Differentialgeometrische Steuer- und Beobachtbarkeitsanalyse nichtlinearer Systeme

Markus Lemmen und Mohieddine Jelali

Forschungsbericht Nr. 8/96

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Dieser Forschungsbericht gibt eine Übersicht über die Analysemethoden aus der Differentialgeometrie für die aus der Theorie linearer Systeme bekannten Eigenschaften der Steuer- und Beobachtbarkeit. Für die Analyse nichtlinearer Systeme hinsichtlich derartiger Eigenschaften ist jedoch eine stärkere – und somit auch kompliziertere – Differenzierung der Eigenschaften Steuer- und Beobachtbarkeit als bei linearen Systemen notwendig. Diese Differenzierung der Eigenschaften wird anschaulich anhand von Beispielen eingeführt und auf ihre Aussagekraft hinsichtlich der praktischen Anwendung überprüft. Kriterien für die Überprüfung der Eigenschaften werden hergeleitet und an einem technischen Beispiel – einem hydraulischen Translationsantrieb – angewandt.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Formelzeichen und Bezeichnungen

Abkürzungen

ALS	Analytisches System mit linear eingehender Steuerung
AS	Analytisches System
sym	Symmetrisches System
$\sum$	System

Algebraische Größen[1]

$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$	Systemvektor
$\boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{x})$	i-ter bzw. zu $u_i(t)$ korrespondierender Eingangsvektor
$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$	Eingangsmatrix eines dynamischen Systems
$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$	Ausgangsvektor
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$	Vektorfeld
k	Nichtnegative Ganzzahl, Laufindex
l	Obere Grenze eines Beobachtbarkeitsindexes
m	Dimension des Eingangsvektors $\boldsymbol{u}(t)$
n	Dimension des Zustandsvektors $\boldsymbol{x}(t)$, Systemordnung
p	Dimension des Ausgangsvektors $\boldsymbol{y}(t)$
$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$	lokal schwache Erreichbarkeitsdistribution/-matrix
r	Dimension der lokal schwach erreichbaren Teilmannigfaltigkeit $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$
t, T	Zeit
u_j	j-tes Element des Eingangsvektors
$\boldsymbol{u}(t)$	Eingangsvektor
x_k	k-tes Element des Zustandsvektors
$\boldsymbol{x}(t)$	Zustandsvektor
$\boldsymbol{y}(t)$	Ausgangsvektor
y_i	i-tes Element des Ausgangsvektors
$\boldsymbol{\phi}$	Beobachtbarkeitsabbildung
Φ	Fluß
$\boldsymbol{\Omega}$	Beobachtbarkeitsmatrix
κ	Beobachtbarkeitsindex

Mengen und Distributionen

$\mathcal{C}$	Menge der Ausgangsableitungen
C^∞	Menge aller glatten (unendlich oft differenzierbaren) Funktionen
$\mathfrak{D}$	Beobachtbarkeitskodistribution
$\mathcal{K}$	Menge der Beobachtbarkeitsindizes

[1] Im Sinne einer möglichst übersichtlichen Notation wird die Zeitabhängigkeit von Größen innerhalb des Berichts nicht überall explizit vermerkt.

$\mathcal{M}$	Zustandsmannigfaltigkeit
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathcal{R}$	Menge erreichbarer Zustände
$\mathcal{RR}$	Menge umkehrbar erreichbarer Zustände
$\mathcal{S}$	Menge nicht unterscheidbarer Zustände
$\mathcal{SR}$	Menge schwach erreichbarer Zustände
$\mathcal{TX}$	Tangentialzustandsmannigfaltigkeit
$\mathcal{U}$	Eingangsmannigfaltigkeit
$\mathcal{V}$	Mannigfaltigkeit
$\mathcal{X}$	Zustandsmannigfaltigkeit
$\mathcal{Y}$	Ausgangsmannigfaltigkeit
$\Delta(\cdot)$	(Erreichbarkeits-) Distribution

Operatoren

$\mathrm{ad}_{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{k}}\boldsymbol{g}$	k-fache Wiederholung der Lie-Klammer $(\underbrace{[\boldsymbol{f},\cdots,[\boldsymbol{f}}_{k},\boldsymbol{g}\underbrace{]\cdots]}_{k})$
$\mathrm{d}\lambda$	Differential (oder Gradient) einer skalarwertigen Funktion λ
rang	Rang
$\mathrm{span}\{(\cdot)\}$	Durch Operatoren $(\cdot)$ aufgespannter Vektorraum
$\mathrm{L}_{\boldsymbol{f}}\lambda$	Lie-Ableitung einer skalarwertigen Funktion λ entlang eines Vektorfeldes $\boldsymbol{f}$
$\mathrm{L}_{\boldsymbol{f}}^{k}\lambda$	k-te Lie-Ableitung einer skalarwertigen Funktion λ entlang eines Vektorfeldes $\boldsymbol{f}$
$[\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}]$	Lie-Klammer/Kommutator der Vektorfelder $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$
$\mathrm{L}_{\boldsymbol{f}}\omega$	Ableitung des Kovektorfeldes ω entlang des Vektorfeldes $\boldsymbol{f}$
$\mathrm{N}_{\boldsymbol{f}}\lambda$	Zusammengesetzter Differentialoperator nach Gl. (5.1)
$(\cdot)^T$	Transponierung
$(\cdot)^*$	Zur Distribution $(\cdot)$ duale Kodistribution $()^*$
$\dot{(\cdot)}$	Zeitliche Ableitung $\dot{(\cdot)} = \frac{\mathrm{d}\,(\cdot)}{\mathrm{d}t}$

1 Einführende Übersicht

Aus den immer größer werdenden Ansprüchen an die Konstruktion und Entwicklung in den letzten Jahren ist auch eine immer stärker wachsende Anstrengung im Bereich der Automatisierungstechnik erkennbar, sich mit neuen Technologien wie neuronalen Netzen, Fuzzy-Logik und nichtlinearer Systemtheorie auseinanderzusetzen. Dies liegt nicht zuletzt auch an größer zu bemessenden Arbeitsbereichen, höheren Einflüssen der Bauteilelastizitäten aufgrund verstärkter Leichtbauweise, stärker zu berücksichtigenden Parameterschwankungen der betrachteten Systeme und allgemein Zeitvarianz. Aus diesen Überlegungen entstand die Suche nach Lösungsmöglichkeiten der Problemstellungen aus Verallgemeinerungen der bekannten Theorie linearer Systeme auf nichtlineare Anwendungen. Als vielversprechende Ansätze gelten sowohl die Differentialgeometrie als auch die neuere Differentialalgebra. Insbesondere die Differentialgeometrie besitzt durch die Einbeziehung Lie-theoretischer Aspekte eine starke Anlehnung an die gut bekannte lineare Kontrolltheorie und somit auch die größte Akzeptanz für die praktische Anwendung in der Automatisierungstechnik.

Dieser Forschungsbericht enthält eine Übersicht über die Analysemethoden aus der Differentialgeometrie für die aus der Theorie linearer Systeme bekannten Eigenschaften wie Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit. Für die Analyse nichtlinearer Systeme hinsichtlich derartiger Eigenschaften ist jedoch eine stärkere – und somit auch kompliziertere – Differenzierung der Eigenschaften Steuer- und Beobachtbarkeit als bei linearen Systemen notwendig (Herman und Krener 1977, Krener 1985, Schwarz 1991). Diese Differenzierung der Eigenschaften wird anschaulich anhand von Beispielen eingeführt und auf ihre Aussagekraft hinsichtlich der praktischen Anwendung überprüft. Kriterien für die Überprüfung der Eigenschaften werden hergeleitet und an einem technischen Beispiel – einem hydraulischen Translationsantrieb – angewandt.

In Abschnitt 2 werden die wichtigsten Steuerbarkeitsbegriffe anschaulich erläutert. Abschnitt 3 beschäftigt sich mit den Steuerbarkeitskriterien für nichtlineare Systeme. In den Abschnitten 4 und 5 werden dann die Beobachtbarkeitsbegriffe und -kriterien behandelt. Die Anwendung der vorgestellten Kriterien wird in Abschnitt 6 an einem Modell eines elektrohydrauilschen Antriebs demonstriert. Eine Zusammenfassung schließt diesen Bericht ab.

2 Steuerbarkeitsbegriffe

Innerhalb der Theorie linearer Systeme ist der Begriff der Steuerbarkeit sehr gut bekannt. Im Rahmen der Theorie nichtlinearer Systeme muß sehr genau zwischen den Begriffen der Steuerbarkeit, Erreichbarkeit und Zugänglichkeit unterschieden werden. Um einen besseren Zugang zu diesen Systemeigenschaften zu bekommen, soll in Anlehnung an (Schwarz 1991) in tabellarischer Form die Idee charakterisiert werden, die hinter den entsprechenden Eigenschaften steht.

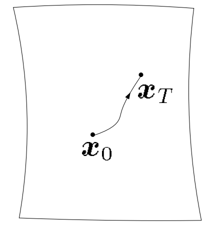

Bild 2.1: Erreichbarkeit eines Punktes von einem Punkt $\boldsymbol{x}_0$ aus

Betrachtet werden zunächst analytische Systeme (Σ_{AS}) der Form (Schwarz 1991):

$$\sum\nolimits_{AS} \quad \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \quad ; \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(0) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t)) \quad . \end{array} \tag{2.1}$$

Dabei stellt $\mathcal{U}$ eine Menge zulässiger Stellwerte aus $\mathbb{R}^m$ (also $\boldsymbol{u}(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$), $\mathcal{Y}$ eine Menge $\mathbb{R}^p$–wertiger Ausgangsfunktionen (mit $\boldsymbol{y}(t) \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$) und $\mathcal{M}$ eine C^∞ einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension n dar ($\boldsymbol{x}(t) \in \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$).

Gemäß (Schwarz 1991) wird in diesem Aufsatz unterschieden:

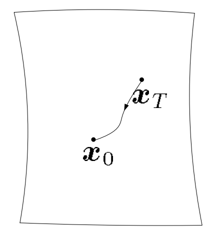

Bild 2.2: Steuerbarkeit eines Punktes in einen Punkt $\boldsymbol{x}_0$

Definition 2.1

i) Die Frage, welche Systemzustände von einem gegebenen Anfangszustand $\boldsymbol{x}_0$ unter der Wirkung einer Steuerung $\boldsymbol{u}(t) \in \mathcal{U}$ innerhalb einer Zeit T erreicht werden können, betrifft das Problem der *Zustands–Erreichbarkeit* (Bild 2.1).

ii) Soll das System von einem Zustand $\boldsymbol{x}_T$ aus in einen Endzustand $\boldsymbol{x}_0$ – üblicherweise den Koordinatenursprung der Zustandsdarstellung und zugleich Gleichgewichtszustand – überführt werden, sprechen wir von dem Problem der *Steuerbarkeit* (Bild 2.2).

iii) Die Frage, ob von einem Systemzustand aus in einer offenen (Teil–)Menge des Zustandsraums erreichbare Punkte vorhanden sind, wird mit *Zugänglichkeit* charakterisiert.

iv) Den Begriff der *endlichen Erreichbarkeit* betrifft das Problem, ob eine vollständige Umgebung um einen Zustand $\boldsymbol{x}_0$ in einer endlichen Zeit von $\boldsymbol{x}_0$ aus erreichbar ist. □

2.1 Erreichbarkeit

Am einfachsten und übersichtlichsten erfolgt der axiomatische Aufbau der Begriffe Steuerbarkeit, Erreichbarkeit und Zugänglichkeit über die Menge der von einem Punkt aus erreichbaren Zustände. Dieses Konzept wird im folgenden vorgestellt. Zur Vereinfachung der Notation wird angenommen, daß der Zustandsraum $\mathcal{M}$ durch global definierte Koordinaten $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ beschreibbar sei. Dann lassen sich die folgenden Definitionen (Herman und Krener 1977, Krener 1985) einer Erreichbarkeit unterscheiden. Dabei sei $\mathcal{M}_0$ eine offene zusammenhängende Untermannigfaltigkeit (Olver 1986) von $\mathcal{M}$ und T sei eine nichtnegative reelle Zahl.

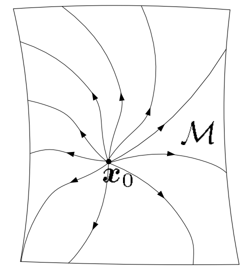

Bild 2.3: Erreichbarkeit eines Systems von einem Punkt $\boldsymbol{x}_0$

Definition 2.2 *$\mathcal{M}_0$–Erreichbarkeit eines Punktes*
Ein Punkt $\boldsymbol{x}_T \in \mathcal{M}_0$ mit $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$ heißt *$\mathcal{M}_0$–erreichbar von $\boldsymbol{x}_0$* zur Zeit T, wenn eine beschränkte, meßbare Steuerung $\boldsymbol{u}(t) \in \mathcal{U}$ existiert, die eine Trajektorie von (2.1) mit $\boldsymbol{x}(t) \in \mathcal{M}_0$ für alle $t \in [t_0, T]$ generiert derart, daß gilt:

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \text{ und } \boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{x}_T \quad . \tag{2.2}$$

□

Bei dem Begriff der $\mathcal{M}_0$–Erreichbarkeit (und später auch bei den verschiedenen Begriffen der lokalen Erreichbarkeit) ist zu beachten, daß die betrachtete Trajektorie zu keiner Zeit während des Vorgangs $\boldsymbol{x}_0 \rightsquigarrow \boldsymbol{x}(T)$ die vorher definierte Umgebung $\mathcal{M}_0$ um $\boldsymbol{x}_0$ verlassen darf.

Definition 2.3 *$\mathcal{R}(\boldsymbol{x}_0, T, \mathcal{M}_0)$ und $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}_0, \mathcal{M}_0)$*
Die Menge aller Zustände $\boldsymbol{x}_T$, die von $\boldsymbol{x}_0$ aus zur Zeit T $\mathcal{M}_0$–erreichbar sind, wird mit $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}_0, T, \mathcal{M}_0)$ bezeichnet. Wird die Zeit T weggelassen, so versteht man unter dieser Menge die zu einer positiven Zeit $T \geq 0$ von $\boldsymbol{x}_0$ aus $\mathcal{M}_0$–erreichbaren Zustände:

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{x}_0, \mathcal{M}_0) = \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{R}(\boldsymbol{x}_0, T, \mathcal{M}_0) \quad . \tag{2.3}$$

□

Gilt $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$, so wird abkürzend geschrieben: $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}_0) := \mathcal{R}(\boldsymbol{x}_0, \mathcal{M})$.

Definition 2.4 *Erreichbarkeit von einem Punkt*
Gilt $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}_0) = \mathcal{M}$, so spricht man von $\mathcal{M}$–Erreichbarkeit von $\boldsymbol{x}_0$ oder kurz von *Erreichbarkeit von $\boldsymbol{x}_0$*. □

Definition 2.5 *Erreichbarkeit*
Gilt $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}_0) = \mathcal{M}$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$, so spricht man von $\mathcal{M}$–Erreichbarkeit oder von *Erreichbarkeit* schlechthin. □

Entsprechend Definition 2.1 wird nun gesetzt:

Definition 2.6 *Lokale Erreichbarkeit von einen Punkt*
Das System Σ_{AS} (Gl. (2.1)) ist *lokal erreichbar von $\boldsymbol{x}_0$*, wenn für jede Umgebung $\mathcal{M}_0$ von $\boldsymbol{x}_0$ die Menge $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}_0)$ ebenfalls eine Umgebung von $\boldsymbol{x}_0$ ist. □

Wichtiger ist jedoch die nachfolgende Definition nach Krener (Krener 1985):

Definition 2.7 *Lokale Erreichbarkeit*
Das System Σ_{AS} (Gl. (2.1)) ist *lokal erreichbar*, wenn es $\mathcal{M}_0$–erreichbar für jede beliebige offene zusammenhängende Teilmenge $\mathcal{M}_0$ von $\mathcal{M}$ ist; d. h. $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}_0, \mathcal{M}_0) = \mathcal{M}_0$ für jedes beliebige $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ ist. □

Ist nun ein System lokal erreichbar, so ist die Konsequenz, daß jeder Punkt der Zustandsmenge (Zustandsmannigfaltigkeit) von jedem anderen Punkt aus erreicht werden kann. Das ist dann aber auch innerhalb jeder beliebigen zusammenhängenden Teilmannigfaltigkeit um $\boldsymbol{x}_0$ möglich. Somit existiert bei lokal erreichbaren Systemen immer auch eine minimale Kontrollfunktion im Hinblick auf ein für den Systemzustand zu minimierendes Kostenfunktional. Eine derartige Eigenschaft spiegelt also das Wunschdenken jedes Regelungstechnikers bezüglich der Eigenschaften des zu untersuchenden Systems wieder. Leider ist die Analyse nichtlinearer Systeme hinsichtlich einer derartigen Eigenschaft nicht einfach und es muß auf schwächere Struktureigenschaften nichtlinearer Systeme zurückgegriffen werden. Mit einem vergleichsweise einfachen Kriterium, welches als eine Verallgemeinerung des bekannten Steuerbarkeitskriteriums nach Kalman verstanden werden kann, ist der folgende Begriff verknüpft (Casti 1985, Schwarz 1991):

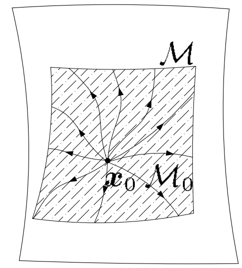

Bild 2.4: Lokale Erreichbarkeit eines Systems von einem Punkt $\boldsymbol{x}_0$

Definition 2.8 *Schwache Erreichbarkeit*
Zwei Zustände $\boldsymbol{x}_e$ und $\overline{\boldsymbol{x}}$ sind *schwach erreichbar voneinander* dann und nur dann, wenn Zustände $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathcal{M}$ mit $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_e$ und $\boldsymbol{x}_k = \overline{\boldsymbol{x}}$ derart existieren, daß entweder $\boldsymbol{x}_i$ von $\boldsymbol{x}_{i-1}$ oder $\boldsymbol{x}_{i-1}$ von $\boldsymbol{x}_i$ für $i = 1, 2, \ldots, k$ erreichbar ist. □

Wie anhand der Definition leicht zu sehen ist, kann dort die Erreichbarkeit durch Steuerbarkeit (Abschnitt 2.2) ersetzt werden. Beide „schwachen" Begriffe sind äquivalent. In der ursprünglichen Version von Herman und Krener (1977) wird diese Eigenschaft mit dem Begriff der schwachen $\mathcal{M}_0$–Zugänglichkeit bezeichnet. Diese Eigenschaft für ausgezeichnete Systemzustände läßt sich nun ebenfalls auf das gesamte System erweitern:

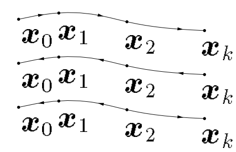

Bild 2.5: Schwach erreichbare/steuerbare Zustände $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_k$

Definition 2.9 *Schwache Erreichbarkeit*
Das System (2.1) heißt *schwach erreichbar* genau dann, wenn es schwach erreichbar für jedes $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$ ist. □

Auch die von einem Punkt aus schwach erreichbaren Zustände lassen sich zu einer Menge zusammenfassen:

Definition 2.10 $\mathcal{SR}(\boldsymbol{x}_0)$
Die Menge aller von $\boldsymbol{x}_0$ aus schwach erreichbaren Zustände wird mit

$$\mathcal{SR}(\boldsymbol{x}_0) = \bigcup \{\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x} \quad \text{ist schwach erreichbar von } \boldsymbol{x}_0\} \tag{2.4}$$

bezeichnet. □

Somit lautet

Definition 2.11 *Schwache Erreichbarkeit/Steuerbarkeit von einem Punkt*
Das System (2.1) heißt *schwach erreichbar/steuerbar von* $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{M}$, wenn gilt:
$\mathcal{SR}(\boldsymbol{x}_0) = \mathcal{M}$. □

Ferner gilt:

Definition 2.12 *Schwache Erreichbarkeit/Steuerbarkeit*
Das System (2.1) heißt *schwach erreichbar/steuerbar*, wenn für alle $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$ gilt:
$\mathcal{SR}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{M}$. □

Zur Überprüfung dieser Eigenschaft existieren zwar einfach handhabbare Kriterien (Schwarz 1991:Satz 7.17 und 7.18) für analytische Systeme mit linear (genauer: affin) eingehender Steuerung:

$$\sum_{ALS}: \quad \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \sum\limits_{i=1}^{m} \boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{x})u_i =: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \quad , \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) \ , \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \quad , \end{array} \tag{2.5}$$

die damit verbundenen Systemeigenschaften sind aber für den Praktiker unbefriedigend. Denn: Ist ein System lokal schwach erreichbar/steuerbar, so existieren von jedem Punkt aus *entweder* erreichbare *oder* steuerbare Punkte. Damit ist dann lediglich sichergestellt, daß in einem lokal schwach erreichbaren System „Quellen“ und „Senken“ für Systemtrajektorien existieren, nicht aber, daß jeder beliebige Anfangszustand in jeden beliebigen Endzustand gebracht werden kann (jeder Punkt ist sowohl Quelle als auch Senke). Die Eigenschaft der schwachen (lokalen) Erreichbarkeit kann jedoch als notwendiges Kriterium für die (vollständige) (lokale) Erreichbarkeit angesehen werden. Ein (lokal) erreichbares System ist notwendigerweise auch ein (lokal) schwach erreichbares.

Der Grund für die Schwierigkeiten der diesen Lie–algebraischen Methoden zugrunde liegenden Kriterien findet sich in den in (Brocket 1976) ausführlich hergeleiteten Kriterien zur Erreichbarkeitsuntersuchung der Σ_{ALS}. Für diese Kriterien ist es notwendig, daß die Systemtrajektorien eines Σ_{ALS} in beiden Richtungen durchlaufen werden können müssen (im allgemeinen Fall bedeutet dies also einen Durchlaufsinn auch *entgegen* der Zeitachse!).

Ein Ausweg aus dieser Dilemma besteht nun darin, die Systemklasse einzuschränken und von der Systemklasse als solcher zu fordern, daß man sich auf ihren Systemtrajektorien in beiden Richtungen bewegen kann (und zwar nicht mehr explizit auch entgegen der Zeitachse, dafür aber durch Vorzeichenumkehr der Steuerungen bzw. eines Teils der Steuerungen). Eine Klasse solcher Systeme sind die symmetrischen analytischen Systeme mit linear eingehender Steuerung:

$$\sum_{sym}: \quad \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u_0, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{x})u_0 + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \quad , \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \ , \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \quad . \end{array} \tag{2.6}$$

Mit Hilfe dieser Systemklasse kann nun die sogenannte umkehrbare Erreichbarkeit erklärt werden (Krener 1985):

Definition 2.13 *Umkehrbare Erreichbarkeit/Steuerbarkeit*
Ein System (2.1) heißt *umkehrbar steuerbar/erreichbar* genau dann, wenn (2.6) steuerbar/erreichbar ist. □

Mit der zusätzlichen Forderung der Lokalität ergibt sich:

Definition 2.14 *Umkehrbare lokale Steuerbarkeit/Erreichbarkeit*
Ein System (2.1) heißt *umkehrbar lokal steuerbar/erreichbar* genau dann, wenn (2.6) lokal steuerbar/erreichbar ist. □

Analog zu Definition 2.3 läßt sich nun unter $\mathcal{RR}$ die Menge der umkehrbaren zur Zeit T $\mathcal{M}_0$–erreichbaren Punkte zusammenfassen:

Definition 2.15 $\mathcal{RR}(\boldsymbol{x}_0, T, \mathcal{M}_0)$
Mit $\mathcal{RR}(\boldsymbol{x}_0, T, \mathcal{M}_0)$ wird die Menge der von $\boldsymbol{x}_0$ aus entlang von Trajektorien von Gl. (2.6) zur Zeit T $\mathcal{M}_0$–erreichbaren Punkte bezeichnet. □

Unter den Bezeichnungen $\mathcal{RR}(\boldsymbol{x}_0)$ und $\mathcal{RR}(\boldsymbol{x}_0, \mathcal{M}_0)$ sind dann wieder die gleichen Abkürzungen zu verstehen, wie für die Menge $\mathcal{R}$. Damit ergeben sich nun (Krener 1985):

Satz 2.1 *Umkehrbare Steuerbarkeit/Erreichbarkeit*
Ein System (2.1) ist genau dann umkehrbar steuerbar/erreichbar, wenn für jedes $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{M}$ gilt: $\mathcal{RR}(\boldsymbol{x}_0) = \mathcal{M}$. □

und:

Satz 2.2 *Umkehrbare lokale Steuerbarkeit/Erreichbarkeit*
Ein System (2.1) ist genau dann umkehrbar lokal steuerbar/erreichbar, wenn für jedes $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{M}_0$ und für jedes $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ gilt: $\mathcal{RR}(\boldsymbol{x}_0, \mathcal{M}_0) = \mathcal{M}_0$. □

Die technische Relevanz einer solchen „symmetrischen“ Systemklasse wird durch den folgenden Satz deutlich. Dieser folgt direkt aus der Definition der umkehrbaren (lokalen) Erreichbarkeit.

Satz 2.3
Für symmetrische Systeme (2.6) gilt:

- Ist das System (2.6) umkehrbar erreichbar/steuerbar, so ist es auch erreichbar,
- ist das System (2.6) erreichbar, so ist es auch umkehrbar erreichbar,
- ist das System (2.6) umkehrbar lokal erreichbar, so ist es auch lokal erreichbar und
- ist das System (2.6) lokal erreichbar, so ist es auch umkehrbar lokal erreichbar. □

Da, wie bereits in diesem Abschnitt erläutert worden ist, stets aus der lokalen Eigenschaft die Eigenschaft für die gesamte Zustandsmannigfaltigkeit folgt, ergibt sich für symmetrische Systeme das Diagramm in Bild 2.6. Dabei weisen die eingezeichneten Pfeile in Richtung der geringeren Anforderung an das System.

$$\begin{array}{ccc} \text{lokale Erreichbarkeit} & \longrightarrow & \text{Erreichbarkeit} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \text{umkehrbare lokale Erreichbarkeit} & \longrightarrow & \text{umkehrbare Erreichbarkeit} \end{array}$$

Bild 2.6: Zusammenhang zwischen lokaler Erreichbarkeit und Erreichbarkeit

2.2 Steuerbarkeit

Mit dem Begriff der Erreichbarkeit ist der der Steuerbarkeit eng verbunden. Bei dieser Systemeigenschaft wird quasi die zur Erreichbarkeit inverse Eigenschaft betrachtet. Die Fragestellung lautet nun nicht mehr, welche Punkte ausgehend vom Punkt $\boldsymbol{x}_0$ über Systemtrajektorien erreicht werden können (Bild 2.3), sondern *von welchen Punkten ausgehend* kann der Punkt $\boldsymbol{x}_0$ erreicht werden (Bild 2.7)?

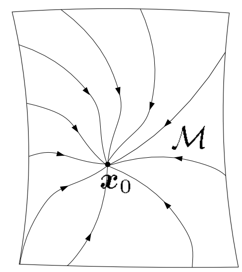

Bild 2.7: In $\boldsymbol{x}_0$ steuerbares System

Mit Hilfe der in Abschnitt 2.1 eingeführten Menge der von $\boldsymbol{x}_0$ erreichbaren Punkte $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}_0)$ können nun übersichtlich die folgenden Begriffe gefaßt werden. In Übereinstimmung mit Definition 2.1 wird gesetzt (Lemmen und Schleuter 1995)

Definition 2.16 *Steuerbarkeit in einen Punkt*
Ein System (2.1) heißt *in den Zustand $\boldsymbol{x}_0$ steuerbar*, wenn gilt $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{R}(\boldsymbol{x})$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$. □

Erfüllt ein System diese Eigenschaft für alle $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{M}$, so gelangt man zu:

Definition 2.17 *Steuerbarkeit*
Gilt $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}_0) = \mathcal{M}$ für jedes beliebige $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{M}$, so heißt das System Gl. (2.1) *steuerbar*. □

Diese Eigenschaft ist identisch zu der Erreichbarkeit eines Systems (Definition 2.6).

Im Rahmen der Theorie dynamischer Systeme sind jedoch häufiger Konzepte lokaler Natur von Interesse. Für derartige Anwendungen ist die folgende lokale Fassung ausschlaggebend:

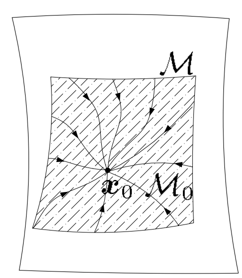

Bild 2.8: In $\boldsymbol{x}_0$ lokal $\mathcal{M}_0$–steuerbares System

Definition 2.18 *Lokale $\mathcal{M}_0$–Steuerbarkeit in einen Punkt*
Ein System (2.1) heißt *lokal $\mathcal{M}_0$–steuerbar (in den Zustand $\boldsymbol{x}_0$) um $\boldsymbol{x}_0$*, wenn $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{R}(\boldsymbol{x}, \mathcal{M}_0)$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_0$ und einer beliebigen offenen und zusammenhängenden Teilmenge $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ um $\boldsymbol{x}_0$ gilt. □

Entsprechend gilt dann:

Definition 2.19 *Lokale Steuerbarkeit*
Ein System (2.1) heißt *lokal steuerbar*, wenn gilt $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{R}(\boldsymbol{x}, \mathcal{M}_0)$ für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{M}_0$ und jeder beliebigen offenen und zusammenhängenden Teilmenge $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ um $\boldsymbol{x}_0$. □

2.3 Zugänglichkeit

Ein Verbindungselement zwischen der Erreichbarkeit und der Steuerbarkeit stellt die (lokale) Zugänglichkeit bzw. die (lokale) Zugänglichkeitseigenschaft dar. Mit Hilfe dieser Systemeigenschaft wird ausgedrückt, daß von jedem beliebigen Punkt aus andere (lokal) erreichbare Systemzustände existieren. Somit gibt es von jedem Punkt aus gesehen auch steuerbare Zustände. Formal wird dies wie folgt definiert (Krener 1985):

Definition 2.20 *Zugänglichkeit*
Das System (2.1) besitzt die Zugänglichkeitseigenschaft, wenn $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}_0)$ ein nichtleeres Inneres für jedes beliebige $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{M}$ besitzt. □

Definition 2.21 *Lokale Zugänglichkeit*
Das System (2.1) besitzt die Zugänglichkeitseigenschaft, wenn $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}_0, \mathcal{M}_0)$ ein nichtleeres Inneres für jedes beliebige $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{M}$ und einer beliebigen offenen Umgebung $\mathcal{M}_0$ besitzt. □

In der Literatur (Nijmeijer und van der Schaft 1990) gibt es auch Definitionen der Zugänglichkeit, die auf den Begriff des Inneren in diesem Zusammenhang verzichten. Bei der Übertragung der Ergebnisse ist dann jedoch Vorsicht geboten. Denn aufgrund der Definition des Inneren (Forster 1984) müssen aus der Menge der erreichbaren Punkte alle Randpunkte unberücksichtigt bleiben. Besitzt diese Menge zum Beispiel eine Anordnung ähnlich der von konzentrischen Kreisen, so existiert für jeden Punkt auch ein anderer erreichbarer Punkt: $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}_0) \neq \emptyset \quad \forall \quad \boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{M}$. Da die erreichbaren Punkte sich aber nun auf jenen Kreisen befinden, sind sie auch automatisch Randpunkte dieser Menge und das Innere von $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}_0)$ ist somit leer.

Die bisher in diesem Abschnitt vorgestellten Steuerbarkeitsbegriffe lassen sich wie folgt unterscheiden:

Satz 2.4 (Krener 1985)

1. Besitzt das System (2.1) die Zugänglichkeitseigenschaft, so ist es umkehrbar steuerbar.

2. Dieses System besitzt die umkehrbare Zugänglichkeitseigenschaft dann und nur dann, wenn es umkehrbar steuerbar ist.

3. Dieses System besitzt die umkehrbare lokale Zugänglichkeitseigenschaft dann und nur dann, wenn es lokal umkehrbar steuerbar ist.

4. Das System besitzt die lokale Zugänglichkeitseigenschaft dann und nur dann, wenn es umkehrbar steuerbar ist. □

$$
\begin{tikzcd}
\text{lokale Steuerbarkeit} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Steuerbarkeit} \arrow[d] \\
\text{lokale Zugänglichkeitseigenschaft} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Zugänglichkeitseigenschaft} \arrow[d] \\
\text{schwache lokale Steuerbarkeit} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\Sigma_{\text{sym}}"'] & \text{schwache Steuerbarkeit} \arrow[d, shift right, "\Sigma_{\text{sym}}"'] \\
\text{umkehrbare lokale Steuerbarkeit} \arrow[r] \arrow[u, shift right] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{umkehrbare Steuerbarkeit} \arrow[u, shift right] \arrow[d, leftrightarrow] \\
\begin{array}{c}\text{umkehrbare lokale}\\ \text{Zugänglichkeitseigenschaft}\end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c}\text{umkehrbare}\\ \text{Zugänglichkeitseigenschaft}\end{array}
\end{tikzcd}
$$

Bild 2.9: Übersicht über verschiedene Steuerbarkeitseigenschaften

Damit ergeben sich also die in Bild 2.9 dargestellten Zusammenhänge.

3 Steuerbarkeitskriterien nichtlinearer Systeme

Wie bereits im Verlauf des Berichtes beschrieben ist die Eigenschaft der lokalen Erreichbarkeit/Steuerbarkeit eines Systems genau die Eigenschaft, die sich der Praktiker nach Möglichkeit für ein System wünscht. Leider gibt es für diese Systemeigenschaft jedoch kein einfaches Kriterium, insbesondere für nichtlineare Systeme in der Form der Σ_{AS}. Demgegenüber ist mit der dazu vergleichsweise schwachen Systemeigenschaft der lokalen schwachen Erreichbarkeit/Steuerbarkeit ein relativ einfaches Kriterium für Σ_{ALS} verbunden. Dieses Kriterium kann als eine Verallgemeinerung des Rangkriteriums nach Kalman u. a. (1969) verstanden werden und lautet (Schwarz 1991):

Kriterium 3.1
Für das System Σ_{ALS} (2.6) und eine Umgebung $\mathcal{M}_0$ um den betrachteten Anfangszustand $\boldsymbol{x}_0$ sei die Distribution[2] $\Delta(\boldsymbol{x}) = \text{span}\,\{\boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{x}), \dots, \boldsymbol{b}_m(\boldsymbol{x})\}$ über $\mathcal{M}_0$ definiert, und $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{x}), \dots, \boldsymbol{b}_m(\boldsymbol{x})$ seien die Vektorfelder, unter denen $\Delta(\boldsymbol{x})$ invariant sei. Ferner bezeichne $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ die minimale Distribution, die $\Delta(\boldsymbol{x})$ enthält und invariant unter den Vektorfeldern $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{x}), \dots, \boldsymbol{b}_m(\boldsymbol{x})$ ist:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{x}), \dots, \boldsymbol{b}_m(\boldsymbol{x}) |\ \text{span}\ \{\boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{x}), \dots, \boldsymbol{b}_m(\boldsymbol{x})\}\,\rangle \quad . \tag{3.1}$$

Dann gilt:

i) Das System (2.6) ist in $\mathcal{M}_0$ vollständig schwach erreichbar, wenn gilt

$$\dim \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = n \quad . \tag{3.2}$$

ii) $\dim \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = r \leq n$ gibt die Dimension der lokal schwach erreichbaren Teilmannigfaltigkeit von $\mathcal{M}_0$ an. □

Daraus läßt sich das folgende Rangkriterium bilden, welches nun ein nichtlineares Analogon zum Rangkriterium für lineare Systeme nach Kalman darstellt (Schwarz 1991). Der für die Rangbestimmung verwendete Algorithmus lautet:

Kriterium 3.2
Es sei

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) &= \Big[\boldsymbol{P}_0(\boldsymbol{x}) \ \vdots\ \boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{x}) \ \vdots\ \dots\Big] \\ \boldsymbol{P}_0(\boldsymbol{x}) &= \Big[\boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{x}) \ \vdots\ \dots \ \vdots\ \boldsymbol{b}_m(\boldsymbol{x})\Big] \\ \boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{x}) &= \Big[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{P}_{k-1}(\boldsymbol{x})\Big] \quad ; \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}\right\} \quad , \tag{3.3}$$

dann gibt

$$\text{rang}\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = r \leq n \tag{3.4}$$

die Dimension der lokal schwach erreichbaren Mannigfaltigkeit in $\mathcal{M}_0$ an. □

[2] vgl. (Olver 1986, Isidori 1989)

Der so beschriebene Bildungsalgorithmus kann nach Isidori (1989) abgebrochen werden, wenn ein k^* existiert, für das gilt: $\boldsymbol{P}_{k^*}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}_{k^*+1}(\boldsymbol{x})$. Das ist z. B. der Fall, wenn alle Lie–Kommutatoren bei der Stufe $k^* + 1$ Null ergeben. Der Algorithmus kann aber auch abgebrochen werden, sobald der volle Rang (hier: n) erreicht ist, das System also in $\mathcal{M}_0$ vollständig schwach erreichbar ist.

4 Beobachtbarkeitsbegriffe

Grundsätzlich wird zunächst zwischen den Begriffen *Beobachtbarkeit* und *Rekonstruierbarkeit* unterschieden:

i) Die Frage, ob der gegenwärtige Zustand $\boldsymbol{x}(\tau)$ aus der Kenntnis der zukünftigen Ausgangssignale $\boldsymbol{y}(t)\ :\ \ t \geq \tau$ und der zukünftigen Eingangssignale $\boldsymbol{u}(t)\ :\ \ t \geq \tau$ bestimmt werden soll, betrifft das Problem der *Beobachtbarkeit.*

ii) Soll aus dem vergangenen Verlauf von $\boldsymbol{u}(t)\ :\ \ t \leq \tau$ und $\boldsymbol{y}(t)\ :\ \ t \leq \tau$ der gegenwärtige Zustand $\boldsymbol{x}(\tau)$ bestimmt werden, sprechen wir von dem Problem der *Rekonstruierbarkeit.* □

In der ursprünglichen Fassung Kalman u. a. (1969) wird die Kenntnis von $\boldsymbol{u}(t)$ nicht vorausgesetzt. Ludyk (1977) machte am Beispiel eines zeitvarianten linearen Systems deutlich, daß man streng zwischen Rekonstruierbarkeit und Beobachtbarkeit unterscheiden muß. Bei der praktischen Anwendung, d. h. bei der Auslegung eines „Beobachters“ (genauer: Schätzer), handelt es sich immer um eine Rekonstruktion des Zustandes (Schwarz 1981). Warum muß hierfür aber eine Analyse der Beobachtbarkeit und nicht die der Rekonstruierbarkeit anhand eines Prozeßmodells geklärt werden? Die Beantwortung dieser Fragestellung liefern die folgenden Überlegungen:

Bei der Beobachtbarkeit wird untersucht, ob ein Zustand $\boldsymbol{x}_0$ zum Zeitpunkt t_0 mit Hilfe von Signalen $\boldsymbol{u}(t_0 + \Delta t)$ und $\boldsymbol{y}(t_0 + \Delta t)$, $\Delta t > 0$ unterschieden werden kann (Bild 4.1).

Bild 4.1: Beobachtbarkeitsanalyse

Mit Hilfe eines Beobachters wird ein Zustand $\boldsymbol{x}_0$ auch tatsächlich rekonstruiert. Dieser Zustand $\boldsymbol{x}_0$ zum Zeitpunkt t_0 wird aber aus Signalen $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y})$ zu Zeiten $t_0 + \Delta t$ ermittelt, also bezüglich des Zeitpunktes t_0 quasi „beobachtet“ (Bild 4.2).

Bild 4.2: Zu verwertende Signale eines Beobachters für einen Zustand $\boldsymbol{x}_0$

Geeignete Definitionen des Begriffes Beobachtbarkeit für nichtlineare Systeme geben u.a. Herman und Krener (1977), Sussmann (1978), Krener (1985), Keller (1986), Isidori (1989), Nijmeijer und van der Schaft (1990) sowie Birk (1992) an. All diese Arbeiten enthalten im wesentlichen die Herleitung der Rangbedingungen für die Überprüfung der Struktureigenschaft Beobachtbarkeit, die i. allg. von den auf das System einwirkenden Eingangssignalen abhängt. Die Einführung des Begriffes „eingangssignalunabhängige Beobachtbarkeit“ auf der Basis einer verallgemeinerten Beobachtbarkeitsnormalform für ALS geht auf Gauthier und Bornard (1981) zurück.

Da, wie erwähnt, die Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme – anders als bei linearen Systemen – von der Wahl der Steuerung $\boldsymbol{u}(t)$ selbst abhängt, wird zunächst der Begriff der *Unterscheidbarkeit* benötigt:

Definition 4.1 *$\mathcal{M}_0$–Unterscheidbarkeit zweier Zustände*
Zwei verschiedene Zustände $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ eines $\sum_{\mathrm{AS}}$ heißen $\mathcal{M}_0$–*unterscheidbar*, wenn mindestens ein zulässiges (begrenztes und meßbares) Eingangssignal $\boldsymbol{u}(t)$, $\forall\ t \in [t_0, T]$ so existiert, daß die zugehörigen Trajektorien $\boldsymbol{x}_1(t)$ und $\boldsymbol{x}_2(t)$ in $\mathcal{M}_0$ liegen und die entsprechenden Systemantworten $\boldsymbol{y}_1(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1)$ und $\boldsymbol{y}_2(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_2)$ für mindestens einen Zeitpunkt $t \in [t_0, T]$ nicht miteinander übereinstimmen. □

Mit $\mathcal{S}(\boldsymbol{x}_0, T, \mathcal{M}_0)$ werde die Menge aller von $\boldsymbol{x}_0$ nicht $\mathcal{M}_0$–unterscheidbaren Zustände bezeichnet. Die Abkürzungen $\mathcal{S}(\boldsymbol{x}_0)$ und $\mathcal{S}(\boldsymbol{x}_0, \mathcal{M})$ werden analog zu Definition 2.3 gebildet.

Definition 4.2 *Beobachtbarkeitsbegriffe*

i) $\sum_{\mathrm{AS}}$ heißt *beobachtbar*, wenn die Menge aller von $\boldsymbol{x}_0$ nicht $\mathcal{M}$–unterscheidbaren Zustände nur $\boldsymbol{x}_0$ selbst enthält, d. h.

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x}_0\} \qquad \forall \boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{M}\ . \tag{4.1}$$

ii) $\sum_{\mathrm{AS}}$ heißt *lokal beobachtbar*, wenn für jede offene Umgebung $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ von $\boldsymbol{x}_0$ gilt:

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{x}_0, \mathcal{M}_0) = \{\boldsymbol{x}_0\}\ . \tag{4.2}$$

iii) $\sum_{\mathrm{AS}}$ heißt *umkehrbar* (lokal) *beobachtbar*, wenn das korrespondierende $\sum_{\mathrm{sym}}$ (lokal) beobachtbar ist. □

Diese Definitionen fordern, daß $\boldsymbol{x}_0$ von jedem anderen Zustand aus $\mathcal{M}$ auch $\mathcal{M}$–unterscheidbar ist. In der Regel reicht es allerdings aus, einen Punkt nur von seinen Nachbarzuständen zu unterscheiden. Deshalb wird das Konzept der *schwachen* (lokalen) *Beobachtbarkeit* eingeführt.

Definition 4.3 *Schwache Beobachtbarkeitsbegriffe*

i) $\sum_{\mathrm{AS}}$ ist *schwach beobachtbar*, wenn für jedes $\boldsymbol{x}_0$ eine offene Umgebung $\mathcal{V}$ existiert, so daß gilt

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{x}_0) \cap \mathcal{V} = \{\boldsymbol{x}_0\}\ . \tag{4.3}$$

ii) $\sum_{\mathrm{AS}}$ ist *lokal schwach beobachtbar*, wenn es für jedes $\boldsymbol{x}_0$ eine offene Umgebung $\mathcal{V}$ gibt, so daß für jede offene Umgebung $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ von $\boldsymbol{x}_0$ gilt

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{x}_0, \mathcal{M}_0) \cap \mathcal{V} = \{\boldsymbol{x}_0\} \ . \tag{4.4}$$

iii) $\sum_{\mathrm{AS}}$ heißt (*lokal*) *umkehrbar schwach beobachtbar*, wenn $\sum_{\mathrm{sym}}$ die schwache (lokale) Beobachtbarkeitseigenschaft besitzt. □

Die Zusammenhänge zwischen den Beobachtbarkeits-/Unterscheidbarkeitsformen sind in Bild 4.3 dargestellt, wobei die Pfeile in Richtung der geringeren Anforderungen des Systems zeigen. Darüber hinaus ist zu erwähnen, daß die Eigenschaften der schwachen lokalen Beobachtbarkeit und die der umkehrbaren schwachen lokalen Beobachtbarkeit äquivalent sind, falls $\sum_{\mathrm{AS}}$ umkehrbar lokal steuerbar ist (Krener 1985).

$$\begin{tikzcd}
\text{lokale Beobachtbarkeit} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \text{Beobachtbarkeit} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \text{lokale umkehrbare Beobachtbarkeit} \arrow[rr] \arrow[dd] & & \text{umkehrbare Beobachtbarkeit} \arrow[dd] \\
\text{lokale schwache Beobachtbarkeit} \arrow[rr] \arrow[dr, shift left] & & \text{schwache Beobachtbarkeit} \arrow[dr, shift left] & \\
& \text{lokale umkehrbare schwache Beobachtbarkeit} \arrow[rr] \arrow[ul, shift left, "\sum_{sym}"] & & \text{umkehrbare schwache Beobachtbarkeit} \arrow[ul, shift left, "\sum_{sym}"]
\end{tikzcd}$$

Bild 4.3: Beziehungen zwischen den Beobachtbarkeitsformen

Für Untersuchungen, die auf eine Beobachtersynthese zielen, ist auch noch der Begriff der *globalen Beobachtbarkeit* (Brandin u. a. 1976, Keller 1986, Birk 1992) von Interesse:

Definition 4.4 *Globale Beobachtbarkeit*

$\sum_{\mathrm{AS}}$ heißt *global beobachtbar*, wenn jeder Anfangszustand $\boldsymbol{x}_0$ aus der Kenntnis des Ausgangssignals $\boldsymbol{y}(t)$ und des Eingangssignals $\boldsymbol{u}(t)$ und deren zeitlichen Ableitungen im gesamten Definitionsbereich $\forall \boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{M}$, $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ eindeutig bestimmt werden kann, d. h. wenn die Beobachtbarkeitsabbildung

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}(t) \\ \dot{\boldsymbol{y}}(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} , \qquad \bar{\boldsymbol{u}}(t) := \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) \\ \dot{\boldsymbol{u}}(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}^{(n-2)}(t) \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

eindeutig nach $\boldsymbol{x}$ aufgelöst werden kann. □

5 Beobachtbarkeitskriterium

Mit Hilfe des Differentialoperators

$$\mathrm{N}_{\boldsymbol{f}} := \mathrm{L}_{\boldsymbol{a}} + \sum_{i=1}^{m} u_i \mathrm{L}_{\boldsymbol{b}_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{p} u_j^{(i)}(t) \frac{\partial}{\partial u_j^{(i-1)}} \ , \tag{5.1}$$

$$\mathrm{N}_{\boldsymbol{f}}^{k} \ = \ \mathrm{N}_{\boldsymbol{f}}(\mathrm{N}_{\boldsymbol{f}}^{k-1}) \tag{5.2}$$

läßt sich die Menge

$$\mathcal{C}_r = \left\{ \mathrm{N}_{\boldsymbol{f}}^{(j-1)} c_i(\boldsymbol{x}) \ : \ i = 1, 2, \ldots, p \ ; \ j = 1, 2, \ldots, r \ ; \ r \geq n \right\} \tag{5.3}$$

konstruieren. Aus dieser Menge wird die Beobachtbarkeitskodistribution

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_r = \operatorname{span} \Big\{ & \mathrm{d}c_1(\boldsymbol{x}), \mathrm{dN}_{\boldsymbol{f}} c_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \mathrm{dN}_{\boldsymbol{f}}^{r} c_1(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}c_2(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}N_{\boldsymbol{f}} c_2(\boldsymbol{x}), \ldots, \mathrm{dN}_{\boldsymbol{f}}^{r} c_2(\boldsymbol{x}), \\ & \ldots, \mathrm{d}c_p(\boldsymbol{x}), \mathrm{dN}_{\boldsymbol{f}} c_p(\boldsymbol{x}), \ldots, \mathrm{dN}_{\boldsymbol{f}}^{r} c_p(\boldsymbol{x}) \Big\} \end{aligned} \tag{5.4}$$

mit dem Gradienten

$$\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x}) := \frac{\partial \gamma(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \left[\frac{\partial \gamma(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \ \frac{\partial \gamma(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}, \ \ldots, \ \frac{\partial \gamma(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \right] \tag{5.5}$$

gebildet. Mit der oft in der Literatur getroffenen Annahme, daß die Eingangssignale stückweise konstant sind, d. h. $\tilde{\mathcal{U}}_0 = \{ \boldsymbol{u} = \text{const.} \ ; \ \boldsymbol{u}^{(k)} = \boldsymbol{0} \ , \ k = 1, 2, \ldots, n-2 \}$, reduziert sich der Differentialoperator $\mathrm{N}_{\boldsymbol{f}}$ aus Gl. (5.1) zu $\mathrm{N}_{\boldsymbol{f}} = \mathrm{L}_{\boldsymbol{a}} + \sum_{i=1}^{m} u_i \mathrm{L}_{\boldsymbol{b}_i}$. Dabei bezeichnet z. B. $\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}$ die Lie–Ableitung entlang des Vektorfeldes $\boldsymbol{a}$.

Die korrespondierende Matrixform zu Gl. (5.4) wird als Beobachtbarkeitsmatrix $\boldsymbol{\Omega}_r$, die zu Gl. (5.3) als Beobachtbarkeitsabbildung $\boldsymbol{\phi}$ bezeichnet. Die Dimension der Beobachtbarkeitskodistribution ist gleich dem Rang der zugehörigen Beobachtbarkeitsmatrix (Kang und Krener 1991). Ein geometrischer Test zur Überprüfung der lokal schwachen Beobachtbarkeit in $\boldsymbol{x}_0$ kann folgendermaßen formuliert werden:

Kriterium 5.1
$\sum_{\mathrm{ALS}}$ ist lokal (schwach) beobachtbar in $\boldsymbol{x}_0$, wenn für mindestens eine zulässige Steuerung $\boldsymbol{u}(t)$ eine offene Umgebung $\mathcal{X}_0$ um $\boldsymbol{x}_0$ und eine Menge $\mathcal{K} = \{\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_p\}$ von natürlichen Zahlen (sog. Beobachtbarkeitsindizes) derart existieren, daß folgende Bedingungen für alle $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}_0$ erfüllt sind:

i) $\sum_{i=1}^{p} \kappa_i = n$ und $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \cdots \geq \kappa_p$.

ii) Die Beobachtbarkeitskodistribution $\mathfrak{D}_n$ spannt nach einer geeigneten Umnumerierung der $c_i(\boldsymbol{x})$ den Kotangentialraum $\mathcal{T}^*(\mathbb{R}^n)$ auf. Es gilt also:

$$\dim \mathfrak{D}_n = \operatorname{rang} \boldsymbol{\Omega}_n = n \ . \tag{5.6}$$

iii) Wenn eine andere Menge $\mathcal{L} = \{l_1, l_2, \ldots, l_p\}$ von natürlichen Zahlen existiert, die den Bedingungen i) und ii) genügt, dann gilt: $\mathcal{L} \geq \mathcal{K}$ in der lexikographischen Ordnung, das heißt: $(l_1 \geq \kappa_1)$ oder $(l_1 = \kappa_1$ und $l_2 \geq \kappa_2)$ oder $(l_1 = \kappa_1)$ und $(l_2 = \kappa_2$ und $l_3 \geq \kappa_3)$ usw. . $\square$

Kriterium 5.1 ist als Erweiterung der Definition 2.1 bei Krener und Respondek (1985) auf nichtautonome Systeme anzusehen.

6 Systemanalyse eines hydraulischen Antriebs

Im Geräteplan von Bild 6.1 ist ein elektrohydraulischer Translationsantrieb dargestellt. Er besteht aus Servoventil und Gleichgangzylinder. Die Modellbildung dieses Systems ist in verschiedenen Arbeiten bereits beschrieben worden (z. B. Dorißen 1990, Schwarz 1991, Jelali 1993). Mit den Zustandsvariablen $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = p_B - p_A$ kann das System wie folgt modelliert werden:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{f_1}{m} & \dfrac{A_w}{m} \\ 0 & -A_w\overline{k} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_0\overline{k}\sqrt{1 - \dfrac{x_3}{p_0}\mathrm{sgn}(u)} \end{bmatrix} u \quad . \tag{6.1}$$

Dabei sind m die Masse, A_w die wirksame Kolbenfläche, f_1 eine Reibkraftkonstante, Q_0 der maximale Durchfluß bei gegebenen Versorgungsdruck, p_0 der Versorgungsdruck und $\overline{k}$ näherungsweise eine Konstante, mit $\overline{k} \approx k(p_A, p_B, x_1) = \dfrac{E_{\ddot{\mathrm{O}}\mathrm{l}}(p_A)}{V_0 + A_w x_1} + \dfrac{E_{\ddot{\mathrm{O}}\mathrm{l}}(p_B)}{V_0 - A_w x_1}$.

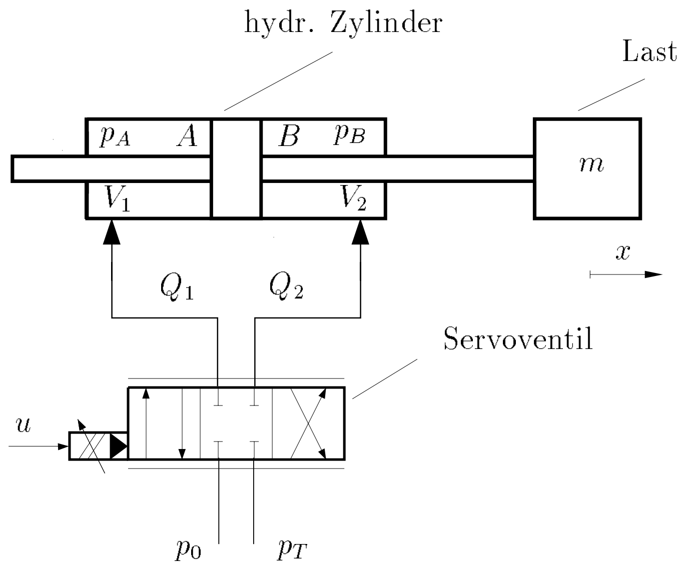

Bild 6.1: Elektrohydraulischer Antrieb

Um die Unstetigkeitsstelle bei $u = 0$ zu umgehen, wird der Bereich $u > 0$ betrachtet. Es ergibt sich somit:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ -\dfrac{f_1}{m}x_2 + \dfrac{A_w}{m}x_3 \\ -A_w\overline{k}x_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_0\overline{k}\sqrt{1 - \dfrac{x_3}{p_0}} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})} u \tag{6.2}$$

$$y = c(\boldsymbol{x}) = x_1 \ . \tag{6.3}$$

Zur Berechnung der Dimension der schwach erreichbaren Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_0$ wird nun entsprechend dem Kriterium 3.2 nach (Schwarz 1991:Satz 7.18) vorgegangen:

$$\boldsymbol{P}_0(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})] = \left[0 \quad 0 \quad Q_0\overline{k}\left(1-\frac{x_3}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^T$$

Für die nächste Stufe des Algorithmus wird nun der Lie–Kommutator (Olver 1986, Isidori 1989) aus $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{P}_0$ berechnet:

$$\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{x}) = \Big[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{P}_0(\boldsymbol{x})\Big] = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{Q_0 A_w \overline{k}}{m}\left(1-\dfrac{x_3}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \dfrac{Q_0 A_w \overline{k}^2}{2p_0} x_2 \left(1-\dfrac{x_3}{p_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Das so erhaltene Vektorfeld stellt also eine neue Richtung zu $\boldsymbol{P}_0$ dar, ist linear unabhängig von $\boldsymbol{P}_0$ zu (fast) jedem $\boldsymbol{x}$. Entsprechend dem Algorithmus aus (Schwarz 1991:Satz 7.18) wird nun der nächste Lie–Kommutator gebildet:

$$\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{x}) = \Big[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{x})\Big] =$$
$$\begin{pmatrix} \dfrac{Q_0 A_w \overline{k}}{m}\left(1-\dfrac{x_3}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} \\ -\dfrac{Q_0 A_w^2 \overline{k}^2 x_2}{2m\sqrt{p_0}\sqrt{p_0-x_3}} - \dfrac{Q_0 A_w \overline{k}(2f_1 p_0 - 2f_1 x_3 + A_w \overline{k} x_2 m)}{m^2\sqrt{p_0}\sqrt{p_0-x_3}} \\ -\dfrac{Q_0 \overline{k}^2 A_w (2f_1 p_0 x_2 - 2f_1 x_2 x_3 - 2A_w p_0 x_3 + 2A_w x_3^2 + \overline{k} A_w m x_2^2)}{4m\,(p_0-x_3)^{-3/2}\sqrt{p_0}} - \dfrac{Q_0 A_w^2 \overline{k}^2 \sqrt{p_0-x_3}}{m\sqrt{p_0}} \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) &= \Big[\boldsymbol{P}_0(\boldsymbol{x}) \ \vdots \ \boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{x}) \ \vdots \ \boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{x})\Big] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{Q_0 A_w \overline{k}}{m}\left(1-\dfrac{x_3}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & -\dfrac{Q_0 A_w \overline{k}}{m}\left(1-\dfrac{x_3}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} & \boldsymbol{P}_{2,2}(\boldsymbol{x}) \\ Q_0\overline{k}\left(1-\dfrac{x_3}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} & \dfrac{Q_0 A_w \overline{k}^2}{2p_0} x_2 \left(1-\dfrac{x_3}{p_0}\right)^{-\frac{1}{2}} & \boldsymbol{P}_{2,3}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

mit:

$$\boldsymbol{P}_{2,2}(\boldsymbol{x}) = -\frac{Q_0 A_w^2 \overline{k}^2 x_2}{2m\sqrt{p_0}\sqrt{p_0-x_3}} - \frac{Q_0 A_w \overline{k}(2f_1 p_0 - 2f_1 x_3 + A_w \overline{k} x_2 m)}{m^2\sqrt{p_0}\sqrt{p_0-x_3}}$$

$$\boldsymbol{P}_{2,3}(\boldsymbol{x}) = -\frac{Q_0 \overline{k}^2 A_w (2f_1 p_0 x_2 - 2f_1 x_2 x_3 - 2A_w p_0 x_3 + 2A_w x_3^2 + \overline{k} A_w m x_2^2)}{4m\,(p_0-x_3)^{-3/2}\sqrt{p_0}} - \frac{Q_0 A_w^2 \overline{k}^2 \sqrt{p_0-x_3}}{m\sqrt{p_0}} \quad .$$

Aus der rekursiven Berechnung der Lie–Kommutatoren ergibt sich, daß die Dimension der schwach erreichbaren Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_0$ gleich der der Zustandsmannigfaltigkeit ($n = 3$) ist, wenn gilt: $x_3 \neq p_0$. Dieses Ergebnis deckt sich demnach mit der Erfahrung, daß ein elektrohydraulischer Translationsantrieb steuerbar ist, solange nicht die Grenzbelastung des Systems erreicht bzw. überschritten wird. Anhand dieses Beispiels ist jedoch auch erkennbar, daß der Rechenaufwand gegenüber einer linearen Steuerbarkeitsanalyse deutlich höher ist. Dieser Rechenaufwand kann aber mit Hilfe symbolverarbeitender Software erheblich reduziert und sogar halb automatisiert werden. So wird z. B. in (Lemmen u. a. 1995) aufgezeigt, wie aufbauend auf der Mathematikplattform MAPLE, eine Systemanalyse eines Σ_{ALS}-Modells für die Eigenschaften schwache Erreichbarkeit, Beobachtbarkeit und Entkoppelbarkeit erfolgen kann. Dies geschieht durch fertige Softwaremodule (Lemmen u. a. 1995), die die entsprechende Analyse der Eigenschaften über einen einfachen Funktionsaufruf unter MAPLE zur Verfügung stellen.

Für die Analyse der Beobachtbarkeit ergibt die Anwendung des Differentialoperators nach Gl. (5.1)

$$N_{\boldsymbol{f}}^0 c(\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{x}) = x_1 \tag{6.4}$$

$$N_{\boldsymbol{f}}^1 c(\boldsymbol{x}) = x_2 \tag{6.5}$$

$$N_{\boldsymbol{f}}^2 c(\boldsymbol{x}) = -\frac{f_1}{m} x_2 + \frac{A_w}{m} x_3 \; . \tag{6.6}$$

Der nächste Schritt ist die Bildung der Gradienten gemäß Gl. (5.5):

$$\mathrm{d}N_{\boldsymbol{f}}^0 c(\boldsymbol{x}) = [1,\ 0,\ 0] \tag{6.7}$$

$$\mathrm{d}N_{\boldsymbol{f}}^1 c(\boldsymbol{x}) = [0,\ 1,\ 0] \tag{6.8}$$

$$\mathrm{d}N_{\boldsymbol{f}}^2 c(\boldsymbol{x}) = [0,\ -\frac{f_1}{m},\ \frac{A_w}{m}] \; . \tag{6.9}$$

Damit lautet die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\Omega_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{f_1}{m} & \frac{A_w}{m} \end{bmatrix} , \tag{6.10}$$

die den Rang 3 besitzt. Der hydraulische Antrieb ist also lokal beobachtbar.

7 Zusammenfassung

Durch den Einsatz der Differentialgeometrie und Lie-theoretischer Methoden gelingt es, bei der Analyse nichtlinearer Systeme gegenüber der Methode mittels linearisierter Modelle an verschiedenen Arbeitspunkten, genauere und für größere Arbeitsbereiche zulässige Aussagen über Systemeigenschaften, wie in diesem Übersichtsaufsatz exemplarisch anhand der Steuer- und Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme vorgestellt, zu treffen. Für nichtlineare Systeme ist in diesem Zusammenhang jedoch eine stärkere Differenzierung der zur Steuer- und Beobachtbarkeit verwandten Begriffe notwendig, als dies bei linearen Systemen der Fall ist. Bei dieser Aufschlüsselung der Eigenschaften Steuerbarkeit – Erreichbarkeit – Zugänglichkeit und dazu dual bei der Beobachtbarkeit – Rekonstruierbarkeit, gelangt der Anwender zu dem Dilemma, daß zwar die Wunscheigenschaften für ein System (z. B. die Erreichbarkeit) sehr wohl begrifflich klar umrissen sind, Kriterien für eine Überprüfung dieser Systemeigenschaft jedoch nur für sehr viel geringere Anforderungen an die zu untersuchenden Systeme existieren (etwa für die schwache Erreichbarkeit). Die bekannten und zugleich auch handhabbaren Kriterien können in diesem Zusammenhang also lediglich als notwendige, keinesfalls aber als notwendige und hinreichende Bedingung interpretiert werden.

Ein weiteres Hemmnis für einen verstärkten Einsatz nichtlinearer Analyse- und Synthesemethoden in der modernen angewandten Systemtheorie entsteht durch die sehr viel größere Komplexität bei wachsender Systemordnung im Vergleich zu linearen Analysemethoden. Das Bilden von Lie-Klammern und -Ableitungen kann sich zwar jeder Ingenieur in vergleichsweise kurzer Zeit aneignen und bei einer Kriterienüberrüfung anwenden. Da bei den betrachteten nichtlinearen Systemen aber auch die beschreibenden Modelle sehr viel komplexer werden, sind auch wesentlich größere Terme zur Berechnung heranzuziehen und die Kriterien sind – wie bei den meisten nichtlinearen Methoden – ab einer Systemordnung von ca. 5 bis 8 praktisch nicht mehr anwendbar und lediglich noch mit symbolverarbeitenden Programmpaketen in den Griff zu bekommen. Gerade mit derartigen symbolverarbeitenden Programmen (wie z. B. MAPLE oder MACSYMA), gelingt es auch das Bilden von Lie-Klammern und -Ableitungen als einfache Funktionsaufrufe zu programmieren und so die Systemanalyse nichtlinearer Systeme für Regelungstechniker teilweise zu automatisieren. Eine derartige teilweise Automatisierung der Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme ist zum Beispiel im CAS-Paket NSAS (Lemmen u. a. 1995) realisiert.

8 Literaturverzeichnis

Birk, J. 1992. *Rechnergestützte Analyse und Lösung nichtlinearer Beobachtungsaufgaben.* Dissertation. Universität Stuttgart. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 8 Nr. 294. Düsseldorf: VDI.

Brandin, V. N., **Y. M. L. Kostyukovskii** und **G. N. Razorenov**. 1976. Global observability conditions for nonlinear dynamic systems. *Automation and Remote Control* 36. 1585–1592.

Brocket, R. 1976. Nonlinear Systems and Differential Geometry. *Proc. of the IEEE.* 61 – 72.

Casti, J. 1985. *Nonlinear System Theory.* London: Academic Press.

Dorißen, H. T. 1990. *Zur Minimalrealisierung und Identifikation bilinearer Systeme durch Markovparameter.* Dissertation. Universität Duisburg. Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8 Nr. 221. Düsseldorf: VDI–Verlag.

Forster, O. 1984. *Analysis 2 – Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ – Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Braunschweig: Vieweg.

Gauthier, J. P. und **G. Bornard**. 1981. Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC – 26. 922 – 926.

Herman, R. und **A. Krener**. 1977. Nonlinear Controllability and Observability. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC - 22. 728 – 742.

Isidori, A. 1989. *Nonlinear Control Systems.* Berlin: Springer.

Jelali, M. 1993. *Beobachter und Filter für im Zustand quadratische Systeme mit linearer Steuerung (QLS).* Diplomarbeit. Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik, Fachbereich Maschinenbau, Universität Duisburg.

Kalman, R. E., **P. L. Falb** und **M. A. Arbib**. 1969. *Topics in mathematical system theory.* New York: McGraw-Hill.

Kang, W. und **A. J. Krener**. 1991. Observation of a rigid body from measurement of a principal axis. *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control* 2. 197–207.

Keller, H. 1986. Entwurf nichtlinearer, zeitinvarianter Beobachter durch Polvorgabe mit Hilfe einer Zwei–Schritt–Transformation. *Automatisierungstechnik –* **at** 34. 271–324 und 326–331.

Krener, A. J. 1985. $(Ad_{f,g})$, $(ad_{f,g})$ And Locally $(ad_{f,g})$ Invariant Controllability Distributions. *SIAM J. Control and Optimization* 23. 523 – 549.

Krener, A. J. und **W. Respondek**. 1985. Nonlinear observers with linearizable error dynamics. *SIAM J. Control and Optimization* 23. 197 – 216.

Lemmen, M. und **M. Schleuter**. 1995. *Relationentheoretische Beschreibung der Begriffe der Steuerbarkeit, Erreichbarkeit und Zugänglichkeit nichtlinearer Systeme*. Forschungsbericht Nr. 8/95. Meß-, Steuer- und Regelungstechnik. Universität Duisburg.

Lemmen, M., **T. Wey** und **M. Jelali**. 1995. *NSAS – ein Computer-Algebra-Paket zur Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme*. Forschungsbericht Nr. 20/95. Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik, Fachbereich Maschinenbau, Universität Duisburg.

Ludyk, G. 1977. *Theorie dynamischer Systeme*. Berlin: Elitera.

Nijmeijer, H. und **A. van der Schaft**. 1990. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Berlin: Springer.

Olver, P. 1986. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Berlin: Springer.

Schwarz, H. 1981. *Optimale Regelung und Filterung*. Braunschweig: Vieweg.

Schwarz, H. 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme: Systemtheoretische Grundlagen*. München: Oldenbourg.

Sussmann, H. J. 1978. Single–input observability of continuous–time systems. *Math. Systems Theory* 12. 371 – 393.