

Modellbildung und Simulation eines zweiachsigen elastischen Handhabungssystems

Mingli Bai

Forschungsbericht Nr. 5/96

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Der Forschungsbericht stellt die Modellbildung und Simulation des im Fachgebiet vorhandenen zweiachsigen elastischen Handhabungssystems vor. Das Systemmodell ist stark nichtlinear und wird in der Umgebung eines Arbeitspunktes linearisiert. Die mit diesem Modell erzielten Simulationsergebnisse werden dargestellt.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	II
1 Einleitung	1
2 Modellbildung eines zweiachsigen elastischen Handhabungssystems	2
2.1 Bewegungsgleichungen des zweiachsigen elastischen Handhabungssystems .	2
2.2 Linearisierung des Systemmodells	6
2.3 Zustandsmodell	7
3 Simulationsergebnisse	8
4 Zusammenfassung und Ausblick	15
5 Literaturverzeichnis	16
Anhang	17
A Massenmatrix, Steifigkeitsmatrix und Vektor der verallgemeinerten Kräfte	17

Nomenklatur

\mathbf{A}	Systemmatrix
\mathbf{B}	Eingangsmatrix
\mathbf{C}	Ausgangsmatrix
\mathbf{C}_h	Matrix
c_{i1}	Koeffizient der ersten Eigenfunktion des i -ten Gliedes
c_{i2}	Koeffizient der ersten Eigenfunktion des i -ten Gliedes
c_{i3}	Koeffizient der ersten Eigenfunktion des i -ten Gliedes
c_{i4}	Koeffizient der ersten Eigenfunktion des i -ten Gliedes
EI_i	Biegesteifigkeit des i -ten Gliedes
E_k	kinetische Energie
E_p	potentielle Energie
\mathbf{f}	Funktionsvektor
$\mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$	Vektor der verallgemeinerten Kreisel- und Zentrifugalkräfte
\mathbf{I}	Einheitsmatrix
I_g	Trägheitsmoment des Gelenkes
\mathbf{i}_i	i -ter Einheitsvektor in x -Richtung
I_{li}	Trägheitsmoment am Ende des i -ten Gliedes
I_t	Trägheitsmoment des Endeffektors
I_{wi}	Trägheitsmoment der Motorwelle i
\mathbf{j}_i	i -ter Einheitsvektor in y -Richtung
\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_h	Matrix
\mathbf{K}_m	Matrix
k_{i1}	Parameter der ersten Eigenfunktion des i -ten Gliedes
l_i	Länge des i -ten Gliedes
$\mathbf{M}(\mathbf{q}(t))$	Massenmatrix
m_{ei}	Massenbeitrag der nicht mit dem Ende des i -ten Gliedes verbundenen Arme
m_g	Masse des Gelenkes
m_{li}	Masse am Ende des i -ten Gliedes
m_t	Zusatzmasse
\mathbf{p}_i	Ortsvektor zum Endpunkt des i -ten Gliedes
$\mathbf{q}(t)$	verallgemeinerte Koordinaten
$\delta\mathbf{q}$	Änderung der verallgemeinerten Koordinaten
\mathbf{r}_i	Ortsvektor
\mathbb{R}^f	Menge der $f \times 1$ -Vektoren
$\mathbb{R}^{f \times f}$	Menge der $f \times f$ -Matrizen
t	Zeit
$\mathbf{u}(t)$	Stellmomentenvektor
$\tilde{\mathbf{u}}(t)$	Stellmomentenvektor

$w_i(x_i, t)$	elastische Deformation
$\mathbf{x}(t)$	Zustandsgrößenvektor
$\mathbf{y}(t)$	Ausgangsgrößenvektor
$\mathbf{0}$	Nullmatrix
$\alpha_i(t)$	durch Elastizität verursachter Winkel
$\beta(t)$	Winkel
ρ_i	gleichmäßig verteilte Masse des i -ten Gliedes
$\theta_i(t)$	Winkel des i -ten Motors
$\phi_{i1}(x_i)$	Erste Eigenfunktion des i -ten Gliedes
$\psi_{i1}(x_i)$	Erste Eigenfunktion des i -ten Gliedes
λ_{i1}	Parameter der ersten Eigenfunktion des i -ten Gliedes
ω_{i1}	Erste Eigenfrequenz des i -ten Gliedes

1 Einleitung

Seit einigen Jahren hat das Interesse an mehrachsigen elastischen Handhabungssystemen zugenommen und zahlreiche Untersuchungen sind auf diesem Gebiet durchgeführt worden (Benati und Morro 1988, 1994, De Luca und Siciliano 1991, Fraser und Daniel 1991, Matsuno u.a. 1994, Oakley und Cannon 1989). Für die Regelung elastischer Handhabungssysteme sind Modelle erforderlich, die solche Systeme gut beschreiben. Die Benutzung von sehr leichten, wenig steifen Materialien bei der Konstruktion der Manipulatorarme macht die Berücksichtigung der auftretenden Elastizität unumgänglich. Die Deformation eines elastischen Armes ist im Raum kontinuierlich, wobei die Dynamik der Systeme durch partielle Differentialgleichungen beschrieben wird. Diese Gleichungen können mit Lagrange- oder Hamilton-Verfahren aufgestellt werden. Um solche Gleichungen zu lösen, ist die verteilte Deformation durch den Ritz-Ansatz zu diskretisieren, d. h. örtliche und zeitliche Abhängigkeiten werden getrennt. Die Deformation wird näherungsweise durch eine endliche Zahl von Eigenfunktionen beschrieben. Es werden üblicherweise die beiden ersten Eigenfunktionen des einseitig eingespannten Balkens verwendet.

Der vorliegende Bericht stellt zuerst ein nichtlineares Modell des im Fachgebiet vorhandenen, zweiachsigen elastischen Handhabungssystems vor, wobei nur die erste elastische Eigenfunktion verwendet wird. Die Reibungskräfte werden vernachlässigt. Um den Zeitaufwand bei dem Aufstellen des Systemmodells zu verringern, wurde der Abstand zwischen dem Ende des ersten Armes und der Welle des zweiten Motors nicht berücksichtigt. Das nichtlineare Systemmodell wird in der Umgebung eines Arbeitspunktes linearisiert. Anschließend werden die Systemgleichungen in Zustandsmodellform dargestellt. Abschnitt 3 stellt die Simulationsergebnisse vor, wobei das System durch zwei verschiedene Testsignale erregt wird. Eine Zusammenfassung mit einem Ausblick beendet diesen Bericht.

2 Modellbildung eines zweiachsigen elastischen Handhabungssystems

Zur Untersuchung der Eigenschaften mehrachsiger elastischer Handhabungssysteme wurde im Fachgebiet MSRT ein Versuchsträger mit zwei elastischen Manipulatorarmen aufgebaut (Krippner 1994). In diesem Abschnitt werden die Bewegungsgleichungen, die anhand des Lagrange-Verfahrens 2. Art aufgestellt wurden, das linearisierte Systemmodell sowie das Zustandsmodell des Versuchsträgers vorgestellt.

2.1 Bewegungsgleichungen des zweiachsigen elastischen Handhabungssystems

In Bild 2.1 ist das im Fachgebiet vorhandenen elastischen Handhabungssystems skizziert.

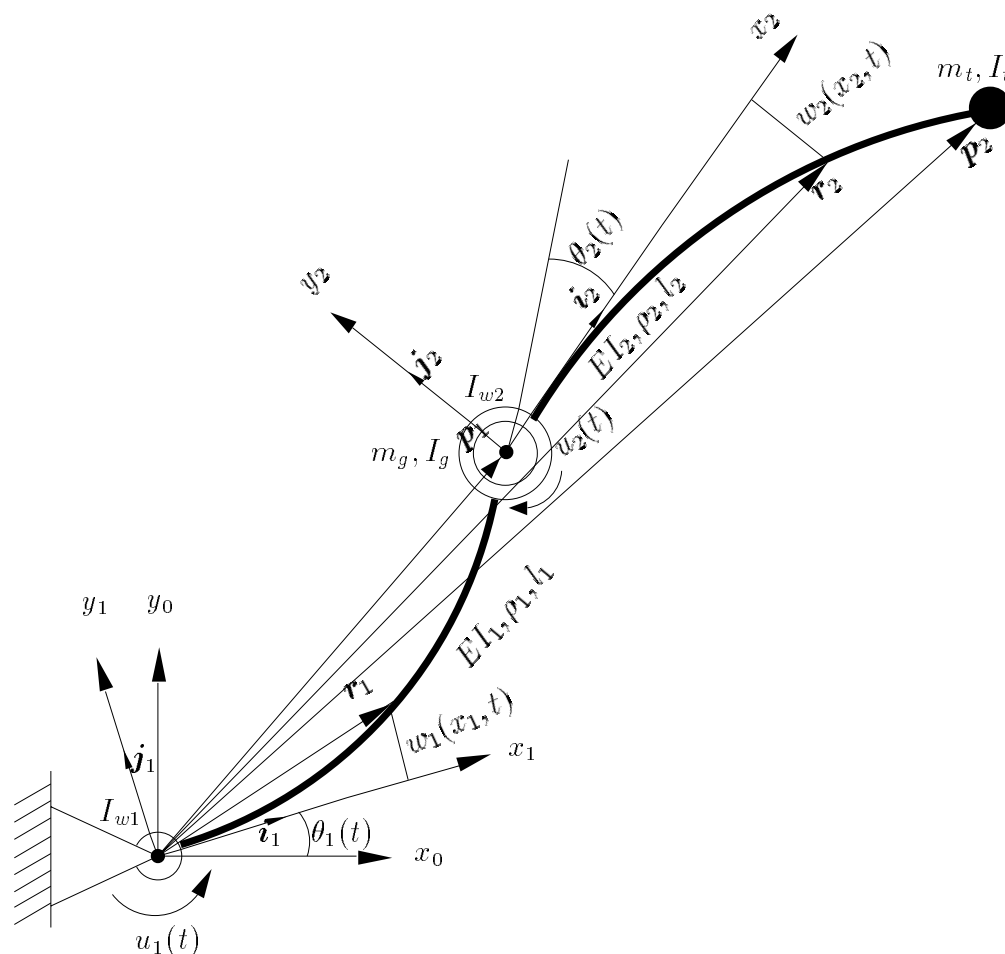


Bild 2.1: Zweiachsiges elastisches Handhabungssystem

Die beiden Manipulatorarme bewegen sich in der horizontalen Ebene und werden von zwei Elektromotoren angetrieben. Die Biegesteifigkeiten und die gleichmäßig verteilten Massen der Arme werden durch EI_i , bzw. ρ_i beschrieben, die Längen durch l_i und die Stellmomente der Motoren durch $u_i(t)$, wobei $\theta_i(t)$ dem Winkel des i -ten Motors entspricht. I_{W_i}

ist das Trägheitsmoment der Welle ($i = 1, 2$). m_g und I_g bezeichnen die Masse bzw. das Trägheitsmoment des Gelenkes, wobei die Zusatzmasse und das Trägheitsmoment des Endeffektors durch m_t und I_t beschrieben werden. (x_0, y_0) bezeichnet das Inertialsystem. Das Referenzsystem (x_i, y_i) wird mit dem Rotor des Motors festgelegt. $(\mathbf{i}_i, \mathbf{j}_i)$ ist ein Paar orthogonaler Einheitsvektoren. Die elastische Deformation wird mit $w_i(x_i, t)$ bezeichnet. Man nimmt üblicherweise an, daß die Deformation im Vergleich zur Länge des i -ten Armes l_i klein ist. Dann kann der Winkel am Ende des Armes $\alpha_i(t)$ wie folgt bestimmt werden:

$$\alpha_i(t) = \arctan(w'_i(l_i, t)) \approx w'_i(l_i, t) \hat{=} \left. \frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial x_i} \right|_{x_i=l_i} \quad (2.1)$$

\mathbf{r}_i ¹ ist ein Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt des Armes und \mathbf{p}_i ein Endpositionsvektor. Um den Zeitaufwand bei dem Aufstellen der Bewegungsgleichungen zu verringern, wird der starre Abschnitt zwischen dem Ende des ersten Armes und der Welle des zweiten Motors vernachlässigt. Dann werden \mathbf{r}_i und \mathbf{p}_i definiert als

$$\mathbf{r}_1 \hat{=} x_1 \mathbf{i}_1 + w_1(x_1, t) \mathbf{j}_1 \quad (2.2)$$

$$\mathbf{p}_1 \hat{=} l_1 \mathbf{i}_1 + w_1(l_1, t) \mathbf{j}_1 \quad (2.3)$$

$$\mathbf{r}_2 \hat{=} \mathbf{p}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 + w_2(x_2, t) \mathbf{j}_2 \quad (2.4)$$

$$\mathbf{p}_2 \hat{=} \mathbf{p}_1 + l_2 \mathbf{i}_2 + w_2(l_2, t) \mathbf{j}_2 \quad (2.5)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1 &= [\cos\theta_1(t), \sin\theta_1(t)]^T, & \mathbf{j}_1 &= [-\sin\theta_1(t), \cos\theta_1(t)]^T, \\ \mathbf{i}_2 &= [\cos\beta(t), \sin\beta(t)]^T, & \mathbf{j}_2 &= [-\sin\beta(t), \cos\beta(t)]^T, \\ \beta &\hat{=} \theta_1(t) + \alpha_1(t) + \theta_2(t). \end{aligned}$$

Die absoluten Geschwindigkeiten können durch die Ableitung der Gleichungen (2.2)–(2.5) berechnet werden:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = -w_1 \dot{\theta}_1 \mathbf{i}_1 + (x_1 \dot{\theta}_1 + \dot{w}_1) \mathbf{j}_1 \quad (2.6)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = -w_1 \Big|_{x_1=l_1} \dot{\theta}_1 \mathbf{i}_1 + (l_1 \dot{\theta}_1 + \dot{w}_1 \Big|_{x_1=l_1}) \mathbf{j}_1 \quad (2.7)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{p}}_1 - w_2 \dot{\beta} \mathbf{i}_2 + (x_2 \dot{\beta} + \dot{w}_2) \mathbf{j}_2 \quad (2.8)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \dot{\mathbf{p}}_1 - w_2 \Big|_{x_2=l_2} \dot{\beta} \mathbf{i}_2 + (l_2 \dot{\beta} + \dot{w}_2 \Big|_{x_2=l_2}) \mathbf{j}_2 \quad (2.9)$$

Man nimmt an, daß die Arme keine axiale Deformation besitzen, d. h. $\dot{x}_i = 0$. Die gesamte kinetische Energie E_k und die potentielle Energie E_p werden berechnet zu

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} I_{w1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_g (\dot{\theta}_1 + \dot{\alpha}_1)^2 + \frac{1}{2} m_g \dot{\mathbf{p}}_1^T \dot{\mathbf{p}}_1 + \frac{1}{2} I_{w2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\alpha}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ &+ \frac{1}{2} m_t \dot{\mathbf{p}}_2^T \dot{\mathbf{p}}_2 + \frac{1}{2} I_t (\dot{\theta}_1 + \dot{\alpha}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\alpha}_2)^2 + \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \rho_1 \dot{\mathbf{r}}_1^T \dot{\mathbf{r}}_1 dx_1 \end{aligned}$$

¹ Zeitargument wird weggelassen.

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \rho_2 \dot{\mathbf{r}}_2^T \dot{\mathbf{r}}_2 dx_2 \quad \text{und} \quad (2.10)$$

$$E_P = \frac{1}{2} EI_1 \int_0^{l_1} \left(\frac{\partial^2 w_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1 + \frac{1}{2} EI_2 \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial^2 w_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} \right)^2 dx_2 \quad . \quad (2.11)$$

Unter der Annahme, daß die Arme nach der Euler–Bernoulli–Balkentheorie den schlanken Balken entsprechen und kleine Deformation besitzen. Dann erfüllt die elastische Deformation $w_i(x_i, t)$ die folgenden partiellen Differentialgleichungen:

$$EI_i \frac{\partial^4 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^4} + \rho_i \frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.12)$$

Für mehrachsige elastische Handhabungssysteme mit dem einseitig eingespannten Balken werden die Randbedingungen

$$w_i(0, t) = 0, \quad (2.13)$$

$$w_i'(0, t) = 0, \quad (2.14)$$

$$EI_i \frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} \Big|_{x_i=l_i} = -I_i \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial x_i} \Big|_{x_i=l_i} \right) - m_{ei} \frac{d^2}{dt^2} (w_i(x_i, t) \Big|_{x_i=l_i}), \quad (2.15)$$

$$EI_i \frac{\partial^3 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^3} \Big|_{x_i=l_i} = m_{li} \frac{d^2}{dt^2} (w_i(x_i, t) \Big|_{x_i=l_i}) + m_{ei} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial x_i} \Big|_{x_i=l_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.16)$$

erfüllt, wobei m_{li} und I_{li} der Masse und dem Trägheitsmoment am Ende des i -ten Armes entsprechen. m_{ei} ist der Massenbeitrag der Arme, die nicht direkt mit dem Ende des i -ten Armes verbunden sind. Für das zweiachsige elastische Handhabungssystem gilt

$$\begin{aligned} m_{l1} &= \rho_2 l_2 + m_g + m_t, \\ I_{l1} &= \frac{1}{3} \rho_2 l_2^3 + I_g + I_{W2} + I_t + m_t l_2^2, \\ m_{l2} &= m_t, \\ I_{l2} &= I_t, \\ m_{e2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Es wird üblicherweise approximiert, daß $m_{e1} = 0$ ist (De Luca und Siciliano 1991). Die Deformation $w_i(x_i, t)$ kann nach dem Ritz–Ansatz diskretisiert werden (Meirovitch 1967):

$$w_i(x_i, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_{ij}(x_i) q_{ij}(t). \quad (2.18)$$

Dabei entspricht $q_{ij}(t)$ der i -ten verallgemeinerten Koordinate und $\phi_{ij}(x_i)$ der i -ten Eigenfunktion. Wenn nur die erste Eigenfunktion berücksichtigt wird, d. h.

$$w_1(x_1, t) = \phi_{11}(x_1) q_{11}(t) \quad \text{und} \quad (2.19)$$

$$w_2(x_2, t) = \phi_{21}(x_2) q_{21}(t) \quad , \quad (2.20)$$

dann lassen sich $\alpha_1(t)$ und $\alpha_2(t)$ durch

$$\alpha_1(t) = \phi'_{11}(l_1)q_{11}(t) \quad \text{und} \quad (2.21)$$

$$\alpha_2(t) = \phi'_{21}(l_2)q_{21}(t) \quad (2.22)$$

bestimmen. $\phi_{i1}(x_i)$ kann durch

$$\phi_{i1}(x_i) = c_{i1}\sin(\lambda_{i1}x_i) + c_{i2}\cos(\lambda_{i1}x_i) + c_{i3}\sinh(\lambda_{i1}x_i) + c_{i4}\cosh(\lambda_{i1}x_i) \quad (2.23)$$

beschrieben werden, wobei $c_{ij}(j = 1, 2, \dots, 4)$ den zu bestimmenden Koeffizienten entsprechen (Meirovitch 1967). Unter Verwendung der Randbedingungen (2.13) bis (2.16) erhält man

$$c_{i3} = -c_{i1}, \quad (2.24)$$

$$c_{i4} = -c_{i2}, \quad (2.25)$$

$$c_{i3} = k_{i1}c_{i4}, \quad (2.26)$$

wobei k_{i1} einer Konstante entspricht, die durch die Randbedingungen (2.15) und (2.16) bestimmt werden kann. Die Eigenfunktion $\phi_{i1}(x_i)$ wird in

$$\begin{aligned} \phi_{i1}(x_i) &= c_{i4}(\cosh(\lambda_{i1}x_i) - \cos(\lambda_{i1}x_i) + k_{i1}(\sinh(\lambda_{i1}x_i) - \sin(\lambda_{i1}x_i))) \\ &=: c_{i4}\psi_{i1}(x_i) \end{aligned} \quad (2.27)$$

umgeschrieben. Zur Bestimmung des Koeffizienten c_{i4} wird die Eigenfunktion $\phi_{i1}(x_i)$ nach

$$\int_0^{l_i} \phi_{i1}^2(x_i) dx_i = l_i \quad (2.28)$$

normiert. Dann ergibt sich

$$c_{i4} = \sqrt{\frac{l_i}{\int_0^{l_i} \psi_{i1}^2(x_i) dx_i}}. \quad (2.29)$$

Für mehrachsige elastische Handhabungssysteme entsprechen die λ_{i1} den Wurzeln der Gleichung

$$\begin{aligned} &1 + \cos(\lambda_{i1}l_i)\cosh(\lambda_{i1}l_i) \\ &- \frac{m_{i1}\lambda_{i1}}{\rho_i}(\sin(\lambda_{i1}l_i)\cosh(\lambda_{i1}l_i) - \cos(\lambda_{i1}l_i)\sinh(\lambda_{i1}l_i)) \\ &- \frac{I_{i1}\lambda_{i1}^3}{\rho_i}(\sin(\lambda_{i1}l_i)\cosh(\lambda_{i1}l_i) + \cos(\lambda_{i1}l_i)\sinh(\lambda_{i1}l_i)) \\ &+ \frac{m_{i1}I_{i1}\lambda_{i1}^4}{\rho_i^2}(1 - \cos(\lambda_{i1}l_i)\cosh(\lambda_{i1}l_i)) = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

(De Luca und Siciliano 1991). Die Eigenfrequenz kann durch

$$\omega_{i1}^2 = \frac{EI_i}{\rho_i}\lambda_{i1}^4 \quad (2.31)$$

bestimmt werden. Die Differenzialgleichungen des elastischen Handhabungssystems können mit den Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i1}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{i1}} = 0 \quad , i = 1, 2 \quad (2.32)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = u_i(t) \quad (2.33)$$

mit $L = E_K - E_P$ ermittelt werden.

Die Bewegungsgleichungen können in Matrixform

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}(t))\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{u}(t) \quad (2.34)$$

dargestellt werden mit $\mathbf{M}(\mathbf{q}(t)) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ und $\mathbf{q}(t)$, $\mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^4$. Die Matrizen $\mathbf{M}(\mathbf{q}(t))$, \mathbf{K} und der Vektor $\mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ wurden mit Hilfe des Programmsystems MAPLE[®] berechnet und werden im Anhang A angegeben. Die Vektoren $\mathbf{q}(t)$ und $\mathbf{u}(t)$ sind definiert als

$$\mathbf{q}(t) \hat{=} \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ q_{11}(t) \\ q_{21}(t) \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{u}(t) \hat{=} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (2.35)$$

2.2 Linearisierung des Systemmodells

Die Gleichung (2.34) ist stark nichtlinear. Die Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q}(t))$ ist eine Funktion des Vektors der verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{q}(t)$, d. h. sie verändert sich mit den Positionen der beiden elastischen Arme. Der Vektor der verallgemeinerten Kreisel- und Zentrifugalkräfte $\mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ enthält die Kreuzprodukte zwischen der einzelnen Geschwindigkeit der verallgemeinerten Koordinaten. Dies macht den Reglerentwurf des Systems kompliziert und aufwendig. Zur Entwicklung eines Reglers wird das nichtlineare Systemmodell in der Umgebung eines Arbeitspunktes linearisiert. Dazu wird üblicherweise die Taylorreihenentwicklung verwendet (Fraser und Daniel 1991, Schwarz 1991). Der Arbeitspunkt wird durch \mathbf{q}_0 , $\dot{\mathbf{q}}_0$ und $\ddot{\mathbf{q}}_0$ beschrieben. Man nimmt an, daß der Stellmomentenvektor $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ ist. Ein Funktionsvektor \mathbf{f} wird definiert als

$$\mathbf{f} \hat{=} \mathbf{M}(\mathbf{q}(t))\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) \quad . \quad (2.36)$$

Nach dem Abbruch der Taylorreihenentwicklung nach dem 1. Glied kann das Systemmodell

$$\mathbf{f} \Big|_{\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, \ddot{\mathbf{q}}_0} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \Big|_{\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, \ddot{\mathbf{q}}_0} \delta \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \Big|_{\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, \ddot{\mathbf{q}}_0} \delta \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, \ddot{\mathbf{q}}_0} \delta \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.37)$$

linear approximiert werden, wobei

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} \Big|_{q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0} &= \mathbf{M}(q_0) \ddot{q}_0 + \mathbf{h}(q_0, \dot{q}_0) + \mathbf{K} q_0 = \mathbf{0} \quad , \\
\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \ddot{q}} \Big|_{q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0} &= \mathbf{M} \Big|_{q_0} \quad , \\
\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{q}} \Big|_{q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0} &= \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \dot{q}} \Big|_{q_0, \dot{q}_0} \quad , \\
\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q} \Big|_{q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0} &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q} \Big|_{q_0} \ddot{q}_0 + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial q} \Big|_{q_0, \dot{q}_0} + \mathbf{K} \quad \text{und} \\
\delta \mathbf{q} &= \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_0
\end{aligned} \tag{2.38}$$

sind. Das führt auf das linearisierte Systemmodell

$$\mathbf{M} \Big|_{q_0} \delta \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_h \delta \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_h) \delta \mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{2.39}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_h &= \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \dot{q}} \Big|_{q_0, \dot{q}_0} = \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \theta_2}, \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \dot{q}_{11}}, \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \dot{q}_{21}} \right] \Big|_{q_0, \dot{q}_0} \\
\mathbf{K}_m &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q} \Big|_{q_0} \ddot{q}_0 = \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_1} \ddot{q}_0, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_2} \ddot{q}_0, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \dot{q}_{11}} \ddot{q}_0, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \dot{q}_{21}} \ddot{q}_0 \right] \Big|_{q_0} \\
\mathbf{K}_h &= \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial q} \Big|_{q_0, \dot{q}_0} = \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \theta_2}, \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \dot{q}_{11}}, \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \dot{q}_{21}} \right] \Big|_{q_0, \dot{q}_0} .
\end{aligned}$$

2.3 Zustandsmodell

Der Zustandsvektor $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^8$ des Systems wird aus $\delta \mathbf{q}$ und seiner ersten zeitlichen Ableitung $\delta \dot{\mathbf{q}}$ gebildet:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q} \\ \delta \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} . \tag{2.40}$$

Mit der Berücksichtigung des Stellmomentsvektors $\mathbf{u}(t)$ kann der Vektor $\dot{\mathbf{x}}(t)$ durch Auflösen von Gleichung (2.39) nach $\delta \ddot{\mathbf{q}}$ bestimmt werden:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{q}} \\ \delta \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{M}^{-1} \Big|_{q_0} (\mathbf{u}(t) - \mathbf{C}_h \delta \dot{\mathbf{q}} - (\mathbf{K} + \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_h) \delta \mathbf{q}) \end{bmatrix} . \tag{2.41}$$

Dann gilt für das Zustandsmodell

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \tilde{\mathbf{u}}(t) \tag{2.42}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}^T \mathbf{x}(t) \tag{2.43}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} |_{q_0} (\mathbf{K} + \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_h) & -\mathbf{M}^{-1} |_{q_0} \mathbf{C}_h \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & m'_{11} & m'_{21} & m'_{31} & m'_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m'_{12} & m'_{22} & m'_{32} & m'_{42} \end{bmatrix}^T, \quad (2.46)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (2.47)$$

$\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ist eine Einheitsmatrix. Die m'_{ij} stellen die Elemente von $\mathbf{M}^{-1} |_{q_0}$ dar. Als Ausgangsgrößen werden $\delta\theta_1$ und $\delta\theta_2$ gewählt.

3 Simulationsergebnisse

Die Parameter des in Bild 2.1 dargestellten elastischen Handhabungssystems sind in Tabelle 3.1 aufgeführt.

Arm 1	Arm 2	Gelenke	Zusatzmasse
$I_{W1} = 0,0196 \text{ kgm}^2$	$I_{W2} = 0,00162 \text{ kgm}^2$	$I_g = 0,00138 \text{ kgm}^2$	$I_t = 0,000715 \text{ kgm}^2$
$\rho_1 = 0,285 \text{ kgm}^{-1}$	$\rho_2 = 0,214 \text{ kgm}^{-1}$	$m_g = 0,975 \text{ kg}$	$m_t = 0,319 \text{ kg}$
$l_1 = 0,4 \text{ m}$	$l_2 = 0,4 \text{ m}$		
$EI_1 = 0,616 \text{ Nm}^2$	$EI_2 = 0,463 \text{ Nm}^2$		

Tabelle 3.1 Parameter des Versuchsträgers

Das System wurde zunächst mit dem in Bild 3.1 dargestellten Eingangssignal $u_1(t)$ simuliert, wobei $u_2(t) = 0$ ist. Der Arbeitspunkt und der Anfangsvektor sind $\mathbf{q}_0 = \dot{\mathbf{q}}_0 = \ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Die Ausgangsgrößen $\delta\theta_1(t)$, $\delta\theta_2(t)$ sowie $\delta q_{11}(t)$ und $\delta q_{21}(t)$ werden in den Bildern 3.2–3.5 dargestellt.

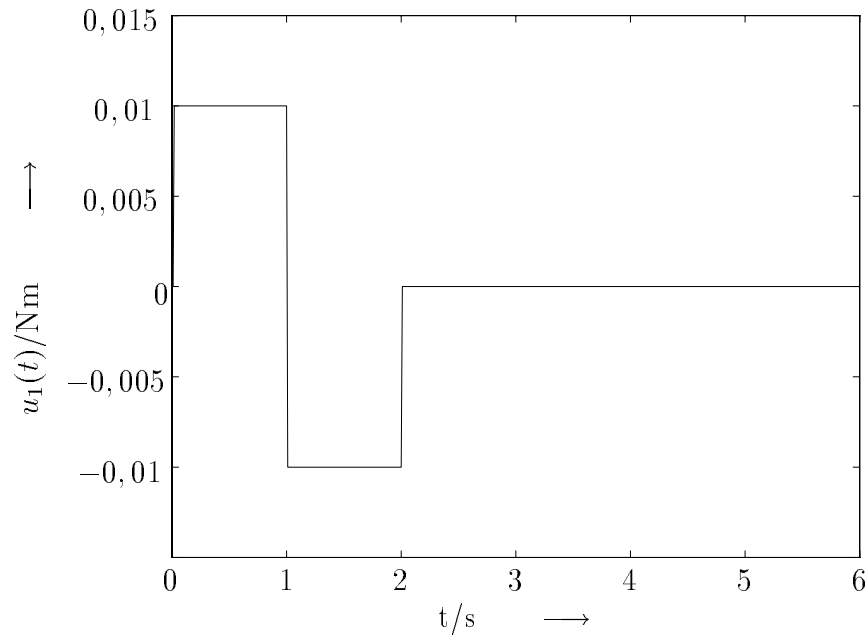


Bild 3.1: Eingangssignal $u_1(t)$

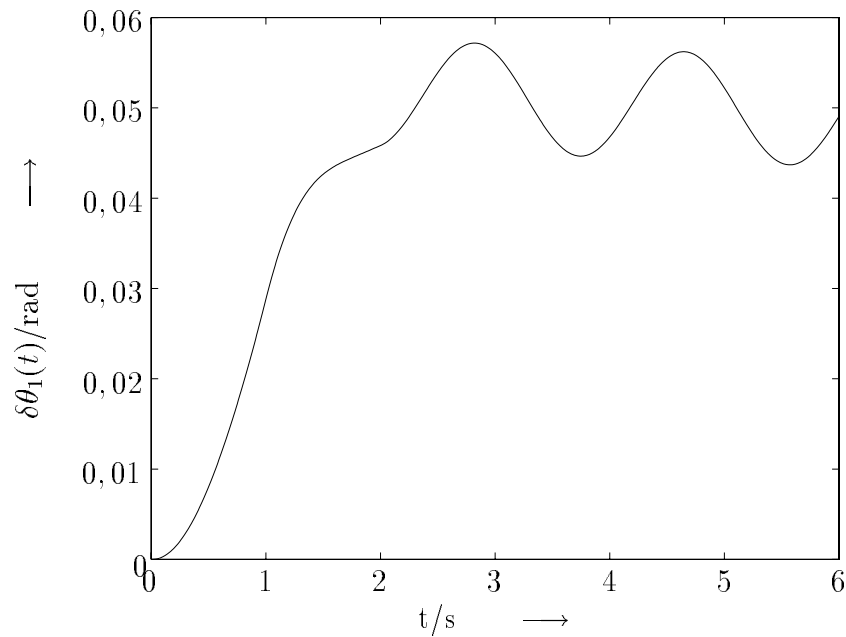


Bild 3.2: Antwort auf $u_1(t)$ (s. Bild 3.1) bezüglich $\delta\theta_1(t)$

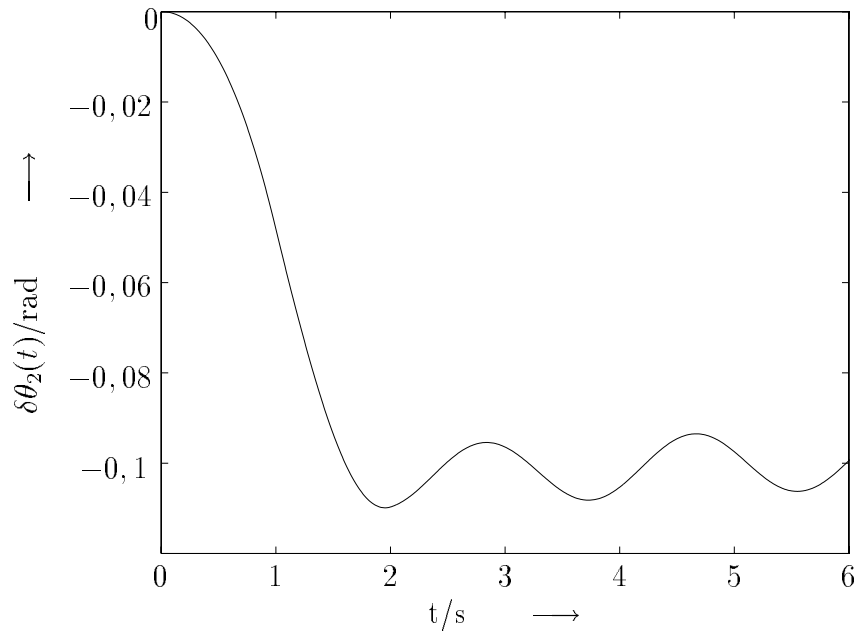


Bild 3.3: Antwort auf $u_1(t)$ (s. Bild 3.1) bezüglich $\delta\theta_2(t)$

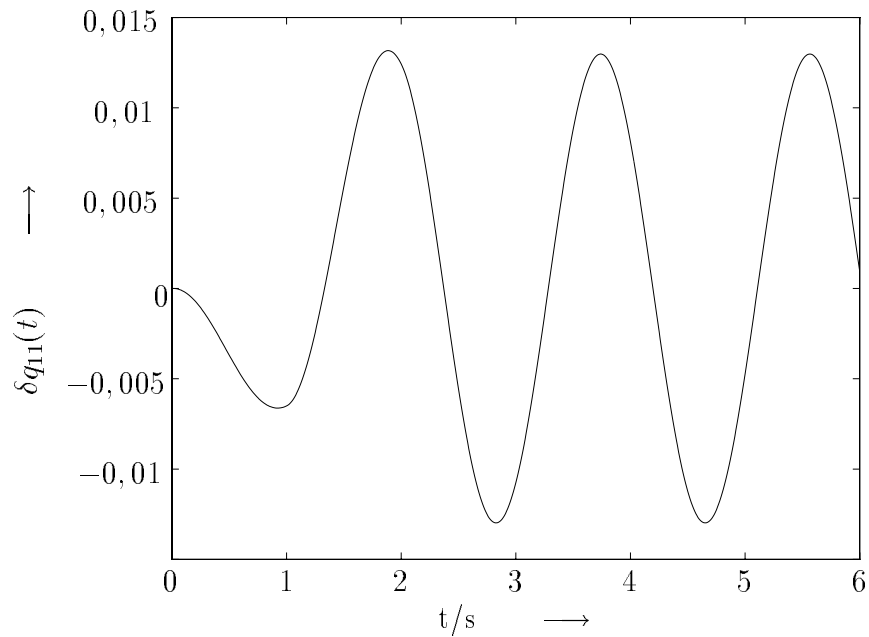


Bild 3.4: Antwort auf $u_1(t)$ (s. Bild 3.1) bezüglich $\delta q_{11}(t)$

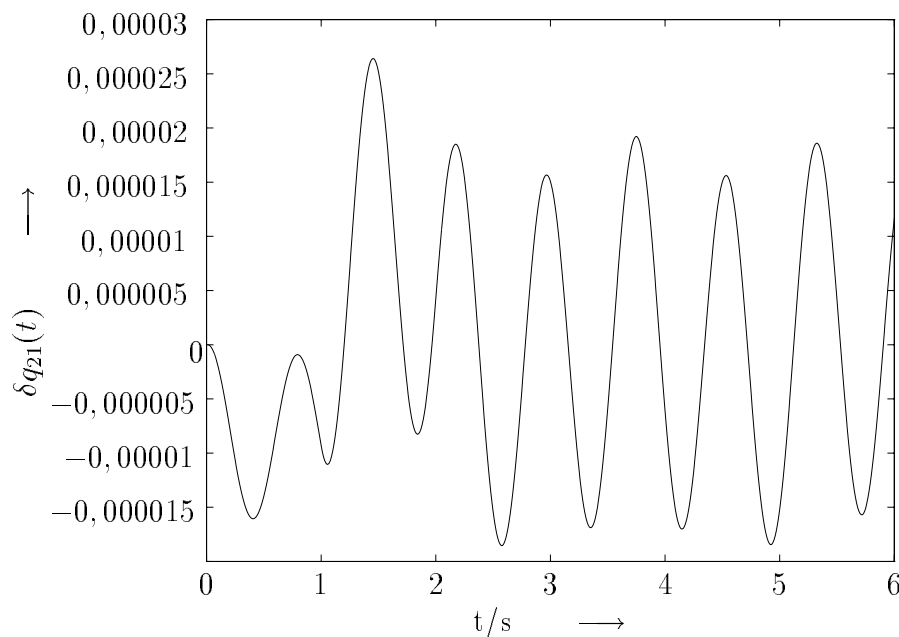
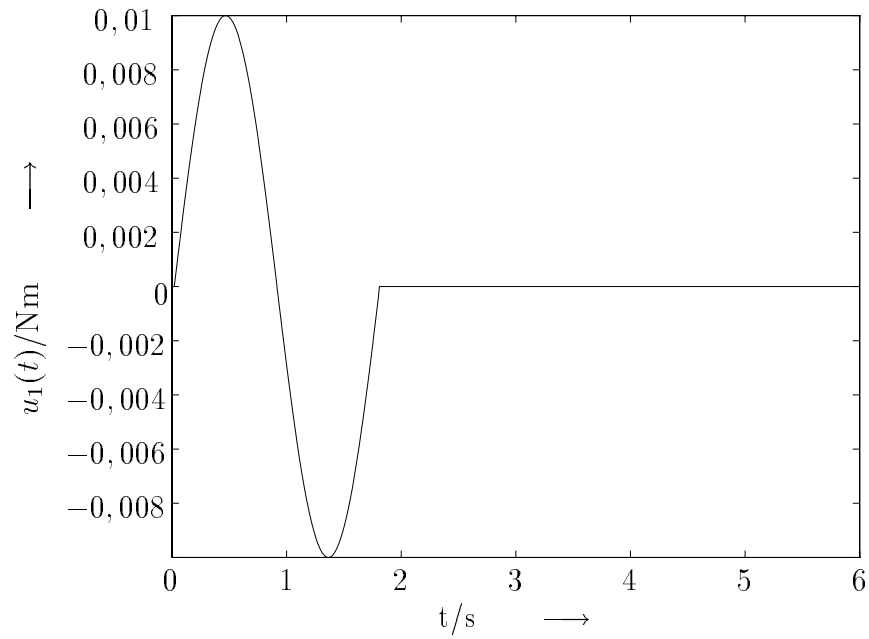
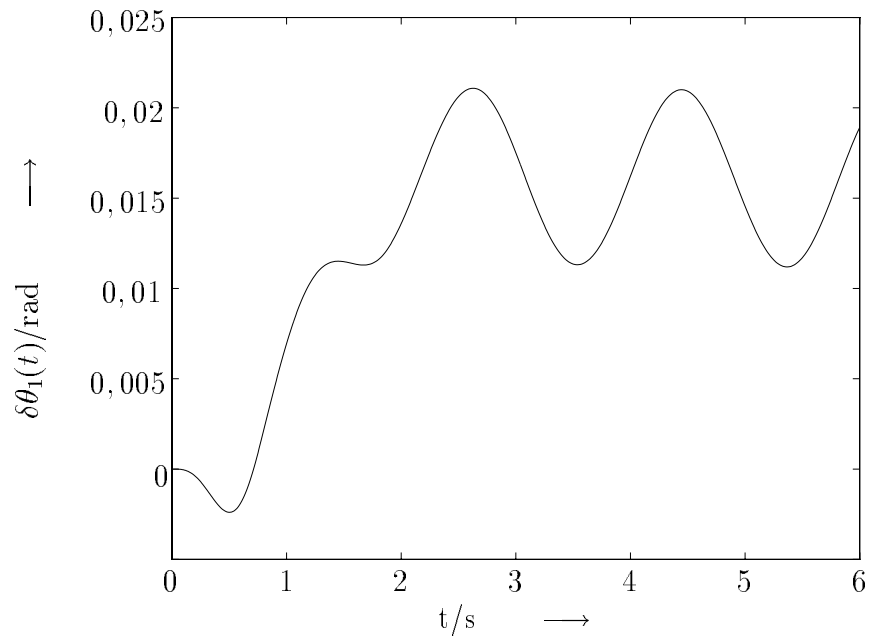
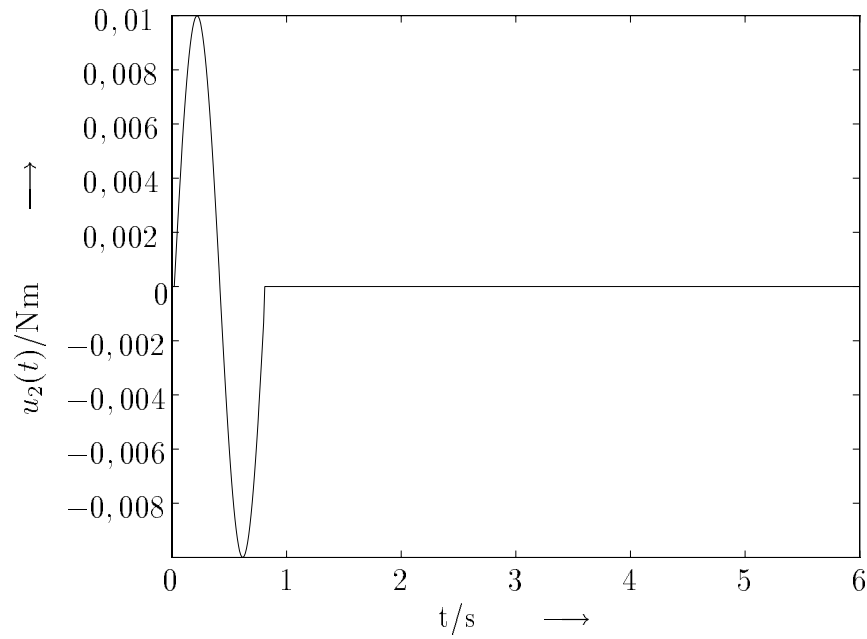
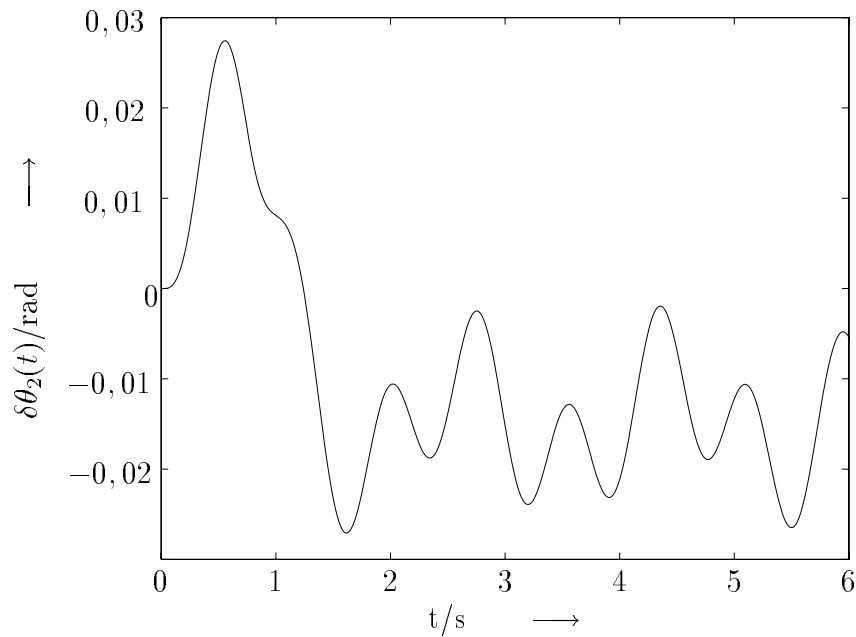


Bild 3.5: Antwort auf $u_1(t)$ (s. Bild 3.1) bezüglich $\delta q_{21}(t)$

Unter der Erregung des Eingangssignals $u_1(t)$ bewegen sich die beiden Arme gegeneinander (s. Bilder 3.2 und 3.3). Ohne Berücksichtigung der Reibungskräfte erhält man nach 2 Sekunden die Dauerschwingungen. Bilder 3.2 und 3.3 zeigen, daß die Bewegungen der beiden Arme stark gekoppelt sind. Im Vergleich zum Zeitverlauf von $\delta q_{11}(t)$ (s. Bild 3.4) hat $\delta q_{21}(t)$ (s. Bild 3.5) kleinere Auslenkung. Dann wurden die sinusförmigen Impulssignale $u_1(t) = 0,01\sin(\omega_{11}t)$ ($0 \leq t \leq 1,8\text{s}$) und $u_2(t) = 0,01\sin(\omega_{21}t)$ ($0 \leq t \leq 0,8\text{s}$) als Eingangssignale gewählt (s. Bild 3.6 bzw. 3.8), wobei $\omega_{11} \approx 3,50 \text{ rad/s}$ und $\omega_{21} \approx 7,88 \text{ rad/s}$ den Eigenfrequenzen entsprechen. Bilder 3.7 bzw. 3.9–3.11 stellen die Simulationsergebnisse vor.

**Bild 3.6:** Eingangssignal $u_1(t)$ **Bild 3.7:** Antwort auf das in Bild 3.6 dargestellte Signal $u_1(t)$

**Bild 3.8:** Eingangssignal $u_2(t)$ **Bild 3.9:** Antwort auf das in Bild 3.8 dargestellte Signal $u_2(t)$

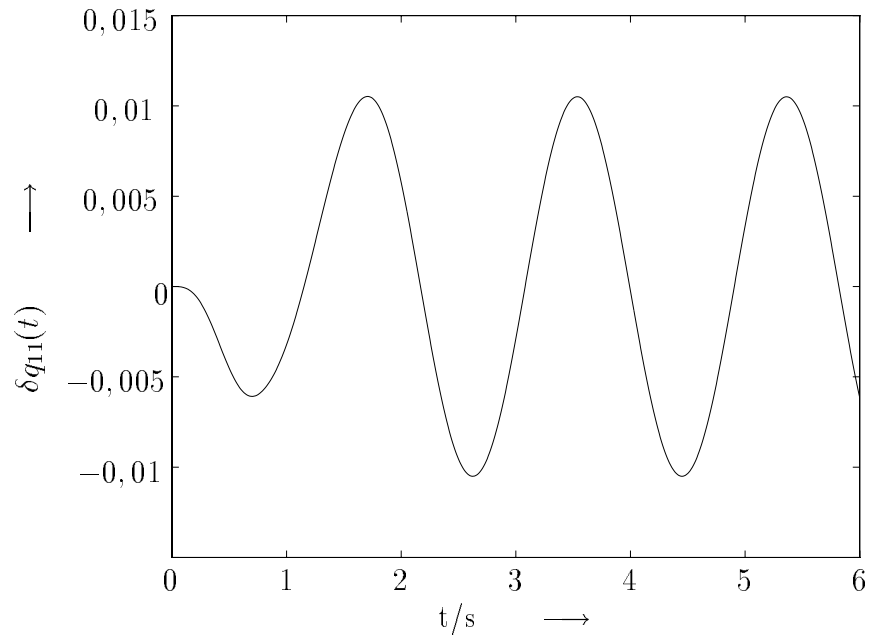


Bild 3.10: Antwort auf das in Bild 3.6 dargestellte Signal $u_1(t)$

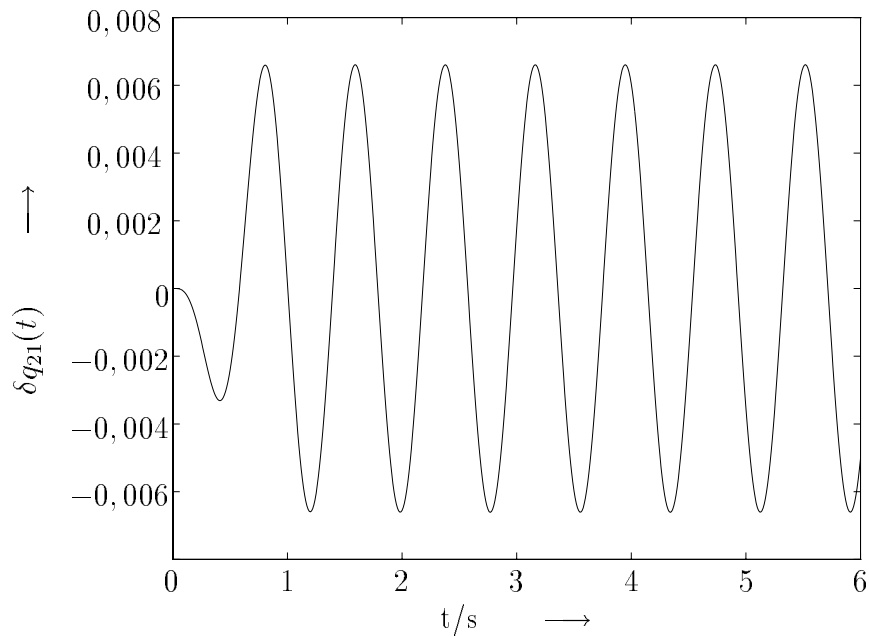


Bild 3.11: Antwort auf das in Bild 3.8 dargestellte Signal $u_2(t)$

Im Vergleich zu den Bildern 3.2 bzw. 3.4 haben sich die Zeitverläufe von $\delta\theta_1(t)$ (s. Bild 3.7) und $\delta q_{11}(t)$ (s. Bild 3.10) nach 2 Sekunden kaum geändert. Für den zweiten Arm zeigt Bild 3.9, daß $\delta\theta_2(t)$ eine überlagerte Schwingung besitzt.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Der vorliegende Bericht ² stellt Modellbildung und Simulation eines zweiachsigen elastischen Handhabungssystems vor. Als Regelstrecke wird der im Fachgebiet vorhandene Versuchsträger betrachtet. Die Dynamik des Systems läßt sich approximativ durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschreiben, wobei die Ritz- und Lagrange-Verfahren 2. Art angewendet wurden. Dabei wurden die Eigenfunktionen des einseitig eingespannten Balken verwendet. In einem ersten Ansatz wurde die erste elastische Eigenfunktion verwendet, die restlichen werden vernachlässigt. Um den Zeitaufwand bei dem Aufstellen der Bewegungsgleichungen zu verringern wurde der Abstand zwischen dem Ende des ersten Armes und der Welle des zweiten Motors nicht berücksichtigt. Das Systemmodell wurde mit Hilfe des Programmsystems MAPLE[®] berechnet. Es ist stark nichtlinear und wird in der Umgebung eines Arbeitspunktes mittels der Taylorreihenentwicklung linearisiert. Um einen optimalen Regler zu entwerfen, wird das Zustandsmodell vorgestellt. Die Simulation des Systemverhaltens erfolgt unter MATLAB. Als die Testsignale wurden zwei verschiedene Eingangssignale gewählt. Die Simulationsergebnisse zeigen, daß die Bewegungen der beiden Arme stark gekoppelt sind. Wegen der Elastizität des Armes tritt die Schwingung auf.

Für zukünftige Arbeiten ist die Untersuchung folgender Punkte interessant:

1. Die Berücksichtigung von Reibungskräften des Systems
2. Der Vergleich der Simulationsergebnisse mit den am Versuchsträger gemessenen Ein/Ausgangsdaten und die anschließende Modifikation des Systemmodells
3. Die Entwicklung eines optimalen Reglers anhand des LQR-Verfahrens.

² Die Verfasserin dankt dem DAAD für seine Unterstützung.

5 Literaturverzeichnis

- Benati, M. und A. Morro.** 1988. Dynamics of Chain of Flexible Links. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control.* 410-415.
- Benati, M. und A. Morro.** 1994. Formulation of Equations of Motion for a Chain of Flexible Links Using Hamilton's Principle. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control.* 81-88.
- De Luca, A. und B. Siciliano.** 1991. Closed-Form Dynamic Model of Planar Multi-link Lightweight Robots. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 21. 826-839.
- Fraser, A. R. und R. W. Daniel.** 1991. *Perturbation Techniques for Flexible Manipulators.* USA: Kluwer Academic Publishers.
- Krippner, U** 1994. *Konstruktion eines zweiachsigen elastischen Handhabungssystems.* Studienarbeit. MSRT. Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg.
- Matsuno, F., T. Asano und Y. Sakawa.** 1994. Modeling and Quasi-Static Hybrid Position/Force Control of Constrained Planar Two-Link Flexible Manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 10. 287-297.
- Meirovitch, L.** 1967. *Analytical Methods in Vibrations.* USA: The Macmillan Company.
- Oakley, C. M. und R. H. Cannon.** 1989. Equations of Motion for an Experimental Planar Two-Link Flexible Manipulator. *Robotics Research.* 267-278.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme – Systemtheoretische Grundlagen.* München, Wien: Oldenbourg.

A Massenmatrix, Steifigkeitsmatrix und Vektor der verallgemeinerten Kräfte

Die Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q}(t))$ ist eine symmetrische positiv definierte Matrix, während die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} einer Diagonalmatrix entspricht.

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \rho_1 \left[\frac{1}{3} l_1^3 + \int_0^{l_1} (\phi_{11}(x_1) q_{11}(t))^2 dx_1 \right] \\
&+ \rho_2 \left[(\phi_{11}(l_1) q_{11}(t))^2 l_2 + l_1^2 l_2 + \frac{1}{3} l_2^3 + \int_0^{l_2} (\phi_{21}(x_2) q_{21}(t))^2 dx_2 + \underline{2aa_1} \right] \\
&+ m_g \left[l_1^2 + (\phi_{11}(l_1) q_{11}(t))^2 \right] \\
&+ M_t \left[l_1^2 + (\phi_{11}(l_1) q_{11}(t))^2 + l_2^2 + (\phi_{21}(l_2) q_{21}(t))^2 + \underline{2aa_2} \right] \\
&+ I_{W1} + I_g + I_{W2} + I_t \\
m_{12} &= \rho_2 \left[\frac{1}{3} l_2^3 + \int_0^{l_2} (\phi_{21}(x_2) q_{21}(t))^2 dx_2 + \underline{aa_1} \right] \\
&+ M_t \left[l_2^2 + (\phi_{21}(l_2) q_{21}(t))^2 + \underline{aa_2} \right] + I_{W2} + I_t \\
m_{13} &= \rho_1 \left[\int_0^{l_1} \phi_{11}(x_1) x_1 dx_1 \right] \\
&+ \rho_2 \left[\phi_{11}(l_1) l_1 l_2 + \phi'_{11}(l_1) \left(\frac{1}{3} l_2^3 + \int_0^{l_2} (\phi_{21}(x_2) q_{21}(t))^2 dx_2 + \underline{aa_1} \right) + \underline{bb_1} \right] \\
&+ m_g \left[l_1 \phi_{11}(l_1) \right] \\
&+ M_t \left[\phi_{11}(l_1) l_1 + \phi'_{11}(l_1) \left(l_2^2 + (\phi_{21}(l_2) q_{21}(t))^2 + \underline{aa_2} \right) + \underline{bb_2} \right] \\
&+ \phi'_{11}(l_1) \left(I_g + I_{W2} + I_t \right) \\
m_{14} &= \rho_2 \left[\int_0^{l_2} x_2 \phi_{21}(x_2) dx_2 + \underline{cc_1} \right] \\
&+ M_t \left[l_2 \phi_{21}(l_2) + \underline{cc_2} \right] + I_t \phi'_{21}(l_2) \\
m_{21} &= m_{12} \\
m_{22} &= \rho_2 \left[\frac{1}{3} l_2^3 + \int_0^{l_2} (\phi_{21}(x_2) q_{21}(t))^2 dx_2 \right] \\
&+ M_t \left[l_2^2 + (\phi_{21}(l_2) q_{21}(t))^2 \right] + I_{W2} + I_t \\
m_{23} &= \rho_2 \left[\phi'_{11}(l_1) \left(\frac{1}{3} l_2^3 + \int_0^{l_2} (\phi_{21}(x_2) q_{21}(t))^2 dx_2 \right) + \underline{bb_1} \right] \\
&+ M_t \left[\phi'_{11}(l_1) \left(l_2^2 + (\phi_{21}(l_2) q_{21}(t))^2 \right) + \underline{bb_2} \right] + \phi'_{11}(l_1) \left(I_{W2} + I_t \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{24} &= \rho_2 \int_0^{l_2} x_2 \phi_{21}(x_2) dx_2 + M_t l_2 \phi_{21}(l_2) + I_t \phi'_{21}(l_2) \\
m_{31} &= m_{13} \\
m_{32} &= m_{23} \\
m_{33} &= m_g \phi_{11}^2(l_1) \\
&\quad + M_t \left[\phi_{11}^2(l_1) + (\phi'_{11}(l_1))^2 (l_2^2 + (\phi_{21}(l_2) q_{21}(t))^2) + 2\phi'_{11}(l_1) \underline{bb_2} \right] \\
&\quad + \rho_1 \int_0^{l_1} \phi_{11}^2(x_1) dx_1 \\
&\quad + \rho_2 \left[\phi_{11}^2(l_1) l_2 + (\phi'_{11}(l_1))^2 \left(\frac{1}{3} l_2^3 + \int_0^{l_2} (\phi_{21}(x_2) q_{21}(t))^2 dx_2 \right) + 2\phi'_{11}(l_1) \underline{bb_1} \right] \\
&\quad + (\phi'_{11}(l_1))^2 (I_g + I_{W2} + I_t) \\
m_{34} &= M_t [\phi'_{11}(l_1) l_2 \phi_{21}(l_2) + \underline{dd_2}] \\
&\quad + \rho_2 \left[\phi'_{11}(l_1) \int_0^{l_2} x_2 \phi_{21}(x_2) dx_2 + \underline{dd_1} \right] + I_t \phi'_{11}(l_1) \phi'_{21}(l_2) \\
m_{41} &= m_{14} \\
m_{42} &= m_{24} \\
m_{43} &= m_{34} \\
m_{44} &= M_t \phi_{21}^2(l_2) + \rho_2 \int_0^{l_2} \phi_{21}^2(x_2) dx_2 + I_t (\phi'_{21}(l_2))^2 \\
k_{11} &= 0 \\
k_{22} &= 0 \\
k_{33} &= \int_0^{l_1} EI_1 \left(\frac{\partial^2 \phi_{11}(x_1)}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1 \\
k_{44} &= \int_0^{l_2} EI_2 \left(\frac{\partial^2 \phi_{21}(x_2)}{\partial x_2^2} \right)^2 dx_2
\end{aligned}$$

Das Element h_i des Vektors \mathbf{h} wird durch

$$h_i = \sum_{j=1}^4 \mathbf{e}_j^T \mathbf{H}_i \dot{q}_j \dot{q}_j \quad , i = 1, 2, 3, 4. \quad (\text{A.1})$$

bestimmt, wobei \mathbf{H}_i (h_{ijk}) einer symmetrischen Matrix entspricht. Der Vektor \mathbf{e}_j ist ein Einheitsvektor und definiert als

$$\mathbf{e}_j \hat{=} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned}
h_{111} &= 0 \\
h_{112} &= M_t \underline{ee_2} + \rho_2 \underline{ee_1} \\
h_{113} &= m_g \phi_{11}^2(l_1) q_{11}(t) + M_t [\phi_{11}^2(l_1) q_{11}(t) + \phi'_{11}(l_1) \underline{ee_2} - \underline{ff_2}] \\
&\quad + \rho_1 q_{11}(t) \int_0^{l_1} \phi_{11}^2(x_1) dx_1 + \rho_2 [\phi_{11}^2(l_1) l_2 q_{11}(t) + \phi'_{11}(l_1) \underline{ee_1} - \underline{ff_1}] \\
h_{114} &= M_t [\phi_{21}^2(l_2) q_{21}(t) + \underline{gg_2}] \\
&\quad + \rho_2 \left[q_{21}(t) \int_0^{l_2} \phi_{21}^2(x_2) dx_2 + \underline{gg_1} \right] \\
h_{122} &= M_t \underline{ee_2} + \rho_2 \underline{ee_1} \\
h_{123} &= \phi'_{11}(l_1) [M_t \underline{ee_2} + \rho_2 \underline{ee_1}] \\
h_{124} &= M_t [\phi_{21}^2(l_2) q_{21}(t) + \underline{gg_2}] \\
&\quad + \rho_2 \left[q_{21}(t) \int_0^{l_2} \phi_{21}^2(x_2) dx_2 + \underline{gg_1} \right] \\
h_{133} &= M_t (\phi'_{11}(l_1))^2 \underline{ee_2} + \rho_2 (\phi'_{11}(l_1))^2 \underline{ee_1} \\
h_{134} &= M_t \phi'_{11}(l_1) [\underline{gg_2} + (\phi'_{21}(l_2))^2 q_{21}(t)] \\
&\quad + \rho_2 \phi'_{11}(l_1) \left[q_{21}(t) \int_0^{l_2} \phi_{21}^2(x_2) dx_2 + \underline{gg_1} \right] \\
h_{144} &= 0 \\
h_{211} &= -M_t \underline{ee_2} - \rho_2 \underline{ee_1} \\
h_{212} &= 0 \\
h_{213} &= -\rho_2 \underline{ff_1} - M_t \underline{ff_2} \\
h_{214} &= M_t \phi_{21}^2(l_2) q_{21}(t) + \rho_2 q_{21}(t) \int_0^{l_2} \phi_{21}^2(x_2) dx_2 \\
h_{222} &= 0 \\
h_{223} &= 0 \\
h_{224} &= M_t \phi_{21}^2(l_2) q_{21}(t) + \rho_2 q_{21}(t) \int_0^{l_2} \phi_{21}^2(x_2) dx_2 \\
h_{233} &= 0 \\
h_{234} &= \phi'_{11}(l_1) q_{21}(t) \left[M_t \phi_{21}^2(l_2) + \rho_2 \int_0^{l_2} \phi_{21}^2(x_2) dx_2 \right] \\
h_{244} &= 0 \\
h_{311} &= -m_g \phi_{11}^2(l_1) q_{11}(t) + m_t [-\phi_{11}^2(l_1) q_{11}(t) - \phi'_{11}(l_1) \underline{ee_2} + \underline{ff_2}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \rho_1 q_{11}(t) \int_0^{l_1} \phi_{11}^2(x_1) dx_1 \\
& + \rho_2 \left[-\phi_{11}^2(l_1) q_{11}(t) l_2 - \phi'_{11}(l_1) \underline{ee}_1 + \underline{ff}_1 \right] \\
h_{312} & = m_t \underline{ff}_2 + \rho_2 \underline{ff}_1 \\
h_{313} & = 0 \\
h_{314} & = m_t \left[\phi'_{11}(l_1) \phi_{21}^2(l_2) q_{21}(t) + \underline{hh}_2 \right] \\
& + \rho_2 \left[\phi'_{11}(l_1) q_{21}(t) \int_0^{l_2} \phi_{21}^2(x_2) dx_2 + \underline{hh}_1 \right] \\
h_{322} & = m_t \underline{ff}_2 + \rho_2 \underline{ff}_1 \\
h_{323} & = \phi'_{11}(l_1) \left[m_t \underline{ff}_2 + \rho_2 \underline{ff}_1 \right] \\
h_{324} & = m_t \left[\phi'_{11}(l_1) q_{21}(t) \phi_{21}^2(l_2) + \underline{hh}_2 \right] \\
& + \rho_2 \left[\phi'_{11}(l_1) q_{21}(t) \int_0^{l_2} \phi_{21}^2(x_2) dx_2 + \underline{hh}_1 \right] \\
h_{333} & = \left(\phi'_{11}(l_1) \right)^2 \left(m_t \underline{ff}_2 + \rho_2 \underline{ff}_1 \right) \\
h_{334} & = m_t \left[\left(\phi'_{11}(l_1) \right)^2 \phi_{21}^2(l_2) q_{21}(t) + \phi'_{11}(l_1) \underline{hh}_2 \right] \\
& + \rho_2 \left[\left(\phi'_{11}(l_1) \right)^2 q_{21}(t) \int_0^{l_2} \phi_{21}^2(x_2) dx_2 + \phi'_{11}(l_1) \underline{hh}_1 \right] \\
h_{344} & = 0 \\
h_{411} & = -m_t \left[\phi_{21}^2(l_2) q_{21}(t) + \underline{gg}_2 \right] \\
& - \rho_2 \left[q_{21}(t) \int_0^{l_2} \phi_{21}^2(x_2) dx_2 + \underline{gg}_1 \right] \\
h_{412} & = -m_t \phi_{21}^2(l_2) q_{21}(t) - \rho_2 q_{21}(t) \int_0^{l_2} \phi_{21}^2(x_2) dx_2 \\
h_{413} & = -m_t \left[\phi'_{11}(l_1) \phi_{21}^2(l_2) q_{21}(t) + \underline{hh}_2 \right] \\
& - \rho_2 \left[\phi'_{11}(l_1) q_{21}(t) \int_0^{l_2} \phi_{21}^2(x_2) dx_2 + \underline{hh}_1 \right] \\
h_{414} & = 0 \\
h_{422} & = -m_t \phi_{21}^2(l_2) q_{21}(t) \\
& - \rho_2 q_{21}(t) \int_0^{l_2} \phi_{21}^2(x_2) dx_2 \\
h_{423} & = -m_t \phi'_{11}(l_1) \phi_{21}^2(l_2) q_{21}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \rho_2 \phi'_{11}(l_1) q_{21}(t) \int_0^{l_2} \phi_{21}^2(x_2) dx_2 \\
h_{424} &= 0 \\
h_{433} &= -m_t (\phi'_{11}(l_1))^2 \phi_{21}^2(l_2) q_{21}(t) \\
& - \rho_2 (\phi'_{11}(l_1))^2 q_{21}(t) \int_0^{l_2} \phi_{21}^2(x_2) dx_2 \\
h_{434} &= 0 \\
h_{444} &= 0 \\
\\
\underline{aa_1} &= \frac{1}{2} l_2^2 [l_1 \cos \gamma(t) + \phi_{11}(l_1) q_{11}(t) \sin \gamma(t)] \\
& + q_{21}(t) \int_0^{l_2} \phi_{21}(x_2) dx_2 [-l_1 \sin \gamma(t) + \phi_{11}(l_1) q_{11}(t) \cos \gamma(t)] \\
\underline{aa_2} &= l_2 [l_1 \cos \gamma(t) + \phi_{11}(l_1) q_{11}(t) \sin \gamma(t)] \\
& + q_{21}(t) \phi_{21}(l_2) [-l_1 \sin \gamma(t) + \phi_{11}(l_1) q_{11}(t) \cos \gamma(t)] \\
\underline{bb_1} &= \frac{1}{2} l_2^2 \phi_{11}(l_1) \cos \gamma(t) - \phi_{11}(l_1) q_{21}(t) \sin \gamma(t) \int_0^{l_2} \phi_{21}(x_2) dx_2 \\
\underline{bb_2} &= l_2 \phi_{11}(l_1) \cos \gamma(t) - \phi_{11}(l_1) q_{21}(t) \sin \gamma(t) \phi_{21}(l_2) \\
\underline{cc_1} &= [l_1 \cos \gamma(t) + \phi_{11}(l_1) q_{11}(t) \sin \gamma(t)] \int_0^{l_2} \phi_{21}(x_2) dx_2 \\
\underline{cc_2} &= [l_1 \cos \gamma(t) + \phi_{11}(l_1) q_{11}(t) \sin \gamma(t)] \phi_{21}(l_2) \\
\underline{dd_1} &= \phi_{11}(l_1) \cos \gamma(t) \int_0^{l_2} \phi_{21}(x_2) dx_2 \\
\underline{dd_2} &= \phi_{11}(l_1) \cos \gamma(t) \phi_{21}(l_2) \\
\underline{ee_1} &= \frac{1}{2} l_2^2 [\phi_{11}(l_1) q_{11}(t) \cos \gamma(t) - l_1 \sin \gamma(t)] \\
& - q_{21}(t) [\phi_{11}(l_1) q_{11}(t) \sin \gamma(t) + l_1 \cos \gamma(t)] \int_0^{l_2} \phi_{21}(x_2) dx_2 \\
\underline{ee_2} &= l_2 [\phi_{11}(l_1) q_{11}(t) \cos \gamma(t) - l_1 \sin \gamma(t)] \\
& - q_{21}(t) [\phi_{11}(l_1) q_{11}(t) \sin \gamma(t) + l_1 \cos \gamma(t)] \phi_{21}(l_2) \\
\underline{ff_1} &= -\frac{1}{2} l_2^2 \phi_{11}(l_1) \sin \gamma(t) - \phi_{11}(l_1) \cos \gamma(t) q_{21}(t) \int_0^{l_2} \phi_{21}(x_2) dx_2 \\
\underline{ff_2} &= -l_2 \phi_{11}(l_1) \sin \gamma(t) - \phi_{11}(l_1) \cos \gamma(t) q_{21}(t) \phi_{21}(l_2) \\
\underline{gg_1} &= [\phi_{11}(l_1) q_{11}(t) \cos \gamma(t) - l_1 \sin \gamma(t)] \int_0^{l_2} \phi_{21}(x_2) dx_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{gg}_2 &= [\phi_{11}(l_1)q_{11}(t)\cos\gamma(t) - l_1\sin\gamma(t)]\phi_{21}(l_2) \\ \underline{hh}_1 &= -\phi_{11}(l_1)\sin\gamma(t)\int_0^{l_2}\phi_{21}(x_2)dx_2 \\ \underline{hh}_2 &= -\phi_{11}(l_1)\sin\gamma(t)\phi_{21}(l_2) \\ \gamma(t) &\hat{=} \alpha_1(t) + \theta_2(t)\end{aligned}$$