

NSAS – ein Computer-Algebra-Paket zur Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme

Markus Lemmen, Torsten Wey und Mohieddine Jelali

Forschungsbericht Nr. 20/95

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Zur Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme werden in der Regel geeignete mathematische Werkzeuge, vorwiegend aus den Bereichen der *Differentialgeometrie* und *Differentialalgebra*, eingesetzt. Diese sind im allgemeinen weder Bestandteil der Ingenieurwissenschaften noch zeichnen sie sich durch eine übersichtliche Verwendbarkeit aus. Um ihren Einsatz in der technischen Anwendung zu unterstützen bzw. überhaupt zu ermöglichen, wird eine Auswahl der wichtigsten Operatoren in Form einer einfach zu handhabenden Funktionsbibliothek zur Verfügung gestellt. Ebenfalls enthalten sind darauf aufbauende Funktionen zur Analyse von Beobachtbarkeit, Erreichbarkeit und Entkoppelbarkeit nichtlinearer Systeme. Die Implementation erfolgt in der Programmiersprache MAPLE[®], die sich aufgrund ihrer integrierten Symbolverarbeitung besonders eignet. Das Programmpaket **NSAS** ist per `anonymous-ftp` unter der Adresse

`ftp.msrt.uni-duisburg.de`

erhältlich. Der benötigte Quellcode liegt im Verzeichnis

`/pub/NSAS/Maple-Source/`

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Formelzeichen und Bezeichnungen	II
1 Einleitende Übersicht	1
2 NSAS – Nonlinear Systems Analysis and Synthesis Package	4
3 Mathematische Werkzeuge	8
3.1 Lie-Ableitung	8
3.2 Lie-Klammer	8
3.3 Ableitung eines Kovektorfeldes entlang eines Vektorfeldes	12
4 Systemtheoretische Fragestellungen	13
4.1 Erreichbarkeit	13
4.2 Beobachtbarkeit	17
4.3 Entkopplung und exakte Linearisierung	22
5 Zusammenfassung und Ausblick	28
6 Literaturverzeichnis	29

Formelzeichen und Bezeichnungen

Abkürzungen

ALS	analytisches System mit linear eingehender Steuerung
AS	analytisches System
BLS	bilineares System
CAS	Computer-Algebra-System
LS	lineares System
MIMO	Multiple Input - Multiple Output
QLS	quadratisches System mit linear eingehender Steuerung
Σ	System

Algebraische Größen¹

\mathbf{A}	Systemmatrix
$\mathbf{a}(\mathbf{x})$	Systemvektor
$\mathbf{B}, \mathbf{B}(\mathbf{x})$	Eingangsmatrix
\mathbf{C}	Ausgangsmatrix
$\mathbf{c}(\mathbf{x})$	Ausgangsvektor
\mathbf{c}_i^T	i -te Zeile der Matrix \mathbf{C}
$\mathbf{D}(\mathbf{x})$	Entkopplungsmatrix
\mathbf{d}	Vektordifferenzengrad
d_i	Differenzengrad der Ausgangsgröße y_i
$\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})$	Vektorfeld
k	nichtnegative Ganzzahl, Laufindex
m	Dimension des Eingangsvektors $\mathbf{u}(t)$
n	Dimension des Zustandsvektors $\mathbf{x}(t)$, Systemordnung
p	Dimension des Ausgangsvektors $\mathbf{y}(t)$
$\mathbf{P}(\mathbf{x})$	lokal schwache Erreichbarkeitsdistribution/-matrix
t	Zeit
u_j	j -tes Elemente des Eingangsvektors
$\mathbf{u}(t)$	Eingangsvektor
$\bar{\mathbf{u}}$	abkürzende Schreibweise für $\{\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \dots\}$
x_k	k -tes Elemente des Zustandsvektors
$\mathbf{x}(t)$	Zustandsvektor
y_i	i -tes Elemente des Ausgangsvektors
$\mathbf{y}(t)$	Ausgangsvektor
$\bar{\mathbf{y}}$	abkürzende Schreibweise für $\{\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dots\}$
ϕ	Beobachtbarkeitsabbildung

¹ Im Sinne einer möglichst übersichtlichen Notation wird die Zeitabhängigkeit von Größen nicht an allen Stellen innerhalb des Berichts explizit vermerkt.

Φ	Fluß
Ω	Beobachtbarkeitsmatrix

Mengen

\mathcal{C}	Menge der Ausgangsableitungen
\mathcal{D}	Beobachtbarkeitskodistribution
\mathcal{K}	Menge der Beobachtbarkeitsindizes
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathcal{TX}	Tangentialzustandsmannigfaltigkeit
\mathcal{U}	Eingangsmannigfaltigkeit
\mathcal{X}	Zustandsmannigfaltigkeit
\mathcal{Y}	Ausgangsmannigfaltigkeit

Operatoren

$\text{ad}_{\mathbf{f}}^k \mathbf{g}$	k -fache Wiederholung der Lie-Klammer $(\underbrace{[\mathbf{f}, \dots]_k, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]}_k \dots)$
$d\lambda$	Differential (oder Gradient) einer skalarwertigen Funktion λ
$L_{\mathbf{f}}\lambda$	Lie-Ableitung einer skalarwertigen Funktion λ entlang eines Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$
$L_{\mathbf{f}}^k \lambda$	k -te Lie-Ableitung einer skalarwertigen Funktion λ entlang eines Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$
$[\mathbf{f}, \mathbf{g}]$	Lie-Klammer/Kommutator der Vektorfelder \mathbf{f} und \mathbf{g}
$L_{\mathbf{f}}\omega$	Ableitung des Kovektorfeldes ω entlang des Vektorfeldes \mathbf{f}
$N_{\mathbf{f}}\lambda$	Zusammengesetzter Differentialoperator
$\langle \rangle$	Inneres Produkt, Skalarprodukt
$()^T$	Transponierung
$()^*$	Zur Distribution $()$ duale Kodistribution $()^*$

1 Einleitende Übersicht

Lie-Ableitungen, Lie-Klammern, Ableitungen von Kovektorfeldern entlang Vektorfeldern, Gröbnerbasen und ähnliches mehr sind alles unerläßliche mathematische Werkzeuge zur Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme, jedoch nicht Bestandteil der üblichen mathematischen Ausbildung in der Ingenieurwissenschaft. Um nun diese Analyse- und Syntheseaufgaben des Ingenieurs zu unterstützen, wird in dieser Anleitung das computerunterstützte Algebraprogramm **NSAS** (**N**onlinear **S**ystem **A**nalysis and **S**ynthesis **P**ackage) vorgestellt.

Diese Anleitung dient weder der Einführung in die mathematische Theorie der Differentialgeometrie und der Differentialalgebra noch ist sie als solche zu verstehen. Für eine Einführung in diese Themen muß auf entsprechende Standardwerke und Artikel, wie z. B. (Brockett 1976, Casti 1985, Olver 1986, Fliess 1986, Nijmeijer und van der Schaft 1990, Bronstein und Semendjajew 1987, Schwarz 1991, Fliess und Glad 1993, Lemmen 1995, Isidori 1995) verwiesen werden.

Im Programmpaket **NSAS** werden Analyse- und Synthesemethoden für nichtlineare Systeme in Form der ALS (Analytische Systeme mit linear (affin) eingehender Steuerung) zur Verfügung gestellt (Schwarz 1991):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad , \quad (1.1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}(\mathbf{x}) \quad , \quad (1.1b)$$

mit zur Übersichtlichkeit unterdrückten Zeitargumenten t und $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$, wobei $\mathbf{a} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{TX}$, $\mathbf{B} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{TX}$ und $\mathbf{c} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ analytische Funktionen darstellen². In der Literatur wird auch häufig $\mathbf{c}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{C}\mathbf{x}$ gesetzt. Diese Darstellung ist für die Betrachtung von Ein-/Ausgangseigenschaften äquivalent, birgt aber bei der Untersuchung von Zustandsraumeigenschaften aufgrund der Dimensionserhöhung des Zustandsraumes im schlimmsten Fall eine Verfälschung der berechneten Aussagen in sich. Desweiteren werden in dieser Arbeit auch anstelle der Vektorfelder $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{b}_i(\mathbf{x})$ eines ALS auch allgemeine Vektorfelder $\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})$ betrachtet; diese sind für eine Untersuchung der allgemeinen Vektorfelder für den Spezialfall der Vektorfelder eines ALS dann eben durch $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{b}_i(\mathbf{x})$ zu ersetzen.

Für derart nichtlinear modellierte, approximierte reale Systeme existieren umfangreiche Analyse- und Synthesemethoden (Nijmeijer und van der Schaft 1990, Schwarz 1991, Fliess und Glad 1993, Isidori 1995), die jedoch eine große mathematische Komplexität besitzen. Insbesondere bei großen Systemordnungen kann eine Analyse/Synthese kaum noch mit vertretbarem Aufwand von Hand durchgeführt werden. Aus diesem Dilemma heraus sind

² Unter der Schreibweise \mathcal{TX} ist der Tangentialraum (Olver 1986, Nijmeijer und van der Schaft 1990, Isidori 1995) der Mannigfaltigkeit \mathcal{X} zu verstehen.

dann Programmpakete, wie z. B. **MACNON** (Birk 1992, Rothfuß u. a. 1993) und **POLYCON** (Forsman 1992), entstanden, die auf symbolverarbeitende Mathematiksoftware (Symbolics 1988, Char u. a. 1991) zurückgreifen und eine halbautomatisierte Analyse und Synthese auch für Systeme größerer Ordnungen ermöglichen. Das Softwarepaket **NSAS** reiht sich in dieses Konzept ein und ermöglicht eine halbautomatische Analyse und Synthese stark nichtlinearer, komplexer dynamischer Systeme: Nach Eingabe eines von Hand modellierten oder aber durch die Identifikationsstruktur festgelegten Systems werden Analyse Kriterien und Synthesemethoden in Form von Funktionsaufrufen eines symbolverarbeitenden Programms zur Verfügung gestellt.

Für die programmiertechnische Umsetzung des Programmpakets **NSAS** ist die weit verbreitete symbolverarbeitende mathematische Software **MAPLE**[®] (Char u. a. 1991) gewählt worden. Aufgrund der dadurch unterstützten Symbolverarbeitung besitzt die in dieser Anleitung zur Analyse/Synthese nichtlinearer Systeme beschriebene Software die folgenden Vorteile:

- Durch die Verwendung der exakten Arithmetik gehen keinerlei Informationen aufgrund unpräziser numerischer Berechnungen verloren,
- Parameterstudien werden vereinfacht,
- durch die Symbolverarbeitung entsteht eine beträchtliche Verkürzung der Rechenzeiten, wodurch für nichtlineare Systeme teilweise erst eine rechnergestützte Auswertung ermöglicht wird, und
- die Ergebnisse sind in der Regel für den Anwender/Ingenieur physikalisch interpretierbar und ermöglichen so eine gezielte Neu- oder Umkonstruktion des untersuchten Systems.

Diese Anleitung geht im einzelnen zunächst im Abschnitt 2 auf den Aufbau und die Bedeutung von Computer-Algebra-Systemen allgemein sowie deren Handhabung in **MAPLE**[®] anhand der Modellbildung nichtlinearer Systeme mittels ALS im besonderen ein. Desweiteren werden Aufbau und Inhalt des Paketes **NSAS** und das Einbinden von **NSAS** in **MAPLE**[®] erläutert und auf andere, bereits existierende symbolverarbeitende Programmpakete zur Unterstützung der Analyse und/oder Synthese nichtlinearer Systeme eingegangen. Eine Aufzählung der benötigten mathematischen Grundlagen, eine kurze Erläuterung dazu und deren Implementierung im Paket **NSAS** liefert Abschnitt 3. Auf systemtheoretische Fragestellungen und deren Umsetzung in **NSAS** geht Abschnitt 4 anhand der Untersuchung der Systemeigenschaften (lokal schwache) Erreichbarkeit, Beobachtbarkeit, Entkoppelbarkeit und Differenzengrad eines ALS ein. In diesem Zusammenhang sind insbesondere die Berechnung der Entkopplungsmatrix und Rückführgesetze für eine Synthese von Interesse. Diese Anleitung schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf weitere Aktivitäten ab.

In allen Abschnitten wird anhand vieler kleinerer und unterteilter größerer Beispiele die Arbeitsweise und der Aufruf der besprochenen Funktionen erläutert und so das Verständnis und die Einarbeitung in das hier vorgestellte Programmpaket erleichtert.

Das Programmpaket **NSAS** wird als free-ware-Erweiterung zur Simulationsplattform MAPLE[®] per `anonymous-ftp` unter der Adresse

`ftp.msrt.uni-duisburg.de`

zur Verfügung gestellt. Der Quellcode ist im Verzeichnis lautet:

`/pub/NSAS/Maple-Source/`

abgelegt.

2 NSAS – Nonlinear Systems Analysis and Synthesis Package

Symbolverarbeitende Programme, oder allgemeiner Computer-Algebra-Systeme (CAS), zeichnen sich durch ihre allgemeine Anwendbarkeit in allen Bereichen der Mathematik aus. Sie bieten im wesentlichen eine auf mathematische Fragestellungen ausgerichtete Programmierhochsprache an, die zum einen recht kompakt und zum anderen praktisch in der Anwendung ist. Darauf aufbauend umfassen CAS mehr oder minder umfangreiche Funktionsbibliotheken, die eine schnelle Lösung gängiger mathematischer Fragestellungen ermöglichen. Zu nennen sind beispielsweise *Polynom-Faktorisierung*, *Lösen von Differentialgleichungen*, *Integration*, *Matrizenrechnung*. Außerdem besitzen CAS in der Regel gut zu handhabende (obwohl in Windows[®] implementierte) Benutzer-Schnittstellen, mit deren Hilfe Ergebnisse aufbereitet und visualisiert werden können.

Neben anderen CAS hat sich in letzter Zeit MAPLE[®] (Char u. a. 1991, Hörhager 1995) als besonders geeignet für die Symbolverarbeitung erwiesen, nicht zuletzt aufgrund der Kooperation mit Matlab[®]. Die Akzeptanz der Programmiersprache MAPLE[®] im wissenschaftlichen Bereich ist mittlerweile so groß, daß für das hier vorgestellte Paket zur Analyse nichtlinearer Systeme (**NSAS**) gerade diese als Basis gewählt wurde. Gegenwärtig erfolgt die Entwicklung auf Personal Computern (PC) unter Windows 3.1. Durch die variable Einsetzbarkeit von MAPLE[®] ist **NSAS** aber auch auf anderen Rechnerplattformen ohne weiteres lauffähig.

Das **NSAS**-Paket umfaßt in der jetzigen Version Operatoren und Befehle, die eine differentialgeometrische Analyse nichtlinearer Regelungssysteme Σ_{ALS} , wie sie von Schwarz (1991) und Isidori (1995) eingeführt wurden, zulassen. Als Basis für die Bearbeitung systemtheoretischer Fragestellungen sind mathematische „Werkzeuge“ der Lie-Algebra wie

- Lie-Ableitung,
- Lie-Klammer und
- Ableitung eines Kovektorfeldes entlang eines Vektorfeldes

implementiert. Unter Verwendung dieser Operatoren sind für die Themenbereiche der

- Erreichbarkeit,
- Beobachtbarkeit und
- Entkoppelbarkeit

bereits Analysealgorithmen in **NSAS** verfügbar, die neben der Überprüfung dieser Kriterien auch die diesen zugrundeliegenden Erreichbarkeits-, Beobachtbarkeits- und Entkoppelungsmatrizen bestimmen können. Die automatische Synthese expliziter Rückführgesetze für die Systementkopplung rundet das „Angebot“ ab.

Besonderer Wert wurde bei der Implementierung auf die Erweiterungsfähigkeit gelegt. Die Programme sind modular gehalten, so daß gezielt bestimmte Themenbereiche ausgewählt werden können. Zur Zeit besteht **NSAS** aus den Modulen

NSASTOOLS	:	Lie-Operatoren, Grundrechenoperatoren
NSASREACH	:	Erreichbarkeit,
NSASOBSV	:	Beobachtbarkeit,
NSASDECP	:	Entkoppelbarkeit.

Eingelesen werden diese Module durch den Aufruf von

```
read(\'nsas\');
```

Eventuell muß hierbei ein lokaler Dateipfad ergänzt werden. Für die Speicherung von Systemmodellen in Form der \sum_{ALS} werden Dateien mit der Endung `.als` verwendet, die folgendermaßen aufgebaut sind:

#Ein Beispiel einer *.als - Datei

```
n := 6;
m := 2;
p := 2;
x := linalg[vector](n,[]);
a := linalg[vector](n,[
    0,
    x[1]^2,
    0,
    x[3]^2,
    x[4]^2,
    x[5]^2
]);
B := linalg[matrix](n,m,[
    1, 0,
    0, 0,
    0, 1,
    0, 0,
    0, 0,
    0, 0
]);
c := linalg[matrix](p,1,[
    x[2],
    x[6]
]);
```

Die Nomenklatur erfolgt hierbei in Anlehnung an Gl. (1.1). Natürlich sind die Bezeichnungen „a“, „B“ usw. nicht zwingend, da die Funktionen von **NSAS** nicht auf globale Variablen zugreifen, sondern durch Parameterübergabe die Systemparameter erhalten. Trotzdem hat sich eine einheitliche Struktur als sinnvoll erwiesen und sollte eingehalten werden. Dies gilt gerade im Hinblick auf mögliche Erweiterungen von **NSAS**. Zum Einlesen von Systemdaten werden die Befehle

```
translate_sys(filename) und read_sys(filename)
```

benutzt: `translate_sys(filename)` liest eine `.als`-Datei ein und speichert sie gleichzeitig im MAPLE[®]-eigenen Binärformat (Endung `.m`). `read_sys(filename)` liest eine Systemdatei in diesem Format ein. Die Ein-/Ausgabe als Binärdaten erweist sich aufgrund der erhöhten Verarbeitungsgeschwindigkeit dann als vorteilhaft, wenn umfangreiche Systeme bearbeitet werden. Eine explizite Angabe von Pfaden kann grundsätzlich entfallen, wenn in der Datei `nsas` die lokale Dateistruktur in den dafür vorgesehen Variablen abgelegt wird.

Es wurde weitgehend auf die Standardfunktionen von MAPLE[®] zurückgegriffen, jedoch war es notwendig, einige wenige Basisfunktionen hinzuzufügen: Zum einen gehört dazu der Befehl `extrank(matrix)`, der aus der Arbeit von Essen und Jager (1992) übernommen wurde. Er bestimmt wie `rank(matrix)` den Rang einer Matrix, kann jedoch auch auf nichtrationale Ausdrücke angewendet werden. Zum anderen werden mit `nsasaugment(a1, .., an)` und `nsasstack(a1, .., an)` Funktionen zur Verfügung gestellt, die eine beliebige Anzahl von Vektoren bzw. Matrizen horizontal oder vertikal zusammenfügen (vgl. `augment` und `stack`). Schließlich mußte die Funktion `Gram_Schmidt_orthog` (Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren, Bronsteijn und Semendjajew 1991:147) hinzugefügt werden, mit deren Hilfe ein Orthogonalsystem für eine gegebene Menge von Vektoren gewonnen werden kann. Im Gegensatz zur MAPLE[®]-Standardfunktion `GramSchmidt` ist bei der neuen Funktion die Verwendung symbolischer Argumente möglich.

In der weiteren Ausarbeitung werden die im Rahmen von **NSAS** verfügbaren Funktionen ausführlich diskutiert und deren Aufruf in MAPLE[®] erläutert. Als Beispiel für die prinzipielle Vorgehensweise dient eine **NSAS**-Session zur Analyse der Beobachtbarkeit der Räuber-Beute-Beziehung (Keller 1986):

NSAS-Session 2.1



```
> read('nsas');
> translate_sys(rb);
Reading rb.als
Writing rb.m

> read_sys(rb);
Reading rb.m
```



```
> observab_matrix(x,a,B,c);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_3 x_2 & k_3 x_1 - k_4 - u_{1,0} k_5 \end{bmatrix}$$

```
> observable(x,a,B,c);
```

```
true
```



3 Mathematische Werkzeuge

3.1 Lie-Ableitung

Die Lie-Ableitung ist eine im Rahmen der Differentialgeometrie häufig benutzte Differentialoperation, um die Empfindlichkeit einer Funktion λ von den Koordinaten \mathbf{x} in Richtung eines Vektorfeldes \mathbf{f} darzustellen. Sie verwendet also als Argumente eine (reellwertige, eventuell vektorwertige, Abschnitt 3.2) Funktion λ und ein Vektorfeld \mathbf{f} . Beide Argumente müssen auf einer Teilmenge (Teilmannigfaltigkeit) \mathcal{X} des \mathbb{R}^n definiert sein. Aus diesen Argumenten (und der implizit gegebenen Abhängigkeit von den Koordinaten \mathbf{x}) wird nun eine neue, glatte reellwertige Funktion (die Lie-Ableitung) definiert, die zu jedem $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ den Wert des inneren Produkts (Skalarprodukt) $\langle d\lambda(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle$ annimmt:

$$L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}) := \langle d\lambda(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{\partial\lambda(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\lambda(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}) \quad . \quad (3.1)$$

Die wiederholte Anwendung der Lie-Ableitung ist ebenfalls möglich. Soll also die Ableitung von λ zunächst entlang \mathbf{f} und danach entlang \mathbf{g} bestimmt werden, so lautet diese entsprechend

$$L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}))}{\partial\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad . \quad (3.2)$$

Soll λ nun mehrfach (z. B. genau k -mal) entlang des Vektorfeldes \mathbf{f} abgeleitet werden, so wird dies als $L_{\mathbf{f}}^k\lambda$ rekursiv dargestellt:

$$L_{\mathbf{f}}^k\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}^{k-1}\lambda(\mathbf{x}))}{\partial\mathbf{x}} \quad . \quad (3.3)$$

Die Berechnung der Lie-Ableitung ist im Programmpaket **NSAS** in MAPLE[®] unter dem Aufruf `nsaslie` für skalarwertige Funktionen λ

Aufruf:	<code>nsaslie(x, f(x), lambda)</code>
Argumente:	\mathbf{x} : Zustandskoordinaten (-vektor)
	$\mathbf{f}(\mathbf{x})$: Vektorfeld (Richtung)
	λ : Abzuleitende Funktion
Ausgabe:	Lie-Ableitung: $L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x})$ gemäß Gl. (3.1)
Package:	NSASTOOLS



realisiert.

3.2 Lie-Klammer

Die Lie-Klammer besitzt insbesondere für die Kriterienüberprüfung im Rahmen der differentialgeometrischen Erreichbarkeits-/Steuerbarkeitsanalyse nichtlinearer Systeme eine zentrale Bedeutung.

Für die Bildung einer Lie-Klammer sind zwei Vektorfelder $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ notwendig, wobei beide Vektorfelder auf einer Teilmenge \mathcal{X} des \mathbb{R}^n definiert sein müssen. Aus diesen beiden Vektorfeldern wird nun ein neues, glattes Vektorfeld, die Lie-Klammer $[\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{x})$ wie folgt gebildet:

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{x}) := \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad . \quad (3.4)$$

In lokalen Koordinaten und unter Verwendung der Jakobimatrizen bedeutet das:

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (3.5)$$

Soll die Lie-Klammer mehrfach auf dieselben Vektorfelder angewendet werden, so wird eine andere Schreibweise bevorzugt: $\text{ad}_{\mathbf{f}}^k \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Mit Hilfe dieser Notation ist nun einfacher ein k -maliges Kommutieren des Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ möglich:

$$\begin{aligned} \text{ad}_{\mathbf{f}}^k \mathbf{g}(\mathbf{x}) &:= [\mathbf{f}, \text{ad}_{\mathbf{f}}^{k-1} \mathbf{g}](\mathbf{x}) \quad \forall k \geq 1 \quad \text{und} \\ \text{ad}_{\mathbf{f}}^0 \mathbf{g}(\mathbf{x}) &:= \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Aus dieser Definition heraus ist leicht einsichtig, daß gilt: $\text{ad}_{\mathbf{f}}^1 \mathbf{g}(\mathbf{x}) = [\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})]$.

Die Bestimmung der Lie-Klammer erfolgt unter MAPLE[®] mit dem Aufruf der Funktion

Aufruf:	<code>nsasliebrack(x, f(x), g(x))</code>	
Argumente:	\mathbf{x}	: Zustandskoordinaten(-vektor)
	$\mathbf{f}(\mathbf{x})$: 1. Vektorfeld
	$\mathbf{g}(\mathbf{x})$: 2. Vektorfeld
Ausgabe:	Lie-Klammer: $\text{ad}_{\mathbf{f}}^1 \mathbf{g}(\mathbf{x}) = [\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{x})$ gemäß Gl. (3.4)	
Package:	NSASTOOLS	



aus dem Softwarepaket **NSAS-TOOLS**.

Die Berechnung einer Lie-Klammer soll am Beispiel eines vereinfachten Modells eines hydraulischen Translationsantriebes (Bild 3.1) erläutert werden. Dieser ist bereits in mehrfach beschrieben worden (Schwarz 1991, Jelali 1993, Lemmen 1995). Zunächst muß das Modell in MAPLE[®] mathematisch nachgebildet werden. Aus den Vektoren $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ kann dann eine (mehrfache) Lie-Klammer gebildet werden:

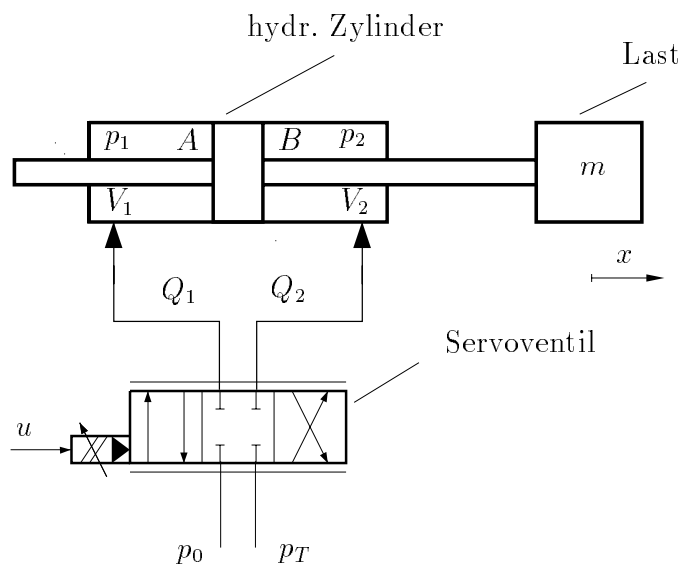


Bild 3.1: Elektrohydraulischer Antrieb

NSAS-Session 3.1



```

> with(linalg):
Laden der NSA-tools
> read('nsa');
> x:=matrix(3,1,[x_1,x_2,x_3]);

```



$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Eingabe des Vektorfelds $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ des ALS

```

> a:=matrix(3,1,[x_2,-f/m*x_2+A/m*x_3,-A*k*x_2]);

```

$$a := \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{f x_2}{m} + \frac{A x_3}{m} \\ -A k x_2 \end{bmatrix}$$

Eingabe des Vektorfelds $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ des ALS

```

> b:=matrix(3,1,[0,0,Q*k*sqrt(1-x_3/p_0)]);

```

$$b := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q k \sqrt{1 - \frac{x_3}{p_0}} \end{bmatrix}$$

Berechnung einer Lie-Klammer $[\mathbf{a}, \mathbf{b}](\mathbf{x})$:

> P_1 := nsaliebrack(x,a,b);

$$P_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{A Q k \sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}}}{m} \\ \frac{1}{2} \frac{Q k^2 A x_2}{\sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}} p_0} \end{bmatrix}$$

Berechnung einer weiteren Lie-Klammer $[\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]](\mathbf{x})$:

> P_2 := nsaliebrack(x,a,P_1);

P_2 :=

$$\begin{bmatrix} \frac{A Q k \sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}}}{m} \\ -\frac{1}{2} \frac{A^2 Q k^2 x_2}{m \sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}} p_0} + \frac{1}{2} \frac{A Q k (-2 f p_0 + 2 f x_3 - A k x_2 m)}{m^2 \sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}} p_0} \\ \frac{1}{4} Q k^2 A \end{bmatrix} \left(-2 f x_2 p_0 + 2 f x_2 x_3 + 2 A x_3 p_0 - 2 A x_3^2 - k A x_2^2 m \right) / \left(m \left(-\frac{-p_0 + x_3}{p_0} \right)^{3/2} p_0^2 \right) - \frac{A^2 k^2 Q \sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}}}{m}$$



Die Lie-Klammer kann übrigens auch als ein Spezialfall der Lie-Ableitung angesehen werden: Betrachtet man die Lie-Ableitung eines Vektorfeldes $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ entlang der Integralkurve (Trajektorie) des Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, so wird die folgende Änderung von $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ entlang der Trajektorie $\Phi_t^{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ berechnet:

$$(\mathbf{L}_{\mathbf{f}}\mathbf{g})(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \Phi_{-t}^{\mathbf{f}} \right) (\Phi_t^{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) \mathbf{g}(\Phi_t^{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right) \quad (3.7)$$

$$= \left(\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} \right) \mathbf{f} - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} \right) \mathbf{g} \right) (\mathbf{x}) \quad (3.8)$$

$$= [\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{x}) \quad (3.9)$$

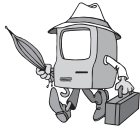
Aus diesem Grund wird die Lie-Klammer als (wenn auch selten) Lie-Ableitung 2. Stufe bezeichnet.

3.3 Ableitung eines Kovektorfeldes entlang eines Vektorfeldes

Eine insbesondere für die differentialgeometrische Beobachtbarkeitsanalyse wichtige Funktion ist die Ableitung eines Kovektorfeldes $\omega(\mathbf{x})$ entlang eines Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, welche jeweils auf einer Teilmenge $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ definiert sein müssen. Die in diesem Abschnitt beschriebene Ableitung erzeugt nun zu jedem $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ ein neues Kovektorfeld $L_{\mathbf{f}}\omega$:

$$L_{\mathbf{f}}\omega(\mathbf{x}) := \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial \omega^T}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \omega(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \quad . \quad (3.10)$$

Die so definierte Funktion heißt *Ableitung von ω entlang \mathbf{f}* . Berechnet wird diese Ableitung mit Hilfe des Funktionsaufrufes `nsascoder` des Programmpaketes **NSAS**:

Aufruf:	<code>nsascoder(\mathbf{x}, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, ω)</code>	
Argumente:	\mathbf{x} : Zustandskoordinaten(-vektor) $\mathbf{f}(\mathbf{x})$: Vektorfeld ω : Abzuleitendes Kovektorfeld	
Ausgabe:	Ableitung des Kovektorfeldes entlang des Vektorfeldes: $L_{\mathbf{f}}\omega(\mathbf{x})$ gemäß Gl. (3.10)	
Package:	NSASTOOLS	

Aufgrund der Analogie zur Lie-Ableitung 1. Stufe (3.1) und 2. Stufe (3.4) heißt diese Funktion auch Lie-Ableitung 3. Stufe.

4 Systemtheoretische Fragestellungen

4.1 Erreichbarkeit

Bei der Untersuchung eines Systems bezüglich der Erreichbarkeit wird überprüft, ob es möglich ist, von einem beliebigen Startpunkt aus jeweils alle anderen Punkte des Zustandsraums auf den Trajektorien des gegebenen Systems zu erreichen (Schwarz 1991, Lemmen 1995, Isidori 1995).

Ein verwertbares Kriterium für nichtlineare Systeme existiert jedoch lediglich für die Eigenschaft der schwachen Erreichbarkeit. Bei dieser Eigenschaft wird die Trajektorienrichtung bezüglich der Zeitparametrisierung unterdrückt und für diese vereinfachten Trajektorien eine Erreichbarkeitsuntersuchung durchgeführt. Nichtsdestotrotz kann eine Untersuchung der schwachen Erreichbarkeit als eine notwendige Bedingung für die Erreichbarkeit interpretiert werden.

Ein Kriterium für einen derartigen Test findet sich z. B. in (Nijmeijer und van der Schaft 1990, Schwarz 1991, Lemmen 1995, Isidori 1995). Dabei wird eine Erreichbarkeitsdistribution bestimmt und deren Dimension überprüft. Ist die Dimension gleich der des Zustandsraumes (Tangentialzustandsraumes), so ist das System schwach erreichbar. Es ergibt sich nun das folgende, im Paket **nsasreach** implementierte Kriterium:

Kriterium 4.1 (Schwarz 1991, Lemmen 1995, Isidori 1995)

Es sei

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) := \left[\mathbf{P}_0(\mathbf{x}) : \mathbf{P}_1(\mathbf{x}) : \dots \right] \quad (4.1)$$

$$\mathbf{P}_0(\mathbf{x}) := \left[\mathbf{b}_1(\mathbf{x}) : \dots : \mathbf{b}_m(\mathbf{x}) \right] \quad (4.2)$$

$$\mathbf{P}_k(\mathbf{x}) := \left[\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{P}_{k-1}(\mathbf{x}) \right] \quad \forall k = 1, 2, \dots, \quad (4.3)$$

dann gibt

$$\text{rang } \mathbf{P}(\mathbf{x}) = r \leq n \quad (4.4)$$

die Dimension der lokal schwach erreichbaren Untermannigfaltigkeit in \mathcal{M}_0 an. \square

Bereits in Abschnitt 3.2 ist die Berechnung einer Lie-Klammer mit dem Paket **NSAS** am Beispiel eines translatorischen Hydraulikantriebes vorgestellt worden. Die Dimension der lokal schwach erreichbaren Mannigfaltigkeit kann dann mit dem Aufruf `extrank(P)` unter **MAPLE**[®] bestimmt werden.

Das derart auszuwertende Kriterium kann nun mit Hilfe der **NSAS-TOOLS** berechnet werden. Dies veranschaulicht die nächste **NSAS-Session**, welche die in der **NSAS-Session** 3.1 getätigten Eingaben weiter verarbeitet.

NSAS-Session 4.1



Berechnung einer Lie-Klammer $[\mathbf{a}, \mathbf{b}](\mathbf{x})$:

```
> P_1 := nsaliebrack(x,a,b);
```



$$P_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{A Q k \sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}}}{m} \\ \frac{1}{2} \frac{Q k^2 A x_2}{\sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}} p_0} \end{bmatrix}$$

Berechnung einer weiteren Lie-Klammer $[\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]](\mathbf{x})$:

```
> P_2 := nsaliebrack(x,a,P_1);
```

$$P_2 := \begin{bmatrix} \frac{A Q k \sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}}}{m} \\ -\frac{1}{2} \frac{A^2 Q k^2 x_2}{m \sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}} p_0} + \frac{1}{2} \frac{A Q k (-2 f p_0 + 2 f x_3 - A k x_2 m)}{m^2 \sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}} p_0} \\ \frac{1}{4} Q k^2 A \\ (-2 f x_2 p_0 + 2 f x_2 x_3 + 2 A x_3 p_0 - 2 A x_3^2 - k A x_2^2 m) / \left(m \left(-\frac{-p_0 + x_3}{p_0} \right)^{3/2} p_0^2 \right) - \frac{A^2 k^2 Q \sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}}}{m} \end{bmatrix}$$

Bestimmung der schwachen Erreichbarkeitsmatrix \mathbf{P} :

```
> P := nsaaugment(P_2,P_1,b);
```

$$\begin{aligned}
P := & \left[\begin{array}{c} \frac{A Q k \sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}}}{m}, 0, 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{A^2 Q k^2 x_2}{m \sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}} p_0} + \frac{1}{2} \frac{A Q k (-2 f p_0 + 2 f x_3 - A k x_2 m)}{m^2 \sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}} p_0}, \\ -\frac{A Q k \sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}}}{m}, 0 \end{array} \right] \\
& \left[\begin{array}{c} \frac{1}{4} Q k^2 A \\ (-2 f x_2 p_0 + 2 f x_2 x_3 + 2 A x_3 p_0 - 2 A x_3^2 - k A x_2^2 m) / \left(m \right. \\ \left. \left(-\frac{-p_0 + x_3}{p_0} \right)^{3/2} p_0^2 \right) - \frac{A^2 k^2 Q \sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}}}{m}, \frac{1}{2} \frac{Q k^2 A x_2}{\sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}} p_0} \\ \left. , Q k \sqrt{1 - \frac{x_3}{p_0}} \right]
\end{aligned}$$

Berechnen der Dimension der schwach erreichbaren Mannigfaltigkeit:

> `extrank(P);`

3



Dieses Kriterium für ALS ist im Paket **NSAS** aber auch direkt unter der Funktion

Aufruf: `reach_matrix(x, a(x), B(x))`
 Argumente: **x** : Zustandskoordinaten(-vektor)
a(x) : Vektorfeld
B(x) : Systemeingangsvektorfelder
 Ausgabe: Erreichbarkeitsmatrix: **P(x)** gemäß Kriterium 4.1
 Package: NSASREACH



implementiert worden.

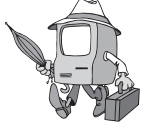
Eine reine Überprüfung der Eigenschaft der lokal schwachen Erreichbarkeit liefert die **NSAS-Funktion reachable**:

Aufruf: `reachable(x, a(x), B(x))`

Argumente: **x** : Zustandskoordinaten(-vektor)
a(x) : Vektorfeld
B(x) : Systemeingangsmatrix

Ausgabe: Erreichbarkeit: **true** für **ja** und **false** für **nein** gemäß Kriterium 4.1

Package: NSASREACH



NSAS-Session 4.2



Direkte Bestimmung der Erreichbarkeitsmatrix **P**:

`> Pnsa:=reach_matrix(x,a,b);`

$Pnsa :=$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{A Q k \sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}}}{m}, 0, 0 \right] \\ & \left[-\frac{1}{2} \frac{A^2 Q k^2 x_2}{m \sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}} p_0} + \frac{1}{2} \frac{A Q k (-2 f p_0 + 2 f x_3 - A k x_2 m)}{m^2 \sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}} p_0}, \right. \\ & \left. -\frac{A Q k \sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}}}{m}, 0 \right] \\ & \left[\frac{1}{4} Q k^2 A (-2 f x_2 p_0 + 2 f x_2 x_3 + 2 A x_3 p_0 - 2 A x_3^2 \right. \\ & \left. - k A x_2^2 m) / \left(m \left(-\frac{-p_0 + x_3}{p_0} \right)^{3/2} p_0^2 \right) - \frac{A^2 k^2 Q \sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}}}{m}, \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \frac{Q k^2 A x_2}{\sqrt{-\frac{-p_0 + x_3}{p_0}} p_0}, Q k \sqrt{1 - \frac{x_3}{p_0}} \right] \end{aligned}$$

Bestimmen der Dimension von $\mathbf{P} = Pnsa$:



```
> extrank(Pnsa);
```

```
3
```

Direktes Überprüfen der Erreichbarkeit

```
> reachable(x,a,b);
```

```
true
```



4.2 Beobachtbarkeit

Die Untersuchung der Struktureigenschaft Beobachtbarkeit ist eine wichtige Voraussetzung zur Auslegung von Zustandsbeobachtern. Dabei wird überprüft, ob aus der Kenntnis der Ein- und Ausgangssignale die Zustandsgrößen des Systems ermittelt werden können. Zu dieser Überprüfung dienen die Begriffe Beobachtbarkeitsabbildung und -matrix.

Mit Hilfe des Differentialoperators

$$\mathbf{N}_{\mathbf{f}} := \mathbf{L}_{\mathbf{a}} + \sum_{i=1}^m u_i \mathbf{L}_{\mathbf{b}_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^p u_j^{(i)}(t) \frac{\partial}{\partial u_j^{(i-1)}}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{N}_{\mathbf{f}}^k = \mathbf{N}_{\mathbf{f}}(\mathbf{N}_{\mathbf{f}}^{k-1}) \quad (4.6)$$

läßt sich die Menge

$$\mathcal{C}_r = \left\{ \mathbf{N}_{\mathbf{f}}^{(j-1)} c_i(\mathbf{x}) : i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, r; r \geq n \right\} \quad (4.7)$$

konstruieren, aus der die Beobachtbarkeitskodistribution

$$\mathfrak{D}_r = \text{span} \left\{ dc_1(\mathbf{x}), d\mathbf{N}_{\mathbf{f}} c_1(\mathbf{x}), \dots, d\mathbf{N}_{\mathbf{f}}^r c_1(\mathbf{x}); dc_2(\mathbf{x}), d\mathbf{N}_{\mathbf{f}} c_2(\mathbf{x}), \dots, d\mathbf{N}_{\mathbf{f}}^r c_2(\mathbf{x}); \dots; dc_p(\mathbf{x}), d\mathbf{N}_{\mathbf{f}} c_p(\mathbf{x}), \dots, d\mathbf{N}_{\mathbf{f}}^r c_p(\mathbf{x}) \right\} \quad (4.8)$$

mit

$$dc_i := \frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial c_i}{\partial x_1}, \frac{\partial c_i}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial c_i}{\partial x_n} \right] \quad (4.9)$$

gebildet wird. Dabei bezeichnet $L_{\boldsymbol{\gamma}}$ die Lie-Ableitung entlang des Vektorfeldes $\boldsymbol{\gamma}$. Die korrespondierende Matrixform zu Gl. (4.8) wird als Beobachtbarkeitsmatrix $\boldsymbol{\Omega}_r$, die zu Gl. (4.7) als Beobachtbarkeitsabbildung ϕ bezeichnet. Die Dimension der Beobachtbarkeitskodistribution ist gleich dem Rang der zugehörigen Beobachtbarkeitsmatrix.

Ein geometrischer Test zur Überprüfung der lokal (schwachen) Beobachtbarkeit in \mathbf{x}_0 kann folgendermaßen formuliert werden:

Kriterium 4.2

Das System \sum_{ALS} ist lokal (schwach) beobachtbar in \mathbf{x}_0 , wenn für mindestens eine zulässige Steuerung $\mathbf{u}(t)$ eine offene Umgebung \mathcal{X}_0 um \mathbf{x}_0 und eine Menge $\mathcal{K} = \{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_p\}$ von natürlichen Zahlen (sog. Beobachtbarkeitsindizes) derart existieren, daß folgende Bedingungen für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_0$ erfüllt sind:

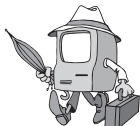
$$\text{i) } \sum_{i=1}^p \kappa_i = n \text{ und } \kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_p .$$

ii) Die Beobachtbarkeitskodistribution \mathfrak{D}_n spannt nach einer geeigneten Umordnung der $c_i(\mathbf{x})$ den Kotangententialraum $\mathcal{T}^*(\mathbb{R}^n)$ auf:

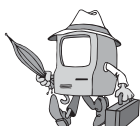
$$\dim \mathfrak{D}_n = \text{rang } \mathbf{\Omega}_n = n . \quad (4.10)$$

iii) Wenn eine andere Menge $\mathcal{L} = \{l_1, l_2, \dots, l_p\}$ von natürlichen Zahlen existiert, die den Bedingungen i) und ii) genügt, dann gilt: $\mathcal{L} \geq \mathcal{K}$ in der lexographischen Ordnung, das heißt: $(l_1 \geq \kappa_1)$ oder $(l_1 = \kappa_1 \text{ und } l_2 \geq \kappa_2)$ oder $(l_1 = \kappa_1)$ und $(l_2 = \kappa_2 \text{ und } l_3 \geq \kappa_3)$ usw. . \square

Berechnen läßt sich die Beobachtbarkeitsabbildung für ALS im **NSAS**-Paket mit Hilfe der Funktion

Aufruf:	<code>observab_map(\mathbf{x}, $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, $\mathbf{c}(\mathbf{x})$)</code>	
Argumente:	\mathbf{x} : Zustandsvektor	
	$\mathbf{a}(\mathbf{x})$: Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{x})$	
	$\mathbf{B}(\mathbf{x})$: Eingangsmatrix $\mathbf{B}(\mathbf{x})$	
	$\mathbf{c}(\mathbf{x})$: Ausgangsvektor $\mathbf{c}(\mathbf{x})$	
Ausgabe:	Beobachtbarkeitsabbildung: $\phi(\mathbf{x})$ gemäß Gl. (4.7)	
Package:	NSASOBSV	

Zur Berechnung der Beobachtbarkeitsmatrix steht die Funktion `observab_matrix` zur Verfügung:

Aufruf:	<code>observab_matrix(\mathbf{x}, $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, $\mathbf{c}(\mathbf{x})$)</code>	
Argumente:	\mathbf{x} : Zustandsvektor	
	$\mathbf{a}(\mathbf{x})$: Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{x})$	
	$\mathbf{B}(\mathbf{x})$: Eingangsmatrix $\mathbf{B}(\mathbf{x})$	
	$\mathbf{c}(\mathbf{x})$: Ausgangsvektor $\mathbf{c}(\mathbf{x})$	
Ausgabe:	Beobachtbarkeitsmatrix: $\mathbf{\Omega}(\mathbf{x})$ gemäß Gl. (4.8)	
Package:	NSASOBSV	

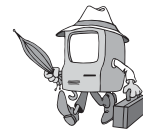
Eine reine (strukturelle) Überprüfung der lokalen Beobachtbarkeit liefert die **NSAS**-Funktion `observable`:

Aufruf: `observable(x, a(x), B(x), c(x))`

Argumente: \mathbf{x} : Zustandsvektor
 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$: Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{x})$
 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$: Eingangsmatrix $\mathbf{B}(\mathbf{x})$
 $\mathbf{c}(\mathbf{x})$: Ausgangsvektor $\mathbf{c}(\mathbf{x})$

Ausgabe: Beobachtbarkeit: **true** für **ja** und **false** für **nein**
gemäß Kriterium 4.2

Package: NSASOBSV



Die folgende **NSAS**-Session veranschaulicht die Beobachtbarkeitsanalyse eines eingelenkigen Roboterarms (Isidori 1995:216):

NSAS-Session 4.3



```
> read('bkrobot.ms'):
```

```
n := 4
```

```
m := 1
```

```
p := 1
```

$$a := \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -\frac{K x_1}{J_1 N^2} + \frac{K x_2}{J_1 N} - \frac{F_1 x_3}{J_1} \\ \frac{K x_1}{J_2 N} - \frac{K x_2}{J_2} - \frac{M g d \cos(x_2)}{J_2} - \frac{F_2 x_4}{J_2} \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$



```

c := [x2]

> observab_map(x,a,B,c);

bkabb :=

$$\left[ \begin{array}{c} x_2, x_4, -\frac{-K x_1 + K x_2 N + M g d \cos(x_2) N + F_2 x_4 N}{J_2 N}, \\ \left( K x_3 J_2 - N x_4 J_2 K + N x_4 J_2 M g d \sin(x_2) - F_2 K x_1 + \right. \\ \left. F_2 K x_2 N + F_2 M g d \cos(x_2) N + F_2^2 x_4 N \right) / (J_2^2 N) \end{array} \right]$$


> observab_matrix(x,a,B,c);

bkmat :=

$$\begin{bmatrix} 0, 1, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 1 \\ \left[ \frac{K}{J_2 N}, \frac{-K + M g d \sin(x_2)}{J_2}, 0, -\frac{F_2}{J_2} \right] \\ \left[ -\frac{F_2 K}{J_2^2 N}, \frac{x_4 J_2 M g d \cos(x_2) + F_2 K - F_2 M g d \sin(x_2)}{J_2^2}, \frac{K}{J_2 N}, \right. \\ \left. \frac{-K J_2 + J_2 M g d \sin(x_2) + F_2^2}{J_2^2} \right] \end{bmatrix}$$


> extrank(bkmat);

4

> observable(x,a,B,c);

true

```



Für MIMO-ALS liefert die Funktion `observab_matrix` eine Matrix der Dimension $np \times n$. Daher ist es sinnvoll, aus dieser Matrix eine sog. Auswahlmatrix (Keller 1986, Birk 1992) zu bilden, wobei nur die ersten n Zeilen, die (strukturell) linear unabhängig sind, übernommen werden. Zur Untersuchung der linearen Unabhängigkeit wird das bereits in Abschnitt 2 erwähnte Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren herangezogen. Zur Auswahl-Beobachtbarkeitsmatrix gehört dann eine Auswahl-Beobachtbarkeitsabbildung mit n Elementen. Die Ermittlung der Auswahl-Beobachtbarkeitsmatrix erfolgt mit

Aufruf: `selected_observab_matrix(matrix)`
 Argumente: `matrix` : $(np \times n)$ Beobachtbarkeitsmatrix
 Ausgabe: Liste der Beobachtbarkeitsindizes,
 $(n \times n)$ Auswahl-Beobachtbarkeitsmatrix
 Package: NSASOBSV



Als Beispiel soll hier das Modell eines elastischen Roboterarms mit einem Gelenk (Raghavan und Hedrick 1994) analysiert werden:

NSAS-Session 4.4



$n := 4$

$m := 1$

$p := 2$

$$a := \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{k(x_3 - x_1)}{J_m} - \frac{B x_2}{J_m} \\ x_4 \\ -\frac{k(x_3 - x_1)}{J_1} - \frac{M g h \sin(x_3)}{J_1} \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_t}{J_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$c := [x_2, x_1]$



```
> mtx:=observab_matrix(x,a,B,c);
```

```
mtx :=
  [0,1,0,0]
  [1,0,0,0]
  [-k/J_m, -B/J_m, k/J_m, 0]
  [0,1,0,0]
  [Bk/J_m^2, (-kJ_m+B^2)/J_m^2, -Bk/J_m^2, k/J_m]
  [-k/J_m, -B/J_m, k/J_m, 0]
  [-J_1 k^2 J_m + J_1 B^2 k - k^2 J_m^2 / (J_m^3 J_1), -2Bk J_m J_1 + J_1 B^3 / (J_m^3 J_1),
  - (J_1 k^2 J_m - J_1 B^2 k + k^2 J_m^2 + k J_m^2 M g h cos(x_3)) / (J_m^3 J_1), -Bk/J_m^2]
  [Bk/J_m^2, (-kJ_m+B^2)/J_m^2, -Bk/J_m^2, k/J_m]
```

```
> sel_mtx:=selected_observab_matrix(mtx);
```

```
table([
  1 = 3
  2 = 1
])
```

$$sel_mtx := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J_m} & -\frac{B}{J_m} & \frac{k}{J_m} & 0 \\ \frac{Bk}{J_m^2} & \frac{-kJ_m+B^2}{J_m^2} & -\frac{Bk}{J_m^2} & \frac{k}{J_m} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$


4.3 Entkopplung und exakte Linearisierung

Der nun folgende Abschnitt befaßt sich mit der Analyse der Ein-/Ausgangsentkoppelbarkeit nichtlinearer Mehrgrößensysteme sowie der Synthese von entkoppelnden Rückführgesetzen. Die zentrale Bedeutung dieser Fragestellung für eine Auslegung nichtlinearer

Regelungskonzepte ist darin zu sehen, daß neben der Entkopplung auch gleichzeitig die Probleme der *exakten Linearisierung* und der *Störentkopplung* Berücksichtigung finden (Schwarz 1991). Ein Mehrgrößensystem wird als *entkoppelt* bezeichnet, wenn jeder Ausgang $y_i(t)$ durch genau einen korrespondierenden Eingang $w_i(t)$, nicht jedoch durch $w_j(t)$ für $j \neq i$ beeinflusst wird.

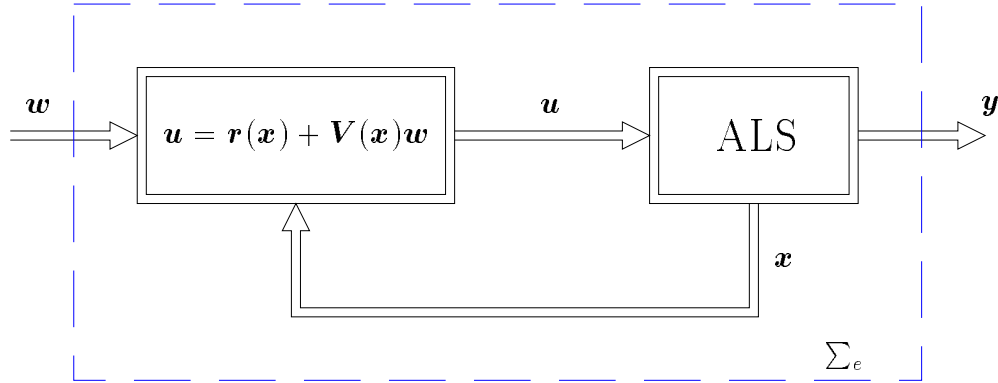


Bild 4.1: Ein-/Ausgangsentkopplung eines ALS mittels statischer Zustandsrückführung

Formal kann diese Eigenschaft folgendermaßen beschrieben werden: Für einen Anfangszustand \mathbf{x}_0 und ein beliebiges Paar von Eingangsfunktionen $\mathbf{w}_a(t)$ und $\mathbf{w}_b(t)$, die in der i -ten Komponente übereinstimmen, d. h.

$$(\mathbf{w}_a(t))_i = (\mathbf{w}_b(t))_i \quad \forall t \geq 0 \quad (4.11)$$

erfüllen, sind die zugehörigen Ausgangsfunktionen ebenfalls in der i -ten Komponente identisch (Isidori 1995):

$$(\mathbf{y}_a(t))_i = (\mathbf{y}_b(t))_i \quad \forall t \geq 0 \quad . \quad (4.12)$$

Im einzelnen besteht die Aufgabe der *Ein-/Ausgangsentkopplung* nun darin, für ein gegebenes nicht entkoppeltes System eine statische Zustandsrückführung

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}(\mathbf{x}) + \mathbf{V}(\mathbf{x})\mathbf{w} \quad ; \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^m \quad (4.13)$$

gemäß Blockschaltbild 4.1 auszulegen, so daß das resultierende System gerade entkoppeltes Verhalten aufweist. Nach (Schwarz 1991) ergibt sich die sogenannte *Standard-Entkopplungsrückführung* aus Gl. (4.13), wenn die Zuordnungen

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{V}(\mathbf{x}) &= \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

verwendet werden. Hierbei beschreibt $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ die Entkopplungsmatrix und $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ wird aus zeitlichen Ableitungen der Ausgangsgrößen gebildet (Schwarz 1991:366). Die so definierte Zustandsrückführung stellt ein entkoppeltes Verhalten gemäß obiger Beschreibung sicher, gleichzeitig verhält sich der entkoppelte Systemteil *linear* zwischen Ein- und Ausgängen. In Abhängigkeit vom *Differenzegrad* \mathbf{d} existiert ggf. ein zusätzlicher nichtlinearer Systemteil, die sogenannte *Nullodynamik*, die jedoch unbeobachtbar ist und somit das Ein-/Ausgangsverhalten nicht beeinflusst.

Von essentieller Bedeutung für die Bestimmung der Rückführung (4.13) ist zum einen der schon angesprochene Differenzegrad \mathbf{d} sowie die *Entkopplungsmatrix* $\mathbf{D}(\mathbf{x})$. Für den Differenzegrad gilt:

Definition 4.1 (Schwarz 1991)

Ein Mehrgrößen-ALS der Form (1.1) mit $m = p$ hat den (Vektor-) Differenzegrad \mathbf{d} für alle \mathbf{x} in einer Umgebung von \mathbf{x}_0 :

$$\mathbf{d} = \{d_1, d_2, \dots, d_m\} \quad (4.15)$$

mit

$$d_i = \min_{r \in \mathbb{N}^+} L_{\mathbf{b}_j} L_{\mathbf{a}}^{r-1} c_i(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0} \quad ; \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, m \end{array} . \quad (4.16)$$

□

Anschaulich bedeutet (4.16), daß d_i gerade der Anzahl der zeitlichen Differentiationen von y_i entspricht, bis mindestens eine Eingangsgröße u_j explizit darin enthalten ist:

$$\begin{aligned} y_i^{(k)} &= \frac{d^k y_i}{dt^k} \neq f(\mathbf{u}) \quad ; \quad k = 1, \dots, d_i - 1 \\ y_i^{(d_i)} &= \frac{d^{d_i} y_i}{dt^{d_i}} = f(\mathbf{u}) \quad . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Faßt man die Zeilendifferenzgrade d_i zusammen und verwendet die mit \mathbf{b}_j bezeichneten Spalten der Matrix $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, ergibt sich die Entkopplungsmatrix $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ zu (Isidori 1995, Schwarz 1991)

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{b}_1} L_{\mathbf{a}}^{d_1-1} c_1(\mathbf{x}) & L_{\mathbf{b}_2} L_{\mathbf{a}}^{d_1-1} c_1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{\mathbf{b}_m} L_{\mathbf{a}}^{d_1-1} c_1(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{b}_1} L_{\mathbf{a}}^{d_2-1} c_2(\mathbf{x}) & L_{\mathbf{b}_2} L_{\mathbf{a}}^{d_2-1} c_2(\mathbf{x}) & \cdots & L_{\mathbf{b}_m} L_{\mathbf{a}}^{d_2-1} c_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\mathbf{b}_1} L_{\mathbf{a}}^{d_m-1} c_m(\mathbf{x}) & L_{\mathbf{b}_2} L_{\mathbf{a}}^{d_m-1} c_m(\mathbf{x}) & \cdots & L_{\mathbf{b}_m} L_{\mathbf{a}}^{d_m-1} c_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} . \quad (4.18)$$

Eine hinreichende Voraussetzung dafür, daß ein Σ_{ALS} mittels einer regulären statischen Zustandsrückführung in einer Umgebung um den Punkt \mathbf{x}_0 entkoppelt werden kann, ist

durch die Regularität der Matrix $\mathbf{D}(\mathbf{x}_0)$ gegeben. Für die vollständige Bestimmung des gesuchten Rückführgesetzes wird der Vektor $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ benötigt:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{\mathbf{a}}^{d_1} c_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}_{\mathbf{a}}^{d_2} c_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathbf{L}_{\mathbf{a}}^{d_m} c_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

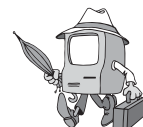
Die Implementierung der genannten Größen in MAPLE[®] wird unter Verwendung der in Abschnitt 3.1 vorgestellten Lie-Ableitungen durchgeführt. Die Ermittlung des Differenzengrades erfolgt mit

Aufruf: `relative_degree(\mathbf{x} , $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, $\mathbf{c}(\mathbf{x})$)`
 Argumente: $\mathbf{a}(\mathbf{x})$: Systemvektor
 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$: Eingangsmatrix
 $\mathbf{c}(\mathbf{x})$: Ausgangsvektor
 Ausgabe: Zeilenvektor: $\mathbf{d} = [d_1 \ d_2 \ \cdots \ d_m]$
 Package: NSASDECP



Für die Entkopplungsmatrix steht der Befehl

Aufruf: `decoupling_matrix(\mathbf{x} , $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, $\mathbf{c}(\mathbf{x})$)`
 Argumente: $\mathbf{a}(\mathbf{x})$: Systemvektor
 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$: Eingangsmatrix
 $\mathbf{c}(\mathbf{x})$: Ausgangsvektor
 Ausgabe: Entkopplungsmatrix: $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ gemäß Gl. (4.18)
 Package: NSASDECP



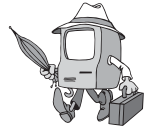
zur Verfügung. Ob ein System mit einer statischen Zustandsrückführung entkoppelt werden kann, stellt die Funktion

Aufruf: `decouplable(\mathbf{x} , $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, $\mathbf{c}(\mathbf{x})$)`
 Argumente: $\mathbf{a}(\mathbf{x})$: Systemvektor
 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$: Eingangsmatrix
 $\mathbf{c}(\mathbf{x})$: Ausgangsvektor
 Ausgabe: Entkoppelbarkeit: `true` für ja und `false` für nein
 Package: NSASDECP



anhand des Rangs der Entkopplungsmatrix fest. Schließlich kann das zur Entkopplung zu verwendende Rückführgesetz gemäß Gln. (4.13,4.14) mit Hilfe von

Aufruf: `decoupling_feedback(x, a(x), B(x), c(x))`
 Argumente: $\mathbf{a}(\mathbf{x})$: Systemvektor
 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$: Eingangsmatrix
 $\mathbf{c}(\mathbf{x})$: Ausgangsvektor
 Ausgabe: entkoppelnde Rückführung: \mathbf{u}
 Package: NSASDECP

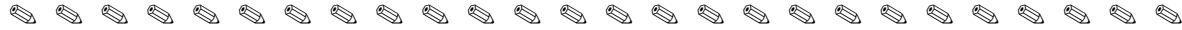


direkt bestimmt werden. Im folgenden wird als einfaches Beispiel das QLS

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= u_1 & y_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= x_1^2 & y_2 &= x_6 \\
 \dot{x}_3 &= u_2 & & \\
 \dot{x}_4 &= x_3^2 & & \\
 \dot{x}_5 &= x_4^2 & & \\
 \dot{x}_6 &= x_5^2 & &
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

betrachtet:

NSAS-Session 4.5



```

> read('nsas');
> read_sys(beispiel);
n := 6
m := 2
p := 2
x := array(1..6, [ ])

```

```

a := [0 x1^2 0 x3^2 x4^2 x5^2]

```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$


$$c := \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

> relative_degree(x,a,B,c);

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$$

> decoupling_matrix(x,a,B,c);

$$\begin{bmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 8x_5x_4x_3 \end{bmatrix}$$

> decouplable(x,a,B,c);

true

> decoupling_feedback(x,a,B,c);

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{w_{1,1}}{x_1} \\ -\frac{1}{2} \frac{x_3(x_5x_3^2 + 3x_4^3)}{x_5x_4} + \frac{1}{8} \frac{w_{2,1}}{x_5x_4x_3} \end{bmatrix}$$



5 Zusammenfassung und Ausblick

Symbolverarbeitende Programmiersoftware ermöglicht die Einbindung analytischer Methoden in regelungstechnische CAD-Programme, welche die Voraussetzung für eine Anwendung moderner Analyse- und Syntheseverfahren auf komplexe nichtlineare Systeme sind. Der Hauptvorteil symbolverarbeitender Programmiersprachen liegt darin, daß die Ergebnisse nicht nur numerisch, sondern auch symbolisch zur Verfügung stehen, so daß sowohl Parameterstudien als auch Einblicke in die systemdynamischen und regelungstechnischen Zusammenhänge erst ermöglicht werden.

In Rahmen dieses Forschungsberichts wurde mit Hilfe der symbolverarbeitenden Programmiersprache MAPLE[®] das Programmpaket **NSAS** für die Analyse und Synthese analytischer Systeme mit linear eingehender Steuerung entwickelt. Die exemplarische Anwendung auf mehrere nichtlineare Systeme wurde demonstriert und zeigte die Leistungsfähigkeit des Paketes auf. Die derzeit zur Verfügung gestellte Version des Programmpaketes enthält folgende Funktionen:

- Berechnung der Lie-Ableitung: **nsaslie**,
- Berechnung der Lie-Klammer: **nsasbrack**,
- Berechnung der Ableitung eines Kovektorfeldes entlang eines Vektorfeldes: **nsascode**,
- Bestimmung der Erreichbarkeitsmatrix und Überprüfung der Eigenschaft Erreichbarkeit: **reach_matrix**, **reachable**,
- Bestimmung der Beobachtbarkeitsabbildung und -matrix sowie Überprüfung der Eigenschaft Beobachtbarkeit: **observab_map**, **observab_matrix**, **observable**, **selected_observab_matrix**,
- Ermittlung des Vektordifferenzengrades: **relative_degree**
- Berechnung der Entkopplungsmatrix, Überprüfung der Entkoppelbarkeit sowie Bestimmung des ggf. zu verwendenden Rückführgesetzes: **decoupling_matrix**, **decouplable**, **decoupling_feedback**.

Bei der Analyse komplexer technischer Systeme erweist sich die Anwendung von **NSAS** als problematisch, da hohe Anforderungen an die Hardware (Speicher und Rechenleistung) gestellt werden. Kurzfristig sollen diese Beschränkungen unter Verwendung leistungsstarker Workstations erweitert untersucht werden. Langfristig sind diese jedoch gerade im Computerbereich in Anbetracht der rasant steigenden Leistungsfähigkeit von geringem Interesse. Zukünftige Untersuchungen werden sich mit dem Ausbau des Paketes befassen, indem sowohl differentialalgebraische als auch graphentheoretische Analysemethoden (Wey 1995) implementiert werden. Außerdem soll das Paket um Beobachter-Syntheseverfahren (Jelali 1995) erweitert werden.

6 Literaturverzeichnis

- Birk, J.** 1992. *Rechnergestützte Analyse und Lösung nichtlinearer Beobachtungsaufgaben*. Dissertation. Universität Stuttgart. Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8 Nr. 294. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Brocket, R.** 1976. Nonlinear Systems and Differential Geometry. *Proc. of the IEEE*. 61 – 72.
- Bronstein, I. N.** und **K. A. Semendjajew.** 1987. *Taschenbuch der Mathematik*. Leipzig: Teubner.
- Casti, J. L.** 1985. *Nonlinear System Theory*. San Diego: Academic Press.
- Char, B. W., K. O. Geddes, G. H. Gonnet, B. L. Leong, M. B. Monagan** und **S. Watt.** 1991. *Maple V – Language Reference Manual*. New York: Springer.
- Essen, H. v.** und **B. d. Jager.** 1992. Analysis and design of nonlinear control systems with the symbolic computation system maple. *Proc. IFAC Nonlinear Control System Design Symposium*. Bordeaux/Frankreich. 2081–2085.
- Fliess, M.** 1986. Nonlinear control theory and differential algebra. *Modelling and Adaptive Control*, hg. von C. I. Byrnes und A. Kurszanski. Berlin: Springer.
- Fliess, M.** und **S. T. Glad.** 1993. An algebraic approach to linear and nonlinear control. *Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications*, hg. von H. L. Trentelmann und J. C. Willems. *Progress in Systems and Control Theory*. 14. 223–267. Boston: Birkhäuser.
- Forsman, K.** 1992. *POLYCON — a Maple package for polynomial and rational control systems*. Technical Report LiTH-ISY-I-1386. Dept. of Electrical Engineering. Linköping University. Included in the Maple share library. Also available by anonymous ftp 130.236.24.1.
- Hörhager, M.** 1995. *Maple in Technik und Wissenschaft*. Bonn: Addison-Wesley.
- Isidori, A.** 1995. *Nonlinear Control Systems*. Berlin: Springer. 3rd edition.
- Jelali, M.** 1993. *Beobachter und Filter für im Zustand quadratische Systeme mit linearer Steuerung (QLS)*. Diplomarbeit. MSRT. Universität Duisburg.
- Jelali, M.** 1995. *Systematischer Beobachterentwurf für nichtlineare Systeme*. Forschungsbericht Nr. 1/95. MSRT. Universität Duisburg.
- Keller, H.** 1986. Entwurf nichtlinearer, zeitinvarianter Beobachter durch Polvorgabe mit Hilfe einer Zwei-Schritt-Transformation. *at – Automatisierungstechnik* 34. 271–324 und 326–331.

- Lemmen, M.** 1995. *Steuerbarkeit – Erreichbarkeit – Zugänglichkeit: algebraische und differentialgeometrische Aspekte*. Forschungsbericht Nr. 3/95. MSRT. Universität Duisburg.
- Nijmeijer, H.** und **A. van der Schaft**. 1990. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Berlin: Springer.
- Olver, P.** 1986. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Berlin: Springer.
- Raghavan, S.** und **K. Hedrick**. 1994. Observer design for a class of nonlinear systems. *Int. J. Control* 59. 515–528.
- Rothfuß, R., J. Schaffner** und **M. Zeitz**. 1993. Computer–algebra program for analysis and design of nonlinear control systems. *Systems and Networks: Mathematical Theory and Applications MTNS'93*, hg. von U. Helmke, R. Mennicken und J. Sauer. 437–440. Berlin: Akademie Verlag.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme: systemtheoretische Grundlagen*. München: Oldenbourg.
- Symbolics, I.** 1988. *MACSYMA User's Guide: MACSYMA versions 309 and later*. USA: Symbolics, Inc.
- Wey, T.** 1995. *Ein graphentheoretischer Ansatz zur strukturellen Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme*. Dissertationsschrift. MSRT. Universität Duisburg.