

# Beobachtbarkeitsanalyse nichtlinearer Systeme mittels Digraphen

Michael Spielmann

Forschungsbericht Nr. 1/96

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

**Übersicht:** Die Beschreibung von Systemen durch Graphen zeigt eine Reihe von Vorteilen gegenüber rein analytischen Verfahren. So lassen sich mit einem Graphen sehr anschaulich Aussagen über Systemeigenschaften wie Steuerbarkeit, Entkoppelbarkeit und Beobachtbarkeit gewinnen. Der Graph selbst wird dabei durch Anwendung einfach zu handhabender Regeln aus dem Zustandsmodell des Systems gewonnen. In diesem Bericht wird aufbauend auf vorhandenen Strukturaussagen zur Beobachtbarkeit eines Systems ein Zusammenhang zwischen der Beobachtbarkeitsmatrix und den im Graphen enthaltenen Kantenbewertungen hergeleitet. Das Aufstellen der hierbei verwendeten Matrix der Pfadgewichte wird durch die Einführung eines sogenannten Pfadbaumes erleichtert und ermöglicht weiterhin eine rechnergestützte Beobachtbarkeitsanalyse.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg  
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik  
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

# Inhaltsverzeichnis

|   |           |
|---|-----------|
| Nomenklatur   | II        |
| <b>1 Einleitung</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2 Systembeschreibung mittels Graphen</b>                           | <b>3</b>  |
| 2.1 Strukturgraph . . . . .   | 3         |
| 2.2 Bewerteter oder gerichteter Graph . . . . .                       | 5         |
| <b>3 Pfad-Baum</b>  | <b>7</b>  |
| 3.1 Eingrößensysteme . . . . .  | 7         |
| 3.2 Mehrgrößensysteme . . . . .                                       | 11        |
| <b>4 Beobachtbarkeit</b>  | <b>13</b> |
| 4.1 Beobachtbarkeit linearer Systeme . . . . .                        | 13        |
| 4.2 Strukturelle Beobachtbarkeit . . . . .                            | 17        |
| 4.3 Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme . . . . .                   | 20        |
| <b>5 Algorithmus zur graphentheoretischen Beobachtbarkeitsanalyse</b> | <b>23</b> |
| <b>6 Zusammenfassung und Ausblick</b>                                 | <b>24</b> |
| <b>7 Literaturverzeichnis</b>   | <b>25</b> |

# Nomenklatur

## Skalare Größen:

|               |   |
|---------------|---|
| $O$           | Anzahl der Knoten in einem Graphen                            |
| $l$           | Pfadlänge   |
| $m$           | Anzahl der Systemeingänge                                     |
| $n$           | Ordnung des Systems   |
| $p$           | Anzahl der Systemausgänge                                     |
| $t_P$         | Tiefe des Pfad-Baumes   |
| $u(t)$        | Eingangssignal  |
| $w_i, w_P$    | Kantengewichte  |
| $w_{lx_i}$    | Gewicht eines Pfades der Länge $l$ von $x_i$ zu einem Ausgang |
| $w(P_i, P_j)$ | Kantengewicht der Kante von Knoten $P_i$ nach Knoten $P_j$    |
| $y(t)$        | Ausgangssignal  |

## Vektoren, Vektorfelder und Matrizen:

|  |  |
|--|--|
| $A, A(\mathbf{x})$   | Systemmatrix                                       |
| $B, B(\mathbf{x})$   | Eingangsmatrix                                     |
| $C, C(\mathbf{x})$   | Ausgangsmatrix                                     |
| $M_B$  | Strukturmatrix                                     |
| $P, P^*$   | (Struktur-)Matrix der Pfadgewichte                 |
| $Q, Q^*$   | (Strukturelle) Beobachtbarkeitsmatrix              |
| $X_0$  | Arbeitspunkt                                       |
| $\mathbf{a}(\mathbf{x})$   | Drift-Term   |
| $\mathbf{b}(\mathbf{x})$   | Nichtlinearer Eingangsvektor                       |
| $\mathbf{c}^T, \mathbf{c}^T(\mathbf{x}), \mathbf{h}(\mathbf{x})$ | Ausgangsvektor                                     |
| $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$                             | Vektorfeld eines allgemeinen nichtlinearen Systems |
| $\mathbf{u}(t)$  | Eingangsvektor                                     |
| $\mathbf{x}(t)$  | Zustandsvektor                                     |
| $\mathbf{y}(t)$  | Ausgangsvektor                                     |

## Mengen:

|                |                                 |
|----------------|---------------------------------|
| $E_i\{\cdot\}$ | Menge aller Pfade der Länge $i$ |
|----------------|---------------------------------|

## Abkürzungen:

|        |  |
|--------|--|
| $ALS$  | Analytisches System mit linear eingehender Steuerung |
| $LS$   | Lineares System                                      |
| $LS^*$ | Strukturmodell eines linearen Systems                |
| $LS_t$ | Lineares Tangentialsystem                            |
| $NS$   | Nichtlineares System                                 |

# 1 Einleitung

Der vorliegende Forschungsbericht<sup>1</sup> befaßt sich mit der Beobachtbarkeitsanalyse von Systemen unter Verwendung graphentheoretischer Methoden. Die Frage der Beobachtbarkeit ist eine der Kernfragen in der Regelungstheorie. Sie tritt jedes Mal dann auf, wenn Systemzustände ohne direkte Messung ermittelt werden sollen, z. B. zwecks Einsparung von Meßgeräten, oder wenn keine geeignete Meßapparatur zur Verfügung steht.

Ein Systemzustand ist dann beobachtbar, wenn er aus dem Eingangssignal  $\mathbf{u}(t)$ , dem Ausgangssignal  $\mathbf{y}(t)$  und deren Ableitungen eindeutig bestimmt werden kann. Ein System ist *vollständig* beobachtbar, wenn alle Systemzustände aus der Kenntnis von  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}(t)$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ , ... und  $\mathbf{y}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{y}}(t)$ ,  $\ddot{\mathbf{y}}(t)$ , ... berechnet werden können. Entsprechend der Ordnung des Systems sind zur Lösung dieses Problems  $n$  linear unabhängige Gleichungen zu suchen.

## Beispiel 1.1 (Fliess und Glad 1993)

Aus dem durch das Zustandsmodell

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad , \quad (\text{B 1.1-1})$$

$$y(t) = x_1$$

gegebenen System lassen sich durch einfache algebraische Umformungen die folgenden Gleichungen bestimmen:

$$\ddot{y}^2 - 4u^2\dot{y} = 0 \quad , \quad (\text{B 1.1-2})$$

$$2ux_2 - \ddot{y} = 0 \quad , \quad (\text{B 1.1-3})$$

$$x_1 - y = 0 \quad . \quad (\text{B 1.1-4})$$

Während Gl. (B 1.1-2) das Verhalten zwischen dem Ein- und Ausgang des Systems wiedergibt, stehen mit den beiden anderen linear unabhängige Gleichungen für die Berechnung der Zustände  $x_1$  und  $x_2$  zur Verfügung. Für den Fall, daß  $u(t) = 0$  gilt, kann eine weitere Gleichung zur Bestimmung von  $x_2$  herangezogen werden:

$$x_2^2 - \dot{y} = 0 \quad . \quad (\text{B 1.1-5})$$

Das System nach Gl. (B 1.1-1) ist damit vollständig beobachtbar.  $\square$

Die Untersuchung der linearen Unabhängigkeit eines Gleichungssystems erfolgt im allgemeinen durch die Auswertung eines Rangkriteriums. Dies findet auch bei der Frage

---

<sup>1</sup> Diese Arbeit entstand im Rahmen des von der DFG unter Schw 120/49-3 geförderten Projektes „NLS-Analyse“

nach der Beobachtbarkeit Anwendung. Demnach ist ein Eingrößen-System vollständig beobachtbar, wenn der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

gleich der Ordnung des Systems ist. Bei linearen Systemen entspricht diese Aussage dem bekannten Kalman-Rangkriterium.

In dem vorliegenden Forschungsbericht wird für die Beobachtbarkeitsanalyse der aus dem Zustandsmodell des Systems abgeleitete Systemgraph herangezogen. Der Graph bietet hierbei nicht nur Vorteile aufgrund der Darstellungsweise eines Systems, sondern auch die für eine Beobachtbarkeitsanalyse notwendige Zeit und der erforderliche Rechenaufwand sind im allgemeinen wesentlich geringer. Während für eine rein analytische Behandlung, in Abhängigkeit von der Systemordnung,  $n - 1$  Ableitungen des Ausgangs nach der Zeit berechnet werden müssen, läßt sich die Frage nach der Beobachtbarkeit ggf. bereits durch einfaches „Hinsehen“ am Graphen klären. In Abschnitt 2 wird die Konstruktion eines Graphen aus dem Zustandsmodell eines nichtlinearen Systems mit  $m$  Eingängen und  $p$  Ausgängen

$$\sum_{\text{NS}} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \end{cases} \quad , \quad (1.2)$$

$$\text{mit } \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$$

vorgestellt, und grundlegende Begriffe aus der Graphentheorie zum Verständnis des Berichtes werden erläutert.

Der Pfad-Baum, der dann in Abschnitt 3 hergeleitet wird, stellt ein einfaches und effektives Hilfsmittel bei der Berechnung von Pfadgewichten im Graphen dar. Die Pfadgewichte wiederum werden in einer Matrix zusammengefaßt und finden bei der graphentheoretischen Beobachtbarkeitsanalyse (Abschnitt 4) Verwendung.

Abschnitt 5 faßt die Vorgehensweise bei einer rein graphentheoretischen Analyse in Form eines Algorithmus zusammen. Der Bericht schließt mit einer kurzen Zusammenfassung und einem Ausblick auf künftige Anwendungsmöglichkeiten.

## 2 Systembeschreibung mittels Graphen

Dieser Abschnitt dient einer kurzen Einführung in die graphentheoretische Systembeschreibung. Insbesondere sollen die in späteren Abschnitten benötigten Begriffe und Vorgehensweisen erläutert und beschrieben werden.

Der Graph ist eine alternative Darstellungsform für beliebige, nichtlineare Systeme. Im Bereich der linearen Systemtheorie hat sich das Arbeiten mit Graphen wegen der einfachen Zugänglichkeit etabliert (Reinschke 1988). Eine Erweiterung auf allgemeine nichtlineare Systeme und der Einsatz in der Reglersynthese ist Stand der Forschung und Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

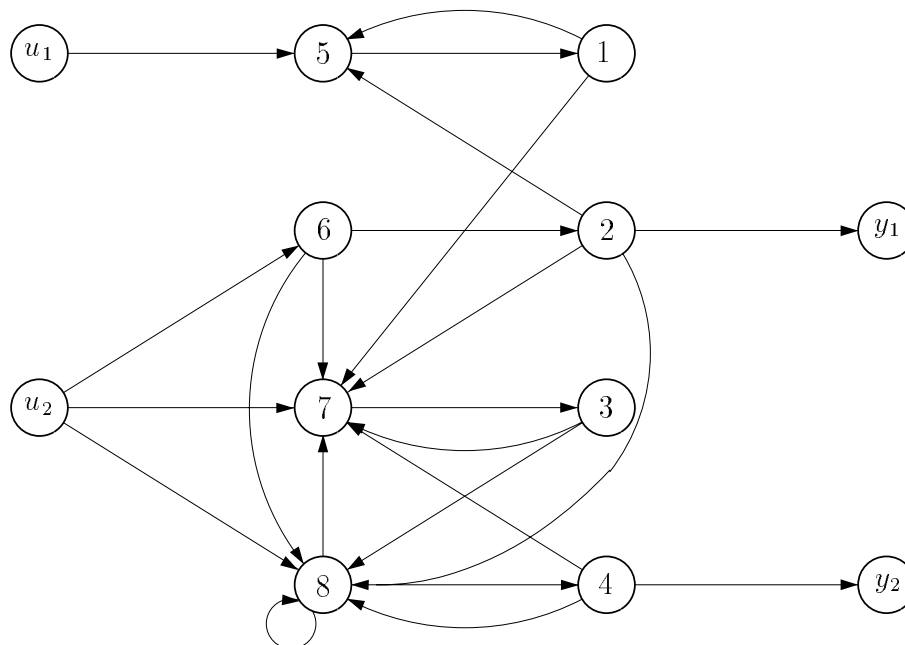
### 2.1 Strukturgraph

Ausgangspunkt bei der Ermittlung des Graphen zu einem System ist das Zustandsmodell in der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t))\end{aligned}\tag{2.1}$$

mit  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ .

In Abbildung 2.1 ist ein Beispiel für einen Graphen gegeben (De Luca u. a. 1986).



**Bild 2.1:** Graph eines ebenen, zweiarmigen, elastischen Manipulators

Im wesentlichen sind die beiden Elemente, aus denen ein Graph besteht,

1. Knoten  $\bigcirc$
2. Kanten  $\longrightarrow$

erkennbar. Die *Knoten* lassen sich unterscheiden in Eingangsknoten ( $u_1 \dots u_m$ ), Zustandsknoten ( $x_1 \dots x_n$ ) und Ausgangsknoten ( $y_1 \dots y_p$ ). Insgesamt besteht ein System aus

$$O = n + m + p$$

Knoten. Als Verbindungselemente dienen *Kanten*, die für die graphische Systembeschreibung eine Orientierung erhalten (gerichtete Kanten). Die Entscheidung darüber, ob eine Kante zwischen zwei Knoten vorhanden ist, läßt sich anhand der folgenden Regeln bestimmen:

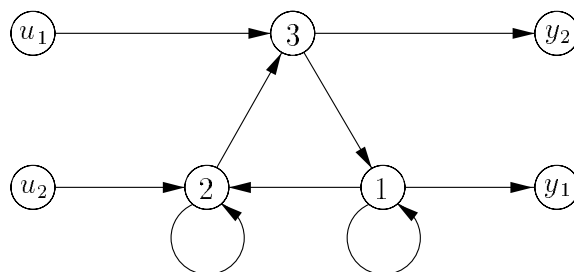
- <R1> Wenn die Zustandsvariable  $x_j$  in  $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  enthalten ist, dann existiert eine Kante vom Zustandsknoten  $x_j$  zum Zustandsknoten  $x_i$ ,
- <R2> Wenn die Eingangsvariable  $u_j$  in  $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  enthalten ist, dann existiert eine Kante vom Eingangsknoten  $u_j$  zum Zustandsknoten  $x_i$ ,
- <R3> Wenn die Zustandsvariable  $x_j$  in  $h_i(\mathbf{x})$  enthalten ist, dann existiert eine Kante vom Zustandsknoten  $x_j$  zum Ausgangsknoten  $y_i$ .

### Beispiel 2.1

Bei Anwendung der Regeln <R1> bis <R3> auf das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3^2 \\ \cos x_1 + x_2^2 u_2 \\ |x_2| + 3u_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} e^{x_1} \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B 2.1-1})$$

entsteht der in Abbildung 2.2 dargestellte Graph. □



**Bild 2.2:** Graph  $\mathcal{G}$  zu System in Beispiel 2.1

Da es mehrere Systeme gibt, die zu dem gleichen Graphen führen, wird dieser auch als *Strukturgraph* bezeichnet. Untersuchungen und Ergebnisse sind struktureller Art und betreffen alle Systeme mit identischem Strukturgraphen (Wey 1993).

## 2.2 Bewerteter oder gerichteter Graph

Mit Hilfe des *Strukturgraphen* lassen sich bereits erste Aussagen bei der Systemanalyse gewinnen, genannt sei hier die strukturelle Beobachtbarkeit als notwendige Bedingung für die Beobachtbarkeit eines Systems. Für Reglersyntheseverfahren ist der Informationsgehalt, den ein Strukturgraph bietet, jedoch zu gering. Aus diesem Grund wird zusätzlich zu der rein graphischen Darstellung eine *Kantengewichtung (-bewertung)* eingeführt. Die Kantengewichte ergeben sich durch partielles Ableiten der Vektorfunktionen  $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  und  $h_j(\mathbf{x})$  nach den Zuständen  $\mathbf{x}$  bzw. nach den Eingängen  $\mathbf{u}$ :

<R4> Die Kante vom Zustandsknoten  $x_i$  zum Zustandsknoten  $x_j$  hat das Kantengewicht

$$w(x_i, x_j) = \frac{\partial f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_i} \quad .$$

<R5> Die Kante vom Eingangsknoten  $u_i$  zum Zustandsknoten  $x_j$  hat das Kantengewicht

$$w(u_i, x_j) = \frac{\partial f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_i} \quad .$$

<R6> Die Kante vom Zustandsknoten  $x_i$  zum Ausgangsknoten  $y_j$  hat das Kantengewicht

$$w(x_i, y_j) = \frac{\partial h_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad .$$

Zur Berechnung der Kantengewichte müssen  $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  und  $h_j(\mathbf{x})$  stetige Funktionen in  $x_i$  bzw. in  $u_i$  sein. Da allerdings im allgemeinen nicht alle Kantengewichte für Analyse- bzw. Syntheseverfahren herangezogen werden, muß das System nicht generell stetig in den auftretenden Größen sein. Im Systemgraphen werden alle Kantengewichte, die nicht explizit zu berechnen sind oder berechnet werden, durch  $*^j$  markiert. Der Index  $j$  stellt eine fortlaufende Numerierung solcher Kanten dar.

Abbildung 2.3 zeigt zu dem Beispiel nach Gl. (B 2.1-1) den *bewerteten Graphen*.



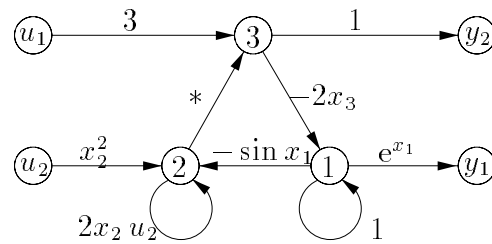


Bild 2.3: Bewerteter Graph zu Beispiel 2.1

Bei linearen Systemen

$$\sum_{\text{LS}} \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{array} \quad , \quad (2.2)$$

$$\text{mit } \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$$

sind die Kantengewichte die Komponenten der Systemmatrix  $\mathbf{A}$ , der Eingangsmatrix  $\mathbf{B}$  und der Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}$ .

### Beispiel 2.2

Anwendung der Regeln <R4> bis <R6> auf das System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = x_1(t) \quad (\text{B 2.2-1})$$

führt zu dem in Bild 2.4 dargestellten Graphen. □

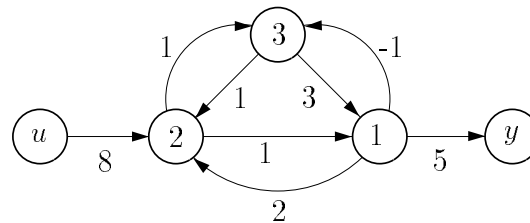


Bild 2.4: Graph des linearen Systems nach Beispiel 2.2

Bei einem nichtlinearen System hingegen sind die Kanten im allgemeinen Funktionen der Zustände  $\mathbf{x}$  und teilweise auch der Eingänge  $\mathbf{u}$ . Das Aneinanderreihen von Kanten und Knoten zu einer Kette wird als *Pfad* bezeichnet, z. B.:

$$x_1 \xrightarrow{3} x_3 \xrightarrow{-\sin x_3} y \quad , \quad (2.3)$$

wobei die Anzahl der verbindenden Kanten *Länge* des Pfades genannt wird. Die Angabe über den Pfeilen (Kanten) ist das jeweilige Kantengewicht. Jedem Pfad wird ebenfalls ein Gewicht zugeordnet, das sich aus der Multiplikation aller Gewichte eines Pfades ergibt. Der Pfad nach Gl. (2.3) hat somit das Gewicht

$$w(x_1, y) = 3 \cdot (-\sin x_3) = -3 \sin x_3 \quad . \quad (2.4)$$

### 3 Pfad-Baum

Im Zusammenhang mit der Beobachtbarkeit eines nichtlinearen Systems sind Pfade, die in den Ausgangsknoten  $\mathbf{y}$  enden, bei der graphischen Untersuchung von Interesse. Diese Pfade lassen sich recht anschaulich und systematisch in einem Baum darstellen. Die wesentlichen Eigenschaften eines Baumes faßt die folgende Definition zusammen:

**Definition 3.1** (Gondran und Minoux 1986)

Ein Baum ist ein zusammenhängender Graph ohne Zyklen.  $\square$

*Ohne Zyklen* bedeutet hierbei, daß kein Pfad der Länge  $l$  mit gleichem Anfangs- und Endknoten existiert. Bekanntester Vertreter ist der Stammbaum, in dem ausgehend von einem Element, den Stammeltern, einzelne oder mehrere Nachkömmlinge dargestellt werden. Hierbei treten im allgemeinen Verzweigungen und aussterbende Äste auf.

Bei der Verwendung einer Baumstruktur zur Systemanalyse sind die einzelnen Elemente die Knoten eines gerichteten Graphen. Die Verbindungen sind die Kanten, wobei die Orientierung der Kanten jeweils von oben nach unten verläuft. Jede untergeordnete Ebene besteht gegenüber der nächsthöheren Ebene aus einem um ein erweitertes Knoten/Kantenpaar.

Das Aufstellen eines Pfadbaumes soll zunächst für Eingrößensysteme gezeigt werden, genauer für ALS-Systeme

$$\sum_{\text{ALS}} \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{b}(\mathbf{x}(t))u(t) \\ y(t) = c(\mathbf{x}(t)) \end{array} , \quad (3.1)$$

$$\text{mit } \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, u(t), y(t) \in \mathbb{R} ,$$

die auch später bei der Beobachtbarkeitsanalyse betrachtet werden.

#### 3.1 Eingrößensysteme

Bei Eingrößensystemen wird die oberste Ebene des *Pfad-Baumes* von dem Ausgangsknoten  $y$  gebildet:

$$E_0 = \{y\} . \quad (3.2)$$

Die folgende Ebene besteht aus Pfaden, die in den Ausgangsknoten einlaufen und deren Länge  $l = 1$  beträgt, z. B.

$$E_1 = \{x_1 \xrightarrow{x_2} y, \quad x_2 \xrightarrow{x_1} y\} . \quad (3.3)$$

Jede Ebene besteht aus maximal  $n_{E_j} = n^j$  Elementen. Diese obere Grenze wird allerdings nur erreicht, wenn von jedem Zustandsknoten Kanten zu allen anderen Zustandsknoten

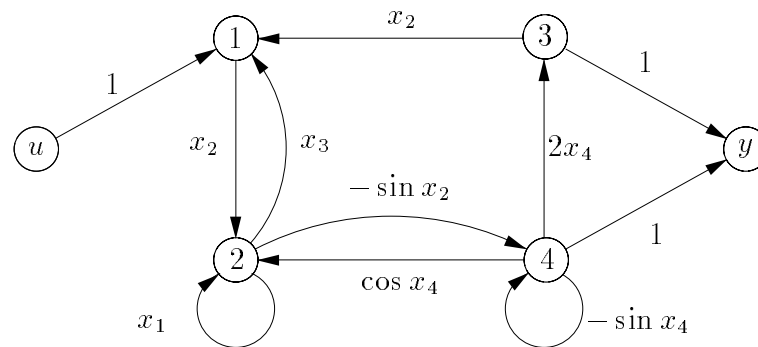
und zum Ausgangsknoten vorhanden sind. Der Index  $i$  der Pfadmenge  $E_i$  ist gleich der Länge der in der Menge enthaltenen Kanten und gibt die *Tiefe* des Baumes an. Die Vorgehensweise bei der Ermittlung des Pfad-Baumes wird anhand eines Beispiels verdeutlicht:

**Beispiel 3.1** Zu dem System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 x_3 \\ x_1 x_2 + \sin x_4 \\ x_4^2 \\ \cos x_2 + \cos x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (\text{B 3.1-1})$$

$$y = x_3 + x_4$$

mit Graphen nach Abbildung 3.1

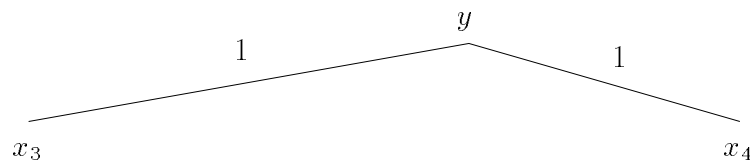


**Bild 3.1:** Bewerteter Graph zu Beispiel 3.1

ist der Pfad-Baum bis zu einer Tiefe von  $t_P = 4$  gesucht. Die Elemente der ersten Ebene ergeben sich aus Pfaden der Länge  $l = 1$ , die in den Ausgangsknoten einlaufen, also

$$E_1 = \{x_3 \xrightarrow{1} y, \quad x_4 \xrightarrow{1} y\} \quad . \quad (\text{B 3.1-2})$$

Dargestellt als Pfad-Baum tritt beim Übergang von  $E_0$  nach  $E_1$  eine Verzweigung auf (Abbildung 3.2)

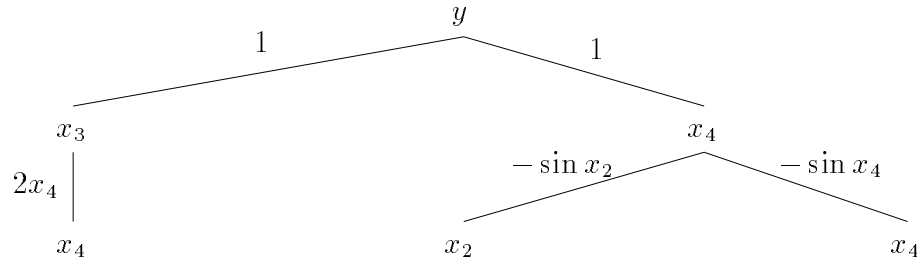


**Bild 3.2:** Pfadbaum zu Beispiel 3.1 für  $t_P=1$

$E_2$  enthält Pfade der Länge  $l = 2$ . Diese lassen sich z. B. durch Erweiterung der Elemente aus  $E_1$  bestimmen. Die Erweiterung erfolgt dabei „von links“ durch die

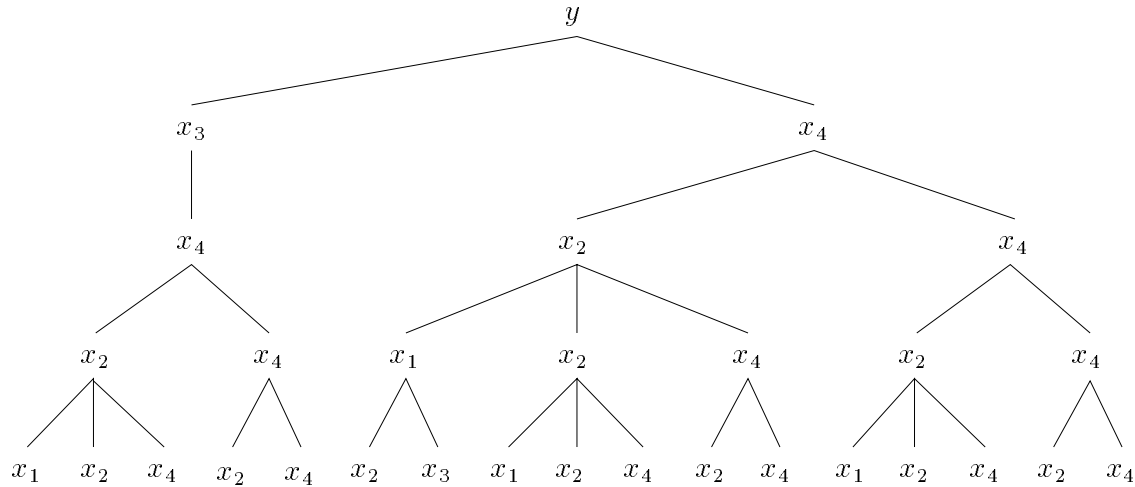
in den jeweiligen Anfangsknoten einlaufenden Kanten. Für  $x_3 \xrightarrow{1} y$  kommt nur eine Erweiterung um  $x_4 \xrightarrow{2x_4}$  in Frage, da das die einzige in  $x_3$  endende Kante ist. In den Zustandsknoten  $x_4$  laufen zwei Pfade ein, so daß für die Elemente von  $E_2$  gilt:

$$E_2 = \{x_4 \xrightarrow{2x_4} x_3 \xrightarrow{1} y, \quad x_2 \xrightarrow{-\sin x_2} x_4 \xrightarrow{1} y, \quad x_4 \xrightarrow{-\sin x_4} x_4 \xrightarrow{1} y\} . \text{(B 3.1-3)}$$



**Bild 3.3:** Pfadbaum zu Beispiel 3.1 für  $t_P=2$

Die weiteren Ebenen  $E_3$  und  $E_4$  ergeben sich ganz analog, wobei zu beachten ist, daß Schleifen (Kanten, die im selben Knoten anfangen und enden) auch mehrmals durchlaufen werden. Der Pfad-Baum erhält damit bei einer Tiefe von  $t_P = 4$  das in Abbildung 3.4 dargestellte Aussehen.



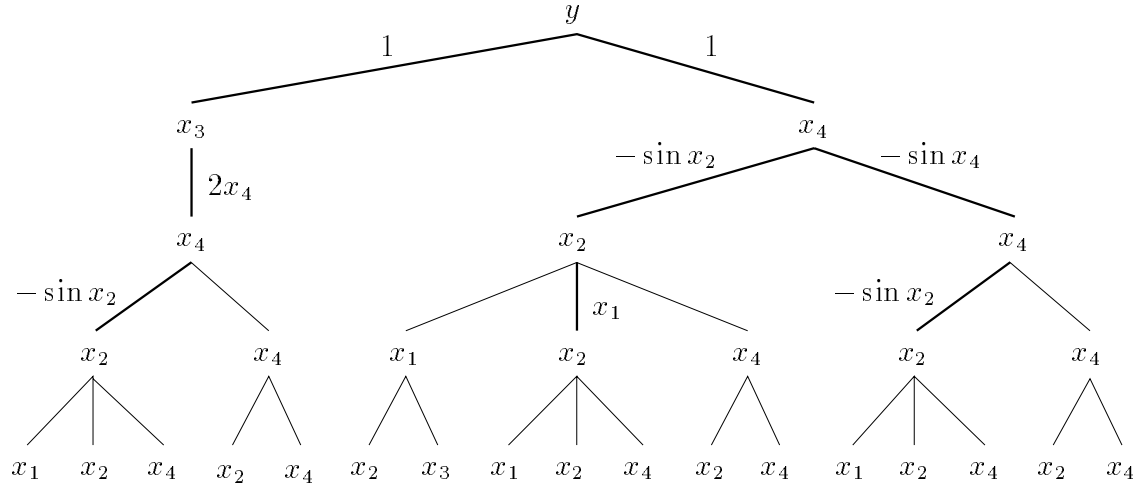
**Bild 3.4:** Pfadbaum zu Beispiel 3.1 für  $t_P=4$

Auf die Angabe der Gewichte wurde der Übersichtlichkeit wegen verzichtet. Ferner bleiben Kanten vom Eingangsknoten  $u$  zu den Zuständen unberücksichtigt.  $\square$

Das Gewicht eines Pfades wird durch Multiplikation der Gewichte aller Kanten entlang des betrachteten Pfades berechnet. Existieren mehrere Pfade gleicher Länge deren Startpunkte im selben Knoten liegen – im weiteren als *parallele Pfade* bezeichnet – so werden die zugehörigen Pfadgewichte für die Ermittlung des Gesamtgewichtes addiert. Das Auftreten von parallelen Pfaden läßt sich im Pfad-Baum daran erkennen, daß in der Ebene

$E_i$  ein betrachteter Knoten mehrfach vorhanden ist.

In dem System nach Gl. (3.3) werden z. B. zur Berechnung des Gewichtes der Pfade vom Zustandsknoten  $x_2$  zum Ausgangsknoten  $y$  mit der Länge  $l = 3$  die in der folgenden Abbildung fett dargestellten Kanten berücksichtigt.



**Bild 3.5:** Zu berücksichtigende Pfade bei der Berechnung von  $w_{3x_2}$

Entlang der drei Pfade

$$\begin{aligned}
 & x_2 \xrightarrow{-\sin x_2} x_4 \xrightarrow{2x_4} x_3 \xrightarrow{1} y, \\
 & x_2 \xrightarrow{x_1} x_2 \xrightarrow{-\sin x_2} x_4 \xrightarrow{1} y \\
 \text{und} & x_2 \xrightarrow{-\sin x_2} x_4 \xrightarrow{-\sin x_4} x_4 \xrightarrow{1} y
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

werden die Kantengewichte multipliziert und anschließend zum Gesamtgewicht aufsummiert:

$$\begin{aligned}
 w_{3,x_2} &= (-\sin x_2) \cdot 2x_4 \cdot 1 + x_1 \cdot (-\sin x_2) \cdot 1 + (-\sin x_2) \cdot (-\sin x_4) \cdot 1 \\
 &= \sin x_2 (\sin x_4 - 2x_4 - x_1) \quad .
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Alle Pfadgewichte lassen sich in einer Matrix  $\mathbf{P}$  zusammenfassen:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} w_{1,x_1} & w_{1,x_2} & \cdots & w_{1,x_n} \\ w_{2,x_1} & w_{2,x_2} & \cdots & w_{2,x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n,x_1} & w_{n,x_2} & \cdots & w_{n,x_n} \end{bmatrix} . \tag{3.6}$$

Wie zu erkennen ist, werden die Zustände  $x_1$  bis  $x_n$  den Spalten und die Pfadlängen den Zeilen der Matrix  $\mathbf{P}$  zugeordnet.

## 3.2 Mehrgrößensysteme

Die hier betrachteten analytischen Systeme mit linear eingehender Steuerung lassen sich als Mehrgrößensysteme mit dem Zustandsmodell

$$\sum_{\text{ALS}} \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{u}(t) \quad , \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{c}(\mathbf{x}(t)) \quad , \end{array} \quad (3.7)$$

$$\text{mit } \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$$

darstellen. Ziel soll auch hier wieder das Aufstellen der Matrix der Pfadgewichte sein. Entsprechend der Anzahl der Ausgänge werden dazu  $p$  Pfadbäume ermittelt, wobei jeder Systemausgang so behandelt wird, als gehöre er zu einem Eingrößensystem. Das gesamte Gebilde wird als *Wald* bezeichnet, da es zu den nichtzusammenhängenden Graphen ohne Zyklen gehört (Gondran und Minoux 1986).

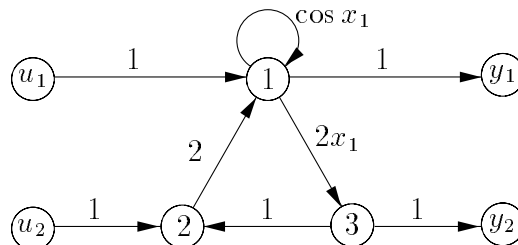
Die Matrix der Pfadgewichte für ein Mehrgrößensystem nach Gl. (3.7) setzt sich aus den Matrizen der Pfadgewichte aller  $p$  Bäume zusammen:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_p \end{bmatrix} . \quad (3.8)$$

**Beispiel 3.2** Gegeben sei das System

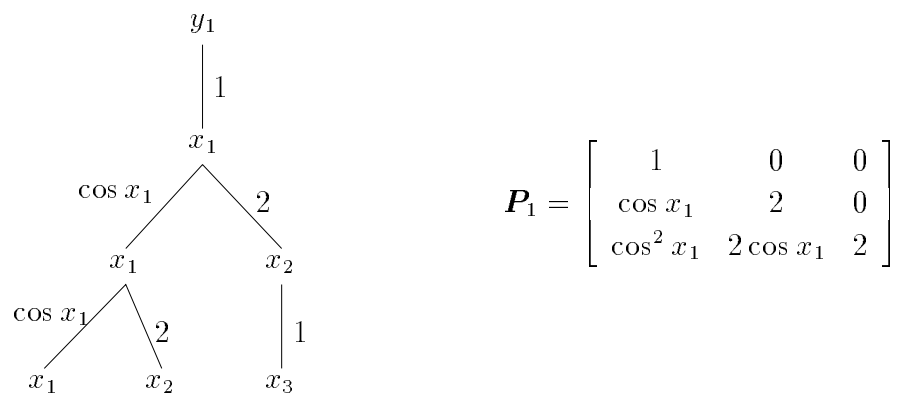
$$\begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2x_2 + \sin x_1 + u_1 \\ x_3 + u_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix} , \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} , \end{array} \quad (\text{B 3.2-1})$$

mit dem in Abbildung 3.6 zugehörigen Graphen.

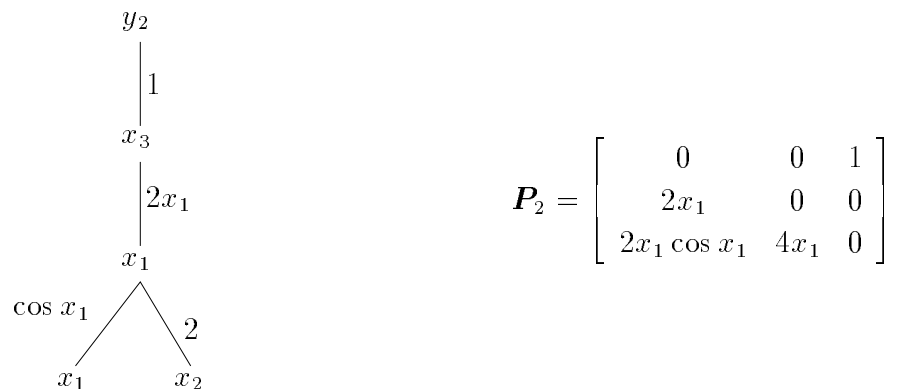


**Bild 3.6:** Graph zu System in Beispiel 3.2

Für jeden der beiden Ausgänge läßt sich ein Pfadbaum aufstellen und daraus die Matrix der Pfadgewichte bestimmen (Abbildungen 3.7 und 3.8).



**Bild 3.7:** Pfadbaum und Matrix der Pfadgewichte zu Ausgang  $y_1$



**Bild 3.8:** Pfadbaum und Matrix der Pfadgewichte zu Ausgang  $y_2$

Die Matrix der Pfadgewichte  $\mathbf{P}$  setzt sich für ein Mehrgrößensystem gemäß Gl. (3.8) aus beiden Matrizen  $\mathbf{P}_1$  und  $\mathbf{P}_2$  zusammen:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos x_1 & 2 & 0 \\ \cos^2 x_1 & 2 \cos x_1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2x_1 & 0 & 0 \\ 2x_1 \cos x_1 & 4x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B3.2-2})$$

□

## 4 Beobachtbarkeit

Bei der Entwicklung von Zustandsreglern spielt die Frage nach der Beobachtbarkeit der Zustände eine entscheidende Rolle. Sind alle Zustände des Systems beobachtbar, so lassen sich diese theoretisch mit Hilfe eines Beobachters aus den Eingangssignalen  $\mathbf{u}(t)$ , den Ausgangssignalen  $\mathbf{y}(t)$  und deren zeitlichen Ableitungen ermitteln. Dies führt zur Kostensenkung bei der Meßtechnik bzw. macht die Bestimmung von einigen Zuständen überhaupt erst möglich.

Wie bereits in der Einleitung an einem Beispiel gezeigt wurde, führt die Betrachtung der Beobachtbarkeit eines Systems auf die Auswertung eines Rangkriteriums (hier für Eingrößensysteme)

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = n \quad . \quad (4.1)$$

Damit wird überprüft, ob zur Berechnung der  $n$  Systemzustände  $n$  linear unabhängige Gleichungen zu Verfügung stehen. Ist das der Fall, so existiert eine eindeutige Lösung.

### 4.1 Beobachtbarkeit linearer Systeme

Im Falle eines linearen Systems

$$\sum_{\text{LS}} \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad , \\ y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \quad , \end{array} \quad (4.2)$$

$$\text{mit } \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n; u(t), y(t) \in \mathbb{R}$$

führt Gl. (4.1) zum Kalman-Kriterium für Eingrößensysteme:

**Definition 4.1** (Kalman u. a. 1969)

Ein lineares System, gegeben durch das Zustandsmodell gemäß Gl. (4.2), ist vollständig beobachtbar genau dann, wenn gilt

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad . \quad (4.3)$$

□



Es wird nun gezeigt, daß die Rangbestimmung der Matrix der Pfadgewichte, wie sie in Kapitel 3 eingeführt wurde, zu dem selben Ergebnis führt. Zu beweisen ist der folgende Satz:

**Satz 4.1** Ein lineares Eingrößensystem

$$\sum_{\text{LS}} \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) \end{array} \quad , \quad (4.4)$$

mit  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ;  $u(t), y(t) \in \mathbb{R}$

ist vollständig beobachtbar genau dann, wenn die Matrix der Pfadgewichte vollen Rang hat:

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} w_{1,x_1} & w_{1,x_2} & \cdots & w_{1,x_n} \\ w_{2,x_1} & w_{2,x_2} & \cdots & w_{2,x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n,x_1} & w_{n,x_2} & \cdots & w_{n,x_n} \end{bmatrix} = n \quad . \quad (4.5)$$

□

Für den Beweis von Satz 4.1 wird zunächst die  $k$ -fache Multiplikation einer quadratischen Matrix  $\mathbf{A}$  graphentheoretisch, unter Verwendung eines Baumes, interpretiert.

Eine Komponente  ${}^k a_{i,j}$  einer Matrix  $\mathbf{A}^k$  läßt sich durch

$${}^k a_{i,j} = \underbrace{\sum_{l_1=1}^n \cdots \sum_{l_{k-1}=1}^n}_{k-1 \text{ mal}} a_{i,l_1} a_{l_1,l_2} \cdots a_{l_{k-1},j} \quad (4.6)$$

berechnen. Wie zu erkennen ist, gibt es einen Zusammenhang zwischen zwei benachbarten Faktoren in Gl. (4.6):

$$a_{i,l_1} \curvearrowright a_{l_1,l_2} \curvearrowright a_{l_2,l_3} \cdots \curvearrowright a_{l_{k-1},j}$$

Da bei linearen Systemen die Komponenten der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  und die Gewichte der Pfade zwischen den Zustandsknoten identisch sind, läßt sich Gl. (4.6) auch mittels der Kantengewichte ausdrücken:

$$a_{i,l_1} a_{l_1,l_2} \cdots a_{l_{k-1},j} = w(x_i, x_{l_1}) w(x_{l_1}, x_{l_2}) \cdots w(x_{l_{k-1}}, x_j) \quad . \quad (4.7)$$

Die rechte Seite der Gl. (4.7) ist das Gewicht eines Pfades vom Zustandsknoten  $x_i$  zum Zustandsknoten  $x_j$  über die Zustände  $x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_{k-1}}$ . Es handelt sich dabei um einen Pfad der Länge  $l = k$ .

Die Summenbildung in Gl. (4.6) bedeutet nichts anderes, als die Addition aller Gewichte von Pfaden der Länge  $k$ , die den Zustandsknoten  $i$  mit dem Zustandsknoten  $j$  verbinden.

Bei Berücksichtigung des Ausgangsvektors  $\mathbf{c}^T$ , läßt sich eine Komponente der Beobachtbarkeitsmatrix gemäß Gl. (4.3) durch Erweiterung von Gl. (4.6) angeben:

$$q_{ij} = \sum_{m=1}^n c_m \underbrace{\sum_{l_1=1}^n \cdots \sum_{l_{i-1}=1}^n}_{i-1 \text{ mal}} a_{jl_1} a_{l_1 l_2} \cdots a_{l_{i-1} m} \quad . \quad (4.8)$$

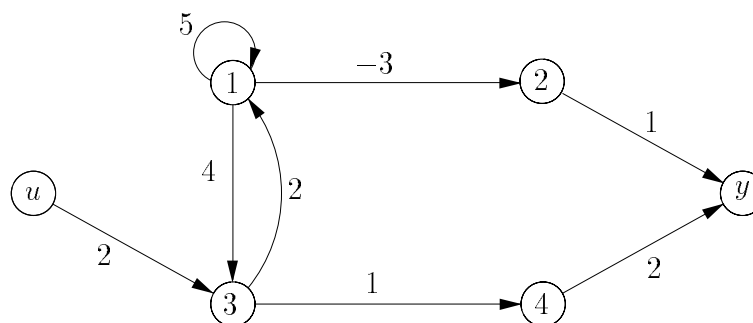
Diese Gleichung beschreibt damit die Summe aller Gewichte von Pfaden, deren Startknoten  $x_j$  ist, die im Ausgangsknoten  $y$  enden und die dabei über  $i$  Kanten laufen. Genau das aber wird auch durch die Matrix der Pfadgewichte (3.6) ausgedrückt.

**Beispiel 4.1** Gegeben sei das lineare Eingrößensystem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (B 4.1-1)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

mit bewerteten Graphen nach Abbildung 4.1.



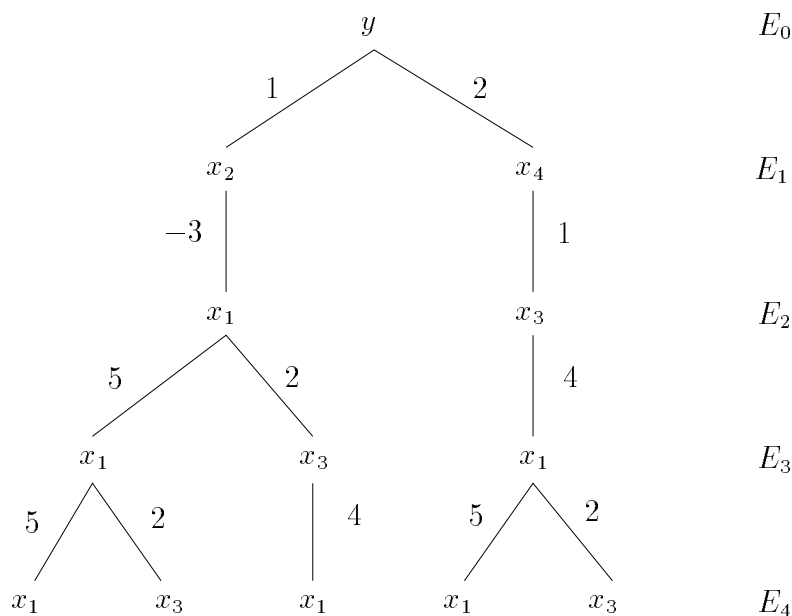
**Bild 4.1:** Graph des Systems nach Gl. (B 4.1-1)

Das System soll auf die Eigenschaft Beobachtbarkeit untersucht werden. Die Anwendung des Kalman-Kriteriums nach Definition 4.1 führt zu dem Ergebnis:

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^3 \end{bmatrix} = \text{Rang} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ -7 & 0 & -6 & 0 \\ -59 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} = 3 \quad . \quad (B 4.1-2)$$

Das System ist also nicht vollständig beobachtbar. Mit Hilfe des Pfadbaumes zu dem System nach Gl. (B 4.1-1) (Bild 4.2)

läßt sich die Matrix der Pfadgewichte, die gemäß Satz 4.1 mit der Beobachtbarkeitsmatrix in Gl. (B 4.1-1) identisch ist, durch einfache Addition und Multiplikation von



**Bild 4.2:** Pfadbaum zu System aus Beispiel 4.1

Kantengewichten bestimmen. Für die mit dem meisten Rechenaufwand verbundene Komponente  $p_{41}$  soll dies im folgenden gezeigt werden. Berücksichtigt werden dazu alle Pfade der Länge  $l = 4$  (1. Index), die ihren Anfang im Zustandsknoten  $x_1$  (2. Index) haben und im Ausgangsknoten  $y$  enden. Die Existenz solcher Pfade läßt sich durch einen Blick in die Ebene  $E_4$  (korrespondiert mit der Pfadlänge  $l=4$ ) klären. Der Zustand  $x_1$  tritt dort dreimal auf, folglich müssen die Gewichte von drei Pfaden zur Berechnung der Komponente  $p_{41}$  summiert werden:

$$\begin{aligned}
 1. & \quad x_1 \xrightarrow{5} x_1 \xrightarrow{5} x_1 \xrightarrow{-3} x_2 \xrightarrow{1} y \\
 2. & \quad x_1 \xrightarrow{4} x_3 \xrightarrow{2} x_1 \xrightarrow{-3} x_2 \xrightarrow{1} y \\
 3. & \quad x_1 \xrightarrow{5} x_1 \xrightarrow{4} x_3 \xrightarrow{1} x_4 \xrightarrow{2} y
 \end{aligned}
 \tag{B 4.1-3}$$

Für  $p_{41}$  ergibt die Berechnung

$$p_{41} = 5 \cdot 5 \cdot (-3) \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 = -59 \quad . \tag{B 4.1-4}$$

□

Ein wesentlicher Vorteil bei der Verwendung des Pfadbaumes zur Berechnung der Beobachtbarkeitsmatrix für lineare Systeme zeigt sich bereits an dieser Stelle: Die Anzahl der Rechenschritte, die durchzuführenden Additionen und Multiplikationen, werden insbesondere bei Systemen mit hoher Ordnung drastisch reduziert, da im allgemeinen nicht alle Matrixelemente von  $\mathbf{A}$  besetzt sind und damit auch keine Kanten vorhanden sind.

Lineare Mehrgrößensysteme können in ganz analoger Weise behandelt werden. Auch hierbei wird durch Auswertung von

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{y}^{(n-1)}}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = n \quad (4.9)$$

untersucht, ob  $n$  linear unabhängige Gleichungen zur Berechnung aller Zustände existieren. Für jeden Ausgang wird entsprechend Abschnitt 3.2 ein Pfadbaum und die Matrix der Pfadgewichte  $\mathbf{P}_i$ , für  $i = 1, \dots, p$  aufgestellt. Die Rangbestimmung

$$\text{Rang } \mathbf{P} = \text{Rang} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

ist wiederum identisch mit Gl. (4.9).

## 4.2 Strukturelle Beobachtbarkeit

Die Verwendung eines Modells mit unbestimmten Parametern anstelle eines linearen mit zahlenmäßig definierten Matrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}^T$ , führt auf ein *Strukturmodell* mit den *Strukturmatrizen*  $\mathbf{A}_B$ ,  $\mathbf{b}_B$  und  $\mathbf{c}_B^T$ .

**Definition 4.2** (Wend 1993)

Die Strukturmatrix  $\mathbf{M}_B$  ist von gleicher Dimension wie die zugehörige Zahlenmatrix  $\mathbf{M}$ . Für jedes nicht identisch verschwindende Element von  $\mathbf{M}$  wird eine „1“<sup>2</sup> an der entsprechenden Stelle von  $\mathbf{M}_B$  eingesetzt, jedem Nullelement von  $\mathbf{M}$  eine „0“ oder eine Leerstelle in  $\mathbf{M}_B$  zugeordnet.  $\square$

Strukturmerkmale sind Eigenschaften, die alle Systeme mit gleicher Belegung von  $\mathbf{A}_B$ ,  $\mathbf{b}_B$  und  $\mathbf{c}_B^T$  gemeinsam haben. Eines dieser Strukturmerkmale ist die *strukturelle Beobachtbarkeit* eines Systems.

Unter Verwendung des in Kapitel 2 vorgestellten Strukturgraphen lassen sich die in Reinschke (1988) angegebenen Bedingungen zur Überprüfung eines Systems auf strukturelle Beobachtbarkeit anwenden:

- A) Von jedem Zustandsknoten führt mindestens ein Pfad zu einem beliebigen Ausgangsknoten.

---

<sup>2</sup> oder \* bzw. L

B) Der Graph  $\mathcal{G}$  enthält mindestens eine Zyklusfamilie der Weite  $n$ .

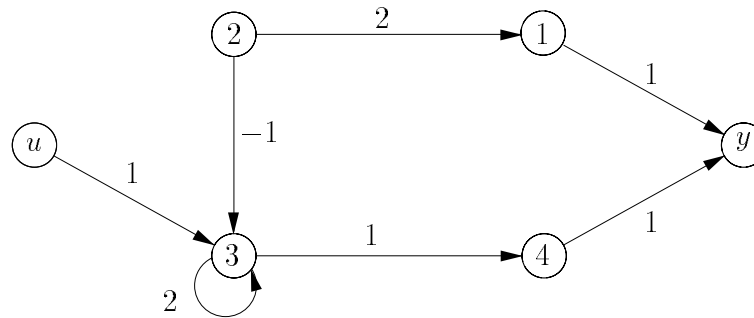
Ein strukturell beobachtbares System mit eindeutig definiertem Zustandsmodell ist nicht zwangsläufig beobachtbar. Nur der umgekehrte Schluß, daß ein beobachtbares System auch strukturell beobachtbar ist, ist möglich.

**Beispiel 4.2** Das lineare System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{B 4.2-1})$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad ,$$

mit dem in Abbildung 4.3 dargestellten Graphen, ist strukturell beobachtbar, wie



**Bild 4.3:** Graph des Systems nach Gl. (B 4.2-1)

die Berechnung der strukturellen Beobachtbarkeitsmatrix und die Rangbestimmung zeigt:

$$\text{Rang } \mathbf{Q} = \text{Rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 4 \quad . \quad (\text{B 4.2-2})$$

Wird der Berechnung von  $\mathbf{Q}$  die in Gl. (B 4.2-1) auftretende Systemmatrix  $\mathbf{A}$  und der Ausgangsvektor  $\mathbf{c}^T$  zugrunde gelegt, zeigt sich aber, daß für den Rang der Matrix gilt:

$$\text{Rang } \mathbf{Q} = 3 \quad . \quad (\text{B 4.2-3})$$

□

Mit der strukturellen Beobachtbarkeit werden nur die grundlegenden mathematischen Voraussetzungen für eine Beobachtbarkeitsanalyse überprüft:

1. Existieren  $n$  von Null verschiedene Gleichungen (Ableitungen von  $y$ ) ?

2. Werden alle Zustände durch diese Gleichungen erfaßt ?

3. Ist es möglich, alle Zustände mittels dieser Gleichungen zu berechnen ?

Wird die erste Bedingung nicht erfüllt, dann treten in der Beobachtbarkeitsmatrix Nullzeilen auf, z. B. :

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Werden nicht alle Systemzustände erfaßt, bedeutet dies, daß in  $\mathbf{Q}$  mindestens eine Nullspalte vorhanden ist, oder anders ausgedrückt: Keine der Ableitungen von  $y$  enthält den oder die „fehlenden“ Zustände, z. B.

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Und für den Fall, daß z. B. zwei Zustände nur in einer Zeile (also einer Ableitung) vorkommen,

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ist es nicht möglich eine eindeutige Lösung für  $\mathbf{x}$  anzugeben. Die drei genannten mathematischen Voraussetzungen zur Beobachtbarkeit lassen sich zu der folgenden Definition zusammenfassen:

### Definition 4.3

Ein System, gegeben durch das Strukturmodell

$$\sum_{\text{LS}^*} \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_B \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_B u(t) \\ y(t) = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}(t) \end{array} , \quad (4.11)$$

mit  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ;  $u(t), y(t) \in \mathbb{R}$ ,

ist strukturell beobachtbar genau dann, wenn für den strukturellen Rang gilt:

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B^T \\ \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B \\ \vdots \\ \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{n-1} \end{bmatrix} = n . \quad (4.12)$$

□

Das Aufstellen der strukturellen Beobachtbarkeitsmatrix kann analog zu der in Kapitel 4.1 vorgestellten Weise mit Hilfe des Pfadbaumes erfolgen. Das Berechnen von Pfadgewichten entfällt, da nur die Existenz eines Pfades von einem Zustandsknoten zum Ausgang interessiert.

Für Beispiel 4.1 ergibt das Aufstellen der strukturellen Beobachtbarkeitsmatrix und die nachfolgende Rangbestimmung

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3 \quad . \quad (4.13)$$

Der Vorteil der strukturellen Beobachtbarkeitsanalyse gegenüber einer zahlenmäßigen Betrachtung liegt in der weiter vereinfachten Ermittlung der Beobachtbarkeitsmatrix. Ausgehend vom Pfadbaum des Systems sind keine Berechnungen erforderlich. Wie in dem gezeigten Beispiel können so bereits frühzeitig Aussagen zur Beobachtbarkeit eines Systems gewonnen werden.

### 4.3 Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme

Der bewertete Graph eines nichtlinearen Systems mit der Zustandsdarstellung

$$\sum_{\text{NS}} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \end{cases} \quad , \quad (4.14)$$

$$\text{mit } \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$$

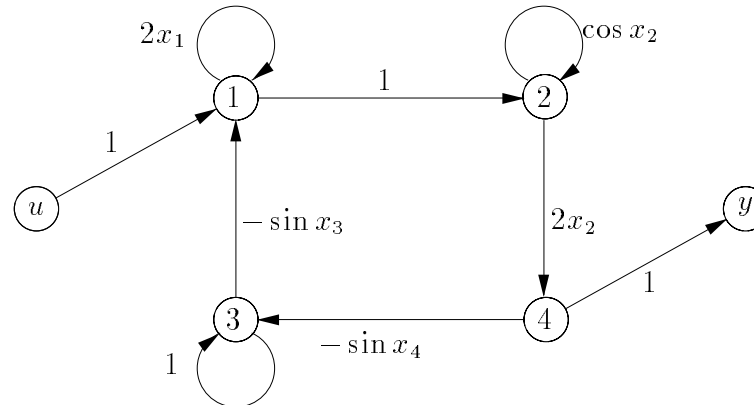
besitzt im Vergleich zu einem linearen System nichtlineare Kantengewichte. Das Aufstellen der Beobachtbarkeitsmatrix (Schwarz 1991)

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{y}^{(n-1)}}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

führt in diesem Fall zu einem anderen Ergebnis als die Berechnung der Matrix  $\mathbf{P}$  aus den Pfadgewichten (Gl. (3.8)).

**Beispiel 4.3** Gegeben sei das nichtlineare Eingrößen-System mit dem in Bild 4.4 dargestellten Graphen

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1^2 + \cos x_3 + u \\ x_1 + \sin x_2 \\ x_3 + \cos x_4 \\ x_2^2 \end{bmatrix}, \quad y = x_4 \quad . \quad (\text{B 4.3-1})$$



**Bild 4.4:** Graph des Systems zu Beispiel 4.3

Ableiten des Ausgangs führt auf die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 2x_2 & 2x_1 + 2 \sin x_2 + 2x_2 \cos x_2 & 0 & 0 \\ 4x_1 + 4 \sin x_2 & 4x_1 \cos x_2 + 4 \sin x_2 \cos x_2 & -2x_2 \sin x_3 & 0 \\ +4x_1x_2 & +2x_1^2 + 2 \cos x_3 + 2u + 2x_1 \cos x_2 & & \\ +2x_2 \cos x_2 & -2x_1x_2 \sin x_2 - 2 \sin x_2 \cos x_2 & & \\ & +2x_2(\cos^2 x_2 - \sin^2 x_2) & & \end{bmatrix} .$$

Zum Vergleich ist der Pfad-Baum zu dem Graphen in Bild 4.5 dargestellt, aus dem die Matrix  $\mathbf{P}$  bestimmt wird:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 2x_2 & 2x_2 \cos x_2 & 0 & 0 \\ 4x_1x_2 + 2x_2 \cos x_2 & 2x_2 \cos^2 x_2 & -2x_2 \sin x_3 & 0 \end{bmatrix} \quad \square$$

Die zusätzlich in  $\mathbf{Q}$  auftretenden Terme entstehen durch Anwendung der Produkt- bzw. Kettenregel beim Ableiten des Ausgangs  $y(t)$ . Diese Terme treten bei linearen Systemen nicht auf, da die Ableitungen lineare Funktionen in den Zuständen  $\boldsymbol{x}(t)$  sind. Wird das



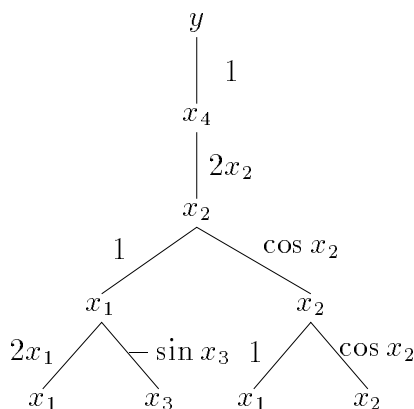


Bild 4.5: Pfadbaum zu dem System aus Beispiel 4.3

nichtlineare System nach Gl. (4.14) um einen allgemeinen Arbeitspunkt  $\mathbf{X}_0$  linearisiert, so entsteht das *lineare Tangentialsystem*:

$$\sum_{\text{LS}_t} \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) \quad , \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) \quad , \end{aligned} \quad (4.16)$$

mit  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$

Die Komponenten von  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  entsprechen den Kantengewichten des Graphen zu dem nichtlinearen System. Einsetzen eines zahlenmäßig festgelegten Arbeitspunktes ergibt das um diesen Punkt linearisierte System

$$\sum_{\text{LS}} \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}|_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) \quad , \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0}\mathbf{x}(t) \quad , \end{aligned} \quad (4.17)$$

mit  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ .

Mit dem bei Fliess und Glad (1993) aufgeführten Ergebnis, wonach ein nichtlineares System dann, nur dann beobachtbar ist, wenn das lineare Tangentialsystem beobachtbar ist, folgt:

**Satz 4.2** Ein nichtlineares System

$$\sum_{\text{NS}} \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad , \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \quad , \end{aligned} \quad (4.18)$$

mit  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$

ist dann und nur dann beobachtbar, wenn die Matrix der Pfadgewichte  $\mathbf{P}$  vollen Rang besitzt:

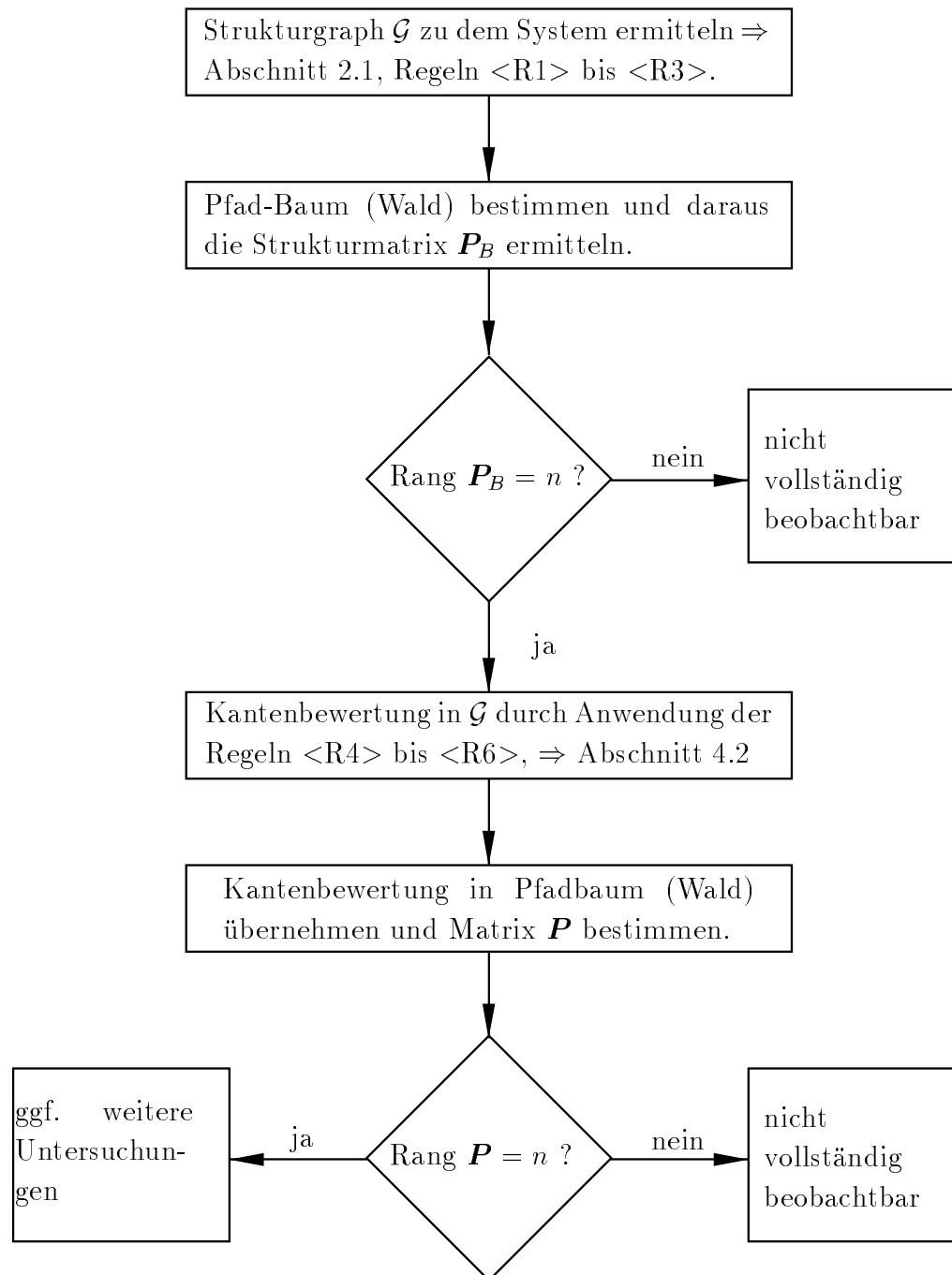
$$\text{Rang } \mathbf{P} = n \quad . \quad (4.19)$$

□

Bei genauerer Untersuchung der Matrix  $\mathbf{P}$  lassen sich die Arbeitsbereiche, in denen Gl. (4.19) erfüllt wird, angeben.

## 5 Algorithmus zur graphentheoretischen Beobachtbarkeitsanalyse

Die in dem vorangegangenen Abschnitt aufgezeigten Beobachtbarkeitsanalysen unter Verwendung des Pfad-Baumes (bzw. Waldes, bei Mehrgrößensystemen) lassen sich in Form eines Algorithmus einsetzen. Der folgende Ablaufplan, der z. B. in Form eines Programmes implementiert werden kann, veranschaulicht die Vorgehensweise:



## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Ausgehend von dem Zustandsmodell eines Systems entsteht durch Anwendung einfacher Regeln eine graphische Darstellung des Modells. Im wesentlichen wird mittels dieser Regeln die Existenz der Variablen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{u}$  in den Vektorfunktionen von  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  und  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  nachgeprüft. Die Regeln lassen sich durch Einführung sogenannter Kantenbewertungen weiter spezifizieren. Für die Berechnung dieser Kantengewichte ist lediglich das einmalige partielle Ableiten des Gleichungssystems erforderlich. Mit Hilfe des dabei entstehenden, gerichteten, bewerteten Graphen lassen sich Systemanalyse- bzw. Reglersyntheseverfahren entwickeln, die sich durch ein hohes Maß an Anschaulichkeit und Effizienz auszeichnen.

Ausgehend von dem aus der Theorie linearer Systeme bekannten Kalman-Kriterium zur Beobachtbarkeit eines Systems, wird ein Zusammenhang zwischen der Beobachtbarkeitsmatrix und der Matrix der Pfadgewichte, die durch Addition und Multiplikation von Kantengewichten ermittelt wird, hergeleitet. Dabei zeigt sich im besonderen, daß die Zahl der für das Aufstellen der Beobachtbarkeitsmatrix erforderlichen Rechenschritte bei Verwendung des Graphen reduziert wird.

Das gleiche Verfahren, das bei linearen Systemen Verwendung findet, wird im weiteren auf lineare Strukturmodelle und lineare Tangentialsysteme angewendet. Da nichtlineare Systeme nur dann beobachtbar sind, wenn das lineare Tangentialsystem beobachtbar ist (Fliess und Glad 1993), lassen sich die gefundenen Ergebnisse zur Beobachtbarkeitsanalyse nichtlinearer Systeme heranziehen.

Der Bericht befaßt sich ausschließlich mit der vollständigen Beobachtbarkeit, so daß weitere Arbeiten zu diesem Themenbereich sich mit Aussagen über die Zahl der nichtbeobachtbaren Zustände und einer Aufteilung des Zustandsraumes in einen beobachtbaren und unbeobachtbaren Unterraum befassen können. Weiterhin sind Untersuchungen zur graphentheoretischen Ermittlung der Nulldynamik eines Systems vielversprechend, da hierzu eine Rückführung berechnet wird, mit der das System maximal unbeobachtbar gemacht wird (Schwarz 1989).

Der im Vergleich zu anderen Verfahren zusätzlich erforderliche Aufwand zur Ermittlung des Systemgraphen läßt sich im wesentlichen dadurch reduzieren, daß auch andere Systemeigenschaften graphentheoretisch bestimmt werden. Denkbar wäre hier eine Implementierung in das Symbolverarbeitungsprogramm MAPLE<sup>®</sup>, das bereits über Befehle zur Generierung von Graphen verfügt.

## 7 Literaturverzeichnis

- De Luca, A., A. Isidori** und **F. Nicolò**. 1986. An application of nonlinear model matching to the dynamic control of robot arm with elastic joints. *Robot Control (Proc. IFAC Symposium on Robot Control SYROCO'85)*, hg. L. Basañez, G. Ferraté und G. N. Saridis. *IFAC Proceedings Series*. 9. 55–61. Oxford: Pergamon Press.
- Fliess, M.** und **S. T. Glad**. 1993. An algebraic approach to linear and nonlinear control. *Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications*, hg. H. L. Trentelmann und J. C. Willems. *Progress in Systems and Control Theory*. 14. 223–267. Boston: Birkhäuser.
- Gondran, M.** und **M. Minoux**. 1986. *Graphs and algorithms*. Chichester: Wiley-Interscience.
- Kalman, R. E., P. L. Falb** und **M. A. Arbib**. 1969. *Topics in Mathematical System Theory*. New York: McGraw-Hill.
- Reinschke, K.** 1988. *Multivariable Control – A Graph-theoretic Approach*. Berlin: Springer.
- Schwarz, H.** 1989. *Differenzengrad und Nulldynamik für Analytisch-Lineare-Systeme*. Forschungsbericht 05/89. MSRT. Universität Duisburg.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme – Systemtheoretische Grundlagen*. München: Oldenbourg.
- Wend, H. D.** 1993. *Strukturelle Analyse linearer Regelungssysteme*. München: Oldenbourg.
- Wey, T.** 1993. *Zur graphentheoretischen Charakterisierung des Rangs nichtlinearer Systeme*. Forschungsbericht 04/93. MSRT. Universität Duisburg.