

Geschlossene axiomatische Beschreibung zur konjunktiven und kompensativen Verknüpfung von Fuzzy–Aussagen

Michael Berger

Forschungsbericht 19/95

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: In diesem Forschungsbericht wird eine neue geschlossene axiomatische Beschreibung für konjunktive und kompensative Verknüpfungen von mehrwertigen Aussagen vorgestellt. Die neue axiomatische Beschreibung stützt sich dabei auf einen erstmalig eingeführten parametrischen Verknüpfungs–Operator. Weiterhin werden die Ergebnisse einer Fuzzy–Regelung einer technischen Anlage beim Einsatz verschiedener t –Normen aufgezeigt, welche zuvor durch die partiellen Differentialgleichungen des logischen Bewertungskriteriums bewertet wurden, sowie die Anwendung des neuen parametrischen Verknüpfungs–Operators dokumentiert.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	II
1 Einleitende Übersicht	1
2 Bewertung von Verknüpfungs-Operatoren	3
3 Verifikation an einer technischen Anlage	9
4 Neuer parametrischer Verknüpfungs-Operator	17
4.1 Bedeutungspostulate	21
4.2 Anwendung des parametrischen Verknüpfungs-Operators	27
5 Zusammenfassung und Ausblick	31
6 Literaturverzeichnis	33

Nomenklatur

α_Z	Erfülltheitsgrad der Prämisse
$\mathcal{F}(\mathcal{A}), \mathcal{F}(\mathcal{B}),$ $\mathcal{F}(\mathcal{C}), \mathcal{F}(\mathcal{D})$	partielle Fuzzy–Unterräume
e	Regelabweichung
Δe	Änderung der Regelabweichung
$\mathcal{F}, \mathcal{F}^i$	Fuzzy–Unterraum, i -ter Fuzzy–Unterraum
k	diskretes Zeitargument
k_e	Skalierungsfaktor der Regelabweichung des Fuzzy–PD–Reglers
k_{eI}	Skalierungsfaktor der Regelabweichung des Fuzzy–PI–Reglers
$k_{\Delta e}$	Skalierungsfaktor der Änderung der Regelabweichung des Fuzzy–PD–Reglers
$k_{\Delta eI}$	Skalierungsfaktor der Änderung der Regelabweichung des Fuzzy–PI–Reglers
k_u	Skalierungsfaktor der Stellgröße des Fuzzy–PD–Reglers
$k_{\Delta u}$	Skalierungsfaktor der Änderung der Stellgröße des Fuzzy–PI–Reglers
m_A	Modalwert der Fuzzy–Referenzmenge A
m_k	Modalwert der k -ten Fuzzy–Referenzmenge des Ausgangs
m_E	Anzahl der Fuzzy–Referenzmengen X_i
$m_{\Delta E}$	Anzahl der Fuzzy–Referenzmengen Y_j
m_U	Anzahl der Fuzzy–Referenzmengen U_k
$m_{\Delta U}$	Anzahl der Fuzzy–Referenzmengen ΔU_l
γ	Parameter des parametrischen Verknüpfungs–Operators \mathcal{R}_γ
R_Z	Z -te Regel
T	Abtastzeit
u	Stellgröße
v_K	Kolbengeschwindigkeit
w	Führungsgröße
y_K	Kolbenposition
z	Störgröße
Z	Anzahl der Regeln
$\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L}$	Fuzzy–Aussagen
$\mathcal{P}, \mathcal{P}_i$	Bedeutungspostulat, i -tes Bedeutungspostulat
$\mathcal{K}\mathcal{K}$	semantische Repräsentation
$\mathcal{Q}\mathcal{W}$	Quasiwahrheitswert
\mathcal{W}	Wahrheitswert
\mathcal{X}	Objekt (allgemein)

Mengen:

A, B, C, D	Fuzzy-Mengen
\mathbb{D}	Definitionsbereich
\mathbb{D}_N	Definitionsbereich normierter Größen $\mathbb{D}_N = [-1; 1]$
\mathbb{D}_N^+	Definitionsbereich normierter positiver Größen $\mathbb{D}_N^+ = [0; 1]$
DIS	Menge des disjunktiven Bereiches
\mathbb{F}	Menge der Fuzzy-Aussagen
KON	Menge des konjunktiven Bereiches
KOM	Menge des kompensativen Bereiches
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{P}_j	j -ter Definitionsbereich der j -ten Projektion
U_k	k -te Fuzzy-Referenzmenge der Ausgangsgröße „Stellgröße u “, $k = \{1, 2, \dots, m_U\}$
U	Menge der Fuzzy-Referenzmengen der Ausgangsgröße „Stellgröße u “
ΔU_l	l -te Fuzzy-Referenzmenge der Ausgangsgröße „Änderung der Stellgröße Δu “, $l = \{1, 2, \dots, m_{\Delta U}\}$
ΔU	Menge der Fuzzy-Referenzmengen der Ausgangsgröße „Änderung der Stellgröße Δu “
\mathbb{W}	Definitionsbereich der Ausgangsgrößen
X_i	i -te Fuzzy-Referenzmenge der Eingangsgröße „Regelabweichung e “, $i = \{1, 2, \dots, m_E\}$
\mathbb{X}	Menge der Fuzzy-Referenzmengen der Eingangsgröße „Regelabweichung e “
Y_j	j -te Fuzzy-Referenzmenge der Eingangsgröße „Änderung der Regelabweichung Δe “, $j = \{1, 2, \dots, m_{\Delta E}\}$
\mathbb{Y}	Menge der Fuzzy-Referenzmengen der Eingangsgröße „Änderung der Regelabweichung Δe “

Unscharfe Größen:

E	fuzzifizierte Größe e
ΔE	fuzzifizierte Größe Δe
U	fuzzifizierte Größe u
X	fuzzifizierte Größe x
Y	fuzzifizierte Größe y
ΔU	fuzzifizierte Größe Δu

Vektoren und Matrizen:

A	Systemmatrix
-----	--------------

\mathbf{b}	Eingangsvektor
\mathbf{c}	Ausgangsvektor
\mathbf{N}	Systemmatrix des bilinearen Anteils
\mathbf{R}^{\otimes}	Fuzzy-Relationalmatrix (unscharfe kartesische Relation)
$\mathbf{R}_{\mathcal{R}_\gamma(x,y)}$	Fuzzy-Relationalmatrix (unscharfe Relation) über den parametrischen Verknüpfungs-Operator $\mathcal{R}_\gamma(x,y)$
$\mathbf{R}_{\mathcal{R}_\gamma(x,y)}^{\otimes}$	Fuzzy-Relationalmatrix (unscharfe kartesische Relation) über den parametrischen Verknüpfungs-Operator $\mathcal{R}_\gamma(x,y)$

Operatoren:

D	Differenzierer
D	Durchschnitts-Operator
D_{am}	arithmetisches Mittel
D_{gm}	geometrisches Mittel
D_{hm}	harmonisches Mittel
H_γ^\top	HAMACHER-Operator (parametrische t -Norm)
H_γ^\perp	HAMACHER-Operator (parametrische t -Konorm)
Y_γ^\top	YAGER-Operator (parametrische t -Norm)
Y_γ^\perp	YAGER-Operator (parametrische t -Konorm)
W_γ^\perp	WEBER-Operator (parametrische t -Norm)
DP_γ^\top	DUBOIS-PRADE-Operator (parametrische t -Norm)
DP_γ^\perp	DUBOIS-PRADE-Operator (parametrische t -Konorm)
F_γ^\top	FRANK-Operator (parametrische t -Norm)
F_γ^\perp	FRANK-Operator (parametrische t -Konorm)
S_γ^\top	SCHWEIZER-SKALAR-Operator (parametrische t -Norm)
S_γ^\perp	SCHWEIZER-SKALAR-Operator (parametrische t -Konorm)
D_γ^\top	DOMBI-Operator (parametrische t -Norm)
D_γ^\perp	DOMBI-Operator (parametrische t -Konorm)
$\inf(\cdot)$	Infimum
$\sup(\cdot)$	Supremum
$pr_j(R)$	j -te Projektion $\mathbb{D}_1 \times \mathbb{D}_2 \times \cdots \times \mathbb{D}_{n-1} \times \mathbb{D}_n \rightarrow \mathbb{P}_j$ der unscharfen Relation $R \in \mathbb{D}_1 \times \mathbb{D}_2 \times \cdots \times \mathbb{D}_{n-1} \times \mathbb{D}_n$ ($j = 1, 2, \dots, n$)
$pr_X(R),$ $pr_Y(R)$	Projektionen der binären Relation $R \in \mathbb{D}_X \times \mathbb{D}_Y$
R	unscharfe Relation
R^{\otimes}	unscharfe kartesische Relation
\mathcal{R}	allgemeiner Verknüpfungs-Operator
\mathcal{R}_γ	allgemeiner parametrischer Verknüpfungs-Operator

$\mathcal{R}_{i=1}^n$	allgemeiner Verknüpfungs-Operator (n -dimensional)
\in	Element von
\notin	kein Element von
\forall	Allquantor
\neg	Negation (Komplement)
\prec	weniger wahr als
\preceq	weniger oder gleich wahr als
\succ	mehr wahr als
\succeq	mehr oder gleich wahr als
\otimes	unscharfes kartesisches Produkt
$(\cdot)^T$	transponierte Größe
$(\cdot)^{-1}$	inverse Größe
\Rightarrow	Fuzzy-Implikation
\Leftrightarrow	Äquijunktion
\top	t -Norm
\top_{ap}	algebraisches Produkt
\top_{dp}	drastisches Produkt
\top_{ep}	Einstein Produkt
\top_{hp}	Hamacher Produkt
\top_{Luk}	Lukasiewicz-Operator
\top_{min}	Minimum-Operator
\top_{min}^p	partieller Minimum-Operator
\top_{γ}	parametrische t -Norm
\perp	t -Konorm
\perp_{dp}	drastische Summe
\perp_{max}	Maximum-Operator
\perp_{γ}	parametrische t -Konorm
$\frac{d}{d(\cdot)}$	totales Differential
$\frac{\partial}{\partial(\cdot)}$	partiell Differential
$\lim(\cdot)$	Grenzwert

Funktionen:

$f(\cdot)$	allgemeine Funktion
μ_A	Zugehörigkeitsgrad zur Menge A

1 Einleitende Übersicht

Ein großer Vorteil der Fuzzy Logik besteht darin, Expertenwissen in Form von linguistischen Regeln (relationalen Regeln) quantifizieren zu können. Dieser Vorteil ist aber nur dann gegeben, wenn das Expertenwissen, welches vom Anwender in das Fuzzy-System (Fuzzy-Regelung und Fuzzy-Modellbildung) gegeben wird, auch wirklich approximiert wird.

Einen signifikanten Einfluß auf die Approximation des in den relationalen Regeln befindlichen Wissens durch das Fuzzy-System haben die Verknüpfungs-Operatoren zur Prämissenauswertung (t -Normen \top , Durchschnitts-Operatoren D). Zur Bewertung dieser Approximation des Fuzzy-Systems in Abhängigkeit des Verknüpfungs-Operators haben Berger und Schwarz (1995) erstmalig zwei partielle Differentialgleichungen (Bewertungsgleichungen) hergeleitet, welche die Approximation überprüfen.

Im ersten Teil (Abschnitt 2) dieses Forschungsberichtes wird ein Ablaufplan zur Auswertung von Verknüpfungs-Operatoren über das logische Bewertungskriterium mit zwei partiellen Differentialgleichungen erstellt. Der Ablaufplan unterscheidet zwischen kommutativen und nicht kommutativen Verknüpfungs-Operatoren. Ist ein Verknüpfungs-Operator kommutativ so, genügt die Betrachtung eines der beiden Fälle zur Beurteilung des Verknüpfungs-Operators bezüglich des logischen Bewertungskriteriums. Die partiellen Differentialgleichungen werden diesbezüglich für allgemeine Verknüpfungs-Operatoren \mathcal{R} in binärer Darstellung

$$\mathcal{R} \stackrel{2}{i=1} : \mathbb{D}_N^+ \times \mathbb{D}_N^+ \rightarrow \mathbb{D}_N^+ \quad (1.1)$$

berechnet, und nicht wie in (Berger und Schwarz 1995) auf einen speziellen Fuzzy-Unterraum \mathcal{F} bezogen.

Der Abschnitt 3 zeigt die Ergebnisse einer Fuzzy-Regelung einer technischen Anlage beim Einsatz verschiedener t -Normen \top , welche zuvor durch die partiellen Differentialgleichungen bewertet wurden. Bei der technischen Anlage handelt es sich um einen translatorischen hydraulischen Antrieb. Die Überprüfung erfolgt in zwei Schritten. Der erste Schritt beinhaltet die Regelung der technischen Anlage durch einen Fuzzy-PD-Regler in Abhängigkeit verschiedener t -Normen \top . Der Fuzzy-Regler ist durch die Funktion

$$u(kT) = f(e(kT), \Delta e(kT), \top) \quad (1.2)$$

in Abhängigkeit der Regelabweichung $e(kT)$, der Änderung der Regelabweichung $\Delta e(kT)$ und der t -Norm \top beschreibbar. Untersucht werden die t -Normen: Algebraisches Produkt \top_{ap} , Minimum-Operator \top_{min} , Lukasiewicz-Operator \top_{Luk} und Hamacher Produkt \top_{ap} . Im Verlaufe der Regelung wird die technische Anlage mit einer Störgröße $z(kT)$ beaufschlagt, so daß in allen Fällen (Einsatz der verschiedenen t -Normen \top) ein sehr unruhiger

Führungsverlauf resultiert. In einem zweiten Schritt wird nun das Expertenwissen in Form von linguistischen Regeln (hier durch Veränderung der Fuzzy-Referenzmengen \mathbb{U} in zwei Fuzzy-Unterräume \mathcal{F}^1 und \mathcal{F}^2) in die Fuzzy-Regelung eingebracht, mit dem Ziel, einen ruhigen Führungsverlauf zu erzielen. Dieses gelingt nur bei der t -Norm \top , welche auch die Bewertungsgleichungen erfüllt, und unterstreicht somit die Bedeutung der Bewertungsgleichungen als Auswahlkriterium für Verknüpfungs-Operatoren in Fuzzy-Systemen.

Der zweite Teil des Forschungsberichtes (Abschnitt 4) beschäftigt sich mit einer neuen axiomatischen Beschreibung zur konjunktiven und kompensativen Verknüpfung von Fuzzy-Aussagen \mathbb{F} , welche sich auf einen erstmalig eingeführten parametrischen Verknüpfungs-Operator der allgemeinen Form

$$\mathcal{R}_\gamma(x, y) = f(x, y, \gamma) \quad \forall x, y \in \mathbb{D}_N^+ \quad \forall \gamma \in [0, \infty] \quad (1.3)$$

stützt. Der parametrische Verknüpfungs-Operator erfüllt für alle $\gamma \in [0, \infty]$ und alle $x, y \in \mathbb{D}_N^+$ die partiellen Differentialgleichungen des logischen Bewertungskriteriums. Weiterhin wird der parametrische Verknüpfungs-Operator auf Eigenschaften bezüglich der Bedeutungspostulate von Hamacher (1978) überprüft und den Gesichtspunkten der pragmatischen Aspekte (Zimmermann 1987) unterworfen.

Desweiteren beinhaltet dieser Abschnitt die Ergebnisse einer Fuzzy-Regelung (hier Geschwindigkeitsregelung) des translatorischen hydraulischen Antriebs beim Einsatz verschiedener t -Normen \top im Vergleich mit den neuen parametrischen Verknüpfungs-Operatoren \mathcal{R}_γ . Ein Fuzzy-PI-Regler regelt in Abhängigkeit verschiedener Verknüpfungs-Operatoren $\mathcal{R}(e, \Delta e)$ die Anlage. Untersucht werden die t -Normen: Algebraisches Produkt \top_{ap} , Minimum-Operator \top_{min} und der neue parametrische Verknüpfungs-Operator $\mathcal{R}_\gamma = f(e, \Delta e, \gamma)$. Der Forschungsbericht schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick im Abschnitt 5.

2 Bewertung von Verknüpfungs-Operatoren

Verknüpfungs-Operatoren für den konjunktiven und kompensativen Bereich werden durch die von Berger (1995) hergeleiteten partiellen Differentialgleichungen für den ersten Fall

$$\frac{\frac{\partial \alpha_{\tilde{z}}^{RR}}{\partial \Delta e} + \frac{\partial \alpha_{\tilde{z}+1}^{RL}}{\partial \Delta e}}{\alpha_{\tilde{z}}^{RR} + \alpha_{\tilde{z}+1}^{RL}} = \frac{\frac{\partial \alpha_{\tilde{z}+m_{\Delta E}}^{LR}}{\partial \Delta e} + \frac{\partial \alpha_{\tilde{z}+m_{\Delta E}+1}^{LL}}{\partial \Delta e}}{\alpha_{\tilde{z}+m_{\Delta E}}^{LR} + \alpha_{\tilde{z}+m_{\Delta E}+1}^{LL}} \quad (2.1)$$

und den zweiten Fall

$$\frac{\frac{\partial \alpha_{\tilde{z}}^{RR}}{\partial e} + \frac{\partial \alpha_{\tilde{z}+m_{\Delta E}}^{LR}}{\partial e}}{\alpha_{\tilde{z}}^{RR} + \alpha_{\tilde{z}+m_{\Delta E}}^{LR}} = \frac{\frac{\partial \alpha_{\tilde{z}+1}^{RL}}{\partial e} + \frac{\partial \alpha_{\tilde{z}+m_{\Delta E}+1}^{LL}}{\partial e}}{\alpha_{\tilde{z}+1}^{RL} + \alpha_{\tilde{z}+m_{\Delta E}+1}^{LL}} \quad (2.2)$$

bezüglich des logischen Bewertungskriteriums, für $z = 1, \dots, m_E m_{\Delta E}$ mit dem Index $\tilde{z} \in \{1, \dots, z - m_{\Delta E} - 1\}$ beurteilt. Betrachtet man die partiellen Differentialgleichungen (Gl. (2.1) und Gl. (2.2)) zur Überprüfung allgemeiner Verknüpfungs-Operatoren \mathcal{R}

in binärer Darstellung $\overset{2}{\mathcal{R}} : \mathbb{D}_N^+ \times \mathbb{D}_N^+ \rightarrow \mathbb{D}_N^+$ und nicht auf einen speziellen partiellen

Eingangsraum $\mathcal{F}(i)$, $i \in \{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$ (Fuzzy-Unterraum \mathcal{F}) bezogen, so können die Bewertungsgleichungen durch die folgenden, einfacher zu lesenden partiellen Differentialgleichungen (keine Indizierung bezüglich eines partiellen Eingangsraumes)

$$\frac{\frac{\partial \mathcal{R}(\neg x, \neg y)}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{R}(\neg x, y)}{\partial y}}{\mathcal{R}(\neg x, \neg y) + \mathcal{R}(\neg x, y)} = \frac{\frac{\partial \mathcal{R}(x, \neg y)}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{R}(x, y)}{\partial y}}{\mathcal{R}(x, \neg y) + \mathcal{R}(x, y)} \quad (1. \text{ Fall}) \quad (2.3)$$

und

$$\frac{\frac{\partial \mathcal{R}(\neg x, \neg y)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{R}(x, \neg y)}{\partial x}}{\mathcal{R}(\neg x, \neg y) + \mathcal{R}(x, \neg y)} = \frac{\frac{\partial \mathcal{R}(\neg x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{R}(x, y)}{\partial x}}{\mathcal{R}(\neg x, y) + \mathcal{R}(x, y)} \quad (2. \text{ Fall}) \quad (2.4)$$

beschrieben werden. Bei den Untersuchungen verschiedenster Verknüpfungs-Operatoren \mathcal{R} zeigte sich, daß es bei einem kommutativen (symmetrischen) Verknüpfungs-Operator \mathcal{R}

$$\mathcal{R}(x, y) = \mathcal{R}(y, x) \quad (2.5)$$

ausreicht, den 1. oder den 2. Fall des Bewertungskriteriums zu berechnen, um eine Aussage zu bekommen. Dies ist durch die Tatsache begründet, daß bei einem kommutativen Verknüpfungs-Operator \mathcal{R} die Negation (Komplement) \neg der Variablen x oder y gleichermaßen auf den Verknüpfungs-Operator wirkt, bezüglich der Variablen x oder y (Bild 2.1 und 2.2). Dieses wird bei der Auswertung der Differentialgleichungen für die beiden Fälle daran deutlich, daß nach der Berechnung der partiellen Ableitung des Verknüpfungs-Operators \mathcal{R} die einzelnen Terme äquivalent zueinander sind, wenn in einem der beiden Fälle eine Substitution der Variablen stattfindet.

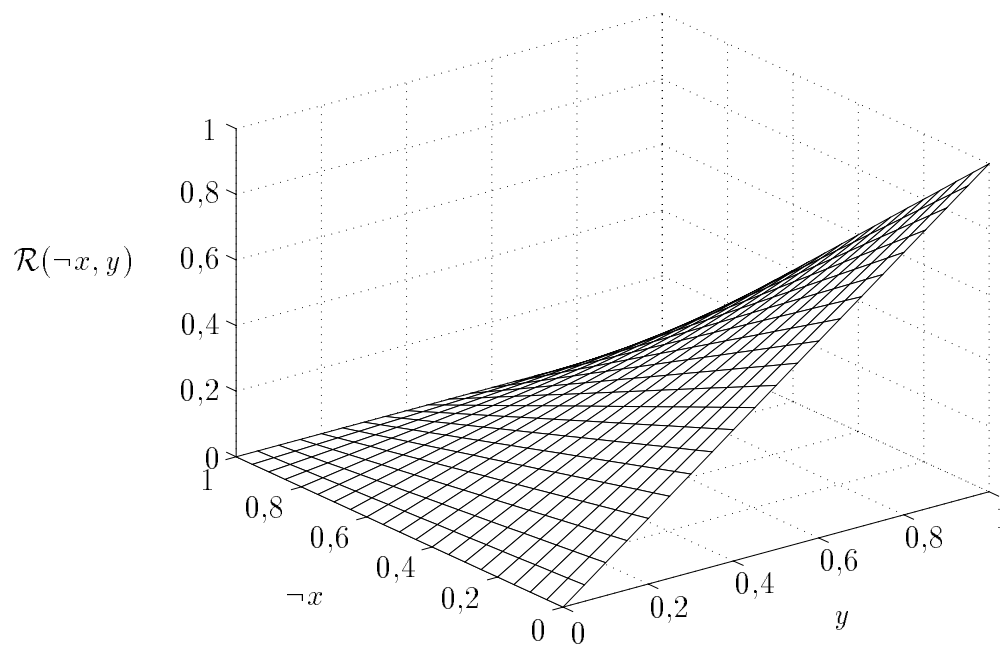


Bild 2.1: Verknüpfungs-Operator $\mathcal{R}(\neg x, y) = \neg x y$

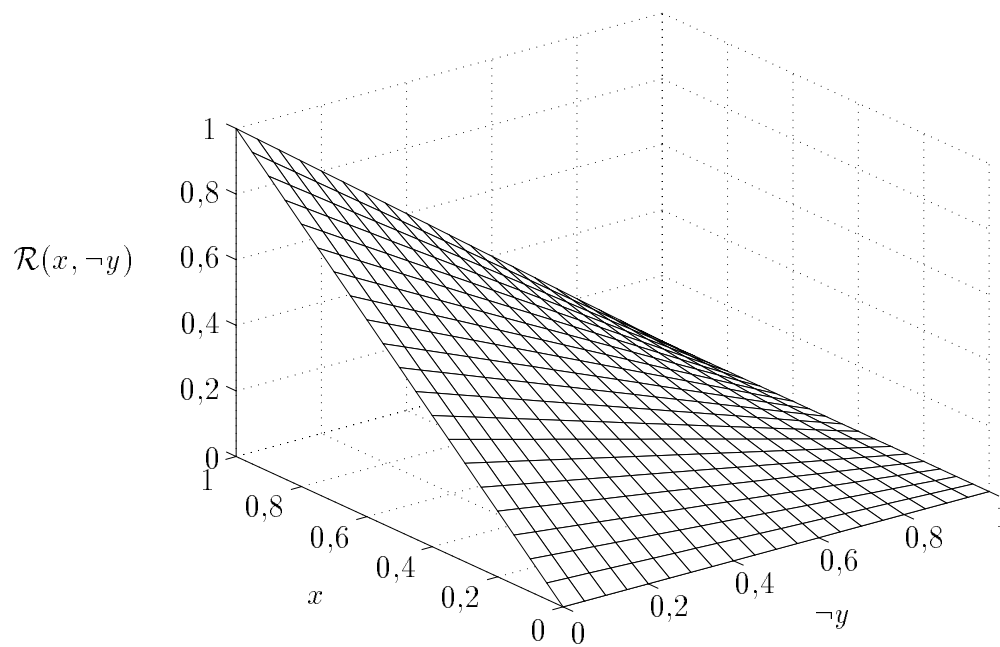


Bild 2.2: Verknüpfungs-Operator $\mathcal{R}(x, \neg y) = x \neg y$

Im folgenden wird dieses an den Beispielen eines kommutativen Verknüpfungs-Operators

$$\mathcal{R}(x, y) = \sqrt{x y} \quad (2.6)$$

(Durchschnitts-Operator: geometrisches Mittel) und eines nicht kommutativen Verknüpfungs-Operators

$$\mathcal{R}(x, y) = 2x + y \quad (2.7)$$

verdeutlicht.

Beispiel:

Kommutativer Verknüpfungs-Operator $\mathcal{R}(x, y) = \sqrt{x y}$

1. Fall:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}(\neg x, \neg y)}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{R}(\neg x, y)}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-y}} \right] \\ \frac{\frac{\partial \mathcal{R}(\neg x, \neg y)}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{R}(\neg x, y)}{\partial y}}{\mathcal{R}(\neg x, \neg y) + \mathcal{R}(\neg x, y)} &= \frac{\frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-y}} \right]}{\sqrt{1-x}\sqrt{y} + \sqrt{1-x}\sqrt{1-y}} \\ &= \frac{\frac{1}{1\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{1-y}}}{2\sqrt{y} + \sqrt{1-y}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}(x, \neg y)}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{R}(x, y)}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-y}} \right] \\ \frac{\frac{\partial \mathcal{R}(x, \neg y)}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{R}(x, y)}{\partial y}}{\mathcal{R}(x, \neg y) + \mathcal{R}(x, y)} &= \frac{\frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-y}} \right]}{\sqrt{x}\sqrt{1-y} + \sqrt{x}\sqrt{y}} \\ &= \frac{\frac{1}{1\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{1-y}}}{2\sqrt{y} + \sqrt{1-y}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

2. Fall:

$$\frac{\partial \mathcal{R}(\neg x, \neg y)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{R}(x, \neg y)}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{1-x}} \right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\partial \mathcal{R}(\neg x, \neg y)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{R}(x, \neg y)}{\partial x}}{\mathcal{R}(\neg x, \neg y) + \mathcal{R}(x, \neg y)} &= \frac{\frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{1-x}} \right]}{\sqrt{1-y}\sqrt{x} + \sqrt{1-y}\sqrt{1-x}} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}(\neg x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{R}(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-x}} \right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\partial \mathcal{R}(\neg x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{R}(\neg x, y)}{\partial x}}{\mathcal{R}(\neg x, y) + \mathcal{R}(x, y)} &= \frac{\frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-x}} \right]}{\sqrt{y}\sqrt{1-x} + \sqrt{y}\sqrt{x}} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Nicht kommutativer Verknüpfungs-Operator $\mathcal{R}(x, y) = 2x + y$

1. Fall:

$$\frac{\partial \mathcal{R}(\neg x, \neg y)}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{R}(\neg x, y)}{\partial y} = -2$$

$$\frac{\frac{\partial \mathcal{R}(\neg x, \neg y)}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{R}(\neg x, y)}{\partial y}}{\mathcal{R}(\neg x, \neg y) + \mathcal{R}(\neg x, y)} = \frac{-1}{y} \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}(x, \neg y)}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{R}(x, y)}{\partial y} = 2$$

$$\frac{\frac{\partial \mathcal{R}(x, \neg y)}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{R}(x, y)}{\partial y}}{\mathcal{R}(x, \neg y) + \mathcal{R}(x, y)} = \frac{1}{1+y} \tag{2.13}$$

2. Fall:

$$\frac{\partial \mathcal{R}(\neg x, \neg y)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{R}(x, \neg y)}{\partial x} = -3$$

$$\frac{\frac{\partial \mathcal{R}(\neg x, \neg y)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{R}(x, \neg y)}{\partial x}}{\mathcal{R}(\neg x, \neg y) + \mathcal{R}(x, \neg y)} = \frac{-3}{4 - 4x + 2y} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}(\neg x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{R}(x, y)}{\partial x} = 3$$

$$\frac{\frac{\partial \mathcal{R}(\neg x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{R}(x, y)}{\partial x}}{\mathcal{R}(\neg x, y) + \mathcal{R}(x, y)} = \frac{3}{4x + 1} \quad (2.15)$$

□

Wie zu erkennen ist, sind in der Anwendung des kommutativen Verknüpfungs-Operators die Gleichungen (2.8, 2.9) äquivalent zu den Gleichungen (2.10, 2.11), wenn man die Variable x durch die Variable y (oder umgekehrt) substituiert. Im Falle des nicht kommutativen Verknüpfungs-Operators sind die Gleichungen (2.12, 2.13) und (2.14, 2.15) auch nach einer Substitution nicht äquivalent, so daß in diesem Fall beide Bewertungsgleichungen berechnet werden müssen, um eine Aussage über den Verknüpfungs-Operator zu erhalten. Andererseits kann bei der Beurteilung über das logische Bewertungskriterium eines kommutativen Verknüpfungs-Operators auf einen der beiden Fälle verzichtet werden. Man erhält trotzdem eine Aussage über den Verknüpfungs-Operator.

Im Bild 2.3 ist der Ablauf des logischen Bewertungskriteriums für Verknüpfungs-Operatoren in Fuzzy-Systemen dargestellt. Anhand dieses Ablaufplans kann der Anwender bekannte oder neu definierte Verknüpfungs-Operatoren auf ihre Tauglichkeit bezüglich der logischen Bewertung überprüfen. Dem Anwender ist somit neben den Gesichtspunkten der Relationalitätsanforderungen (z. B. Bedeutungspostulate \mathcal{P}) wie der Kommutativität, Assoziativität, Stetigkeit, Monotonie und Idempotenz (Böhme 1993) und den pragmatischen Aspekten wie z. B. sensibles und interaktives Verhalten, empirische Relevanz, Adaptionsfähigkeit und numerische Effizienz (Zimmermann 1987) von Verknüpfungs-Operatoren eine weitere besonders für die Fuzzy-Regelung und Fuzzy-Modellbildung relevante Entscheidungshilfe an die Hand gelegt.

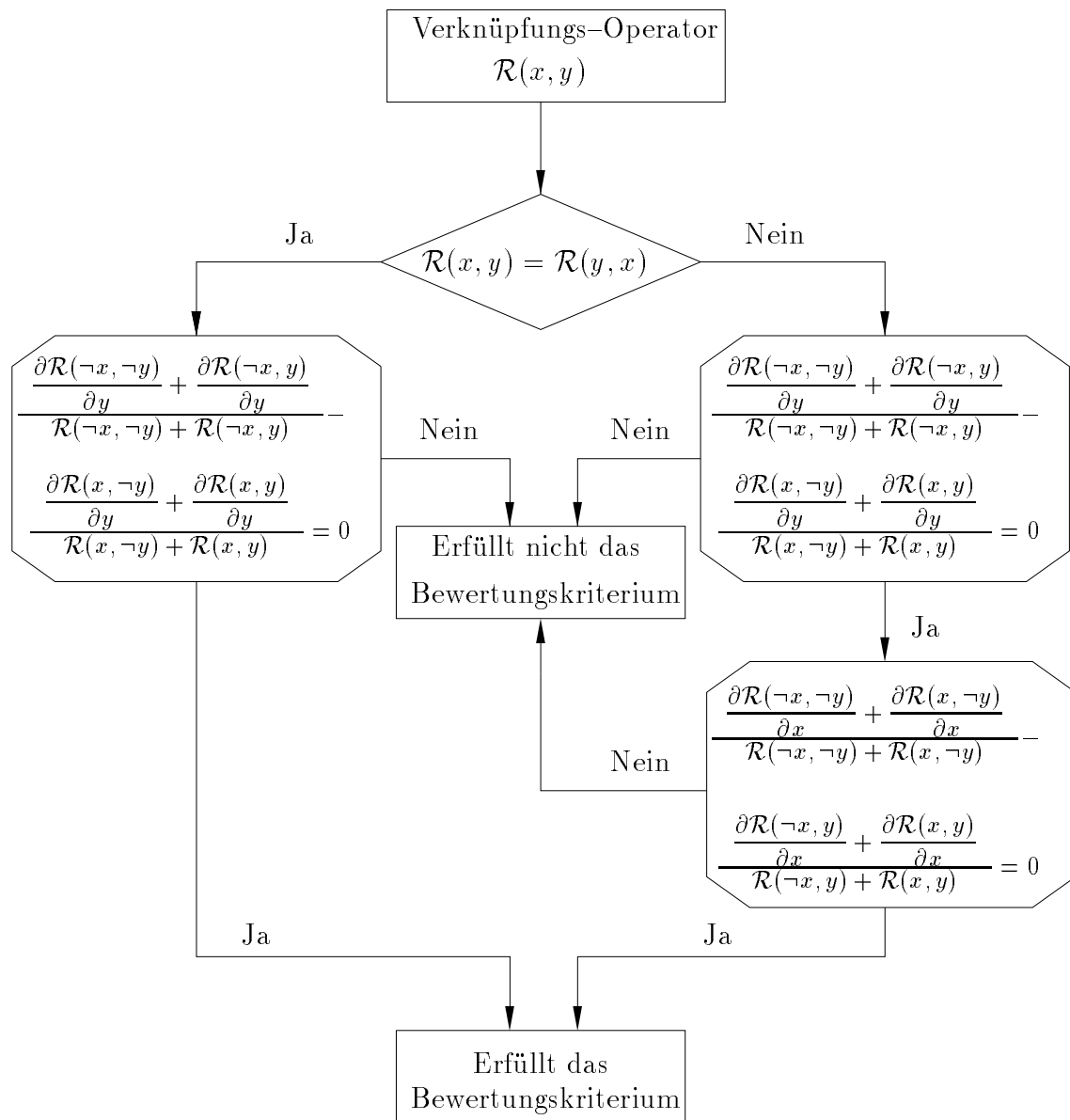


Bild 2.3: Ablauf des logischen Bewertungskriteriums für Verknüpfungs-Operatoren $\mathcal{R}(x, y)$ in Fuzzy-Systemen über partielle Differentialgleichungen (Bewertungsgleichungen)

Im Bild 3.2 ist der Regelkreis mit dem Fuzzy-PD-Regler mit der variablen Einstellung der t -Norm aufgezeigt, sowie in Bild 3.3 die Regelbasis des Fuzzy-PD-Reglers. Um die Anwendung des logischen Bewertungskriteriums zu demonstrieren, wird der translatorische hydraulische Antrieb mit einem Störverhalten beaufschlagt. Störgröße ist eine Sinusschwingung

$$z(kT) = 0,001 \sin(0,1kT) 1(kT - 400) \quad (3.3)$$

(Bild 3.4). Die Störgröße $z(kT)$ wurde so gewählt, daß sie diejenigen Systemzustände anregt, welche im 1. Fall des Bewertungskriteriums behandelt werden (Berger 1995). Durch $z'(kT) = 1(kT - 400)$ wird die Störgröße gerade in den Fuzzy-Unterräumen \mathcal{F}^1 und \mathcal{F}^2 , also in der Nähe des Arbeitspunktes aktiv. In den Bildern 3.5 bis 3.8 ist die Systemantwort $y(kT) = y_K(kT)$, die Stellgröße $u(kT)$, die Regelabweichung $e(kT)$ sowie die Änderung der Regelabweichung $\Delta e(kT)$ für einen Führungssprung von $w(kT) = 0,8$ m in Abhängigkeit verschiedener t -Normen τ dargestellt.

		ΔE				
		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
E	X_1	U_2	U_2	U_1	U_1	U_1
	X_2	U_3	U_2	U_2	U_2	U_2
	X_3	U_4	U_4	U_3	U_2	U_2
	X_4	U_4	U_4	U_4	U_4	U_3
	X_5	U_5	U_5	U_5	U_4	U_4

Bild 3.3: Regelbasis des Fuzzy-PD-Reglers

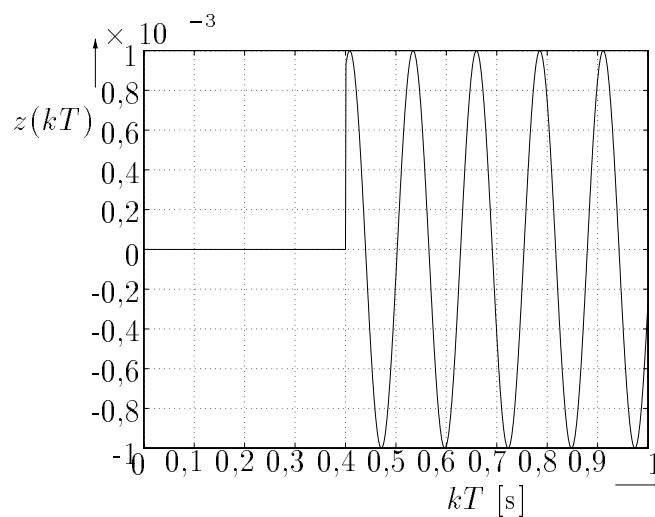


Bild 3.4: Störgröße $z(kT)$

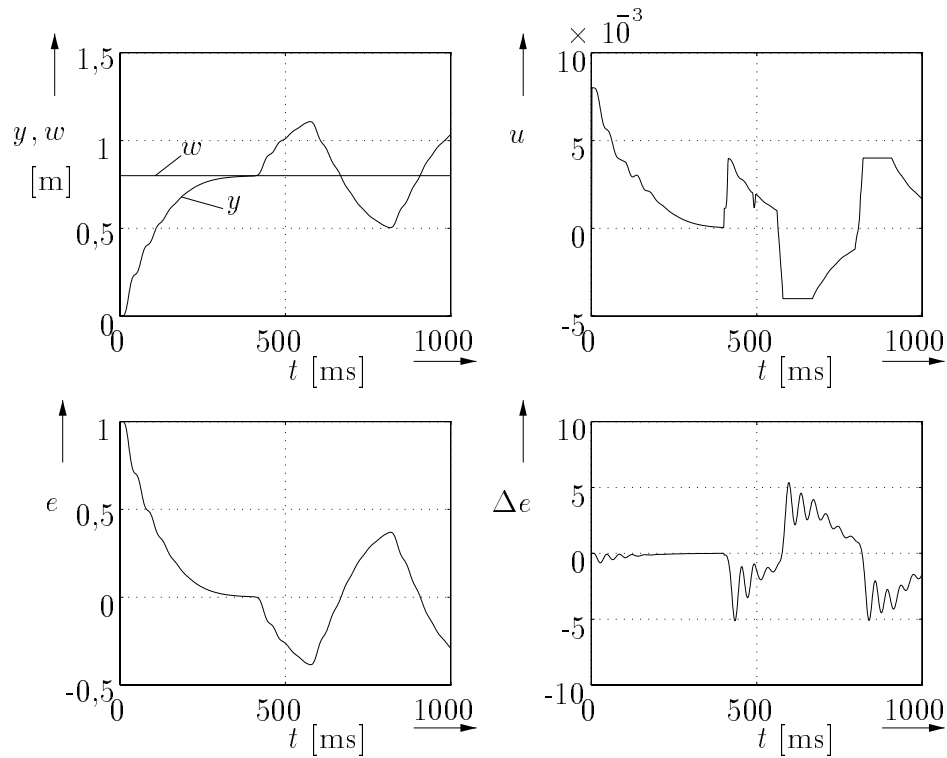


Bild 3.5: Systemverläufe des geregelten translatorischen hydraulischen Antriebs mit der t -Norm τ_{ap} und der Regelbasis nach Bild 3.3 für einen Fuzzy-PD-Regler

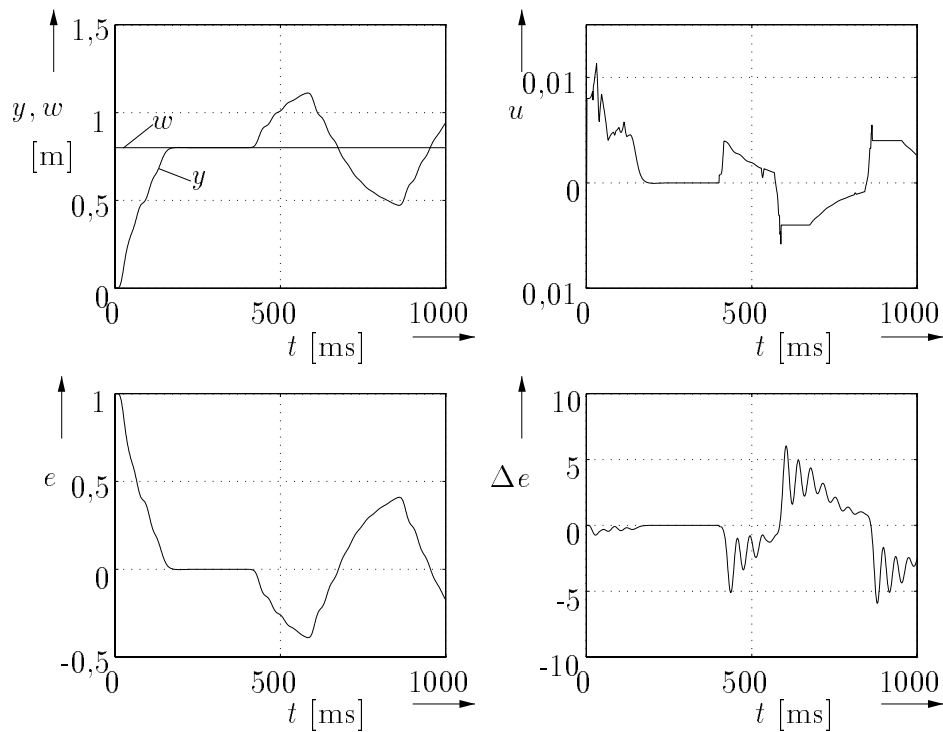


Bild 3.6: Systemverläufe des geregelten translatorischen hydraulischen Antriebs mit der t -Norm τ_{min} und der Regelbasis nach Bild 3.3 für einen Fuzzy-PD-Regler

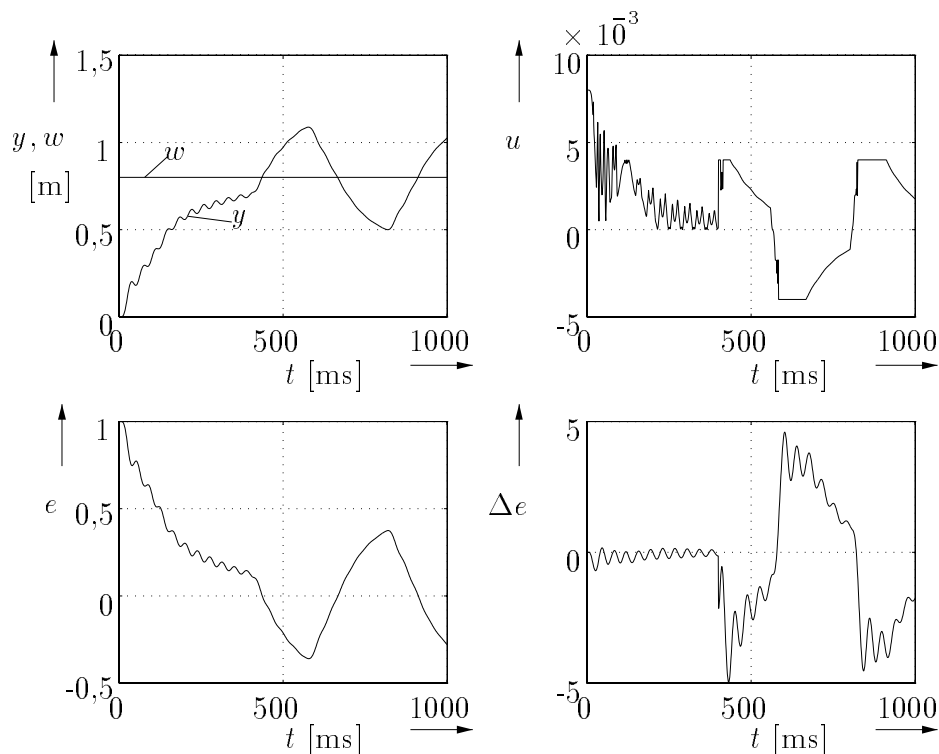


Bild 3.7: Systemverläufe des geregelten translatorischen hydraulischen Antriebs mit der t -Norm \mathbb{T}_{Luk} und der Regelbasis nach Bild 3.3 für einen Fuzzy-PD-Regler

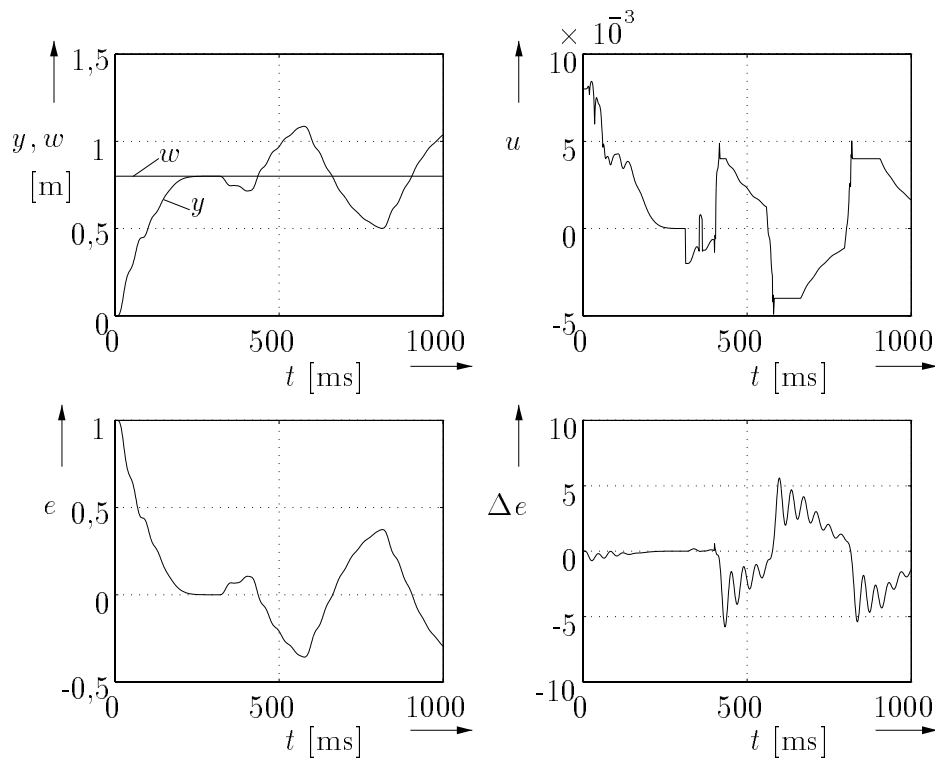


Bild 3.8: Systemverläufe des geregelten translatorischen hydraulischen Antriebs mit der t -Norm \mathbb{T}_{hp} und der Regelbasis nach Bild 3.3 für einen Fuzzy-PD-Regler

Wie in den Bildern 3.5 bis 3.8 zu erkennen ist, reagiert der Fuzzy-PD-Regler (in Abhängigkeit der t -Normen \top) viel zu stark auf die Störung $z(kT)$, so daß es zu einem sehr unruhigen Führungsverlauf kommt. Eine Möglichkeit der Kompensation durch den Anwender besteht darin, die Regeln in den Fuzzy-Unterräumen \mathcal{F}^1 und \mathcal{F}^2 so zu ändern, daß der Fuzzy-PD-Regler in der Nähe des Arbeitspunktes nicht mehr auf die Änderungen der Regelabweichung Δe reagiert. Dies ist, wie in Berger (1994) gezeigt wurde und Grundlage des logischen Bewertungskriteriums (Berger 1995) ist, durch eine Anordnung der Konklusionen im Fuzzy-Unterraum \mathcal{F} bzw. in den partiellen Fuzzy-Unterräumen $\mathcal{F}(\mathcal{A})$, $\mathcal{F}(\mathcal{B})$, $\mathcal{F}(\mathcal{C})$, $\mathcal{F}(\mathcal{D})$, wie im Bild 3.9 dargestellt, zu erzielen.

		ΔE	
		Y_3	Y_4
E	X_3	U_A	U_A
	X_4	U_B	U_B

Bild 3.9: Fuzzy-Unterräume mit spezieller Anordnung der Fuzzy-Referenzmengen der Konklusion U_A und U_B

Diese Anordnung der Konklusionen, welche in dem Bild 3.9 dargestellt sind, kann durch folgende vier relationale Regeln beschrieben werden:

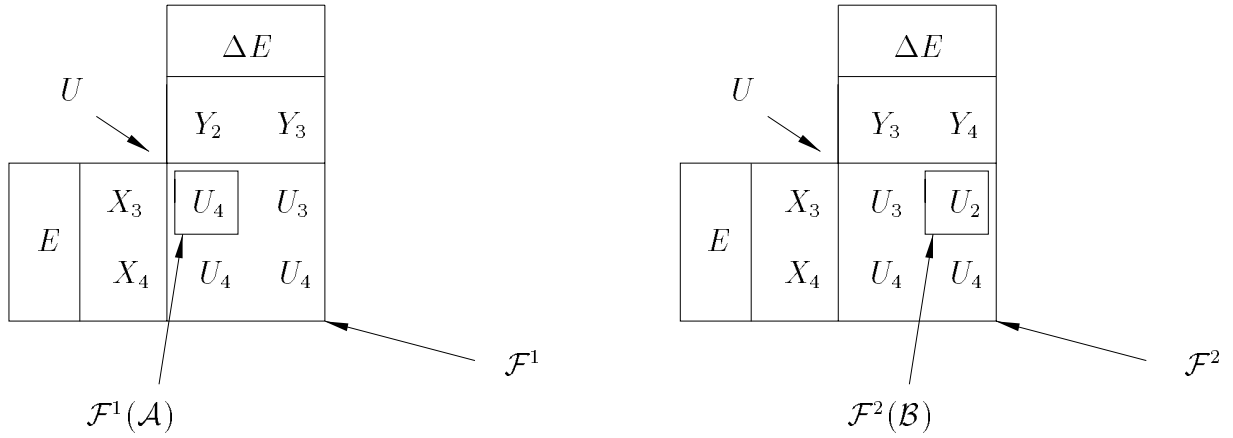
$$\text{WENN } (E \text{ IST } X_3) \text{ UND } (\Delta E \text{ IST } Y_3) \text{ DANN } (U \text{ IST } U_A) , \quad (3.4)$$

$$\text{WENN } (E \text{ IST } X_3) \text{ UND } (\Delta E \text{ IST } Y_4) \text{ DANN } (U \text{ IST } U_A) , \quad (3.5)$$

$$\text{WENN } (E \text{ IST } X_4) \text{ UND } (\Delta E \text{ IST } Y_3) \text{ DANN } (U \text{ IST } U_B) \text{ und} \quad (3.6)$$

$$\text{WENN } (E \text{ IST } X_4) \text{ UND } (\Delta E \text{ IST } Y_4) \text{ DANN } (U \text{ IST } U_B) . \quad (3.7)$$

Bei den relationalen Regeln ist zu erkennen, daß, unabhängig davon, mit welchem Zugehörigkeitswert $\mu_{Y_3}(\Delta e(kT))$ und $\mu_{Y_4}(\Delta e(kT))$ die Änderung der Regelabweichung $\Delta e(kT)$ auf die Fuzzy-Referenzmengen Y_3 und Y_4 abgebildet wird, die Konklusion immer $(U \text{ IST } U_A)$ bzw. $(U \text{ IST } U_B)$ gilt. Dieses ist jedoch nicht von der fuzzifizierten Änderung der Regelabweichung ΔE selbst abhängig, sondern von der fuzzifizierten Regelabweichung E . Das heißt, die relationalen Regeln beschreiben das Regelungsverhalten unabhängig von der Änderung der Regelabweichung $\Delta e(kT)$. Zu ändern sind im Falle der Fuzzy-Regelung des translatorischen hydraulischen Antriebs die Fuzzy-Referenzmenge U_4 im partiellen Fuzzy-Unterraum $\mathcal{F}^1(\mathcal{A})$ und die Fuzzy-Referenzmenge U_2 im partiellen Fuzzy-Unterraum $\mathcal{F}^2(\mathcal{B})$ (Bild 3.10) durch die Fuzzy-Referenzmenge U_3 . Die beiden Fuzzy-Unterräume \mathcal{F}^1 und \mathcal{F}^2 werden dann durch die relationalen Regeln

Bild 3.10: Fuzzy-Unterräume \mathcal{F}^1 (links) und \mathcal{F}^2 (rechts)

$$\mathcal{F}^1 \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\text{WENN } (E \text{ IST } X_3) \text{ UND } (\Delta E \text{ IST } Y_2) \text{ DANN } (U \text{ IST } U_3)}_{\mathcal{F}^1(\mathcal{A})}, \\ \text{WENN } (E \text{ IST } X_3) \text{ UND } (\Delta E \text{ IST } Y_3) \text{ DANN } (U \text{ IST } U_3), \\ \text{WENN } (E \text{ IST } X_4) \text{ UND } (\Delta E \text{ IST } Y_2) \text{ DANN } (U \text{ IST } U_4), \\ \text{WENN } (E \text{ IST } X_4) \text{ UND } (\Delta E \text{ IST } Y_3) \text{ DANN } (U \text{ IST } U_4), \end{array} \right. \quad (3.8)$$

und

$$\mathcal{F}^2 \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\text{WENN } (E \text{ IST } X_3) \text{ UND } (\Delta E \text{ IST } Y_3) \text{ DANN } (U \text{ IST } U_3), \\ \text{WENN } (E \text{ IST } X_3) \text{ UND } (\Delta E \text{ IST } Y_4) \text{ DANN } (U \text{ IST } U_3)}_{\mathcal{F}^2(\mathcal{B})}, \\ \text{WENN } (E \text{ IST } X_4) \text{ UND } (\Delta E \text{ IST } Y_3) \text{ DANN } (U \text{ IST } U_4), \\ \text{WENN } (E \text{ IST } X_4) \text{ UND } (\Delta E \text{ IST } Y_4) \text{ DANN } (U \text{ IST } U_4) \end{array} \right. \quad (3.9)$$

beschrieben. Der Fuzzy-PD-Regler hat nun die im Bild 3.11 dargestellte Regelbasis.

		ΔE				
		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
E	X_1	U_2	U_2	U_1	U_1	U_1
	X_2	U_3	U_2	U_2	U_2	U_2
	X_3	U_4	U_3	U_3	U_3	U_2
	X_4	U_4	U_4	U_4	U_4	U_3
	X_5	U_5	U_5	U_5	U_4	U_4

Bild 3.11: Veränderte Regelbasis des Fuzzy-PD-Reglers

In den folgenden Bildern (3.12 bis 3.15) sind die Ergebnisse mit den angepaßten Fuzzy-Unterräumen \mathcal{F}^1 und \mathcal{F}^2 dargestellt. Wie die Ergebnisse dokumentieren, approximiert nur der Fuzzy-PD-Regler unter Verwendung der t -Norm \top_{ap} das Wissen, hier z. B. über die Störgröße $z(kT)$, in Form von relationalen Regeln.

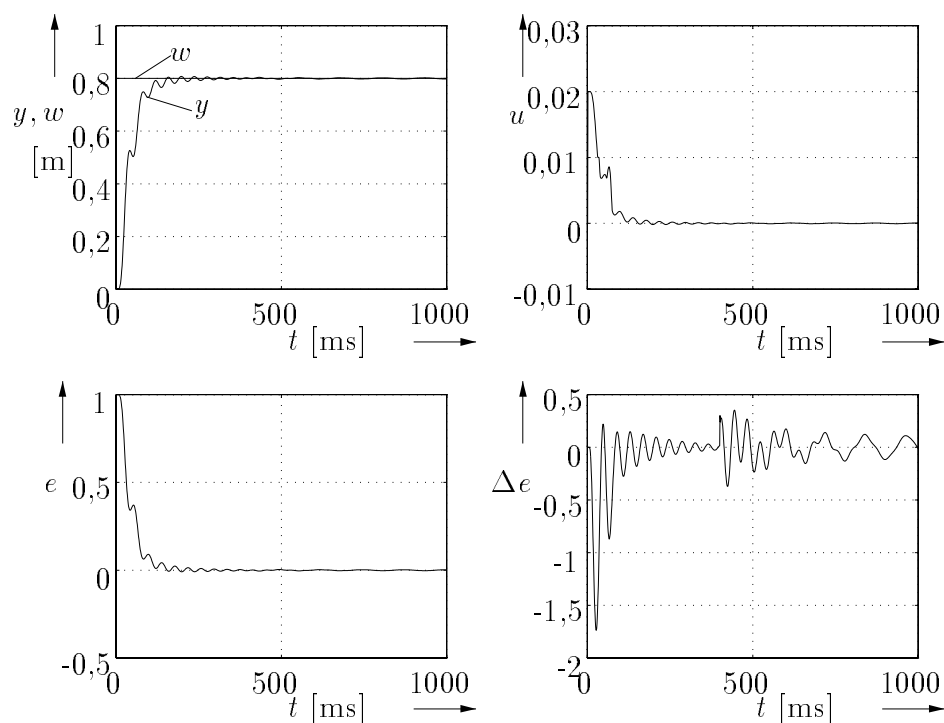


Bild 3.12: Systemverläufe des geregelten translatorischen hydraulischen Antriebs mit der t -Norm \mathbb{T}_{ap} und der Regelbasis nach Bild 3.11 für einen Fuzzy-PD-Regler

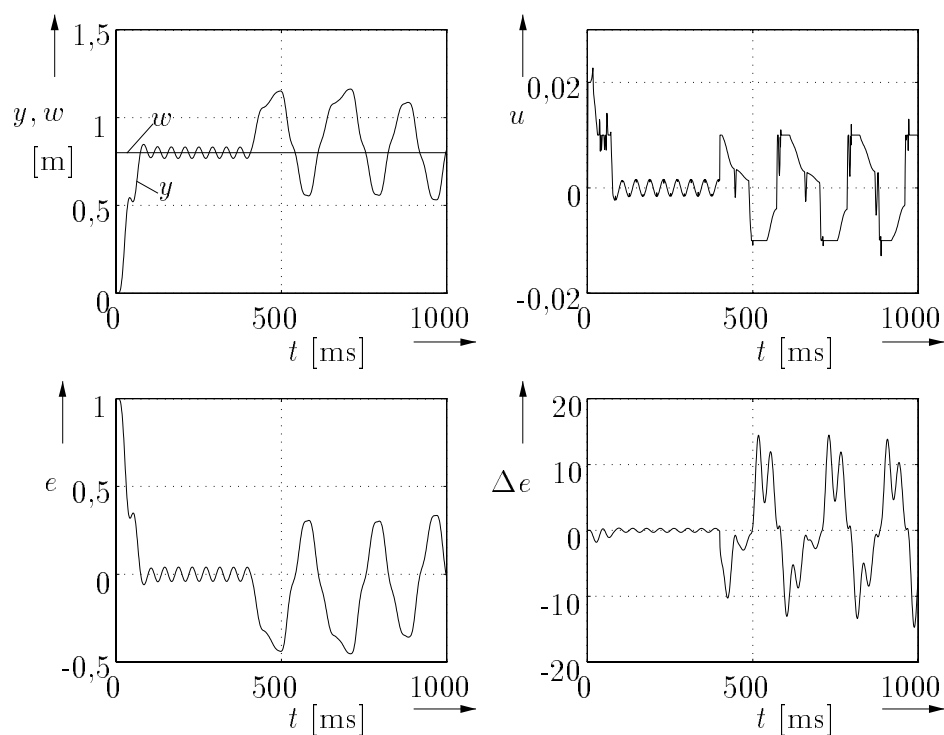


Bild 3.13: Systemverläufe des geregelten translatorischen hydraulischen Antriebs mit der t -Norm \mathbb{T}_{min} und der Regelbasis nach Bild 3.11 für einen Fuzzy-PD-Regler

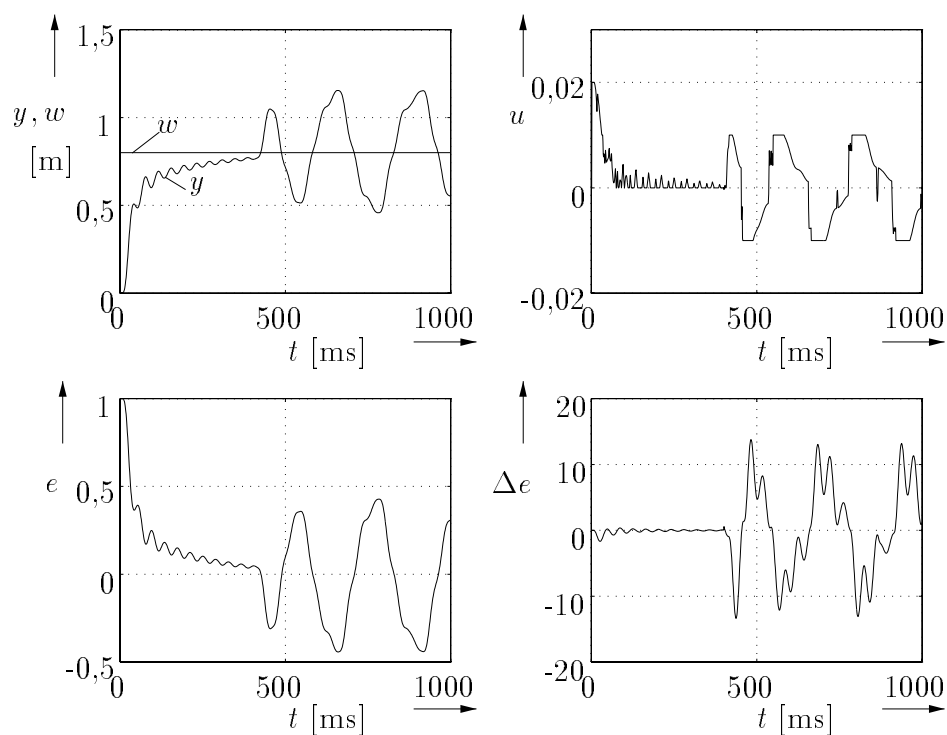


Bild 3.14: Systemverläufe des geregelten translatorischen hydraulischen Antriebs mit der t -Norm \top_{Luk} und der Regelbasis nach Bild 3.11 für einen Fuzzy-PD-Regler

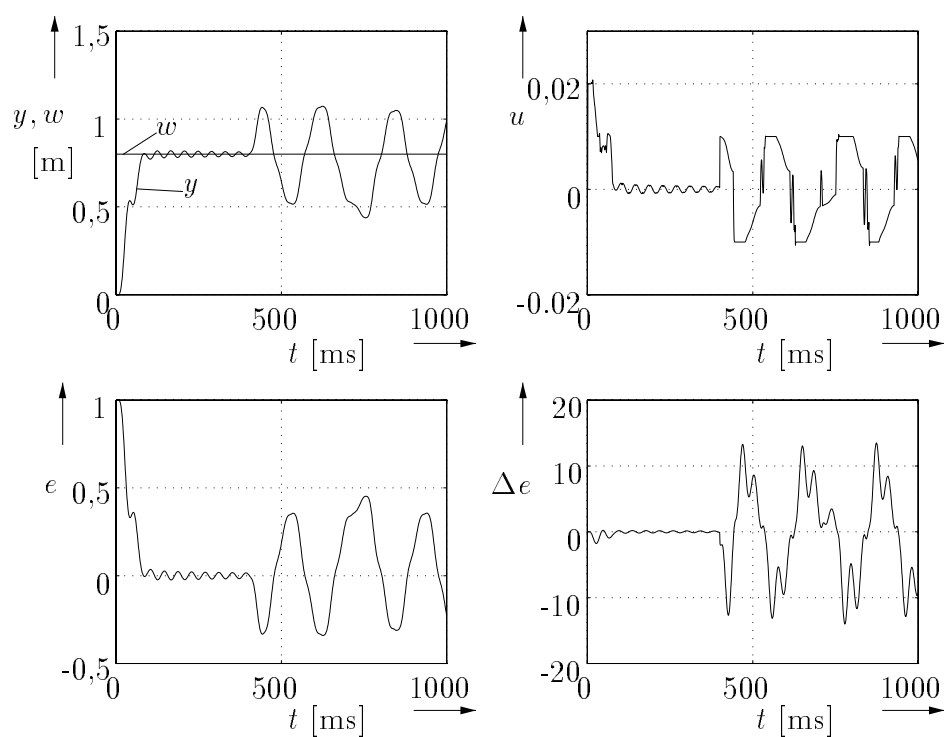


Bild 3.15: Systemverläufe des geregelten translatorischen hydraulischen Antriebs mit der t -Norm \top_{hp} und der Regelbasis nach Bild 3.11 für einen Fuzzy-PD-Regler

4 Neuer parametrischer Verknüpfungs-Operator

Im folgenden wird eine neue axiomatische Beschreibung für konjunktive und disjunktive Verknüpfungen von mehrwertigen Aussagen diskutiert. Die Beschreibung stützt sich dabei auf einen erstmalig eingeführten parametrischen Verknüpfungs-Operator der Form

$$\mathcal{R}_\gamma(x, y) = (x y)^\gamma \quad \forall x, y \in \mathbb{D}_N^+ \quad \forall \gamma \in [0, \infty] \quad (4.1)$$

und erfüllt:

Satz 4.1

Der parametrische Verknüpfungs-Operator

$$\mathcal{R}_\gamma(x, y) = (x y)^\gamma$$

erfüllt für alle $x, y \in \mathbb{D}_N^+$ und $\gamma \in [0, \infty]$ das logische Bewertungskriterium. \square

Beweis:

1. Fall

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(\neg x, \neg y)}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(\neg x, y)}{\partial y} &= \gamma [(1-x)(1-y)]^{\gamma-1} (-1)(1-x) + \\ &\quad \gamma [(1-x)y]^{\gamma-1} (1-x) \\ &= \gamma(1-x)^\gamma y^{\gamma-1} - \gamma(1-x)^\gamma (1-y)^{\gamma-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(\neg x, \neg y)}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(\neg x, y)}{\partial y}}{\mathcal{R}_\gamma(\neg x, \neg y) + \mathcal{R}_\gamma(\neg x, y)} &= \frac{\gamma(1-x)^\gamma y^{\gamma-1}}{(1-x)^\gamma (1-y)^\gamma + (1-x)^\gamma y^\gamma} - \\ &\quad \frac{\gamma(1-x)^\gamma (1-y)^{\gamma-1}}{(1-x)^\gamma (1-y)^\gamma + (1-x)^\gamma y^\gamma} \\ &= \gamma \left[\frac{y^{\gamma-1} - (1-y)^{\gamma-1}}{(1-y)^\gamma + y^\gamma} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(x, \neg y)}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(x, y)}{\partial y} = \gamma x^\gamma y^{\gamma-1} - \gamma x^\gamma (1-y)^{\gamma-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(x, \neg y)}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(x, y)}{\partial y}}{\mathcal{R}_\gamma(x, \neg y) + \mathcal{R}_\gamma(x, y)} &= \frac{\gamma x^\gamma y^{\gamma-1} - \gamma x^\gamma (1-y)^{\gamma-1}}{x^\gamma (1-y)^\gamma + x^\gamma y^\gamma} \\ &= \gamma \left[\frac{y^{\gamma-1} - (1-y)^{\gamma-1}}{(1-y)^\gamma + y^\gamma} \right] \end{aligned}$$

$$\implies \frac{\frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(\neg x, \neg y)}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(\neg x, y)}{\partial y}}{\mathcal{R}_\gamma(\neg x, \neg y) + \mathcal{R}_\gamma(\neg x, y)} = \frac{\frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(x, \neg y)}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(x, y)}{\partial y}}{\mathcal{R}_\gamma(x, \neg y) + \mathcal{R}_\gamma(x, y)}$$

2. Fall

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(\neg x, \neg y)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(x, \neg y)}{\partial x} &= \gamma [(1-y)(1-x)]^{\gamma-1} (-1)(1-y) + \\ &\quad \gamma [(1-y)x]^{\gamma-1} (1-y) \\ &= \gamma(1-y)^\gamma x^{\gamma-1} - \gamma(1-y)^\gamma (1-x)^{\gamma-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(\neg x, \neg y)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(x, \neg y)}{\partial x}}{\mathcal{R}_\gamma(\neg x, \neg y) + \mathcal{R}_\gamma(\neg x, y)} &= \frac{\gamma(1-y)^\gamma x^{\gamma-1}}{(1-y)^\gamma (1-x)^\gamma + (1-y)^\gamma x^\gamma} - \\ &\quad \frac{\gamma(1-y)^\gamma (1-x)^{\gamma-1}}{(1-y)^\gamma (1-x)^\gamma + (1-y)^\gamma x^\gamma} \\ &= \gamma \left[\frac{x^{\gamma-1} - (1-x)^{\gamma-1}}{(1-x)^\gamma + x^\gamma} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(\neg x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(x, y)}{\partial x} = \gamma y^\gamma x^{\gamma-1} - \gamma y^\gamma (1-x)^{\gamma-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(\neg x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(x, y)}{\partial x}}{\mathcal{R}_\gamma(\neg x, y) + \mathcal{R}_\gamma(x, y)} &= \frac{\gamma y^\gamma x^{\gamma-1} - \gamma y^\gamma (1-x)^{\gamma-1}}{y^\gamma (1-x)^{\gamma-1} + y^\gamma x^\gamma} \\ &= \gamma \left[\frac{x^{\gamma-1} - (1-x)^{\gamma-1}}{(1-x)^\gamma + x^\gamma} \right] \end{aligned}$$

$$\implies \frac{\frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(\neg x, \neg y)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(x, \neg y)}{\partial x}}{\mathcal{R}_\gamma(\neg x, \neg y) + \mathcal{R}_\gamma(\neg x, y)} = \frac{\frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(\neg x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(x, y)}{\partial x}}{\mathcal{R}_\gamma(\neg x, y) + \mathcal{R}_\gamma(x, y)}$$

□

Im Bild 4.1 sind einige Lösungskurven der Gleichungen (2.3) und (2.4) dargestellt. Der parametrische Verknüpfungs-Operator $\mathcal{R}_\gamma(x, y) = (xy)^\gamma$ stellt zur Zeit die einzige bekannte Lösungsschar der partiellen Differentialgleichungen des logischen Bewertungskriteriums dar. Wie aus Berger (1995) bekannt ist, erfüllt zwar die t -Norm \mathbb{T}_{min} partiell das logische Bewertungskriterium, aber eben nicht für alle $x, y \in \mathbb{D}_N^+$. Im Bild 4.2 ist die Lösungskurve des partiellen \mathbb{T}_{min}^p dargestellt.

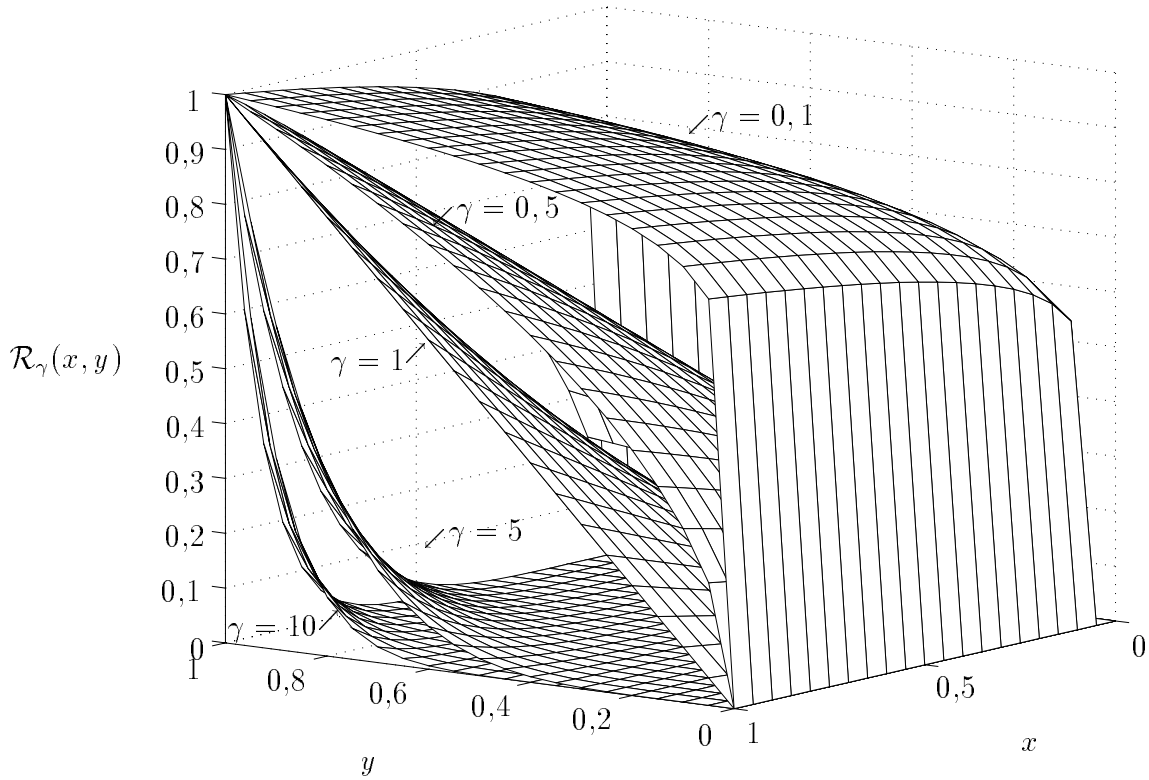


Bild 4.1: Lösungskurven der partiellen Differentialgleichungen (Gl.(2.3) und Gl.(2.4)) für $\gamma \in \{0, 1; 0, 5; 1; 5; 10\}$

Die Grundidee der Parametrisierung beruht auf der Entwicklung von Verknüpfungs-Operatoren, welche einen möglichst großen Laufbereich besitzen sollen. So gibt es parametrisierte t -Normen und t -Konormen, welche möglichst viele t -Normen und t -Konormen umfassen (HAMACHER-Operator $H_\gamma^\top; H_\gamma^\perp$, YAGER-Operator $Y_\gamma^\top; Y_\gamma^\perp$, WEBER-Operator $W_\gamma^\top; W_\gamma^\perp$, DUBOIS-PRADE-Operator $DP_\gamma^\top; DP_\gamma^\perp$, FRANK-Operator $F_\gamma^\top; F_\gamma^\perp$, SCHWEIZER-SKALAR-Operator $S_\gamma^\top; S_\gamma^\perp$, DOMBI-Operator $D_\gamma^\top; D_\gamma^\perp$) (Böhme 1993). Der Parameter γ kann ein bestimmtes Intervall reeller Zahlen durchlaufen; für jeden festen Wert des Parameters ergibt sich ein spezieller Operator der t -Norm bzw. des t -Konorms. Jede parametrisierte t -Norm und t -Konorm kann nur Zwischenwerte in der Anordnungskette

$$\begin{aligned} \top_{dp}(x, y) &\leq \cdots \leq \top_\gamma(x, y) \leq \cdots \leq \top_{min}(x, y) \\ \perp_{max}(x, y) &\leq \cdots \leq \perp_\gamma(x, y) \leq \cdots \leq \perp_{ds}(x, y) \end{aligned}$$

annehmen mit dem drastischen Produkt

$$\top_{dp}(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & \forall \max(x, y) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall x, y \in \mathbb{D}_N^+, \quad (4.2)$$

dem Minimum-Operator (logisches Produkt)

$$\top_{min}(x, y) = \min_{\forall x, y \in \mathbb{D}_N^+} (x, y), \quad (4.3)$$

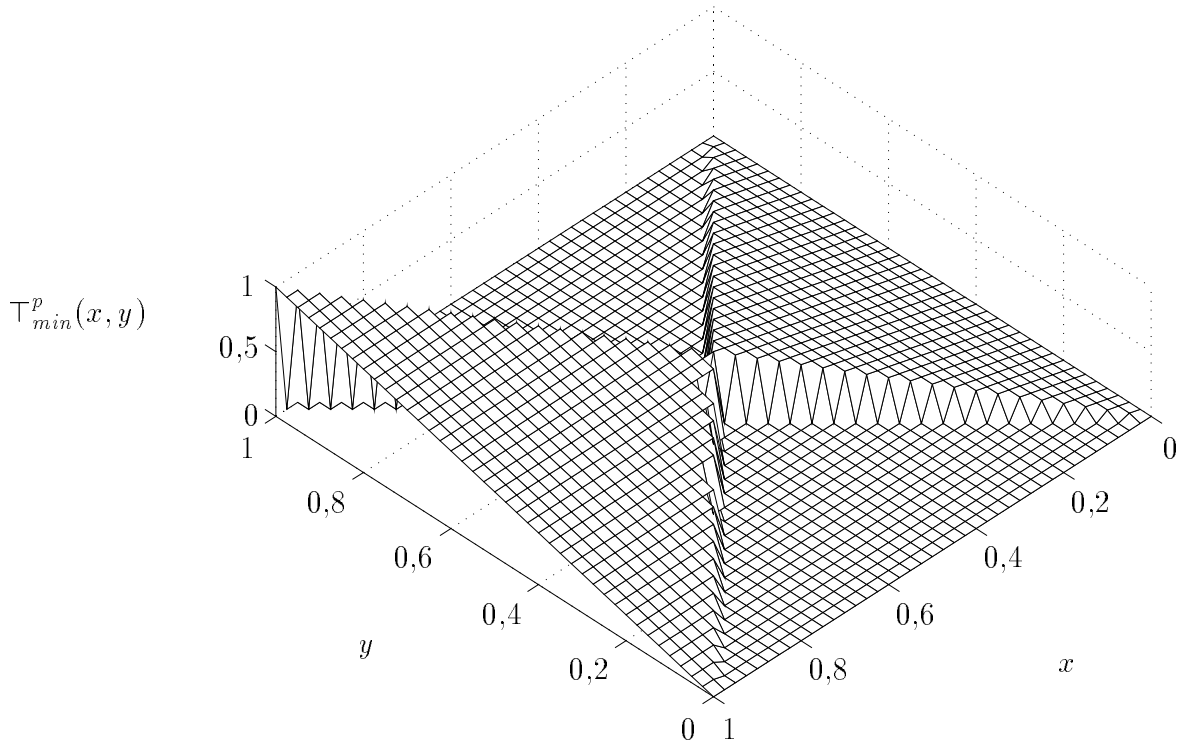


Bild 4.2: Lösungskurve der partiellen Differentialgleichungen (Gl.(2.3) und Gl.(2.4)) über die partielle t -Norm $\top_{min}^p(x, y)$

dem Maximum-Operator (logische Summe)

$$\perp_{max}(x, y) = \max_{\forall x, y \in \mathbb{D}_N^+} (x, y) \quad \text{und} \quad (4.4)$$

der drastischen Summe

$$\perp_{ds}(x, y) = \begin{cases} \max(x, y) & \forall \min(x, y) = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall x, y \in \mathbb{D}_N^+ \quad (4.5)$$

Werte zwischen \top_{min} und \perp_{max} also können im kompensatorischen Bereich mit den parametrisierten t -Normen und t -Konormen nicht erzielt werden. Dazu gibt es eigenständige kompensatorische Verknüpfungs-Operatoren (Arithmetisches Mittel D_{am} , geometrisches Mittel D_{gm} , harmonisches Mittel D_{hm}). Auch für den Bereich der Kompensation existieren parametrische Verknüpfungs-Operatoren wie der von Zimmermann und Zysno (n -dimensional)

$$\mathcal{R}_\gamma(x_1, \dots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1-\gamma} \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) \right)^\gamma \quad \forall \gamma \in [0, 1], \quad (4.6)$$

welcher empirisch entwickelt wurde. Für $\gamma = 0$ ergibt sich keine Kompensation mit dem Operator algebraisches Produkt und für $\gamma = 1$ erhält man volle Kompensation mit dem Operator algebraische Summe. Mit dem parametrischen Operator $\mathcal{R}_\gamma(x, y) = (xy)^\gamma$ ist es möglich, durch Variation des Parameters γ die Laufbereiche der t -Norm \top und des kompensatorischen Operators D zu erreichen. Dabei wird für die Laufbereiche angenommen,

daß

$$\perp_{max} = \inf\{\mathbf{DIS}\} = \inf_{\forall \mathcal{R} \in \mathbf{DIS}} \{\mathcal{R}(x, y)\} \quad (4.7)$$

bzw.

$$\perp_{max} = \sup\{\mathbf{KOM}\} = \sup_{\forall \mathcal{R} \in \mathbf{KOM}} \{\mathcal{R}(x, y)\} \quad (4.8)$$

ist (Bild 4.3).

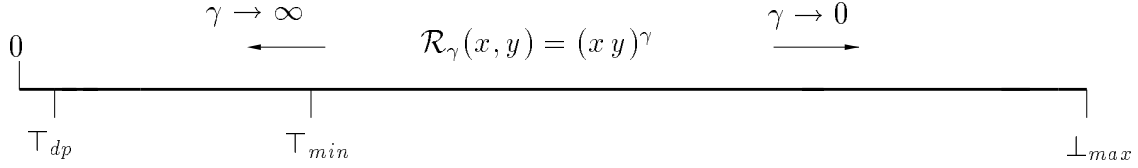


Bild 4.3: Laufbereich des parametrischen Verknüpfungs-Operators $\mathcal{R}_\gamma(x, y) = (x y)^\gamma$

Betrachtet man den Grenzwert des $\mathcal{R}_\gamma(x, y) = (x y)^\gamma$

$$\lim_{\substack{\gamma \rightarrow \infty \\ \forall x, y \in \mathbb{D}_N^+}} (x y)^\gamma = \begin{cases} 1 & \forall x = y = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.9)$$

so ist zu erkennen, daß der $\mathcal{R}_\gamma(x, y) = (x y)^\gamma$ für wesentlich mehr Variablen x, y gleich Null ist und der Laufbereich so über das drastische Produkt hinaus verlängert werden kann. Der kompensatorische Bereich des parametrischen Operators $\mathcal{R}_\gamma(x, y) = (x y)^\gamma$ für $\gamma \in [1, \infty]$ beginnt, wenn

$$(x y)^\gamma \geq \top_{min} \quad (4.10)$$

ist. Voraussetzung ist jedoch, daß

$$\top_{min} = \inf\{\mathbf{KOM}\} = \inf_{\forall \mathcal{R} \in \mathbf{KOM}} \{\mathcal{R}(x, y)\} \quad (4.11)$$

bzw.

$$\top_{min} = \sup\{\mathbf{KON}\} = \sup_{\forall \mathcal{R} \in \mathbf{KON}} \{\mathcal{R}(x, y)\} \quad (4.12)$$

gilt.

4.1 Bedeutungspostulate

In diesem Abschnitt wird das von Zadeh implizit unterstellte Standardmodell formaler Sprache anhand der Bedeutungspostulate \mathcal{P} von Hamacher (1978) für die Junktoren „und“ bzw. „oder“ in Form von Axiomen bezüglich der semantischen Darstellung des parametrischen Verknüpfungs-Operators $\mathcal{R}_\gamma(x, y) = (x y)^\gamma$ untersucht (algebraische Untersuchungen, Relationalitätsanforderungen). Der in den Bedeutungspostulaten \mathcal{P} von Hamacher verwendete Begriff des Wahrheitswertes \mathcal{W} wurde aus der klassischen Logik übernommen,

wo jeder Aussage ein Wahrheitswert \mathcal{W} zugeordnet ist. Die atomaren Bestandteile einer Aussage können in der klassischen Aussagenlogik wahr oder falsch sein (Semantik der Aussagenlogik) (Schöning 1992). Bei einer Fuzzy-Aussage treten jedoch mehr als zwei Wahrheitswerte auf. Gottwald (1989) (Kreiser, Gottwald und Stelzner 1990) spricht in diesem Zusammenhang von Quasiwahrheitswerten \mathcal{QW} . Dieser Begriff des Quasiwahrheitswertes \mathcal{QW} wird in den Bedeutungspostulat \mathcal{P}_1 bis \mathcal{P}_8 verwendet.

Bedeutungspostulat \mathcal{P}_1 :

Die kompensative bzw. konjunktive Verknüpfung zweier Fuzzy-Aussagen \mathcal{I} , \mathcal{J} soll keinen größeren \mathcal{QW} besitzen als die kompensative bzw. konjunktive Verknüpfungen zweier Fuzzy-Aussagen \mathcal{K} , \mathcal{L} , falls \mathcal{I} den gleichen \mathcal{QW} besitzt wie \mathcal{K} und \mathcal{J} keinen größeren \mathcal{QW} besitzt als \mathcal{L} . Für den Verknüpfungs-Operator bedeutet dies: $\mathcal{R}_\gamma(x, y)$ ist auf $\mathbb{D}_N^+ \times \mathbb{D}_N^+$ argumentweise monoton wachsend. D. h.

$$\bigwedge_{x, y, z \in \mathbb{D}_N^+} \{y \leq z \implies (\mathcal{R}_\gamma(x, y) \leq \mathcal{R}_\gamma(x, z) \quad \text{und} \quad \mathcal{R}_\gamma(y, x) \leq \mathcal{R}_\gamma(z, x))\} .$$

□

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(x, y)}{\partial x} &= \gamma (x y)^{\gamma-1} y = \gamma y^\gamma x^{\gamma-1} \geq 0 \quad \forall \gamma \in [0, \infty] \quad \forall x, y \in \mathbb{D}_N^+ \\ \frac{\partial \mathcal{R}_\gamma(x, y)}{\partial y} &= \gamma (x y)^{\gamma-1} x = \gamma x^\gamma y^{\gamma-1} \geq 0 \quad \forall \gamma \in [0, \infty] \quad \forall x, y \in \mathbb{D}_N^+ \\ &\implies \mathcal{R}_\gamma(x, y) = (x y)^\gamma \text{ ist monoton wachsend} \end{aligned}$$

□

Bedeutungspostulat \mathcal{P}_2 :

Die Konjunktion zweier Fuzzy-Aussagen \mathcal{I} , \mathcal{J} hat stets eine verschärfende oder jedenfalls nicht aufweichende Wirkung gegenüber jeder der beiden Fuzzy-Aussagen \mathcal{I} bzw. \mathcal{J} . Die Kompensation hat stets eine aufweichende oder jedenfalls nicht verschärfende Wirkung. D. h.

$$\bigwedge_{\mathcal{I}, \mathcal{J} \in \mathbb{F}} \{(\mathcal{I} \wedge \mathcal{J}) \preceq \mathcal{I} \wedge (\mathcal{I} \wedge \mathcal{J}) \preceq \mathcal{J}\}$$

sowie

$$\bigwedge_{\mathcal{I}, \mathcal{J} \in \mathbb{F}} \{(\mathcal{I} \vee \mathcal{J}) \succeq \mathcal{I} \vee (\mathcal{I} \vee \mathcal{J}) \succeq \mathcal{J}\}$$

für die Verknüpfung $\mathcal{R}_\gamma(x, y)$:

$$\bigwedge_{x, y \in \mathbb{D}_N^+} \{ \mathcal{R}_\gamma(x, y) \leq x \wedge \mathcal{R}_\gamma(x, y) \leq y \} \quad \forall \gamma \in [1, \infty]$$

sowie

$$\bigwedge_{x, y \in \mathbb{D}_N^+} \{ \mathcal{R}_\gamma(x, y) \geq x \wedge \mathcal{R}_\gamma(x, y) \geq y \} \quad \forall \gamma \in [0, 1[.$$

□

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\gamma(x, y) = (xy)^\gamma &\leq x \\ x^{\gamma-1} y^\gamma &\leq 1 \quad \forall \gamma \in [1, \infty] \quad \forall x, y \in \mathbb{D}_N^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\gamma(x, y) = (xy)^\gamma &\geq x \\ x^{\gamma-1} y^\gamma &\geq 1 \quad \text{für } \gamma < 1 \quad \text{und } \gamma \geq 0 \\ \frac{y^\gamma}{x^{1-\gamma}} &\geq 1 \quad \forall \gamma \in [0, 1[\quad \forall x, y \in \mathbb{D}_N^+ \end{aligned}$$

Für $\mathcal{R}_\gamma(x, y) = (xy)^\gamma \leq y \quad \forall \gamma \in [1, \infty]$ und $\mathcal{R}_\gamma(x, y) = (xy)^\gamma \geq y \quad \forall \gamma \in [0, 1[$ ist der Beweis analog, da $\mathcal{R}_\gamma(x, y)$ kommutativ ist (Bedeutungspostulat \mathcal{P}_3). □

Bedeutungspostulat \mathcal{P}_3 (Beweis trivial):

$\mathcal{I} \wedge \mathcal{J}$ hat den gleichen \mathcal{QW} wie $\mathcal{J} \wedge \mathcal{I}$. $\mathcal{I} \vee \mathcal{J}$ besitzt den gleichen \mathcal{QW} wie $\mathcal{J} \vee \mathcal{I}$. D. h. für $\mathcal{R}_\gamma(x, y) = (xy)^\gamma$:

$$\bigwedge_{x, y \in \mathbb{D}_N^+} \{ \mathcal{R}_\gamma(x, y) = \mathcal{R}_\gamma(y, x) \}$$

□

Bedeutungspostulat \mathcal{P}_4 :

Die konjunktive Verknüpfung einer absoluten wahren Fuzzy-Aussage \mathcal{I} mit einer beliebigen Fuzzy-Aussage \mathcal{J} hat den \mathcal{QW} von \mathcal{J} . Ferner hat die disjunktive Verknüpfung einer absoluten falschen Fuzzy-Aussage \mathcal{I} mit einer beliebigen Fuzzy-Aussage \mathcal{J} den \mathcal{QW} von \mathcal{J} . D. h.

$$\bigvee_{r, f \in \mathbb{D}_N^+} \left\{ r \neq f \bigwedge_{x \in \mathbb{D}_N^+} (\mathcal{R}_\gamma(r, x) = \mathcal{R}_\gamma(x, r) = x) \quad \text{und} \right. \\ \left. (\mathcal{R}_\gamma(x, f) = \mathcal{R}_\gamma(f, x) = x) \right\} .$$

□

Beweis:

$$\begin{aligned} (x 1)^\gamma &\neq x \quad \forall \gamma \in [0, \infty] \setminus \{1\} \quad \forall x \in \mathbb{D}_N^+ \\ (x 0)^\gamma &\neq x \quad \forall \gamma \in [0, \infty] \quad \forall x \in \mathbb{D}_N^+ \end{aligned}$$

□

Bedeutungspostulat \mathcal{P}_5 :

Die konjunktive Verknüpfung der Fuzzy-Aussagen \mathcal{I} , \mathcal{J} sowie \mathcal{K} , \mathcal{L} sollen für den Fall, daß \mathcal{I} den gleichen \mathcal{QW} besitzt wie \mathcal{K} , höchstens dann den gleichen \mathcal{QW} besitzen, wenn auch \mathcal{J} den gleichen \mathcal{QW} besitzt wie \mathcal{L} (Analog für die Komposition bzw. Disjunktion). D. h.

$$\bigwedge_{x,y,z \in \mathbb{D}_N^+} \left\{ \begin{aligned} &(\mathcal{R}_\gamma(x, y) = \mathcal{R}_\gamma(x, z) \implies y = z) \quad \text{und} \\ &(\mathcal{R}_\gamma(y, x) = \mathcal{R}_\gamma(z, x) \implies y = z) \end{aligned} \right\} .$$

□

Beweis:

$$\begin{aligned} (x y)^\gamma &= (x z)^\gamma \\ y &= z \quad \forall \gamma \in [0, \infty] \quad \forall x, y, z \in \mathbb{D}_N^+ \end{aligned}$$

□

Bedeutungspostulat \mathcal{P}_6 :

Die Fuzzy-Aussagen $\mathcal{I} \wedge (\mathcal{J} \wedge \mathcal{L})$ bzw. $(\mathcal{I} \wedge \mathcal{J}) \wedge \mathcal{L}$ sollen stets den gleichen \mathcal{QW} besitzen (Analog für die Komposition bzw. Disjunktion). D. h.

$$\bigwedge_{x,y,z \in \mathbb{D}_N^+} \{ \mathcal{R}_\gamma(x, \mathcal{R}_\gamma(y, z)) = \mathcal{R}_\gamma(\mathcal{R}_\gamma(y, x), z) \} .$$

□

Beweis:

$$\begin{aligned} [x (y z)^\gamma]^\gamma &\neq [(x y)^\gamma z]^\gamma \\ z^{\gamma^2 - \gamma} &\neq x^{\gamma^2 - \gamma} \quad \forall \gamma \in [0, \infty] \quad \forall x \in \mathbb{D}_N^+ \quad \forall z \neq x \end{aligned}$$

□

Bedeutungspostulat \mathcal{P}_7 :

Besitzt \mathcal{I} einen kleineren \mathcal{QW} als \mathcal{J} , dann soll auch $\mathcal{I} \wedge \mathcal{I}$ einen kleineren \mathcal{QW} als \mathcal{J} besitzen als $\mathcal{J} \wedge \mathcal{J}$ (Analog für die Komposition bzw. Disjunktion). D. h.

$$\bigwedge_{x,y \in \mathbb{D}_N^+} \{x < y \implies (\mathcal{R}_\gamma(x,y) < \mathcal{R}_\gamma(y,y))\} .$$

□

Beweis:

$$(x x)^\gamma < (y y)^\gamma$$

$$\frac{x}{y} < 1 \quad \forall x < y \quad \forall x, y \in \mathbb{D}_N^+$$

□

Bedeutungspostulat \mathcal{P}_8 :

Die \mathcal{QW} der Fuzzy-Aussage $\mathcal{I} \wedge \mathcal{I}$ bzw. $\mathcal{I} \vee \mathcal{I}$ sind stets gleich dem \mathcal{QW} der Fuzzy-Aussage \mathcal{I} . D. h.

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{D}_N^+} \{\mathcal{R}_\gamma(x,x) = x\} .$$

□

Beweis:

$$(x x)^\gamma \neq x$$

$$x^{2n-1} \neq 1 \quad \forall x \in \mathbb{D}_N^+ \quad \forall \gamma \in]0, \infty[\setminus \{0, 5\}$$

□

In der Tabelle 4.1 sind die Ergebnisse der Bedeutungspostulate \mathcal{P} dargestellt.

Tabelle 4.1: Ergebnisse der Bedeutungspostulate \mathcal{P}

	erfüllt	nicht erfüllt
Bedeutungspostulat \mathcal{P}_1	×	
Bedeutungspostulat \mathcal{P}_2	×	
Bedeutungspostulat \mathcal{P}_3	×	
Bedeutungspostulat \mathcal{P}_4		×
Bedeutungspostulat \mathcal{P}_5	×	
Bedeutungspostulat \mathcal{P}_6		×
Bedeutungspostulat \mathcal{P}_7	×	
Bedeutungspostulat \mathcal{P}_8		×

Wie der Tabelle 4.1 zu entnehmen ist, erfüllt der parametrische Verknüpfungs-Operator $\mathcal{R}_\gamma(x, y) = (xy)^\gamma$ die wichtigsten Bedeutungspostulate \mathcal{P} (Hamacher 1978). Ein weiterer Vorteil des $\mathcal{R}_\gamma(x, y) = (xy)^\gamma$ liegt darin, daß er den gesamten kompensatorischen Bereich voll abdeckt. Zimmermann, Zysno und Thole gelangten in diesem Zusammenhang zu der Auffassung, daß Situationen vorstellbar sind, in denen Menschen intuitiv-logische Kompensationseffekte berücksichtigen, d. h. ein bzgl. eines nicht binären Kriteriums minderwertiges Objekt \mathcal{X} erfährt bei der konjunktiven Aggregation mit einem zweiten Kriterium, bzgl. dessen Objekt \mathcal{X} höher bewertet ist, eine Aufwertung: Eine Art Mittelwertung findet statt (Thole, Zimmermann und Zysno 1978, Zimmermann und Zysno 1979). Eine Pilotstudie zur Ermittlung der semantischen Repräsentation \mathcal{KK} dieses von den Autoren kompensatorisches „und“ genannten Junktors ergibt, daß das geometrische Mittel eine gute Approximation zu sein scheint. Das geometrische Mittel ist ein Spezialfall des parametrischen Verknüpfungs-Operators $\mathcal{R}_\gamma(x, y) = (xy)^\gamma$ für $\gamma = 0,5$ und unterstreicht somit die Bedeutung des parametrischen Verknüpfungs-Operators für den kompensatorischen Bereich.

Vom Standpunkt der pragmatischen Aspekte zeichnet sich der parametrische Verknüpfungs-Operator durch sein variables sensitives (über den Parameter γ) und sein interaktives Verhalten aus. Die Interaktivität wird über den Satz 4.2 im folgenden bewiesen.

Satz 4.2 (Bandemer und Gottwald 1993)

Kann eine unscharfe Relation $R_{\mathcal{R}_\gamma(x,y)} \in \mathbb{D}_1 \times \mathbb{D}_2 \times \cdots \times \mathbb{D}_{n-1} \times \mathbb{D}_n$ aus allen Projektionen (eindimensional) $pr_j(R_{\mathcal{R}_\gamma(x,y)})$, $j = 1, \dots, n$ zurückgewonnen werden, und zwar als unscharfes kartesisches Produkt

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{R}_\gamma(x,y)}^\otimes &= pr_1(R_{\mathcal{R}_\gamma(x,y)}) \otimes pr_2(R_{\mathcal{R}_\gamma(x,y)}) \otimes \cdots \\ &\quad \otimes pr_{n-1}(R_{\mathcal{R}_\gamma(x,y)}) \otimes pr_n(R_{\mathcal{R}_\gamma(x,y)}), \end{aligned} \quad (4.13)$$

dann ist die Relation nicht-interaktiv (separabel).

□

Beweis

Der Beweis der Interaktivität (Nicht-Separierbarkeit) für den Operator $\mathcal{R}_\gamma(x, y)$ erfolgt über einen Widerspruchsbeweis des Satzes 4.2 für die diskreten Zustände $x, y \in \{0,5; 0,75; 1\}$. Es ergibt sich so eine binäre Relation $R_{\mathcal{R}_\gamma(x,y)}$ (Fuzzy-Relationsmatrix $\mathbf{R}_{\mathcal{R}_\gamma(x,y)}$) mit dem parametrischen Verknüpfungs-Operator $\mathcal{R}_\gamma(x, y) = (xy)^\gamma$ von

$$\mathbf{R}_{\mathcal{R}_\gamma(x,y)} = \begin{bmatrix} 0,25^\gamma & 0,375^\gamma & 0,5^\gamma \\ 0,375^\gamma & 0,5625^\gamma & 0,75^\gamma \\ 0,5^\gamma & 0,75^\gamma & 1^\gamma \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

mit den Projektionen

$$pr_X \left(\mathbf{R}_{\mathcal{R}_\gamma(x,y)} \right) = [0, 5^\gamma; 0, 75^\gamma; 1^\gamma] , \quad (4.15)$$

$$pr_Y \left(\mathbf{R}_{\mathcal{R}_\gamma(x,y)} \right) = [0, 5^\gamma; 0, 75^\gamma; 1^\gamma] . \quad (4.16)$$

Das unscharfe binäre kartesische Produkt $R_{\mathcal{R}_\gamma(x,y)}^\otimes$ (Fuzzy-Relationalmatrix $\mathbf{R}_{\mathcal{R}_\gamma(x,y)}^\otimes$) berechnet sich dann zu

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathcal{R}_\gamma(x,y)}^\otimes &= pr_X^T \left(\mathbf{R}_{\mathcal{R}_\gamma(x,y)} \right) \otimes pr_Y \left(\mathbf{R}_{\mathcal{R}_\gamma(x,y)} \right) \\ &= [0, 5^\gamma; 0, 75^\gamma; 1^\gamma]^T \otimes [0, 5^\gamma; 0, 75^\gamma; 1^\gamma] \\ &= \begin{bmatrix} 0, 5^\gamma & 0, 5^\gamma & 0, 5^\gamma \\ 0, 5^\gamma & 0, 75^\gamma & 0, 75^\gamma \\ 0, 5^\gamma & 0, 75^\gamma & 1^\gamma \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{R}_{\mathcal{R}_\gamma(x,y)}^\otimes \neq \mathbf{R}_{\mathcal{R}_\gamma(x,y)} . \quad (4.18)$$

Somit ergibt sich für $\mathcal{R}_\gamma(x, y) = (xy)^\gamma$ ein interaktives Verhalten. \square

Da es sich hier um einen parametrischen Operator handelt, besitzt er natürlich die unter den Gesichtspunkt der pragmatischen Aspekte fallende Adaptionsfähigkeit. Weiterhin ist $\mathcal{R}_\gamma(x, y) = (x, y)^\gamma$ stetig differenzierbar.

4.2 Anwendung des parametrischen Verknüpfungs-Operators

Im folgenden wird die Anwendung des neuen parametrischen Verknüpfungs-Operators an einer Beispielsregelung (Geschwindigkeitsregelung) des translatorischen hydraulischen Antriebs (Beschreibung Abschnitt 3) dokumentiert. Der Antrieb wird mit einem Fuzzy-PI-Regler (Standard-Fuzzy-Regler für Systemklassen (Berger u. a. 1995)) in Abhängigkeit verschiedener Verknüpfungs-Operatoren $\mathcal{R}(e, \Delta e)$ geregelt. Der Fuzzy-PI-Regler ist so durch die Funktion

$$u(k) = f(e(k), \Delta e(k), \mathcal{R}(e(k), \Delta e(k))) \quad (4.19)$$

in Abhängigkeit der Regelabweichung $e(k)$, der Änderung der Regelabweichung $\Delta e(k)$ und dem Verknüpfungs-Operator $\mathcal{R}(x, y)$ beschreibbar. Untersucht werden die t -Normen: Algebraisches Produkt \top_{ap} und Minimum-Operator \top_{min} sowie der neue parametrische Verknüpfungs-Operator $\mathcal{R}_\gamma = f(x, y, \gamma)$. Bei der Anwendung der verschiedenen Verknüpfungs-Operatoren wird nur der Skalierungsfaktor $k_{\Delta u}$ der Ausgangsgröße Änderung der Stellgröße $\Delta u(kT)$ an die technische Anlage angepaßt. In der Tabelle 4.2 sind die für die verschiedenen Verknüpfungs-Operatoren eingestellten Skalierungsfaktoren $k_{\Delta u}$ dargestellt.

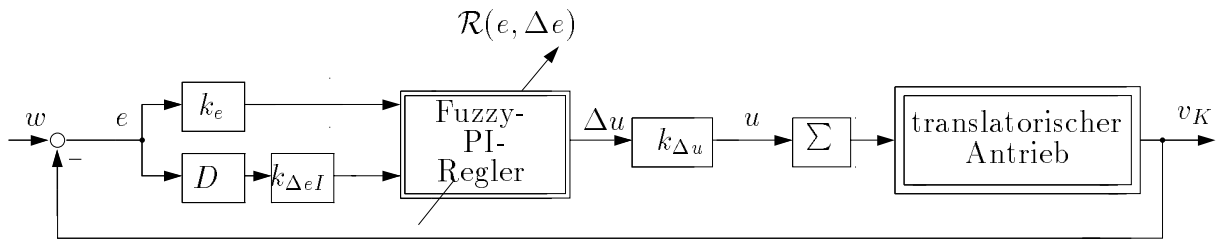


Bild 4.4: Regelkreis

Tabelle 4.2: Verknüpfungs-Operatoren \mathcal{R} mit den eingestellten Skalierungsfaktoren $k_{\Delta u}$

Verknüpfungs-Operatoren \mathcal{R}	Skalierungsfaktor $k_{\Delta u}$
Bild 4.5	
$\mathcal{R}_{\gamma=1,5}$	$k_{\Delta u} = 0,073$
\top_{ap}	$k_{\Delta u} = 0,039$
\top_{min}	$k_{\Delta u} = 0,023$
Bild 4.6	
$\mathcal{R}_{\gamma=1,5}$	$k_{\Delta u} = 0,073$
\top_{ap}	$k_{\Delta u} = 0,06$
\top_{min}	$k_{\Delta u} = 0,04$

Wie im Bild 4.5 zu erkennen ist, kann mit dem neuen parametrischen Verknüpfungs-Operator \mathcal{R}_{γ} für $\gamma = 1,5$ die geringste Anstiegszeit erreicht werden. Im Bild 4.6 sind die Skalierungsfaktoren $k_{\Delta u}$ für den jeweiligen Verknüpfungs-Operator so eingestellt, daß die Sprungantworten unter Verwendung aller hier untersuchten Verknüpfungs-Operatoren die gleiche Anstiegszeit erreichen. Bei den Verknüpfungs-Operatoren algebraisches Produkt \top_{ap} und dem Minimum-Operator \top_{min} wird dieses nur mit einer sehr großen Überschwingweite erreicht.

Im Bild 4.7 sind die jeweiligen Kennfelder der Fuzzy-PI-Regler unter Verwendung der unterschiedlichen Verknüpfungs-Operatoren für die Prämissenauswertung dargestellt. Wie deutlich zu erkennen ist, können mit dem neuen Verknüpfungs-Operator die Unstetigkeitsstellen an den Rändern der Fuzzy-Unterräume \mathcal{F} durch sehr glatte Verläufe ersetzt werden. Damit ist es möglich, unter Verwendung des neuen parametrischen Verknüpfungs-Operators wesentlich stetigere Stellgrößenaktionen zu berechnen.

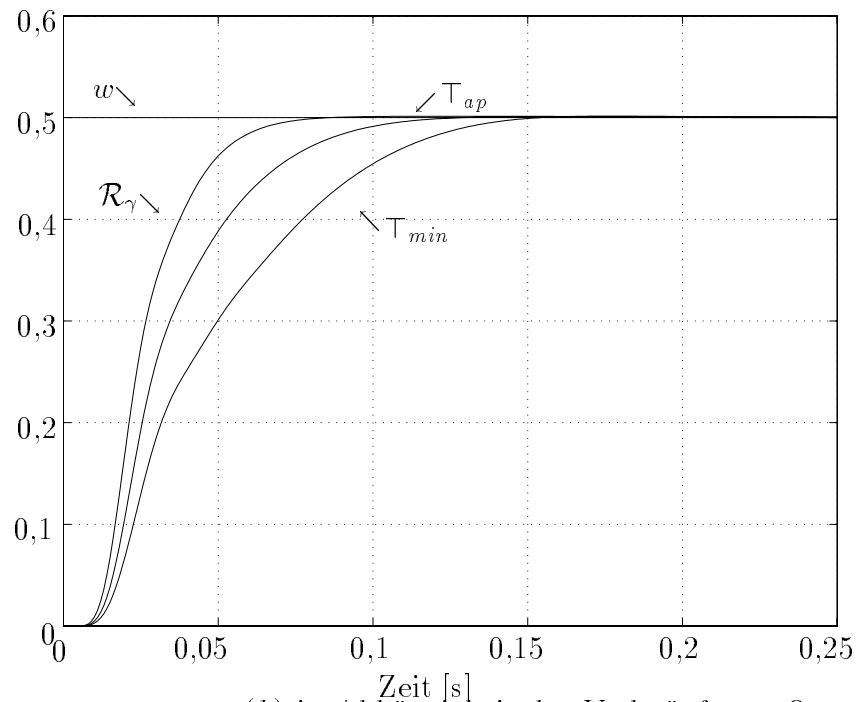


Bild 4.5: Sprungantworten $y(k)$ in Abhängigkeit der Verknüpfungs-Operatoren $\mathcal{R}_{\gamma=1,5}$, T_{ap} und T_{min} (ohne Überschwingen) für die Führungsgröße $w(k) = 0,5 \text{ m/s}$

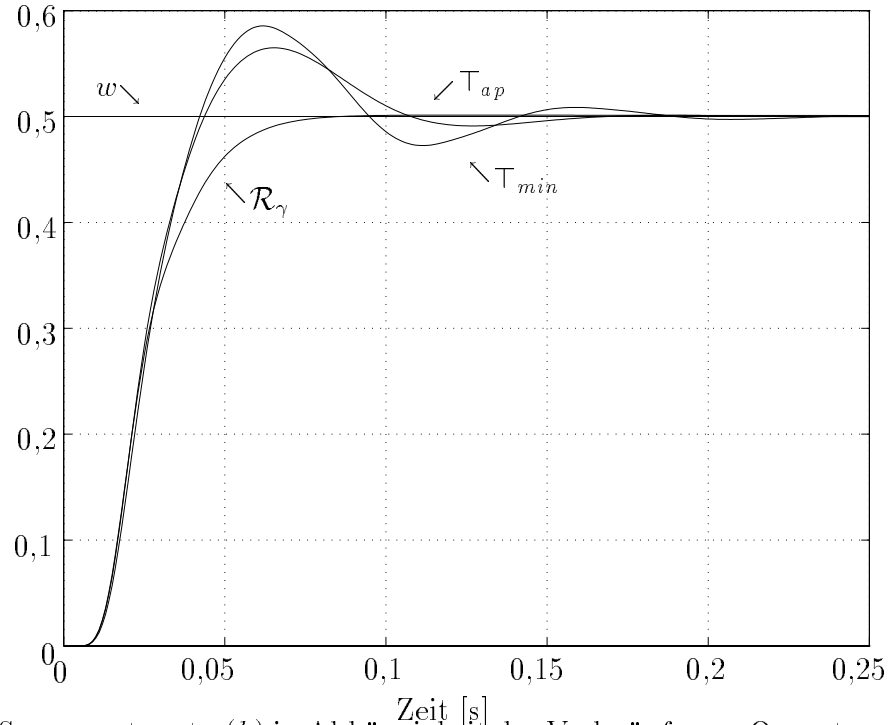


Bild 4.6: Sprungantwort $y(k)$ in Abhängigkeit der Verknüpfungs-Operatoren $\mathcal{R}_{\gamma=1,5}$, T_{ap} und T_{min} (mit der gleichen Anstiegszeit) für die Führungsgröße $w(k) = 0,5 \text{ m/s}$

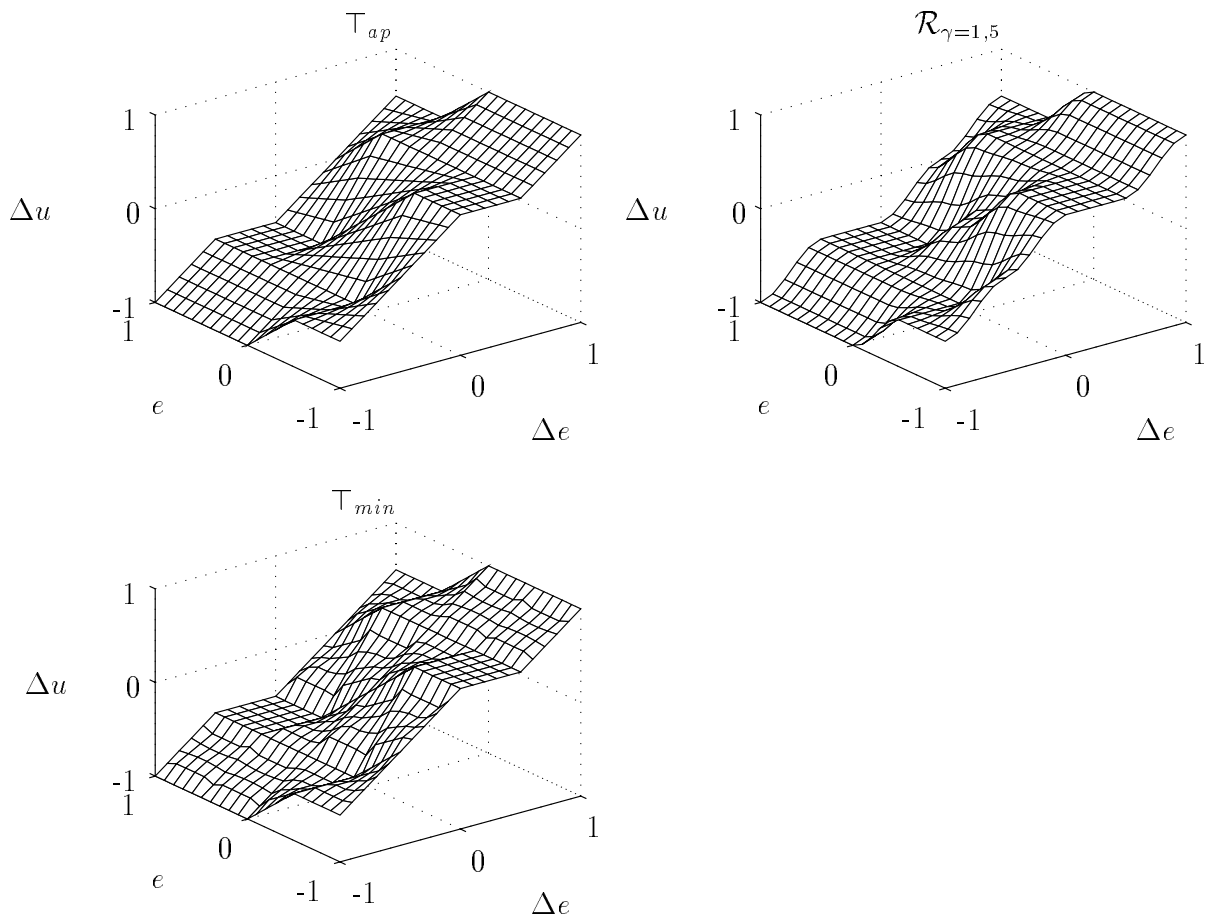


Bild 4.7: Kennfelder des Fuzzy-PI-Reglers unter Verwendung der Verknüpfungs-Operatoren zur Prämissenauswertung \top_{ap} , $\mathcal{R}_{\gamma=1,5}$ und \top_{min}

5 Zusammenfassung und Ausblick

Dieser Forschungsbericht¹ beschäftigt sich mit einer neuen axiomatischen Beschreibung zur konjunktiven und kompensativen Verknüpfung von Fuzzy-Aussagen. Die axiomatische Beschreibung stützt sich auf einen erstmalig eingeführten parametrischen Verknüpfungs-Operator. Dieser Verknüpfungs-Operator erfüllt für alle Parameter γ die Bewertungsgleichungen des logischen Bewertungskriteriums. Desweiteren erfüllt er die wichtigsten Bedeutungspostulate von Hamacher (1978) und zeigt ein hervorragendes Verhalten bezüglich der pragmatischen Aspekte von Zimmermann (1987). Mit dem neu entwickelten Verknüpfungs-Operator ist es möglich, durch die Variation des Parameters γ die Laufbereiche der t -Normen \top und der Durchschnitts-Operatoren D zu erreichen, also den konjunktiven und den kompensativen Bereich.

Die Anwendung des neuen parametrischen Verknüpfungs-Operators wird an den Ergebnissen einer Fuzzy-Regelung eines translatorischen hydraulischen Antriebs dokumentiert. Der neue parametrische Verknüpfungs-Operator zeigt im Vergleich zu den am häufigsten eingesetzten Operatoren zur Prämissenauswertung, dem algebraischen Produkt \top_{ap} und dem Minimum-Operator \top_{min} , ein deutlich besseres Regelungsverhalten (wesentlich kleinere Anstiegszeit) und unterstreicht damit seine Bedeutung in der Fuzzy-Regelung.

Im weiteren wird gezeigt, daß, wenn ein Verknüpfungs-Operator kommutativ ist, nur der 1. oder 2. Fall der Bewertungsgleichungen zu berechnen ist, um eine Aussage über den Verknüpfungs-Operator zu erhalten. In diesem Zusammenhang wird ein Ablaufplan zur Auswertung von Verknüpfungs-Operatoren über das logische Bewertungskriterium erstellt. Die in der Fuzzy-Regelung und der Fuzzy-Modellbildung am häufigsten eingesetzten t -Normen zur Prämissenauswertung werden anhand von Simulationen untersucht.

Die Ergebnisse einer Fuzzy-Regelung einer technischen Anlage (translatorischer hydraulischer Antrieb) beim Einsatz verschiedener t -Normen \top sind Grundlage zur Bewertung der t -Normen \top , welche zuvor durch die partiellen Differentialgleichungen des logischen Bewertungskriteriums bewertet wurden.

Das algebraische Produkt dokumentiert hier seine Überlegenheit gegenüber den anderen t -Normen. Er approximiert als einzige t -Norm das Expertenwissen, welches vom Anwender über die relationalen Regeln in die Fuzzy-Regelung implementiert wird. So konnte bei der Fuzzy-Regelung die Störung und der damit verbundene sehr unruhige Führungsverlauf mit der anschließenden Wissensakquirierung nur unter Anwendung des algebraischen Produkts \top_{ap} kompensiert werden. Diese zeigt, daß nicht nur theoretisch die partiellen Differentialgleichungen zur Auswahl von Verknüpfungs-Operatoren in Fuzzy-Systemen

¹Die Ergebnisse dieses Berichtes entstanden im Rahmen des Projektes „Fuzzy-Regler für lineare und bilineare Systeme bei veränderlichen Systemparametern“, das von der DFG Az.: Schw 120/53-2 gefördert wurde.

(Fuzzy-Regelung und Fuzzy-Modellbildung) ihre Berechtigung haben, sondern auch in der Praxis eine Relevanz besitzen.

Zukünftige Arbeiten werden sich detailliert mit der Symbiose des neuen parametrischen Verknüpfungs-Operators in Fuzzy-Systemen beschäftigen. Weiterhin werden neue Bewertungsgleichungen für Verknüpfungs-Operatoren zur Disjunktion erstellt. Es sollen dann Untersuchungen bezüglich der Kombination von Verknüpfungs-Operatoren zur Konjunktion, Kompensation und Disjunktion d. h. die Anwendung von Verknüpfungs-Operatoren zur Prämissenauswertung, Aktivierung, vertikaler und horizontaler Aggregation folgen. Ziel ist es, mögliche Symbiosen und Einflüsse der Kombinationen von Verknüpfungs-Operatoren in Fuzzy-Systemen zu bestimmen. Nach dem Abschluß dieser Arbeiten soll dann für das komplette logische Bewertungskriterium über partielle Differentialgleichungen ein Programm unter MAPLE erstellt werden. Dem Anwender soll somit eine Toolbox an die Hand gegeben werden, mit der das Verfahren zur Beurteilung von Verknüpfungs-Operatoren automatisiert wird. So werden die Forschungsarbeiten auf dem Bereich der regelungstechnischen Semantik bezüglich Fuzzy-Systemen fortgesetzt, ohne die plausible axiomatische Semantik der mehrwertigen Logik zu vernachlässigen.

6 Literaturverzeichnis

- Bandemer, H. und S. Gottwald.** 1993. *Einführung in die Fuzzy-Methoden*. Berlin: Akademie-Verlag.
- Berger, M.** 1994. *Analytische Darstellung von Standard-Fuzzy-Reglern*. Forschungsbericht 19/94, MSRT. Universität Duisburg.
- Berger, M.** 1995. *Zur Beurteilung von Fuzzy-Operatoren über partielle Differentialgleichungen und intuitive Kriterien*. Forschungsbericht 16/95, MSRT. Universität Duisburg.
- Berger, M., T. Bertram, H. Schwarz und C. Behmenburg** 1995. Heuristical Optimized Fuzzy Controllers for Classes of Systems. *Proc. of the 17 th IFIP TC7 Conference on System Modelling and Optimization, Prague/Czech Republic*. 266–269.
- Berger, M. und H. Schwarz.** 1995. Logical Valuation of Connectives for Fuzzy Control by Partial Differential Equations. *Journal of Applied Mathematics and Computer Science. Vol. 5 No. 4*. 101–118.
- Böhme, G.** 1993. *Fuzzy-Logik: Einführung in die algebraischen und logischen Grundlagen*. Berlin: Springer.
- Gottwald, S.** 1989. *Mehrwertige Logik: Eine Einführung in Theorie und Anwendung*. Berlin: Akademie-Verlag.
- Hamacher, H.** 1978. *Über logische Aggregationen nicht-binär explizierter Entscheidungskriterien: Ein axiomatischer Beitrag zur normativen Entscheidungstheorie*. Frankfurt: Rita G. Fischer.
- Kreisler, L., S. Gottwald und W. Stelzner.** 1990. *Nichtklassische Logik*. Berlin: Akademie-Verlag.
- Reuter, H.** 1995. *Zur Identifikation nichtlinearer Systemmodelle mit wenig A-priori-Informationen*. Dissertation Universität Duisburg. Fortschrittbericht VDI Reihe 8 Nr. 471. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Schönig, U.** 1992. *Logik für Informatiker*. Reihe Informatik, Band 56. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme: Systemtheoretische Grundlagen*. München: Oldenbourg.

- Thole, U., H.-J. Zimmermann und P. Zysno** 1978. On the suitability of minimum and product operators for the intersection of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems* 2. 167–180.
- Zimmermann, H.-J. und P. Zysno** 1979. Latent connectives in human decision making. *Fuzzy Sets and Systems* 4. 37–51.
- Zimmermann, H.J.** 1987. *Fuzzy Sets, Decision Making and Expert Systems*. Boston: Kluwer Academic.