} \right) dm \quad (2.6)$$

geschrieben werden. Für das ganze System gilt

$$T = \sum_{i=1}^n \int_{\text{Glied}_i} dT_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\text{Glied}_i} \text{sp} \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \frac{d\mathbf{r}_i^T}{dt} \right) dm \quad . \quad (2.7)$$

Durch Vereinfachungen ist man in der Lage Gl. (2.7) als

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.8)$$

zu schreiben, wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &\triangleq [q_{10}(t) \cdots q_{n0}(t) \quad \delta_{11}(t) \cdots \delta_{1m_1}(t) \cdots \delta_{n1}(t) \cdots \delta_{nm_n}(t)]^T \\ &= [q_{10}(t) \cdots q_{n0}(t) \quad q_{11}(t) \cdots q_{1m_1}(t) \cdots q_{n1}(t) \cdots q_{nm_n}(t)]^T \quad , \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1(\mathbf{q}) & \mathbf{M}_2(\mathbf{q}) \\ \mathbf{M}_2^T(\mathbf{q}) & \mathbf{M}_3(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

gilt. $q_{10} \dots q_{n0}$ bezeichnen die verallgemeinerten starren Koordinaten.

$\mathbf{M}_1(\mathbf{q})$ beschreibt die Verbindung zwischen verallgemeinerten starren Koordinaten, $\mathbf{M}_2(\mathbf{q})$ zwischen verallgemeinerten starren und elastischen Koordinaten und $\mathbf{M}_3(\mathbf{q})$ zwischen verallgemeinerten elastischen Koordinaten. $\mathbf{M}_1(\mathbf{q})$ ist durch

$$m_{\alpha 0 h 0} = \sum_{i=\max(\alpha, h)}^n \text{sp} \left\{ \left(\hat{\mathbf{T}}_{\alpha-1} \mathbf{U}_{\alpha}{}^{\alpha} \tilde{\mathbf{T}}_i \right) \mathbf{F}_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{h-1} \mathbf{U}_h{}^h \tilde{\mathbf{T}}_i \right)^T \right\} \quad (2.11)$$

gegeben¹, wobei

$${}^h \mathbf{T}_i \triangleq \mathbf{A}_{h+1} \mathbf{E}_{h+1} \mathbf{A}_{h+2} \mathbf{E}_{h+2} \cdots \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{E}_{i-1} \mathbf{A}_i \quad , \quad (2.12)$$

$${}^h \tilde{\mathbf{T}}_i \triangleq \mathbf{E}_h \mathbf{A}_{h+1} \mathbf{E}_{h+1} \cdots \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{E}_{i-1} \mathbf{A}_i \quad , \quad (2.13)$$

$$\mathbf{U}_h \triangleq \frac{\partial \mathbf{A}_h}{\partial q_{h0}} \quad , \quad (2.14)$$

$$\mathbf{F}_i \triangleq \mathbf{C}_i + \sum_{j=1}^{m_i} \delta_{ij} \left[(\mathbf{C}_{ij} + \mathbf{C}_{ij}^T) + \sum_{k=1}^{m_i} \delta_{ik} \mathbf{C}_{ikj} \right] = \mathbf{F}_i^T \quad , \quad (2.15)$$

$$\mathbf{C}_i \triangleq \int_{\text{Glied}_i} [x_i, y_i, z_i, 1]^T [x_i, y_i, z_i, 1] dm \quad , \quad (2.16)$$

$$\mathbf{C}_{ij} \triangleq \int_{\text{Glied}_i} [x_i, y_i, z_i, 1]^T [\phi_{xij}, \phi_{yij}, \phi_{zij}, 0] dm \quad , \quad (2.17)$$

$$\mathbf{C}_{ikj} \triangleq \int_{\text{Glied}_i} [\phi_{xik}, \phi_{yik}, \phi_{zik}, 0]^T [\phi_{xij}, \phi_{yij}, \phi_{zij}, 0] dm = \mathbf{C}_{ijk}^T \quad (2.18)$$

gilt. $\mathbf{M}_2(\mathbf{q})$ läßt sich durch

$$m_{h0\alpha\beta} = \gamma_{h\alpha} + \sum_{i=\alpha+1}^n \text{sp} \left\{ \left(\hat{\mathbf{T}}_{h-1} \mathbf{U}_h{}^h \tilde{\mathbf{T}}_i \right) \mathbf{F}_i \left(\mathbf{T}_{\alpha} \mathbf{N}_{\alpha\beta}{}^{\alpha} \mathbf{T}_i \right)^T \right\} \quad (2.19)$$

¹ $m_{\alpha 0 h 0}$ anstatt $m_{\alpha h}$ ist geeigneter, wenn elastische verallgemeinerte Koordinaten verwendet werden.

berechnen, wobei

$$\gamma_{h\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \alpha < h \\ \text{sp} \left\{ \left(\hat{\mathbf{T}}_{h-1} \mathbf{U}_h^h \tilde{\mathbf{T}}_\alpha \right) \mathbf{D}_{\alpha\beta} \mathbf{T}_\alpha^T \right\} & \text{wenn } \alpha \geq h \end{cases}$$

$$\mathbf{N}_{\alpha\beta} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\theta_{z\alpha\beta} & \theta_{y\alpha\beta} & \phi_{x\alpha\beta} \\ \theta_{z\alpha\beta} & 0 & -\theta_{x\alpha\beta} & \phi_{y\alpha\beta} \\ -\theta_{y\alpha\beta} & \theta_{x\alpha\beta} & 0 & \phi_{z\alpha\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{D}_{\alpha\beta} \triangleq \mathbf{C}_{\alpha\beta} + \sum_{k=1}^{m_\alpha} \delta_{\alpha k} \mathbf{C}_{\alpha k\beta} \quad (2.21)$$

ist. $\mathbf{M}_3(\mathbf{q})$ ist durch

$$m_{hk\alpha\beta} = \eta_{h\alpha} + \sum_{i=\max(h,\alpha)+1}^n \text{sp} \left\{ \left(\mathbf{T}_h \mathbf{N}_{hk}^h \mathbf{T}_i \right) \mathbf{F}_i \left(\mathbf{T}_\alpha \mathbf{N}_{\alpha\beta}^\alpha \mathbf{T}_i \right)^T \right\} \quad (2.22)$$

zu beschreiben, wobei

$$\eta_{h\alpha} = \begin{cases} \text{sp} \left\{ \mathbf{T}_h \mathbf{C}_{hk\beta} \mathbf{T}_h^T \right\} & \text{wenn } h = \alpha \\ \text{sp} \left\{ \left(\mathbf{T}_h \mathbf{N}_{hk}^h \mathbf{T}_\alpha \right) \mathbf{D}_{\alpha\beta} \mathbf{T}_\alpha^T \right\} & \text{wenn } h < \alpha \\ \text{sp} \left\{ \left(\mathbf{T}_\alpha \mathbf{N}_{\alpha\beta}^\alpha \mathbf{T}_h \right) \mathbf{D}_{hk} \mathbf{T}_h^T \right\} & \text{wenn } h > \alpha \end{cases}$$

Der nächste Schritt ist die potentielle Energie U zu berechnen. Bei elastischen Robotern gibt es drei Quellen potentieller Energie: Gravitationskraft, Elastizität in den Gliedern sowie in den Gelenken. Im diesen Bericht werden nur die ersten zwei Quellen berücksichtigt. Das differentielle Element der potentiellen Energie im i -ten Glied infolge der Gravitationskraft lautet

$$dU_{gi} = -\mathbf{g}^T \mathbf{T}_i^i \mathbf{r}_i dm \quad (2.23)$$

$$\mathbf{g}^T = [g_x, g_y, g_z, 0], \quad (2.24)$$

wobei \mathbf{g} der Gravitationsvektor genannt wird und im ortsfesten Koordinatensystem ausgedrückt ist. Die gesamte potentielle Energie durch die Gravitationskraft ist

$$U_g = -\mathbf{g}^T \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i \mathbf{h}_i, \quad (2.25)$$

mit

$$\mathbf{h}_i \triangleq M_i \mathbf{l}_i + \sum_{k=1}^{m_i} \delta_{ik} \mathbf{s}_{ik}, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{l}_i = [l_{xi}, l_{yi}, l_{zi}, 1]^T, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{s}_{ik} = \int_{\text{Glieder}_i} [\phi_{xik}, \phi_{yik}, \phi_{zik}, 0]^T dm, \quad (2.28)$$

wobei \mathbf{l} einen Vektor zum Schwerpunkt des Gliedes ohne Deformation (hinsichtlich des i -ten Koordinatensystems) bezeichnet.

Die potentielle Energie infolge der Elastizität im i -ten Glied kann durch (Yuan u. a. 1993)

$$U_{ei} = \frac{1}{2} \int_{\text{Glied}_i} \left[EI_y \left(\frac{\partial^2 \delta_{y_i}}{\partial x_i^2} \right)^2 + EI_z \left(\frac{\partial^2 \delta_{z_i}}{\partial x_i^2} \right)^2 + E_G J_x \left(\frac{\partial \theta_{x_i}}{\partial x_i} \right)^2 \right] dx_i \quad (2.29)$$

berechnet werden. In Gl. (2.29) wird angenommen, daß die Deformation in die x -Richtung vernachlässigbar ist. δ_{y_i} , δ_{z_i} , θ_{x_i} lassen sich als

$$\delta_{y_i} = \sum_{j=1}^{m_i} \phi_{y_{ij}} \delta_{ij} \quad , \quad (2.30)$$

$$\delta_{z_i} = \sum_{j=1}^{m_i} \phi_{z_{ij}} \delta_{ij} \quad , \quad (2.31)$$

$$\theta_{x_i} = \sum_{j=1}^{m_i} \theta_{x_{ij}} \delta_{ij} \quad , \quad (2.32)$$

schreiben (Yuan u. a. 1993, Meirovitch 1967, 1975). Setzt man Gln. (2.30) bis (2.32) in Gl. (2.29) ein, ergibt sich

$$U_{ei} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^{m_i} \delta_{ij} \delta_{ik} (k_{y_{ijk}} + k_{z_{ijk}} + k_{x_{ijk}}) \quad , \quad (2.33)$$

$$k_{y_{ijk}} = \int_{\text{Glied}_i} EI_y \frac{d^2 \phi_{y_{ij}}}{dx_i^2} \frac{d^2 \phi_{y_{ik}}}{dx_i^2} dx_i \quad , \quad (2.34)$$

$$k_{z_{ijk}} = \int_{\text{Glied}_i} EI_z \frac{d^2 \phi_{z_{ij}}}{dx_i^2} \frac{d^2 \phi_{z_{ik}}}{dx_i^2} dx_i \quad , \quad (2.35)$$

$$k_{x_{ijk}} = \int_{\text{Glied}_i} E_G J_x \frac{d\theta_{x_{ij}}}{dx_i} \frac{d\theta_{x_{ik}}}{dx_i} dx_i \quad . \quad (2.36)$$

Die gesamte elastische potentielle Energie durch die Gliederdeformation ist dann durch

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^{m_i} \delta_{ij} \delta_{ik} k_{ijk} \quad , \quad (2.37)$$

$$k_{ijk} \triangleq k_{y_{ijk}} + k_{z_{ijk}} + k_{x_{ijk}} = k_{ikj} \quad (2.38)$$

gegeben. Gl. (2.37) läßt sich auch in Matrixform schreiben:

$$U_e = \frac{1}{2} \delta^T \mathbf{K} \delta = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad , \quad (2.39)$$

$$\delta \triangleq [\delta_{11}(t) \cdots \delta_{1m_1}(t) \cdots \delta_{n1}(t) \cdots \delta_{nm_n}(t)]^T \quad , \quad (2.40)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{111} & \cdots & k_{11m_1} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ k_{1m_11} & \cdots & k_{1m_1m_1} & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & k_{n11} & \cdots & k_{n1m_n} \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & k_{nm_n1} & \cdots & k_{nm_nm_n} \end{bmatrix} . \quad (2.41)$$

So ist die Lagrange-Funktion als

$$L = \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \delta^T \mathbf{K} \delta \right) + \mathbf{g}^T \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i \mathbf{h}_i \quad (2.42)$$

zu berechnen. Die Rayleighsche Dissipationsfunktion, die die Gelenkreibung und Strukturdämpfung der Glieder berücksichtigt, ist durch (Goldstein 1991, Meirovitch 1967)

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{F} \dot{\mathbf{q}} , \quad (2.43)$$

zu bestimmen, wobei \mathbf{F} eine positiv semidefinite Matrix ist. Der wichtigste (und allerdings nicht unrealistische) Fall der Matrix \mathbf{F} ergibt sich, wenn sie diagonal ist (Meirovitch 1967). In diesem Bericht wird angenommen, daß dies der Fall ist.

Gleichung (2.1) läßt sich auch in Vektorform schreiben:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{u} , \quad (2.44)$$

wobei

$$\mathbf{u} \triangleq \begin{bmatrix} \tau_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{\bar{m} \times 1} \end{bmatrix} , \quad \bar{m} = m_1 + \cdots + m_n \quad (2.45)$$

gilt. Durch Anwendung von Gln. (2.42) und (2.44) kann die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \mathbf{q} + \mathbf{F} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{e}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} , \quad (2.46)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \triangleq \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.47)$$

formuliert werden, wobei

$$c_{rs\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{m_i} c_{ij\alpha\beta rs} \dot{q}_{ij} , \quad (2.48)$$

$$c_{ij\alpha\beta rs} \triangleq \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial m_{rs\alpha\beta}}{\partial q_{ij}} + \frac{\partial m_{rsij}}{\partial q_{\alpha\beta}} - \frac{\partial m_{ij\alpha\beta}}{\partial q_{rs}} \right\} , \quad (2.49)$$

$$e_{rs} = \begin{cases} -\mathbf{g}^T \sum_{i=r}^n \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_{rs}} \mathbf{h}_i & \text{wenn } s = 0 \\ -\mathbf{g}^T \left(\sum_{i=r+1}^n \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_{rs}} \mathbf{h}_i + \mathbf{T}_r \mathbf{s}_{rs} \right) & \text{wenn } s \neq 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

gilt. Dabei tritt die Identität

$$c_{ij\alpha\beta rs} = c_{\alpha\beta ijrs} \quad (2.51)$$

auf. Folgendes soll zum Modell (2.46) angemerkt werden.

- Gleichung (2.46) ist gültig von verallgemeinerten Eingängen (Momente an Gelenken) zu verallgemeinerten Koordinaten. Die Antriebsdynamik wird nicht in Betracht gezogen, da die Antriebe je nach Roboter variieren.
- In Gl. (2.45) wird angenommen, daß nur die verallgemeinerten starren Koordinaten Eingänge besitzen. Sollten die verallgemeinerten Eingänge für die elastischen Koordinaten nicht Null sein, hängen diese direkt von denen ab, die für die starren Koordinaten gültig sind. Das heißt, es gibt n und nur n reale Eingänge.
- Die Matrix \mathbf{F} und der Vektor $\mathbf{e}(\mathbf{q})$ können Null sein.
- Bei der Modellbildung wurde die Kenntnis der Eigenfunktionen der elastischen Glieder vorausgesetzt, was im Grunde unrealistisch ist. Die Lösung besteht darin, das *Assumed-modes* Verfahren zu benutzen, welches annimmt, daß sich die wirklichen Eigenfunktionen durch die eines ähnlichen Systems ersetzen lassen (Meirovitch 1967).

3 Modelleigenschaften

Im diesem Abschnitt werden die wichtigsten Eigenschaften des Modells (2.46) ermittelt, die teilweise aus physikalischen Gründen und teilweise aus dem Modellbildungsverfahren folgen. Die Ähnlichkeit dieser Eigenschaften mit denen des starren Roboters ist sehr groß, obwohl ein elastischer Roboter mehr Freiheitsgrade als Eingänge hat. Ihr Nutzen besteht darin, daß die Auslegung verschiedener Regelungskonzepte (adaptiver Regelung, robuster Regelung, usw.) deutlich vereinfacht wird.

Für die hier betrachteten elastischen Systeme werden vorwiegend diese Normdefinitionen verwendet.

Definition 3.1

Die Norm eines Vektor $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ ist durch

$$\|\mathbf{q}\| \triangleq \sqrt{\sum_{i=1}^{\bar{n}} q_i^2} \quad (3.1)$$

gegeben. □

Definition 3.2

Die Norm einer Matrix ist durch

$$\|\mathbf{A}\| \triangleq \sqrt{\lambda_{max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})} \quad (3.2)$$

gegeben. □

Die Definitionen (3.1) und (3.2) sind diejenigen der euklidischen und der daraus resultierenden Normen. Es gibt keinen Verlust der Allgemeingültigkeit, da alle Normen im $\mathbb{R}^{\bar{n}}$ äquivalent sind (Desoer und Vidyasagar 1975); d. h., die in diesem Abschnitt gegebenen Ergebnisse sind gültig für jede Norm im $\mathbb{R}^{\bar{n}}$.

Die Modelleigenschaften sind in drei Gruppen zu unterteilen: Diejenigen, die die Matrizen des Modells betreffen; diejenigen, die eine Normbegrenzung der Modellmatrizen angeben; und diejenigen, die das Modell als Ganzes betrachten.

3.1 Matrizeneigenschaften

Die Matrizen des Modells (2.46) besitzen mehrere interessante Eigenschaften. Sie deuten an, daß die Matrizen und Vektoren in verschiedenen Formen geschrieben werden können, oder daß sie symmetrisch, positiv definit oder schief-symmetrisch sind. Sie sind sehr nützlich für die Reglerauslegung, da sich mit ihrer Hilfe Stabilitätsbeweise durchführen lassen. Die erste berücksichtigt die Trägheitsmatrix.

Eigenschaft 3.1

Die Trägheitsmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ ist symmetrisch und positiv definit.

Beweis

Daß $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ symmetrisch ist, ist aus den Gln. (2.10), (2.11), (2.19) und (2.22) offensichtlich. Sie muß positiv definit sein, da die kinetische Energie (Gl. (2.8)) immer größer als Null ist, wenn das ganze System nicht in Ruhe ist. \square

Zwischen den Matrizen $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ und $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ gibt es eine besondere Verbindung, die der Auslegung von Beobachtern, Reglern und adaptiven Algorithmen hilft. EIG 3.2 gibt sie an.

Eigenschaft 3.2

Die Matrix $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \triangleq \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ist schiefsymmetrisch.

Beweis

Für jedes Element von $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$ gilt

$$\dot{m}_{rs\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{m_i} \frac{\partial m_{rs\alpha\beta}}{\partial q_{ij}} \dot{q}_{ij} \quad , \quad (3.3)$$

und für jedes von $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ (durch Anwendung von Gln. (2.48) und (2.49))

$$\begin{aligned} n_{rs\alpha\beta} &\triangleq \dot{m}_{rs\alpha\beta} - 2c_{rs\alpha\beta} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{m_i} \left\{ \frac{\partial m_{rs\alpha\beta}}{\partial q_{ij}} - \left(\frac{\partial m_{rs\alpha\beta}}{\partial q_{ij}} + \frac{\partial m_{rsij}}{\partial q_{\alpha\beta}} - \frac{\partial m_{ij\alpha\beta}}{\partial q_{rs}} \right) \right\} \dot{q}_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{m_i} \left\{ \frac{\partial m_{ij\alpha\beta}}{\partial q_{rs}} - \frac{\partial m_{rsij}}{\partial q_{\alpha\beta}} \right\} \dot{q}_{ij} \quad . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Da $m_{rs\alpha\beta} = m_{\alpha\beta rs}$ ist, folgt diese Eigenschaft. \square

EIG 3.2 ist sehr wichtig. In der Robotik gibt es kaum einen Satz, der bewiesen wird, ohne diese Eigenschaft zu benutzen. Slotine und Li (1987) geben ein gutes Beispiel ihrer Anwendung, und zwar mit einer adaptiven Regelung. Anzumerken bleibt, daß EIG 3.2 wegen der besonderen Definition der Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ gilt. Bei Einführung einer anderen Definition, geht EIG 3.2 verloren (Ortega und Spong 1989), aber unabhängig davon gilt

$$\dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (3.5)$$

immer. Die Gültigkeit von Gl. (3.5) läßt sich durch die Hamiltonschen kanonischen Bewegungsgleichungen beweisen. Der erste Schritt ist Gln. (2.44) und (2.46) als

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \psi = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \mathbf{q} + \mathbf{e}(\mathbf{q}) \quad (3.6)$$

zu schreiben, wobei

$$\psi \triangleq \mathbf{u} - \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}} \quad (3.7)$$

ist. Die Hamilton-Funktion lautet (Ortega und Spong 1989, Greenwood 1977)

$$H = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - L, \quad (3.8)$$

wobei

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (3.9)$$

ist. Aus Gln. (3.8), (3.9) und (2.42) ist die Hamilton-Funktion durch

$$H = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \mathbf{q} + U_g = T + U \quad (3.10)$$

zu berechnen. Andererseits sind die Hamiltonschen kanonischen Bewegungsgleichungen durch

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (3.11)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \psi_i, \quad i = 1, \dots, \bar{n}, \quad (3.12)$$

gegeben. Mit Anwendung von Gl. (3.11) und (3.12) wird die Ableitung von H nach t durch

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i = \dot{\mathbf{q}}^T \psi \quad (3.13)$$

bestimmt. Auch die Gln. (3.10) und (3.6) können benutzt werden, um diese Ableitung zu kalkulieren:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial U_g}{\partial \mathbf{q}} \\ &= \dot{\mathbf{q}}^T \psi + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Aus dem Vergleich von Gln. (3.13) und (3.14) ergibt sich Gl. (3.5). Anzumerken ist die Bedeutung der Definitionen der Modellmatrizen, da EIG 3.2 im Grunde nur ein besonderer Fall von Gl. (3.5) ist.

Der Vektor $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ besitzt zwei Eigenschaften, die seine Elemente in einer besonderen Weise manipulieren lassen, wie im Folgenden gezeigt wird.

Eigenschaft 3.3

Es gilt

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{y})\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}. \quad (3.15)$$

Beweis

Das Element rs des Vektors $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ lautet (Gln. (2.47) und (2.48))

$$\begin{aligned}
 h_{rs}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=0}^{m_\alpha} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{m_i} c_{ij\alpha\beta rs} x_{ij} \right) y_{\alpha\beta} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{m_i} \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=0}^{m_\alpha} c_{ij\alpha\beta rs} y_{\alpha\beta} \right) x_{ij} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{m_i} \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=0}^{m_\alpha} c_{\alpha\beta ijrs} y_{\alpha\beta} \right) x_{ij} = h_{rs}(\mathbf{q}, \mathbf{y}, \mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

□

Eigenschaft 3.4

Es gilt

$$h_{rs}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}_{rs}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad , \tag{3.17}$$

wobei

$$\mathbf{N}_{rs}(\mathbf{q}) = \mathbf{N}_{rs}^T(\mathbf{q}) \quad , \tag{3.18}$$

$$\|\mathbf{N}_{rs}\| < \infty \quad \forall \quad r = 1, \dots, n, \quad s = 0, \dots, m_r \tag{3.19}$$

ist.

Beweis

Gl. (2.48) kann als

$$c_{rs\alpha\beta} = \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} c_{11\alpha\beta rs} \\ \vdots \\ c_{nm_n\alpha\beta rs} \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

geschrieben werden, was bedeutet, daß $\mathbf{h}_{rs}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ durch

$$\dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} c_{1111rs} & \cdots & c_{11nm_nrs} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{nm_n11rs} & \cdots & c_{nm_nnm_nrs} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \triangleq \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}_{rs}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \tag{3.21}$$

gegeben ist. Offensichtlich ist $\mathbf{N}_{rs}(\mathbf{q}) = \mathbf{N}_{rs}^T(\mathbf{q})$ (siehe Gl. (2.51)). Die Begrenzung der Norm ergibt sich daraus, daß $\mathbf{N}_{rs}(\mathbf{q})$ nur Funktion der verallgemeinerten Koordinaten ist, die begrenzt sind.

□

Nicosia und Tomei (1990, 1995) haben EIG 3.3 (zusammen mit EIG 3.9) mit Erfolg verwendet, um Beobachter für starre Roboter und für Roboter mit Elastizität an den Gelenken auszulegen. EIG 3.4 ist auch hilfreich gewesen, um Beobachter für starre Roboter zu entwerfen (Canudas de Wit u. a. 1990, 1992).

3.2 Normbegrenzungen

Die Begrenzungen der Normen der Matrizen des Modells (2.46) spielen eine sehr wichtige Rolle in der Robotik. Sie helfen nicht nur bei der Auslegung robuster Regler, sondern auch bei Beweisen der Stabilität und Fehlerkonvergenz gegen Null beim Beobachterentwurf. Sie eignen sich gut für die Anwendung der Ljapunov–Theorie, da mittels Normmanipulationen eine Grenze für Ljapunov–Funktionen erkannt werden kann. Die nächsten vier Eigenschaften sind eine direkte Konsequenz von EIG 3.1.

Eigenschaft 3.5

Es gilt

$$\lambda_{min}(\mathbf{M}(\mathbf{q}))\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \leq \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \leq \lambda_{max}(\mathbf{M}(\mathbf{q}))\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 . \quad (3.22)$$

Beweis

Die Kinetische Energie (Gl.(2.8)) kann nur Null sein, wenn das ganze System in Ruhe ist. Es ist auch nicht möglich, daß sie über alle Grenzen wächst, wenn der Geschwindigkeitsvektor ($\dot{\mathbf{q}}$) begrenzt ist. Das bedeutet, daß es eine Grenze gibt, die von der Trägheitsmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ abhängt. Da letztere symmetrisch und positiv definit ist, kann jeder Vektor $\dot{\mathbf{q}}$ im $\mathbb{R}^{\bar{n}}$ als eine Kombination einer orthonormalen Basis ($\dot{\mathbf{q}}_1, \dots, \dot{\mathbf{q}}_{\bar{n}}$) als

$$\dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} c_i \dot{\mathbf{q}}_i \quad (3.23)$$

notiert werden (Strang 1990). Infolgedessen gilt

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = c_1^2 \lambda_1(\mathbf{M}(\mathbf{q})) + \dots + c_{\bar{n}}^2 \lambda_{\bar{n}}(\mathbf{M}(\mathbf{q})) , \quad (3.24)$$

$$\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} = \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 = c_1^2 + \dots + c_{\bar{n}}^2 , \quad (3.25)$$

woraus EIG 3.5 folgt. □

Eigenschaft 3.6

Die Matrix $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})$ existiert, und es gilt

$$\lambda_{max}(\mathbf{M}(\mathbf{q}))\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \leq \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \leq \lambda_{min}(\mathbf{M}(\mathbf{q}))\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 . \quad (3.26)$$

Beweis

Da Jede symmetrische und positiv definite Matrix invertierbar ist und deren Inverse auch symmetrisch und positiv definit ist, folgt EIG 3.6. □

Eigenschaft 3.7

Es gilt

$$\sigma_{m1} \leq \|\mathbf{M}(\mathbf{q})\| \leq \sigma_{m2} < \infty . \quad (3.27)$$

Beweis

Unter der Annahme, daß $\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 > 0$ und $\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 < \infty$ sind, ergibt sich aus EIG 3.5

$$0 < \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} < \infty \quad (3.28)$$

$$\Rightarrow 0 < \|\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}\| \leq \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \|\mathbf{M}(\mathbf{q})\| < \infty \quad (3.29)$$

Aus Gl. (3.29) folgt, daß Grenzen für $\|\mathbf{M}(\mathbf{q})\|$ existieren müssen. \square

Eigenschaft 3.8

Es gilt

$$\sigma_{m3} \leq \|\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\| \leq \sigma_{m4} < \infty. \quad (3.30)$$

Beweis

Der Beweis ist der gleiche wie der, der für EIG 3.7 benutzt wird. \square

Diese Eigenschaften zusammen mit EIG 3.1 sind miteinander stark gekoppelt. Ein Beispiel ihrer Anwendung auf starre Roboter geben Canudas de Wit u. a. (1992). Sie legen einen Beobachter aus und führen den Stabilitätsbeweis mit deren Hilfe durch. Die Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ besitzt auch eine Grenze, wie im Folgenden beschrieben wird.

Eigenschaft 3.9

Es gilt

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq k_c \|\dot{\mathbf{q}}\| \quad (3.31)$$

Beweis

Die Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ läßt sich als (siehe Gl. (2.48))

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{m_i} \mathbf{C}_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_{ij} \quad (3.32)$$

schreiben. Jedes Element der Matrix $\mathbf{C}_{ij}(\mathbf{q})$ ist durch

$$\frac{\partial m_{rs\alpha\beta}}{\partial q_{ij}} + \frac{\partial m_{rsij}}{\partial q_{\alpha\beta}} - \frac{\partial m_{ij\alpha\beta}}{\partial q_{rs}} \quad (3.33)$$

gegeben. Beim Berechnen der Norm von $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| &= \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{m_i} \mathbf{C}_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_{ij} \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{m_i} \|\mathbf{C}_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_{ij}\| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{m_i} \|\mathbf{C}_{ij}(\mathbf{q})\| |\dot{q}_{ij}| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{m_i} \|\mathbf{C}_{ij}(\mathbf{q})\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \quad (3.34) \end{aligned}$$

Mit

$$k_c \triangleq \frac{1}{2} \max_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{m_i} \|\mathbf{C}_{ij}(\mathbf{q})\| \quad (3.35)$$

folgt die Eigenschaft. \square

Die Frage stellt sich, ob das Maximum in Gl. (3.35) existiert. Das muß der Fall sein, da die Definition der Matrizen $\mathbf{C}_{ij}(\mathbf{q})$ von der Trägheitsmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ abhängt. Da die Robotergelenke rotatorisch arbeiten, dürfen nur trigonometrische Funktionen (Sinus und Cosinus) der verallgemeinerten starren Koordinaten und die elastischen Koordinaten auftreten, was auch für die partiellen Ableitungen in Gl. (2.49) gilt. Da die verallgemeinerten elastischen Koordinaten begrenzt sind (siehe EIG 3.11), muß das Maximum in Gl. (3.35) existieren.

Die nächsten Eigenschaften berücksichtigen die Starrheitsmatrix \mathbf{K} und die verallgemeinerten elastischen Koordinaten. Deren Wichtigkeit liegt darin, daß sie unabhängig vom starren Körper sind und in Betracht gezogen werden sollen, wenn ein Regler zu entwerfen ist, der Schwingungen der elastischen Glieder verhindern muß.

Eigenschaft 3.10

Die Starrheitsmatrix \mathbf{K} ist diagonal und positiv definit, und es gilt

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K})\|\delta\|^2 \leq \delta^T \mathbf{K} \delta \leq \lambda_{\max}(\mathbf{K})\|\delta\|^2 \quad . \quad (3.36)$$

Beweis

Die Behauptung folgt aus der Definition der Starrheitsmatrix (siehe Gln. (2.34) bis (2.36) und (2.38)), da die Eigenfunktionen orthogonal sind, d. h. die Ergebnisse der Integrationen sind Null, wenn $j \neq k$ ist (Meirovitch 1967). Der Beweis für die Normbegrenzung ist der gleiche wie der für EIG 3.5. \square

Die elastische potentielle Energie U_e kann nicht Unendlich sein, da die Deformationen klein sind (De Luca und Siciliano 1993, De Luca und Panzieri 1994). Das bedeutet, daß die Norm der verallgemeinerten Koordinaten begrenzt ist, wie die folgende Eigenschaft angibt.

Eigenschaft 3.11

Die Norm des Vektors δ ist durch

$$\|\delta\| \leq \sqrt{\frac{2U_{e,\max}}{\lambda_{\max}(\mathbf{K})}} \triangleq \bar{\delta} \quad (3.37)$$

begrenzt, wobei $U_{e,\max}$ die maximale potentielle Energie bezeichnet.

Beweis

Aus physikalischen Gründen muß es ein Maximum der potentiellen Energie geben, da die Deformationen klein sind. Von Gl. (2.39) kann

$$\delta^T \mathbf{K} \delta \leq 2U_{e,max} < \infty \quad (3.38)$$

abgeleitet werden, womit EIG 3.11 direkt aus EIG 3.10 folgt. \square

EIG 3.11 wurde in diesem Forschungsbericht so beschrieben, um die gleiche Form wie in De Luca und Siciliano (1993) sowie De Luca und Panzieri (1994) zu haben, aber im Grunde ist $U_{e,max}$ als

$$U_{e,max} = \frac{1}{2}(k_{1111}\|\delta_{1111}\|_{\max}^2 + \cdots + k_{nm_n nm_n}\|\delta_{nm_n nm_n}\|_{\max}^2) \quad (3.39)$$

zu berechnen. Es ist leicht zu merken, daß der Beweis für EIG 3.11 falsch ist, wenn Gleichung (3.39) benutzt wird. Wenn man hingegen

$$U_{e,max} \triangleq \frac{1}{2}\lambda_{max}(\mathbf{K})(\|\delta_{1111}\|_{\max}^2 + \cdots + \|\delta_{nm_n nm_n}\|_{\max}^2) \quad (3.40)$$

definiert, dann gilt der in EIG 3.11 gegebene Beweis. Obwohl sich $U_{e,max}$ in Form der Gl. (3.40) nur in besonderen Fällen beschreiben läßt, gibt es keinen Verlust der Allgemeingültigkeit, da die Tatsache bleibt, daß $\|\delta\|$ begrenzt ist.

Es ist anzumerken, daß alle die Normen der Matrizen des Modells (2.46) begrenzt sind. Im Folgenden werden diese Begrenzungen für die Matrix \mathbf{F} und den Gravitationsvektor angegeben.

Eigenschaft 3.12

Für die Matrix der viskosen Gelenkreibung und der Strukturdämpfung der Glieder \mathbf{F} gilt

$$\lambda_{min}(\mathbf{F})\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \leq \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{F} \dot{\mathbf{q}} \leq \lambda_{max}(\mathbf{F})\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \quad (3.41)$$

Beweis

Dies ergibt sich aus der Definition von \mathcal{F} (Gl. 2.43). \square

Eigenschaft 3.13

Es gibt eine Begrenzung für den Vektor $\mathbf{e}(\mathbf{q})$, d. h.

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{q})\| \leq \sigma_g \quad (3.42)$$

Beweis

Da

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{q})\| = \sqrt{\sum_{r=1}^n \sum_{s=0}^{m_r} e_{rs}^2} \quad (3.43)$$

ist, reicht es aus, zu beweisen, daß die Norm jedes Elementes e_{rs} begrenzt ist. Das ist sicher der Fall, wie man direkt aus der Definition (2.50) ersehen kann (e_{rs} ist nur Funktion verallgemeinerter Koordinaten). \square

Wenn der Gravitationsvektor als

$$\mathbf{e}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_s(\mathbf{q}) \\ \mathbf{e}_e(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

geschrieben wird, wobei $\mathbf{e}_s(\mathbf{q})$ für $s = 0$ in Gl. (2.50) berechnet werden kann und $\mathbf{e}_e(\mathbf{q})$ anderenfalls, ergeben sich noch weitere Normbegrenzungen.

Eigenschaft 3.14

Es gilt

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \leq \alpha \quad , \quad (3.45)$$

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{e}_s(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \leq \alpha_s \quad , \quad (3.46)$$

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{e}_e(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \leq \alpha_e \quad . \quad (3.47)$$

Beweis

Eine Untersuchung der Gl. (2.50) zeigt, daß im Gravitationsvektor nur trigonometrische Funktionen der verallgemeinerten starren Koordinaten und die verallgemeinerten elastischen Koordinaten auftreten. Dies bedeutet im Grunde, daß das gleiche für die partiellen Ableitungen nach \mathbf{q} gelten muß. Daraus folgt EIG 3.14. \square

Eine direkte Konsequenz von EIG 3.14 ist:

Eigenschaft 3.15

Es gilt

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{q}_1) - \mathbf{e}(\mathbf{q}_2)\| \leq \alpha \|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\| \quad , \quad \forall \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \quad . \quad (3.48)$$

Beweis

Um EIG 3.15 zu beweisen, ist der Mittelwertsatz nützlich, welcher besagt, daß, falls $\mathbf{e}(\mathbf{q})$ kontinuierlich ist und dessen partielle Ableitungen nach \mathbf{q} begrenzt sind, für jeden der zwei Vektoren $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$

$$\mathbf{e}(\mathbf{q}_1) - \mathbf{e}(\mathbf{q}_2) = \left. \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_{12}} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \quad (3.49)$$

gilt, wobei \mathbf{q}_{12} einen Punkt zwischen \mathbf{q}_1 und \mathbf{q}_2 bezeichnet (Feng und Postlethwaite 1993). Da $\mathbf{e}(\mathbf{q})$ kontinuierlich ist (siehe dessen Definition, Gl. (2.50)) und dessen partielle Ableitungen nach \mathbf{q} begrenzt sind, kann man Gl. (3.49) benutzen und deren Norm berechnen:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}(\mathbf{q}_1) - \mathbf{e}(\mathbf{q}_2)\| &= \left\| \left. \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_{12}} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \right\| \\ &\leq \left\| \left. \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_{12}} \right\| \|(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)\| \leq \alpha \|(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)\| \quad . \end{aligned} \quad (3.50)$$

□

Anzumerken ist, daß die Normbegrenzungen für jeden Vektor gültig sind, und nicht nur für \mathbf{q} oder δ . Die Eigenschaften wurden so angegeben, um die Auffassung der Beweisen zu erleichtern, da die Grenzen aus physikalischen Gründen entstehen.

3.3 Eigenschaften des gesamten Modells

In diesem Abschnitt werden zwei Eigenschaften des elastischen Roboters als Ganzes beschrieben. Um EIG 3.16 besser verstehen zu können, sollte der Leser die Grundlagen des Verfahrens nach Denavit und Hartenberg (Spong und Vidyasagar 1989, Fu u. a. 1989) kennen.

Eigenschaft 3.16

Mit einer geeigneten Definition der Systemparameter kann das Modell (2.46) in der Form

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \mathbf{q} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{e}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\varphi \quad (3.51)$$

geschrieben werden.

Beweis

EIG 3.16 formell zu beweisen, ist zu schwierig und für diesen Bericht nicht wesentlich². Stattdessen wird die Gültigkeit der Eigenschaft gezeigt.

²Die Demonstration für starren Roboter ist in An u. a. (1985) und Khosla und Kanade (1985) nachzulesen.

Die Kinematik eines starren Roboters ist durch Anwendung des Verfahrens nach Denavit und Hartenberg beschreibbar. Diese Methode benutzt das Produkt von Transformationsmatrizen, die in einer so besonderen Weise bestimmt werden, daß vier und nur vier Parameter erscheinen; von denen jeweils einer eine verallgemeinerte starre Koordinate darstellt. Jede dieser Matrizen hat die Form (Spong und Vidyasagar 1989)

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos(q_i) & -\sin(q_i) & 0 & 0 \\ \sin(q_i) & \cos(q_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Die Bedeutung der in Gl. (3.52) auftretenden Parameter ist in der Literatur zu finden. Wichtig ist, daß die verallgemeinerten starren Koordinaten (q_i) schon zu erkennen sind, und zwar als Argument trigonometrischer Funktionen. In einem elastischen Roboter läßt sich Gl. (3.52) nicht mehr benutzen. Hierbei sollte die dritte Matrix durch (Book 1979, 1984)

$$\mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{m_i} q_{ij}(t) \begin{bmatrix} 0 & -\theta_{zij} & \theta_{yij} & \phi_{xij} \\ \theta_{zij} & 0 & -\theta_{xij} & \phi_{yij} \\ -\theta_{yij} & \theta_{xij} & 0 & \phi_{zij} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

ersetzt und eine neue Definition von \mathbf{A}_i gegeben werden. So wird angenommen, daß

$$\mathbf{A}_i \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q_{i0}) & -\sin(q_{i0}) & 0 & 0 \\ \sin(q_{i0}) & \cos(q_{i0}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

gilt. Die Bedeutung des Parameters α_i in der neuen Definition entspricht demjenigen von α_{i-1} in der alten (mit α_0 und der damaligen α_n gleich Null). Die partielle Ableitung nach q_{i0} von \mathbf{A}_i ist

$$\mathbf{U}_i \triangleq \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial q_{i0}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin(q_{i0}) & -\cos(q_{i0}) & 0 & 0 \\ \cos(q_{i0}) & -\sin(q_{i0}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Anzumerken bleibt, daß die verallgemeinerten starren Koordinaten immer noch als trigonometrische Funktionen auftreten. Infolge dieses Umstandes, ist es leicht zu verstehen, daß sich jedes Element der Trägheitsmatrix als

$$m_{hk\alpha\beta} = f_1(\mathbf{q})\bar{p}_1 + f_2(\mathbf{q})\bar{p}_2 + \dots \quad (3.56)$$

schreiben läßt, wobei die Funktionen $f_i(\mathbf{q})$ bekannt sind und die Elemente \bar{p}_i Produkte der Parameter des Roboters bezeichnen (siehe die Definition von $\mathbf{M}(\mathbf{q})$, Gln. (2.10), (2.11), (2.19) und (2.22)). Im Grunde kann das Gleiche über die Vektoren $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ und $\mathbf{e}(\mathbf{q})$ gesagt werden (\mathbf{K} und \mathbf{F} brauchen keine Erklärung). Wenn man die Parameter \bar{p}_i als die Roboterparameter definiert, läßt sich das Modell (2.46) mittels Matrizenmanipulationen in der Form (3.51) schreiben. \square

Was EIG 3.16 besagt ist, daß die stark nichtlineare Dynamik des elastischen Roboters *linear* in den Parameter ist. Die Form (3.51) eignet sich besonderes gut für die adaptive Regelung. Ein Beispiel dieses Regelungskonzeptes für starre Roboter kann man in dem Artikel von Slotine und Li (1987) lesen. Ortega und Spong (1989) geben für diese Eigenschaft eine gute Zusammenfassung, Erklärung und Anwendungsbeispiel, immer noch für starre Roboter. Lammerts u. a. (1995) benutzen sie schon in elastischen Robotern. Ihr Verfahren basiert (wie fast alle) auf dem nach Slotine und Li (1987). Die Mehrheit der bis heute entwickelten Algorithmen zur Bestimmung der Parameter sind nicht in der Lage, diese richtig zu schätzen. Dies stellt eigentlich kein großes Problem dar, da sich der Roboter, mit Hilfe der adaptiven Regelung, gut regeln läßt. Das heißt, die Regelungsalgorithmen brauchen nicht mehr die exakte Kenntnis des Modells des Roboters, was eine unrealistische Annahme ist. Dies bedeutet nicht unbedingt, daß es nicht möglich ist, die wirklichen Parameter zu bestimmen. Einen Algorithmus dafür geben Tang und Arteaga Pérez (1994) an.

Über EIG 3.16 ist es wichtig anzumerken, daß

- der Regressor $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ (Gl. (3.51)) und der Parametervektor φ nicht eindeutig sind,
- Matrixparameter im Regressor auftreten sollen, wenn sie gut genug bekannt sind (das ist zum Beispiel der Fall der Länge eines Gliedes ohne Deformation), und
- der Parametervektor so klein wie möglich sein soll.

Die letzte in diesem Forschungsbericht beschriebene Eigenschaft behandelt die Energie-dissipation des Roboters. Wenn die Energie zwischen zwei Punkten eines Systems immer verschwindet, dann wird gesagt, daß deren Abbildung passiv ist. Beispielweise kann man an elektrische Systeme denken. Ein elektrischer Widerstand dissipiert Energie, und eine elektrische Energiequelle gibt Energie. So ist die erste Abbildung passiv, während die zweite aktiv genannt wird. Der elastische Roboter besitzt eine passive Abbildung, wie EIG 3.17 zeigt.

Eigenschaft 3.17

Die Abbildung $\dot{\mathbf{q}} \rightarrow \psi$ ist passiv, d. h. es gilt

$$\langle \dot{\mathbf{q}}, \psi \rangle_T \triangleq \int_0^T \dot{\mathbf{q}}^T \psi dt \geq -\beta \quad , \quad (3.57)$$

für eine $\beta > 0$ und $\forall T > 0$.

Beweis

Aus Gln. (3.13) und (3.57) ergibt sich

$$\langle \dot{\mathbf{q}}, \psi \rangle_T = \int_0^T dH \geq H(T) - H(0) \geq -H(0) \quad . \quad (3.58)$$

Mit $\beta \triangleq H(0)$ folgt EIG 3.17.

□

Weitere Erklärungen über die Passivitätstheorie sind in Desoer und Vidyasagar (1975) zu sehen. Interessant ist anzumerken, daß sich die passive Abbildung des starren Roboters ergibt, wenn die Matrix der viskosen Gelenkreibung und der Strukturdämpfung der Glieder (\mathbf{F}) Null ist. Das heißt, die Abbildung zwischen τ und \mathbf{q}_s ist passiv.

Diese Eigenschaft ist mit Erfolg bei starren Robotern benutzt worden (Brogliato u. a. 1991, Tang und Arteaga Pérez 1994). Der große Vorteil der Passivitätstheorie besteht darin, daß sich die Stabilität eines Systems nur auf den Passivitätseigenschaften der Teilsysteme basierend untersuchen läßt. (Für den Roboter ist der Regler das andere Teilsystem, das auch passiv sein soll.) Das heißt, es ist prinzipiell nicht wichtig, ob der Regler diskret, zeitkontinuierlich, linear, nichtlinear oder Fuzzy ist. Es gibt noch keine Arbeit für elastischen Roboter, aber sie ist eine interessante Eigenschaft zu nennen.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Im vorliegenden Bericht³ wird ein Verfahren zur Modellbildung elastischer Roboter vorgestellt, das einen Satz nichtlinearer Gleichungen als Modell ermittelt. Dieses weist eine gewisse Ähnlichkeit mit dem des starren Roboters auf, nicht nur in der Form sondern auch in den Eigenschaften. Die Bedeutung dieser Eigenschaften besteht darin, daß sie die Auslegung verschiedener Regelungskonzepte vereinfachen. Dies stellt eine Überlegenheit gegenüber anderen Optionen wie zum Beispiel der Linearisierung dar, die die Vorteile der linearen Theorie ausnutzt aber nur in der Nähe des Arbeitspunktes gilt.

Obwohl sich das Modell theoretisch genau berechnen läßt, ist es nicht realistisch anzunehmen, daß es in jeden Fällen den Roboterarm fehlerfrei beschreiben kann. Deswegen ist es wichtig anzumerken, daß dessen Eigenschaften auf der Struktur und nicht auf der Kenntnis der Parameter basieren, da sie in Mehrheit einen physikalischen Ursprung besitzen und nicht aus dem Modellbildungsverfahren entstehen. Viele geben eine Normbegrenzung der Matrizen des Systems an, durch die ein Regler ausgelegt werden kann. Nicht zu vergessen ist, daß das Modell und dessen Eigenschaften nicht nur die robuste sondern auch die adaptive Regelung erlauben.

Auf diesem Modell basierend soll zukünftig ein Beobachter entworfen werden. Dafür ist nur die Kenntnis der verallgemeinerten starren Koordinaten und der Dehnung an den Gliedern vorauszusetzen. Als Ergebnis müssen die verallgemeinerten elastischen Koordinaten und die Ableitung nach der Zeit der verallgemeinerten Koordinaten ermittelt werden.

³Die Arbeiten, die zu diesen Ergebnissen geführt haben, wurden durch ein DAAD-Stipendium unterstützt.

Literaturverzeichnis

- An, C. H., C. G. Atkeson** und **J. M. Hollerbach**. 1985. Estimation of Inertial Parameters of Rigid Body Links of Manipulators. *Proceedings of 24th Conference on Decision and Control, IEEE*. Florida. usa. 990–995.
- Arteaga Pérez, M. A.** 1995. *Zur Positionsbestimmung bei elastischen Robotern*. Forschungsbericht Nr. 9/95. MSRT. Universität Duisburg.
- Book, W. J.** 1979. Analysis of Massless Elastic Chains With Servo Controlled Joints. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Transactions of the ASME* 101. 187–192.
- Book, W. J.** 1984. Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms. *The International Journal of Robotics Research* 3(3). 87–101.
- Brogliato, B., I. D. Landau** und **R. Lozano Real**. 1991. Adaptive Motion Control of Robot Manipulators: A Unified Approach Based on Passivity. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 1. 187–202.
- Canudas de Wit, C., N. Fixot** und **K. J. Åström**. 1992. Trajectory Tracking in Robot Manipulators via Nonlinear Estimated State Feedback. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 8(1). 138–144.
- De Luca, A.** und **S. Panzieri**. 1994. An Iterative Scheme for Learning Gravity Compensation in Flexible Robot Arms. *Automatica* 30(6). 993–1002.
- De Luca, A.** und **B. Siciliano**. 1991. Closed-Form Dynamic Model of Planar Multilink Lightweith Robots. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 21(4). 826–839.
- De Luca, A.** und **B. Siciliano**. 1993. Regulation of Flexible Arms Under Gravity. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 9(4). 463–467.
- Desoer, C. A.** und **M. Vidyasagar**. 1975. *Feedback Systems: Input-Output Properties*. New York: Academic Press.
- Feng, W.** und **I. Postlethwaite**. 1993. A Simple Robust Control Scheme for Robot Manipulators With Only Joint Position Measurements. *The International Journal of Robotics Research* 12(5). 490–496.
- Fu, K. S., R. C. Gonzalez** und **C. S. G. Lee**. 1989. *Robotic: Control, Sensing, Vision and Intelligence [In Spanisch]*. México, D. F.: McGraw-Hill.
- Goldstein, H.** 1991. *Klassische Mechanik*. Wiesbaden: AULA-Verlag.
- Greenwood, D. T.** 1977. *Classical Dynamics*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall.

- Khosla, P. K.** und **T. Kanade.** 1985. Parameter Identification of Robot Dynamics. *Proceedings of 24th Conference on Decision and Control, IEEE.* Florida. usa. 1754–1760.
- Lammerts, I. M. M., F. E. Veldpaus, M. J. G. Van de Molengraft** und **J. J. Kok.** 1995. Adaptive Computed Reference Computed Torque Control of Flexible Robots. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Transactions of the ASME* 117. 31–36.
- Meirovitch, L.** 1967. *Analytical Methods in Vibrations.* New York: The Macmillan Company.
- Meirovitch, L.** 1975. *Elements of Vibration Analysis.* New York: McGraw–Hill.
- Nicosia, S.** und **P. Tomei.** 1990. Robot Control by Using Only Joint Position Measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control* 35(9). 1058–1061.
- Nicosia, S.** und **P. Tomei.** 1995. A Tracking Controller for Flexible Joint Robots Using Only Link Position Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control* 40(5). 885–890.
- Ortega, R.** und **M. W. Spong.** 1989. Adaptive Motion Control of Rigid Robots: a Tutorial. *Automatica* 25(6). 877–888.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme: Systemtheoretische Grundlagen.* München; Wien: Oldenbourg.
- Slotine, J. J. E.** und **W. Li.** 1987. On the Adaptive Control of Robot Manipulators. *The International Journal of Robotics Research* 6(3). 49–59.
- Spong, M. W.** 1987. Modeling and Control of Elastic Joint Robots. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Transactions of the ASME* 109. 310–319.
- Spong, M. W.** und **M. Vidyasagar.** 1989. *Robot Dynamics and Control.* New York: John Wiley & Sons.
- Strang, G.** 1990. *Linear Algebra, Second Edition [In Spanisch].* México, D. F.: Addison–Wesley.
- Tang, Y.** und **M. A. Arteaga Pérez.** 1994. Adaptive Control of Robot Manipulators Based on Passivity. *IEEE Transactions on Automatic Control* 39(9). 1871–1875.
- Wellstead, P. E.** 1979. *Introduction to Physical System Modelling.* London: Academic Press.

- Yuan, B. S., W. J. Book** und **J. D. Huggins**. 1993. Dynamics of Flexible Manipulator Arms: Alternative Derivation, Verification, and Characteristics for Control. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Transactions of the ASME* 115. 394–404.