

Zur Strukturanalyse der Modelle elastischer Handhabungssysteme

Britta Riege

Forschungsbericht Nr. 09/96

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Dieser Bericht stellt die gängigen Kriterien zur Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsanalyse zusammen. Dabei liegt der Schwerpunkt auf der Untersuchung von einfachen nichtlinearen Modellen. Im Anschluß daran erfolgt die Anwendung der Kriterien auf elastische Handhabungssysteme anhand von Modellen für einen einachsigen und einen zweiachsigen elastischen Roboter.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Formelzeichen und Bezeichnungen	II
1 Einleitung	1
2 Kriterien zur Steuerbarkeitsanalyse	2
2.1 Systeme der Klasse ALS	2
2.2 Systeme der Klasse QLS	3
2.3 Systeme der Klasse BLS	4
2.4 Lineare Systeme	5
3 Kriterien zur Beobachtbarkeitsanalyse	6
3.1 Systeme der Klasse ALS	6
3.2 Systeme der Klasse QLS	8
3.3 Systeme der Klasse BLS	9
3.4 Lineare Systeme	9
4 Einachsiger elastischer Roboterarm	11
4.1 Lineares Modell 1 (fest eingespannt)	11
4.2 Lineares Modell 2 (gelenkig gelagert)	15
4.3 Bilineares Modell	17
5 Zweigliedriger elastischer Roboterarm	20
5.1 Linearisiertes Modell	21
5.2 Nichtlineares Modell (ALS)	23
6 Zusammenfassung und Ausblick	25
7 Literaturverzeichnis	26
Anhang	27
A Lie–Algebra	28
B Parameter der Beispielsysteme	29
B.1 Einachsiger Roboterarm	29
B.2 Zweiachsiger Roboterarm	29

Formelzeichen und Bezeichnungen

Skalare Größen

$c_i(\boldsymbol{x})$	zum i -ten Ausgang gehörige Ausgangsfunktion eines ALS
EI	Biegesteifigkeit eines elastischen Balkens
F	Kraft
g	Erdbeschleunigung
i, k, l	Indizes
J	Trägheitsmoment (allgemein)
J_T	Trägheitsmoment des Roboterarms bezüglich der Motorachse
L	Balkenlänge
m	Anzahl der Systemeingänge
n	Systemordnung
p	Anzahl der Systemausgänge
$q_i(t)$	i -te verallgemeinerte Koordinate
r	Dimension der lokal schwach steuer-/beobachtbaren Mannigfaltigkeit
t	Zeit
T	Zeit bis zum Erreichen eines Endzustandes
$u(t)$	Eingangsgröße eines Eingrößensystems
$u_i(t)$	i -ter Systemeingang
$w(x, t)$	Auslenkung eines Punktes auf dem Balken
x_A	Aktuatorposition
x_S	Sensorposition
$y(t)$	Ausgangsgröße
$\delta_i(t)$	i -te elastische Koordinate
λ_i	i -ter Eigenwert eines linearen Systems
$\phi_i(x)$	i -te Eigenfunktion eines elastischen Balkens
$\Theta_i(t)$	i -te starre Koordinate

Vektoren und Matrizen

$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$	Vektorfeld, Driftterm eines ALS
$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$	Systemmatrizen
\boldsymbol{b}	Eingangsvektor
$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$	Eingangsmatrizen
$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})$	Trägheitsmatrix
\boldsymbol{B}_A	Linearisierte Trägheitsmatrix
$\boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{x})$	zum i -ten Eingang gehöriges Eingangsvektorfeld eines ALS
$\boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$	Eingangsmatrizen
\boldsymbol{c}^T	Ausgangsvektor
\boldsymbol{C}	Ausgangsmatrix
\boldsymbol{C}_h	Linearisierte Systemmatrix

$\mathbf{c}(\mathbf{x})$	Ausgangsvektorfeld eines ALS
\mathbf{f}, \mathbf{g}	Vektorfelder
$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Vektor der verallgemeinerten Coriolis- und Zentrifugalkräfte
\mathbf{I}	Einheitsmatrix
\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_B, \mathbf{K}_g, \mathbf{K}_h$	Linearisierte Steifigkeitsmatrizen
\mathbf{N}	Systemmatrix eines BLS
$\mathbf{P}(\mathbf{x})$	Steuerbarkeitsmatrix für ALS
$\mathbf{P}_i(\mathbf{x})$	i -te Untermatrix von $\mathbf{P}(\mathbf{x})$
\mathbf{p}	Beobachtbarkeitsabbildung
$\mathbf{q}(t)$	Vektor der verallgemeinerten Koordinaten
\mathbf{q}_0	Vektor der verallgemeinerten Koordinaten am Arbeitspunkt
$\mathbf{Q}(\mathbf{x})$	Beobachtbarkeitsmatrix für ALS
$\mathbf{Q}_i(\mathbf{x})$	i -te Untermatrix von $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$
\mathbf{Q}_B	Beobachtbarkeitsmatrix
\mathbf{Q}_S	Steuerbarkeitsmatrix
\mathbf{Q}_U	Eingangsbelegungsmatrix
$\mathbf{u}(t)$	Eingangsvektor
$\bar{\mathbf{u}}(t)$	Vektor der Zeitableitungen des Eingangs
$\mathbf{x}(t)$	Zustandsvektor
\mathbf{x}_0	Anfangszustandsvektor
$\mathbf{y}(t)$	Ausgangsvektor
$\mathbf{z}(t)$	Zustandsvektor

Operatoren und sonstige Zeichen

ad	Lie-Kommutator
$L_f \lambda$	Lie-Ableitung einer skalaren Funktion λ entlang eines Vektorfeldes \mathbf{f}
$L_f \mathbf{g}$	Lie-Ableitung eines Vektorfeldes \mathbf{g} entlang eines Vektorfeldes \mathbf{f}
$L_a^* \mathbf{d}$	Lie-Ableitung eines Kovektorfeldes \mathbf{d} entlang eines Vektorfeldes \mathbf{a}
\mathcal{M}	Zustandsmannigfaltigkeit
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathcal{U}_0	lokale Umgebung um \mathbf{x}_0
rang	Rang einer Matrix
\mathcal{V}, \mathcal{W}	Vektorräume, Teilgebiete von \mathcal{M}
$\delta(\cdot)$	Dirac'sche Deltafunktion
$[\cdot, \cdot]$	Lie-Klammer zweier Vektorfelder
\otimes	Kronecker-Produktoperator

Abkürzungen

ALS	Analytisches System mit linear eingehender Steuerung
BLS	Bilineares System
LS	Lineares System
QLS	Zustandsquadratisches System mit linear eingehender Steuerung

1 Einleitung

Im Gegensatz zu herkömmlichen, starr ausgeführten Roboterarmen, die vom Materialaufwand überdimensioniert sind, um die geforderte hohe Biegesteifigkeit zu erreichen, treten bei der Untersuchung elastischer Handhabungssysteme nicht mehr zu vernachlässigende elastische Deformationen auf. Es handelt sich um Systeme mit verteilten Parametern, die durch unendlich viele Eigenfrequenzen gekennzeichnet sind. Neben der möglichst exakten Modellbildung stellt die Frage der geeigneten Platzierung der erforderlichen Sensorik und Aktorik ein wichtiges Forschungsziel dar. Um zu klären, wie und in welchem Maße die Aktorik zur gezielten Schwingungskompensation eingesetzt werden kann oder um beispielsweise Kriterien für einen geeigneten oder ungeeigneten Einbauort von Sensorelementen zu schaffen, ist die Untersuchung der Struktureigenschaften der Modelle elastischer Arme unerlässlich. Hierzu existieren bereits mehrere Ansätze, die sich vor allem mit dem Fall des einachsigen elastischen Arms auseinandersetzen (z. B. Spector 1988, Cho u. a. 1991, Kobayashi 1992).

Bei der Modellbildung solcher Handhabungssysteme muß in der Praxis auf eine Modellapproximation zurückgegriffen werden. Einen wichtigen Punkt stellt hier die Frage dar, ob und inwieweit Struktureigenschaften wie Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit bei den approximierten Modellen erhalten bleiben bzw. wie die Erhaltung der wichtigen Eigenschaften schon durch die Wahl der Struktur des Approximationsmodells gewährleistet werden kann.

Der vorliegende Forschungsbericht stellt zunächst in Abschnitt 2 die wichtigsten Kriterien zur Steuerbarkeitsanalyse zusammen. Hierbei liegt der Schwerpunkt darauf, für alle im Sinne der Modellapproximation wichtigen, einfachen nichtlinearen Systemklassen, also im einzelnen für die Systemklassen

- ALS (analytische Systeme mit linear eingehender Steuerung),
- QLS (zustandsquadratische Systeme mit linear eingehender Steuerung),
- BLS (bilineare Systeme) und
- lineare Systeme

die Steuerbarkeitskriterien zu katalogisieren. Abschnitt 3 behandelt in gleicher Weise die Beobachtbarkeitsanalyse. Die beiden folgenden Abschnitte beschäftigen sich mit der Anwendung dieser Kriterien auf elastische Roboterarme. Dabei wird im 4. Abschnitt der Analyse zunächst ein lineares Modell eines einachsigen Arms zugrunde gelegt und anschließend ein bilineares. In Abschnitt 5 wird das Modell eines zweiachsigen elastischen Roboters auf Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit hin untersucht. Der Bericht schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf Ziele zukünftiger Forschungen.

2 Kriterien zur Steuerbarkeitsanalyse

In diesem Abschnitt werden zusammenfassend die Kriterien zur Untersuchung der Steuerbarkeit bzw. Erreichbarkeit eines Systems dargestellt. Dazu werden zunächst einige Begriffsdefinitionen aufgeführt. Prinzipiell unterscheidet man zwischen den Eigenschaften Erreichbarkeit und Steuerbarkeit, die wie folgt voneinander abgegrenzt werden (Lemmen 1995):

- Die Eigenschaft **Erreichbarkeit** macht eine Aussage darüber, welche Systemzustände von einem gegebenen Ausgangszustand \mathbf{x}_0 unter Wirkung einer Steuerung innerhalb einer Zeit T erreicht werden.
- Die Eigenschaft **Steuerbarkeit** macht eine Aussage darüber, ob ein System von einem Zustand \mathbf{x}_0 in einen Gleichgewichtszustand überführt werden kann.

Hier wird vor allem auf die Eigenschaft der Erreichbarkeit eingegangen. Die Steuerbarkeit eines Systems ist in dem umfassenderen Begriff der Erreichbarkeit des Systems enthalten. Genaue Definitionen und Erläuterungen der Begriffe Steuerbarkeit und Erreichbarkeit nichtlinearer Systeme würden den Rahmen dieses Berichts sprengen. Sie sind zum Beispiel in (Schwarz 1991) oder (Lemmen und Jelali 1996) nachzulesen. Zunächst wird ein Kriterium zur Erreichbarkeitsanalyse für Systeme der Form ALS angegeben, um dann auf einfachere nichtlineare Systemklassen einzugehen.

2.1 Systeme der Klasse ALS

Im folgenden werden Systeme der Form ALS, bei denen die Steuerung $\mathbf{u}(t)$ linear (bzw. affin) eingeht, behandelt. Die beschreibenden Zustandsgleichungen lauten für Mehrgrößensysteme:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i(\mathbf{x}(t)) u_i(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \end{aligned} \quad (2.1)$$

Die entsprechenden Zustandsgleichungen für Eingrößensysteme ergeben sich analog.

Die Differentialgeometrie stellt ein wichtiges Werkzeug zur Untersuchung der Strukturinvarianten von Systemen der Klasse ALS (Gl. (2.1)) dar. In (Schwarz 1991) wird folgendes Kriterium eingeführt:

Kriterium 2.1 (Schwarz 1991)

Es sei

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{x}) &= [\mathbf{P}_0(\mathbf{x}) : \mathbf{P}_1(\mathbf{x}) : \cdots : \mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{x})] \\ \mathbf{P}_0(\mathbf{x}) &= [\mathbf{b}_1(\mathbf{x}) : \cdots : \mathbf{b}_m(\mathbf{x})] = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{P}_k(\mathbf{x}) &= [\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{P}_{k-1}(\mathbf{x})] \quad ; k = 1, \dots, n-1 \end{aligned} \right\}, \quad (2.2)$$

dann gibt

$$\text{rang } \mathbf{P}(\mathbf{x}) = r \leq n \quad (2.3)$$

die Dimension der lokal schwach erreichbaren Mannigfaltigkeit in \mathcal{U}_0 an. \square

Die Lie-Klammer $[\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{P}_i(\mathbf{x})]$, die zur Auswertung des Kriteriums benötigt wird, ist im Anhang A erläutert. Hier handelt es sich um ein strukturell relativ einfaches und schematisch auszuwertendes Rangkriterium für nichtlineare Systeme. Die einzelnen Distributionen $\mathbf{P}_i(\mathbf{x})$ werden rekursiv berechnet, wobei der Algorithmus nach Isidori (1995) abgebrochen werden kann, wenn

- der volle Rang n erreicht wird oder
- ein l existiert, für das gilt: $\mathbf{P}_l(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_{l-1}(\mathbf{x})$.

2.2 Systeme der Klasse QLS

In dieser Klasse sind die zustandsquadratischen Systeme mit linear eingehender Steuerung enthalten, deren Zustandsmodell (für Eingrößensysteme) lautet:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) + [\mathbf{b}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t)] u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad u, y \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Das hier verwendete Kronecker-Produkt ist für zwei Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ wie folgt definiert:

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} = [x_1^2, x_1 x_2, \dots, x_1 x_n; x_2 x_1, \dots, x_2 x_n; x_n x_1, \dots, x_n^2]^T, \quad (2.5)$$

oder in der reduzierten Form, in der permutierte Produktkomponenten nur einmal verwendet werden (und gleichartige unterdrückt werden):

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} = [x_1^2, x_1 x_2, \dots, x_1 x_n; x_2^2, x_2 x_3, \dots, x_2 x_n; \dots; x_n^2]^T. \quad (2.6)$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{b}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

wird das System wieder in ALS-Form überführt, und es ergibt sich folgendes Kriterium für *lokale* Steuerbarkeit:

Kriterium 2.2 (Jelali 1994)

Ein QLS nach Gl. (2.4) ist lokal steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_S = [\mathbf{b}(\mathbf{x}), \text{ad}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_{\mathbf{b}}^{n-1} \mathbf{a}(\mathbf{x})] \quad (2.8)$$

den vollen Rang

$$\text{rang } \mathbf{Q}_S = n \quad (2.9)$$

besitzt. \square

Der Lie-Kommutator ad ist im Anhang A erläutert. *Global* steuerbar ist das System dagegen, wenn es in nichtlinearer Steuerbarkeitsnormalform (SKNF) vorliegt oder in diese transformiert werden kann. Diese Bedingung ist jedoch unter Umständen sehr schwierig nachzuprüfen, da sie die Integration eines Systems partieller Differentialgleichungen erfordert.

2.3 Systeme der Klasse BLS

Systeme der Klasse BLS mit mehreren Ein- und Ausgangsgrößen besitzen folgende Zustandsform:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^m [\mathbf{N}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_i] u_i(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, u_i \in \mathbb{R}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \quad .\end{aligned}\tag{2.10}$$

Für Eingrößen-BLS lauten die Zustandsgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + [\mathbf{N}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}] u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, u, y \in \mathbb{R} \quad .\end{aligned}\tag{2.11}$$

Für die in (Schwarz 1991) definierte n -Erreichbarkeit eines bilinearen Eingrößensystems läßt sich aus dem allgemeinen Kriterium 2.1 folgendes vereinfachte Kriterium ableiten:

Kriterium 2.3

Es sei

$$\left. \begin{aligned}\mathbf{P} &= [\mathbf{P}_1 \vdots \mathbf{P}_2 \vdots \dots \vdots \mathbf{P}_n] \\ \mathbf{P}_1 &= [\mathbf{b}_1 \vdots \dots \vdots \mathbf{b}_m] \\ \mathbf{P}_k &= [\mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1} \vdots \mathbf{N}\mathbf{P}_{k-1}] \quad ; k = 2, \dots, n\end{aligned}\right\},\tag{2.12}$$

dann ist das System nach Gl. (2.11) genau dann n -erreichbar, wenn gilt:

$$\text{rang } \mathbf{P} = n \quad .\tag{2.13}$$

□

Dieses Kriterium führt zur Bestimmung der folgenden Steuerbarkeitsmatrix:

$$\mathbf{Q}_S = \mathbf{P} = [\mathbf{b} \vdots \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{N}\mathbf{b} \vdots \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{N}\mathbf{b}, \mathbf{N}\mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{N}^2\mathbf{b} \vdots \dots] \quad .\tag{2.14}$$

2.4 Lineare Systeme

Lineare Systeme lassen sich durch das Zustandsmodell

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i u_i(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, u_i \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p\end{aligned}\tag{2.15}$$

beschreiben (Schwarz 1969). Bei diesen Systemen vereinfacht sich das allgemeine Kriterium für analytische Systeme mit linear eingehender Steuerung durch Bestimmung der entsprechenden Lie-Klammern wie folgt:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_0 &= [\mathbf{b}_1 \vdots \mathbf{b}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{b}_m] = \mathbf{B} \\ \mathbf{P}_1 &= [\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{P}_0] = \left[[\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{b}_1] \vdots [\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{b}_2] \vdots \cdots \vdots [\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{b}_m] \right] \\ &= \left[\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{A} \mathbf{x}) - \frac{\partial(\mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_1 \vdots \cdots \vdots \frac{\partial \mathbf{b}_m}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{A} \mathbf{x}) - \frac{\partial(\mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_m \right] \\ &= \left[-\mathbf{A} \mathbf{b}_1 \vdots \cdots \vdots -\mathbf{A} \mathbf{b}_m \right] = -\mathbf{A} \mathbf{B} \\ \mathbf{P}_2 &= [\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{P}_1] = [\mathbf{A} \mathbf{x}, -\mathbf{A} \mathbf{B}] = - \left[[\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{b}_1] \vdots [\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{b}_2] \vdots \cdots \vdots [\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{b}_m] \right] \\ &= - \left[\frac{\partial(\mathbf{A} \mathbf{b}_1)}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{A} \mathbf{x}) - \frac{\partial(\mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{A} \mathbf{b}_1) \vdots \cdots \vdots \frac{\partial(\mathbf{A} \mathbf{b}_m)}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{A} \mathbf{x}) - \frac{\partial(\mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{A} \mathbf{b}_m) \right] \\ &= \left[\mathbf{A}^2 \mathbf{b}_1 \vdots \cdots \vdots \mathbf{A}^2 \mathbf{b}_m \right] = \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \\ &\vdots\end{aligned}\tag{2.16}$$

Dies ist bis auf die alternierenden Vorzeichen direkt äquivalent zum Kalman-Kriterium:

Kriterium 2.4 (Kalman u. a. 1969, Föllinger 1992)

Das lineare System nach Gl. (2.15) ist genau dann steuerbar, wenn die $(n \times nm)$ -Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_S = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

den Höchstrang n , also n linear unabhängige Spaltenvektoren besitzt. \square

Dieses Kriterium liefert eine globale Aussage über die Steuerbarkeit eines linearen dynamischen Systems. Will man dagegen, wie bei mechanischen Systemen vorteilhaft, jeden Eigenwert λ_i des Systems einzeln auf Steuerbarkeit untersuchen, so bietet sich folgendes (Hautus-) Kriterium an:

Kriterium 2.5 (Schwarz 1971)

Ein dynamisches System mit der Zustandsdifferentialgleichung (2.15) ist genau dann steuerbar, wenn für jeden Eigenwert λ_i von \mathbf{A} gilt:

$$\text{rang } \mathbf{Q}_S^* = \text{Rang} \left[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} \vdots \mathbf{B} \right]_{\lambda=\lambda_i} = n,$$

wobei n die Zeilenanzahl von \mathbf{A} , also die Systemordnung ist. \square

3 Kriterien zur Beobachtbarkeitsanalyse

Analog zum vorherigen Abschnitt werden hier die Kriterien zur Untersuchung der Beobachtbarkeit von Systemen der Klassen ALS, QLS, BLS und LS vorgestellt.

3.1 Systeme der Klasse ALS

Zunächst werden die Kriterien für den allgemeinsten betrachteten Fall, für Systeme der Klasse ALS nach Gl. (2.1), vorgestellt. Auch hier sei für detaillierte theoretische Betrachtungen und Erläuterungen zu den Begriffen Beobachtbarkeit, Unterscheidbarkeit und Rekonstruierbarkeit auf Schwarz (1991), Isidori (1995) sowie Lemmen und Jelali (1996) verwiesen. Allen Beobachtbarkeitsdefinitionen liegt der Begriff der Unterscheidbarkeit zugrunde:

Definition 3.1 (Nijmeijer und van der Schaft 1990)

Zwei Zustände $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{M}$ eines Systems heißen ununterscheidbar, wenn für jede Eingangsfunktion u die Ausgangsfunktionen $y(t, \mathbf{x}_1, u)$ für $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_1$ und $y(t, \mathbf{x}_2, u)$ für $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_2$ identisch sind. \square

Daraus folgt direkt die allgemeine Definition der Beobachtbarkeit:

Definition 3.2 (Nijmeijer und van der Schaft 1990)

Das System nach Gl. (2.1) ist beobachtbar, wenn für alle $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{M}$ gilt: \mathbf{x}_1 ist dann und nur dann nicht unterscheidbar von \mathbf{x}_2 , wenn gilt

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \tag{3.1}$$

\square

Zwischen lokaler und globaler Beobachtbarkeit von Systemen wird wie folgt unterschieden:

Definition 3.3 (Birk 1992)

Ein nichtlineares System heißt

- global beobachtbar, wenn alle Anfangszustände \mathbf{x}_0 aus dem Ausgang $\mathbf{y}(t)$ und dem Eingang $\mathbf{u}(t)$ im gesamten Definitionsbereich eindeutig bestimmbar sind.
- lokal beobachtbar in einem Punkt \mathbf{x}_p , wenn alle Anfangszustände \mathbf{x}_0 in einer Umgebung $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_p\| < \rho$ von \mathbf{x}_p aus dem Ausgang $\mathbf{y}(t)$ und dem Eingang $\mathbf{u}(t)$ eindeutig bestimmbar sind. Das System ist lokal beobachtbar, wenn diese Eigenschaft im gesamten Definitionsbereich des Systems erfüllt ist. \square

Für die praktische Überprüfung anhand von Rangkriterien ist vor allem der Begriff der lokal schwachen Beobachtbarkeit von Bedeutung. Die Definition lautet:

Definition 3.4 (Ingenbleek 1996)

Ein System nach Gl. (2.1) heißt lokal schwach beobachtbar an der Stelle \mathbf{x}_0 , wenn eine offene Umgebung $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{M}$ von \mathbf{x}_0 derart existiert, daß für jede offene Umgebung $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ die Menge der von \mathbf{x}_0 nicht unterscheidbaren Zustände gerade aus \mathbf{x}_0 selbst besteht. Das System ist lokal schwach beobachtbar, wenn dies für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$ gilt. \square

Anschaulich bedeutet diese Definition, daß für eine noch so kleine Umgebung \mathcal{W} von \mathbf{x}_0 jede beliebige (noch kleinere) Umgebung $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ existieren muß, die keine ununterscheidbaren Zustände enthält. Im Sinne der Definition 3.3 sind die lokalen Eigenschaften strenger als die globalen. Die lokal schwache Beobachtbarkeit stellt lediglich die Unterscheidbarkeit benachbarbarter Zustände in $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{M}$ sicher, wobei \mathcal{W} durchaus von \mathbf{x}_0 nicht unterscheidbare Zustände enthalten darf. Diese Eigenschaft ist damit schwächer als die lokale Beobachtbarkeit, die die Unterscheidbarkeit für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{W}$ gewährleistet.

Für das folgende Kriterium seien die p Ausgänge des ALS bestimmt durch

$$y_i = c_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, p \quad . \quad (3.2)$$

Es läßt sich wieder mit Hilfe der Differentialgeometrie ein Rangkriterium aufstellen:

Kriterium 3.1 (Schwarz 1991)

Es sei

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Q}_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{n-1}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{mit } \mathbf{Q}_0(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial c_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \dots, \frac{\partial c_p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] \\ \text{und } \mathbf{Q}_k(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{a}(\mathbf{x})}^* \mathbf{Q}_{k-1}(\mathbf{x}) \quad ; \quad k = 1, \dots, n-1 \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

Dann gibt $\text{rang } \mathbf{Q}(\mathbf{x}) = r \leq n$ die Dimension der lokal schwach beobachtbaren Mannigfaltigkeit in $\mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^n$ an. \square

Die Lie-Ableitung L^* eines Kovektorfeldes entlang eines Vektorfeldes ist im Anhang A erläutert.

3.2 Systeme der Klasse QLS

Um eine Beobachtbarkeitsanalyse vornehmen zu können, wird zunächst eine Beobachtbarkeitsabbildung betrachtet, bei der die zeitlichen Ableitungen des Ausgangssignals zu einem Vektor zusammengefaßt werden. Diese Abbildung bildet den Systemeingang und die Zustände des Systems auf den Ausgang ab. Die Abbildungsvorschrift lautet demnach:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{u}}) &= \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{x}^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) + [\mathbf{b}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t)] u(t)) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = [u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(n-2)}(t)]^T. \quad (3.5)$$

Mit Hilfe dieser Beobachtbarkeitsabbildung werden Beobachtbarkeitsbedingungen aufgestellt. Das erste Kriterium beantwortet die Frage nach der *globalen* Beobachtbarkeit eines QLS.

Kriterium 3.2 (Jelali 1993)

Ein QLS nach Gl. (2.4) ist global beobachtbar im gesamten Definitionsbereich, wenn seine Beobachtbarkeitsabbildung $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}})$ sich eindeutig invertieren, also nach \mathbf{x} auflösen läßt für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. \square

Dieses Kriterium ist in der Praxis, vor allem bei Systemen höherer Ordnung, schwer nachzuprüfen. Zur Untersuchung der *lokalen* Beobachtbarkeit wird die Beobachtbarkeitsmatrix durch Bilden der partiellen Ableitungen der Beobachtbarkeitsabbildung berechnet und der üblichen Ranguntersuchung unterzogen.

Kriterium 3.3 (Jelali 1993)

Ein QLS nach Gl. (2.4) ist lokal beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_B(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}) = \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}})}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.6)$$

im gesamten Definitionsbereich den vollen Rang

$$\text{rang } \mathbf{Q}_B(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}) = n \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_\mathbf{x}; \forall \bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{D}_\mathbf{u} \quad (3.7)$$

besitzt. \square

3.3 Systeme der Klasse BLS

Mit Hilfe des Begriffs der n -Unterscheidbarkeit, der in (Schwarz 1991) erläutert ist, wird das folgende Kriterium definiert:

Kriterium 3.4 (Rugh 1981)

Ein bilineares System der Form (2.11) ist dann und nur dann n -unterscheidbar, wenn

$$\text{rang } \mathbf{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{N}, \mathbf{c}^T) = n \quad (3.8)$$

erfüllt ist, wobei die $((2^n-1) \times n)$ -dimensionale n -Unterscheidbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{N}, \mathbf{c}^T)$ rekursiv berechnet wird aus

$$\mathbf{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{N}, \mathbf{c}^T) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_n \end{bmatrix} \text{ mit } \mathbf{Q}_1 = \mathbf{c}^T \text{ und } \mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{i-1} \mathbf{A} \\ \mathbf{Q}_{i-1} \mathbf{N} \end{pmatrix} \quad \forall i = 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

□

Die n -Unterscheidbarkeitsmatrix des Eingrößen-BLS folgt nach diesem Kriterium zu

$$\mathbf{Q} = \left[\mathbf{c} : (\mathbf{c}^T \mathbf{A})^T, (\mathbf{c}^T \mathbf{N})^T : (\mathbf{c}^T \mathbf{A}^2)^T, (\mathbf{c}^T \mathbf{N} \mathbf{A})^T, (\mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{N})^T, (\mathbf{c}^T \mathbf{N}^2)^T : \dots \right]^T \quad (3.10)$$

3.4 Lineare Systeme

Die Berechnung der Lie-Ableitungen des linearen Systems nach Gl. (2.15) ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0 &= \mathbf{C} \quad , \\ \mathbf{Q}_1 &= L^*_{(\mathbf{A} \mathbf{x})} \mathbf{C} = (\mathbf{A} \mathbf{x})^T \left[\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}} \right]^T + \mathbf{C} \frac{\partial (\mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{C} \mathbf{A} \quad , \\ \mathbf{Q}_2 &= L^*_{(\mathbf{A} \mathbf{x})} \mathbf{C} \mathbf{A} = (\mathbf{A} \mathbf{x})^T \left[\frac{\partial \mathbf{C} \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}} \right]^T + \mathbf{C} \mathbf{A} \frac{\partial (\mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{C} \mathbf{A}^2 \quad , \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.11)$$

Hieraus resultiert wieder das Kalman-Kriterium, das bekannt ist als

Kriterium 3.5 (Kalman u. a. 1969, Föllinger 1992)

Das System (2.15) ist genau dann beobachtbar, wenn die $(np \times n)$ -Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

den Höchststrang n aufweist, also n linear unabhängige Zeilenvektoren besitzt. □

Auch hier gibt es die Möglichkeit, mit dem Hautus-Kriterium jeden Eigenwert getrennt zu betrachten:

Kriterium 3.6 (Schwarz 1971)

Ein dynamisches System mit der Zustandsdifferentialgleichung (2.15) ist genau dann beobachtbar, wenn für jeden Eigenwert λ_i von \mathbf{A} gilt:

$$\text{rang } \mathbf{Q}_B^* = \text{rang} \left[\mathbf{I}\lambda - \mathbf{A}^T : \mathbf{c}^T \right]_{\lambda=\lambda_i} = n \quad . \quad (3.13)$$

□

4 Einachsiger elastischer Roboterarm

In diesem Abschnitt wird das Modell eines einachsigen elastischen Roboterarms vorgestellt und einer Strukturuntersuchung auf Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit unterzogen. Dabei wird zunächst ein lineares Modell für den Fall einer einseitig festen Einspannung (*clamped-free*) sowie einer einseitig gelenkigen Lagerung (*pinned-free*) und danach ein bilineares Modell untersucht.

4.1 Lineares Modell 1 (fest eingespannt)

Als einfaches Beispiel dient das lineare Modell eines einseitig fest eingespannten, ebenen elastischen Balkens der Länge L gemäß Bild 4.1.

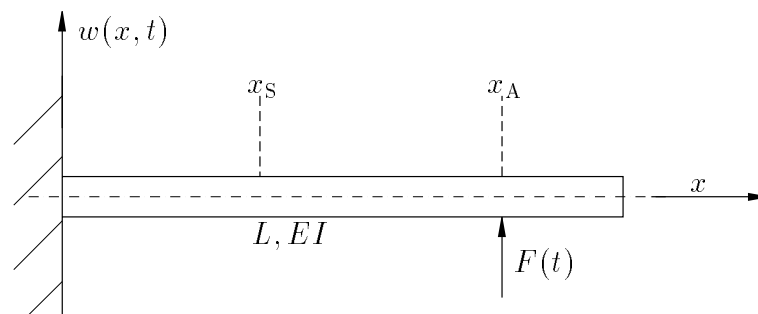


Bild 4.1: Einseitig eingespannter Balken mit der Sensorposition x_S und der Aktuatorposition x_A

An der Stelle $x = x_S$ ist ein Sensor zur Messung der Balkenauslenkung und an der Stelle $x = x_A$ ein Aktuator befestigt, der den Arm mit einer Kraft $F(t)$ beaufschlagt. Hierbei handelt es sich um ein lineares System mit unendlich vielen Eigenfrequenzen und daher unendlich vielen Freiheitsgraden. Die Auslenkung w eines Punktes auf dem Balken ist abhängig sowohl von der Position x dieses Punktes als auch von der Zeit t . Mit Hilfe des bekannten Verfahrens der Trennung der Variablen (siehe zum Beispiel (Fraser und Daniel 1991)) läßt sich $w(x, t)$ aufteilen in eine Funktion $\phi(x)$, die nur von der Position abhängt und eine Funktion $q(t)$, die nur von der Zeit abhängt:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t) \quad . \quad (4.1)$$

Dabei bezeichnet man die q_i als Modalkoordinaten und die ϕ_i als Eigenfunktionen. Aufgrund der Orthogonalitätseigenschaft der Eigenfunktionen lassen sich die Bewegungsgleichungen des Balkens modal entkoppeln. Das System läßt sich dann durch die Differentialgleichungen (Miu 1991)

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \int_0^L \phi_i(x) f(x, t) dx, \quad i = 1, \dots, \infty \quad , \quad (4.2)$$

beschreiben mit den Eigenfrequenzen ω_i , wobei $f(x, t)$ die durch eine Einzelkraft ausgeübte Kraftfunktion darstellt. Diese Funktion berechnet sich in Abhängigkeit von x und t zu

$$f(x, t) = \delta(x - x_A) F(t) \quad (4.3)$$

mit der Dirac'schen Deltafunktion δ , gegeben durch:

$$\begin{aligned} \delta(x - x_A) &= 0 \quad \text{für } x \neq x_A \quad , \\ \int_0^L \delta(x - x_A) dx &= 1 \quad . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Die Kraft $F(t)$ wird genau bei $x = x_A$ eingeleitet. Das gesamte Differentialgleichungssystem ergibt sich zu:

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = F(t) \phi_i(x_A), \quad i = 1, \dots, \infty \quad . \quad (4.5)$$

Im folgenden werden die Aktuatorkraft $F(t)$ als Eingang und die verallgemeinerten elastischen Koordinaten q_i als Zustände betrachtet. Wird die Auslenkung des Punktes x_S , an dem der Sensor befestigt ist, als Ausgangsgröße gewählt, so resultiert sie aus den Systemzuständen gemäß Gl. (4.1).

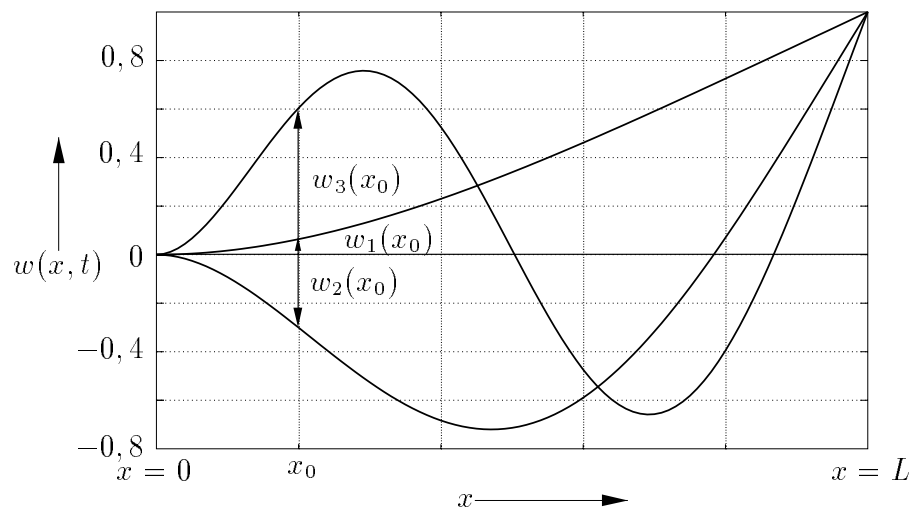


Bild 4.2: Verlauf der drei ersten normierten Eigenschwingformen

In Bild 4.2 ist am Beispiel der drei ersten Eigenschwingformen bei vorgegebener Endeffektorauslenkung des Balkens dargestellt, wie sich $w(x, t)$ an einer Stelle $x = x_0$ durch einfache Überlagerung als

$$w(x_0) = \sum_1^{\infty} w_i(x_0) \quad (4.6)$$

ergibt. Insgesamt erhält man folgendes lineares Zustandsmodell:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{b}F(t) \\ w(t) &= \mathbf{c}^T\mathbf{q}(t) \quad ,\end{aligned}\tag{4.7}$$

wobei die Dimension der Systemmatrizen und -vektoren bei exakter Modellierung unendlich groß ist. Werden nur die ersten n Freiheitsgrade berücksichtigt, lautet der Zustandsvektor:

$$\mathbf{q}(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t)]^T \quad .\tag{4.8}$$

Die Systemmatrizen und Vektoren $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{2n}$ und $\mathbf{c}^T \in \mathbb{R}^{2n}$ werden wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ -\omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\omega_2^2 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\omega_n^2 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_1(x_A) \\ \phi_2(x_A) \\ \vdots \\ \phi_n(x_A) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [\phi_1(x_S) : \phi_2(x_S) : \cdots : \phi_n(x_S) : 0 : 0 : \cdots : 0] \quad .\end{aligned}\tag{4.9}$$

Steuerbarkeit

Die $(2n \times 2n)$ -Steuerbarkeitsmatrix berechnet sich mit Hilfe des Kalman-Kriteriums 2.4, wenn wie oben die ersten n Freiheitsgrade des elastischen Systems betrachtet werden, zu:

$$\mathbf{Q}_S = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{2n-1}\mathbf{b}] = \tag{4.10}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \phi_1(x_A) & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n-1} \omega_1^{2n-2} \phi_1(x_A) \\ 0 & \phi_2(x_A) & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n-1} \omega_2^{2n-2} \phi_2(x_A) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \phi_n(x_A) & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n-1} \omega_n^{2n-2} \phi_n(x_A) \\ \phi_1(x_A) & 0 & -\omega_1^2 \phi_1(x_A) & \cdots & (-1)^{n-1} \omega_1^{2n-2} \phi_1(x_A) & 0 \\ \phi_2(x_A) & 0 & -\omega_2^2 \phi_2(x_A) & \cdots & (-1)^{n-1} \omega_2^{2n-2} \phi_2(x_A) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_n(x_A) & 0 & -\omega_n^2 \phi_n(x_A) & \cdots & (-1)^{n-1} \omega_n^{2n-2} \phi_n(x_A) & 0 \end{bmatrix}.$$

Ist für alle i der Wert von $\phi_i(x_A)$ ungleich Null, so ergibt sich bei Auswertung der Rangbedingung:

$$\text{rang } \mathbf{Q}_S = 2n \quad . \quad (4.11)$$

Dieser Wert $2n$ entspricht gerade der Ordnung des Systems, so daß das System vollständig steuerbar ist. Tritt aber für die k -te Eigenfunktion der Fall $\phi_k(x_A) = 0$ ein, so werden die k -te und die $(n+k)$ -te Zeile gerade zu Null. So reduziert sich der Rang der Steuerbarkeitsmatrix um 2, und genau die k -te Eigenfunktion ist dann nicht mehr steuerbar. Dargestellt ist dieser Fall in Bild 4.3. Es zeigt, daß der Aktuator genau in dem Schwingungsknoten der 3. Eigenschwingung angebracht ist. Daraus folgt $\phi_3(x_A) = 0$ und Zeile 3 und Zeile $n+3$ werden zu Null. Die dritte Eigenschwingform wird somit nicht steuerbar.

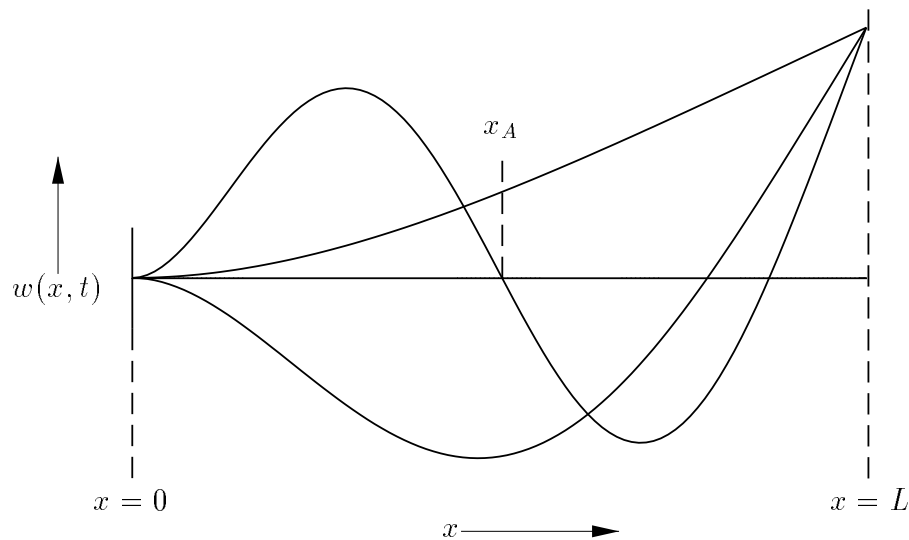


Bild 4.3: Aktuator im Schwingungsknoten der 3. Eigenschwingung

Beobachtbarkeit

Auch die Beobachtbarkeitsmatrix, die nach Gl. (3.12) berechnet wird, hat die Dimension

$(2n \times 2n)$. Sie berechnet sich zu

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{2n-1} \end{bmatrix} = \quad (4.12)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1(x_S) & 0 & -\omega_1^2 \phi_1(x_S) & 0 & \cdots & (-1)^{n-1} \omega_1^{2n-2} \phi_1(x_S) & 0 \\ \phi_2(x_S) & 0 & -\omega_2^2 \phi_2(x_S) & 0 & \cdots & (-1)^{n-1} \omega_2^{2n-2} \phi_2(x_S) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_n(x_S) & 0 & -\omega_n^2 \phi_n(x_S) & 0 & \cdots & (-1)^{n-1} \omega_n^{2n-2} \phi_n(x_S) & 0 \\ 0 & \phi_1(x_S) & 0 & -\omega_1^2 \phi_1(x_S) & \cdots & 0 & (-1)^{n-1} \omega_1^{2n-2} \phi_1(x_S) \\ 0 & \phi_2(x_S) & 0 & -\omega_2^2 \phi_2(x_S) & \cdots & 0 & (-1)^{n-1} \omega_2^{2n-2} \phi_2(x_S) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \phi_n(x_S) & 0 & -\omega_n^2 \phi_n(x_S) & \cdots & 0 & (-1)^{n-1} \omega_n^{2n-2} \phi_n(x_S) \end{bmatrix}^T$$

Die Rangbestimmung für die Beobachtbarkeitsmatrix ergibt

$$\text{rang } \mathbf{Q}_B = 2n \quad \text{für } \phi_i \neq 0 \quad \forall i \quad . \quad (4.13)$$

Hat die k -te Eigenfunktion an der Stelle x_S einen Nulldurchgang, liegt also der Sensor im Schwingungsknoten der k -ten Eigenschwingform, so werden die Spalten mit den Nummern k und $(n+k)$ zu Null, und es ergibt sich wieder ein Rangabfall von 2. Diese Eigenschwingung ist dann nicht mehr beobachtbar.

4.2 Lineares Modell 2 (gelenkig gelagert)

In diesem Abschnitt wird ein weiteres lineares Modell eines ebenen, elastischen Balkens vorgestellt. Im Unterschied zu Abschnitt 4.1 ist bei diesem Modell der Balken einseitig nicht fest, sondern gelenkig eingespannt (*pinned-free*). Die Prinzipskizze ist in Bild 4.4 dargestellt.

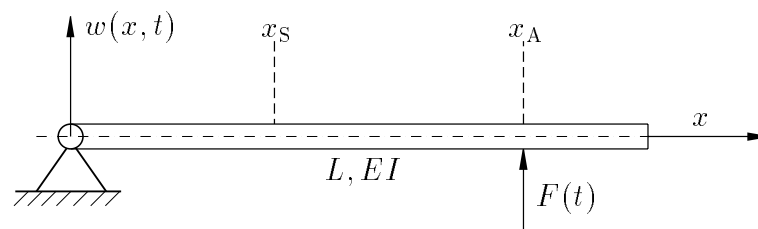


Bild 4.4: Einseitig gelenkig gelagerter Balken mit der Sensorposition x_S und der Aktuatorposition x_A

Dadurch ändern sich die physikalischen Randbedingungen bei der Modellbildung. Das Modell ist weiterhin linear und unterscheidet sich von dem *clamped-free*-Modell dadurch, daß zusätzlich die Starrkörperbewegung in den Differentialgleichungen berücksichtigt wird. Werden auch hier nur die ersten n Freiheitsgrade modelliert, ergibt sich der Zustandsvektor $\mathbf{q}(t)$ zu

$$\mathbf{q}(t) = [q_0(t), q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_0(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t)]^T \quad . \quad (4.14)$$

Die Modellordnung ist also bei der gleichen Anzahl berücksichtigter Freiheitsgrade durch die Starrkörperbewegung um 2 größer als bei der Annahme einseitig fester Einspannung. Die Systemmatrizen und Vektoren $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2(n+1) \times 2(n+1)}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{2(n+1)}$ und $\mathbf{c}^T \in \mathbb{R}^{2(n+1)}$ werden wie folgt berechnet:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} & & \mathbf{0} & & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & -\omega_1^2 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & -\omega_2^2 & & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & -\omega_n^2 & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \frac{1}{J_T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_0(x_A) \\ \phi_1(x_A) \\ \phi_2(x_A) \\ \vdots \\ \phi_n(x_A) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{c}^T = [\phi_0(x_S), \phi_1(x_S), \phi_2(x_S), \dots, \phi_n(x_S), 0, 0, \dots, 0] \quad .$$

Steuerbarkeit

Die Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_S ergibt sich nach Auswertung des Kalman-Kriteriums ähnlich wie in Abschnitt 4.1, bis auf die Tatsache, daß ihre Dimension durch die Starrkörperbewegung um 2 steigt. Im Falle der Berücksichtigung der ersten beiden Eigenschwingungen ergibt sich zum Beispiel die (6×6) -Steuerbarkeitsmatrix:

$$\mathbf{Q}_S = \begin{bmatrix} 0 & \phi_0(x_A) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1(x_A) & 0 & -\omega_1^2 \phi_1(x_A) & 0 & \omega_1^4 \phi_1(x_A) \\ 0 & \phi_2(x_A) & 0 & -\omega_2^2 \phi_2(x_A) & 0 & \omega_2^4 \phi_2(x_A) \\ \phi_0(x_A) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1(x_A) & 0 & -\omega_1^2 \phi_1(x_A) & 0 & \omega_1^4 \phi_1(x_A) & 0 \\ \phi_2(x_A) & 0 & -\omega_2^2 \phi_2(x_A) & 0 & \omega_2^4 \phi_2(x_A) & 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (4.16)$$

Bei der Rangbestimmung ergibt sich eine ähnliche Situation wie im vorherigen Abschnitt. Befindet sich der Aktuator im Schwingungsknoten der i -ten Eigenschwingung, gilt also $\phi_i(x_A) = 0$, so werden Spalte $i + 1$ und Spalte $i + n + 1$ zu Null, und es entsteht ein Rangabfall von 2. Dieser Rangabfall entsteht theoretisch auch, wenn $\phi_0(x_A) = 0$ auftritt. Da es sich aber um eine Starrkörperbewegung handelt, die keine Schwingungsknoten besitzt,

ist dieser Fall physikalisch nicht sinnvoll. Dies bedeutet jedoch nicht, daß die Starrkörperbewegung nicht auf Steuerbarkeit untersucht wird. Im Gegenteil stellt sie natürlich die Dynamik dar, die auf jeden Fall auf Beeinflussung durch eine Steuerung hin untersucht werden muß.

Beobachtbarkeit

Die (6×6) -Beobachtbarkeitsmatrix ergibt sich beispielsweise für den Fall $n = 2$ zu:

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \phi_0(x_S) & \phi_1(x_S) & \phi_2(x_S) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_0(x_S) & \phi_1(x_S) & \phi_2(x_S) \\ 0 & -\phi_1(x_S)\omega_1^2 & -\phi_2(x_S)\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\phi_1(x_S)\omega_1^2 & -\phi_2(x_S)\omega_1^2 \\ 0 & \phi_1(x_S)\omega_1^4 & \phi_2(x_S)\omega_2^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_1(x_S)\omega_1^4 & \phi_2(x_S)\omega_2^4 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Für den Rang folgt:

$$\text{rang } \mathbf{Q}_B = \begin{cases} 2(n+1) & , \text{ für alle } \phi_k(x_S) \neq 0 \\ 2n & , \text{ falls ein } \phi_k(x_S) = 0 \end{cases}, \quad (4.18)$$

wieder mit der Ausnahme der Starrkörperbewegung.

4.3 Bilineares Modell

In diesem Abschnitt wird die bilineare Realisierung eines einachsigen elastischen Roboterarms untersucht (Nicosia und Tornambè 1991). Dabei handelt es sich um ein bilineares Approximationsmodell eines ebenen, vertikalen, schwerkraftbehafteten Roboterarms, dessen nichtlineares Modell in (Tomei und Tornambè 1988) hergeleitet wird. Betrachtet wird ein starrer und ein elastischer Freiheitsgrad. Insgesamt handelt es sich um ein Modell 4. Ordnung, das die folgenden Systemgleichungen besitzt:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{N}_0 \mathbf{z} + \mathbf{d} + (\mathbf{b}_1 + \mathbf{N}_1 \mathbf{z}) u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{z} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Dies entspricht wegen des Vektors \mathbf{d} nicht der für die Analyse benötigten Standardform für BLS (vergleiche Gl. (2.11)). Die Standardform wird aber durch eine einfache Koordinatentransformation und Zustandserweiterung hergestellt. So ergibt sich der transformierte Zustandsvektor \mathbf{x} , der jetzt die Dimension 5 erhält, zu

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} + \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{d} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

so daß das BLS nun in Standardform vorliegt mit

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{N}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{d} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \right) u \quad (4.21)$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T; -\mathbf{c}^T \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{d} \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad .$$

Die Erweiterung des Zustandsvektors ist notwendig, um den ursprünglichen Ausgang beizubehalten. Die Vektoren und Matrizen des Systems nach der Transformation ergeben sich zu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{32} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_{42} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 - \frac{n_{32}(-a_{41}d_3 + a_{31}d_4)}{a_{31}a_{42} - a_{41}a_{32}} \\ b_4 - \frac{n_{42}(-a_{41}d_3 + a_{31}d_4)}{a_{31}a_{42} - a_{41}a_{32}} \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Die Parameter der einzelnen Matrizen und Vektoren sind in Anhang B.1 aufgeführt.

Steuerbarkeit

Der Eingang $u(t)$ des Systems ist in diesem Fall das durch den Motor an der Motorwelle aufgebrauchte Moment. Die Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_S wird entsprechend Kriterium 2.3 aufgestellt. Dabei ergibt sich bei vollständiger Auswertung des Kriteriums eine Matrix $\mathbf{Q}_{S,\text{voll}} \in \mathbb{R}^{5 \times 31}$. Die Rangbestimmung für diese Matrix ergibt

$$\text{rang } \mathbf{Q}_{S,\text{voll}} = 4 \quad . \quad (4.23)$$

Der Rang der Matrix beträgt nur 4, da als 5. Zustand bei der Modelltransformation eine Konstante hinzugefügt wurde, und daher nur 4 steuerbare Zustände existieren. Es zeigt sich, daß auch bereits die (5×8) -Matrix

$$\mathbf{Q}_{S,\text{red}} = \left[\mathbf{b} : \mathbf{A}\mathbf{b} : \mathbf{N}\mathbf{b} : \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \mathbf{N}\mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{N}\mathbf{b}, \mathbf{N}^2\mathbf{b} : \mathbf{A}^3\mathbf{b} \right] \quad (4.24)$$

den Rang 4 hat. Der Berechnungsalgorithmus kann dann schon abgebrochen werden. Das System ist also, genau wie das lineare, vollständig steuerbar.

Beobachtbarkeit

Die Beobachtbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_B wird entsprechend Kriterium 3.4 berechnet. Da das ursprüngliche Modell vor der Transformation die Ordnung 4 besitzt, sind vier mögliche Systemausgänge nach Gl. (4.21) denkbar. Davon werden die beiden Ausgänge z_1 und z_2 , also die starre Gelenkkoordinate (gekennzeichnet durch den Index st) und die elastische

Gelenkkoordinate (gekennzeichnet durch den Index el), betrachtet. Der Ausgangsvektor aus Gl. (4.21) ergibt sich zu

$$\mathbf{c}_{\text{st}}^T = \left[1, 0, 0, 0, \frac{-a_{42}d_3 + a_{32}d_4}{a_{31}a_{42} - a_{41}a_{32}} \right] \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{c}_{\text{el}}^T = \left[0, 1, 0, 0, \frac{a_{41}d_3 - a_{31}d_4}{a_{31}a_{42} - a_{41}a_{32}} \right] . \quad (4.25)$$

Das System ist für beide Ausgangsvektoren vollständig beobachtbar, d. h. die Beobachtbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_B hat in beiden Fällen den vollen Rang 5. Hier tritt der Effekt auf, daß die Beobachtbarkeitsmatrix den vollen Rang bei unterschiedlichen Dimensionen erreicht. Den vollen Rang besitzt die Beobachtbarkeitsmatrix für die starre Koordinate als Systemausgang ab der Dimension (13×5) und für die elastische Koordinate als Systemausgang ab der Dimension (5×5) .

Bei der Untersuchung stellt sich, wie zu erwarten, heraus, daß schon für das bilineare Modell, dessen Modellordnung mit 5 noch relativ klein ist, der zeitliche Berechnungsaufwand erheblich größer wird im Vergleich zu einem linearen Modell gleicher Ordnung.

5 Zweigliedriger elastischer Roboterarm

Von De Luca und Siciliano (1991) wird das Modell eines planaren elastischen Roboterarms, der aus zwei Gliedern besteht, vorgestellt. Dessen Modell soll in diesem Abschnitt genauer untersucht werden. Bild 5.1 zeigt den schematischen Aufbau des Roboters.

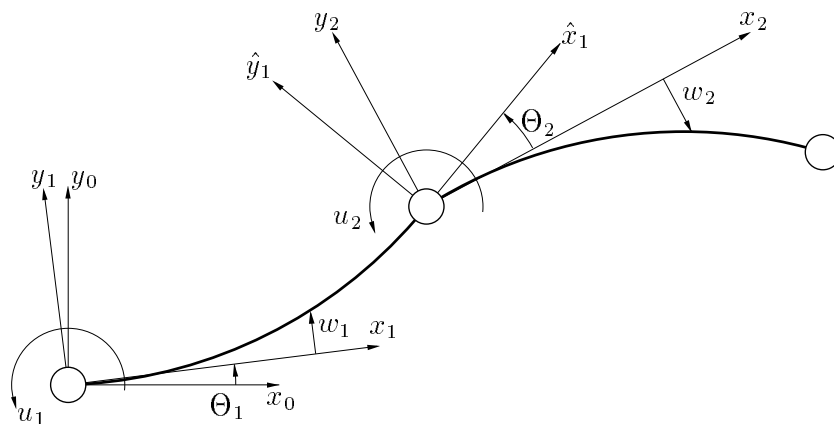


Bild 5.1: Zweigliedriger elastischer Roboterarm (De Luca und Siciliano 1991)

Er wird über zwei Motoren angetrieben, die jeweils in den Gelenken die Momente $u_1(t)$ und $u_2(t)$ als Eingänge des Systems aufbringen. Neben der Starrkörperbewegung, die durch die beiden Winkel Θ_1 und Θ_2 definiert ist, werden zwei elastische Freiheitsgrade pro elastischem Glied betrachtet, die durch die elastischen Koordinaten $\delta_{1,1}$ und $\delta_{1,2}$ (Arm 1) bzw. durch $\delta_{2,1}$ und $\delta_{2,2}$ (Arm 2) repräsentiert werden. Das Gesamtsystem ist also mit den zwei starren Freiheitsgraden ein System aus 6 Differentialgleichungen 2. Ordnung. De Luca und Siciliano (1991) leiten die Modellgleichungen mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen unter folgenden vereinfachenden Annahmen her:

- Es handelt sich bei den Gliedern um Euler–Bernoulli–Balken (Fraser und Daniel 1991),
- die beiden Balken werden wie einseitig fest eingespannt (*clamped–free*) modelliert,
- die Trägheitsmomente der beiden Glieder sind klein gegenüber denen des Motors und des Endeffektors und
- bei der Modellbildung wird die *assumed modes* –Technik (Fraser und Daniel 1991) verwendet.

Die Differentialgleichungen des zweiachsigen Roboters stellen sich wie folgt dar:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}_U \mathbf{u} \quad . \quad (5.1)$$

\mathbf{q} ist dabei der Vektor der verallgemeinerten starren und elastischen Koordinaten und ergibt sich zu

$$\mathbf{q} = \left[\Theta_1 : \Theta_2 : \delta_{1,1} : \delta_{1,2} : \delta_{2,1} : \delta_{2,2} \right]^T \quad . \quad (5.2)$$

Er hat die Dimension $N = n + \sum_{i=1}^n m_i = 2 + \sum_{i=1}^2 2 = 6$, wobei n die Anzahl der Glieder und m_i die Anzahl der betrachteten Freiheitsgrade des i -ten elastischen Gliedes bezeichnet. Die sonstigen Matrizen und Vektoren in Gl. (5.1) sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{q}) & : \text{ positiv definite, symmetrische Trägheitsmatrix} & (\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}) \\
\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & : \text{ Vektor der Coriolis- und Zentrifugalkräfte} & (\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N) \\
\mathbf{K} & : \text{ Steifigkeitsmatrix} & (\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}) \\
\mathbf{Q}_U & : \text{ Eingangsbelegungsmatrix} & (\mathbf{Q}_U \in \mathbb{R}^{N \times n}) \\
\mathbf{u} & : \text{ Eingangsvektor} & (\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

Die physikalischen Parameter des Modells sind in Anhang B.2 aufgeführt.

5.1 Linearisiertes Modell

Im ersten Schritt wird eine Linearisierung des oben vorgestellten Modells vorgenommen. Dies geschieht durch eine Taylorreihenentwicklung mit Abbruch nach dem ersten Glied des Systems (5.1), die folgendes Ergebnis liefert:

$$\mathbf{B}|_{\mathbf{q}_0} \ddot{\mathbf{z}} + \sum_{i=1}^N \left(\left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial q_i} \right|_{\mathbf{q}_0} \ddot{\mathbf{q}}_0 z_i + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial q_i} \right|_{\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0} z_i + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \dot{q}_i} \right|_{\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0} \dot{z}_i \right) + \mathbf{K} \mathbf{z} = \mathbf{Q}_U \mathbf{u} \quad . \quad (5.3)$$

Dabei bezeichnet die neue Variable \mathbf{z} die Abweichung des Vektors \mathbf{q} vom Arbeitspunkt:

$$\mathbf{z} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 \quad . \quad (5.4)$$

Die Linearisierung läßt sich übersichtlicher in Matrixform darstellen. Sie lautet dann:

$$\mathbf{B}_A \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}_h \dot{\mathbf{z}} + \underbrace{(\mathbf{K} + \mathbf{K}_B + \mathbf{K}_h)}_{\mathbf{K}_g} \mathbf{z} = \mathbf{Q}_U \mathbf{u} \quad , \quad (5.5)$$

mit den folgenden Abkürzungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_A & = \mathbf{B}|_{\mathbf{q}_0} \quad , \\
\mathbf{C}_h & = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \dot{q}_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \dot{q}_6} \end{bmatrix}_{\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0} \quad , \\
\mathbf{K}_B & = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial q_1} \ddot{\mathbf{q}}_0, \dots, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial q_6} \ddot{\mathbf{q}}_0 \end{bmatrix}_{\mathbf{q}_0} \quad \text{und} \\
\mathbf{K}_h & = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial q_6} \end{bmatrix}_{\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0} \quad .
\end{aligned} \quad (5.6)$$

Die Linearisierung findet um den Arbeitspunkt statt, an dem der Ellbogenwinkel des Roboters 90° beträgt. Alle anderen verallgemeinerten Koordinaten werden am Arbeitspunkt zu Null gesetzt:

$$\mathbf{q}_0 = \left[0, \frac{\pi}{2}, 0, 0, 0, 0 \right]^T \quad . \quad (5.7)$$

Daraus resultiert das folgende lineare Zustandsmodell:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{B}_A^{-1} \mathbf{K}_g & -\mathbf{B}_A^{-1} \mathbf{C}_h \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_A^{-1} \mathbf{Q}_U \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{u} \quad , \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{z} \quad . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ausgehend von diesem Modell 12. Ordnung wird nun die Steuerbarkeit und die Beobachtbarkeit des Systems geprüft.

Steuerbarkeit

Durch die Struktur des Modells ist bereits festgelegt, daß sich zwei Aktuatoren an den beiden Gelenken des Roboters befinden, durch die jeweils ein Moment aufgebracht werden kann. Die Matrix \mathbf{Q}_U sowie der Eingangsvektor \mathbf{u} aus Gl. (5.1) lauten dann:

$$\mathbf{Q}_U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad . \quad (5.9)$$

Die Auswertung des Kalman-Kriteriums 2.4 ergibt die (12×12) -Steuerbarkeitsmatrix:

$$\mathbf{Q}_S = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^5\mathbf{B}] \quad , \quad (5.10)$$

die bereits den vollen Rang 12 besitzt. Das linearisierte System ist also für die gewählten Momenten-Eingänge und den betrachteten Arbeitspunkt vollständig steuerbar.

Beobachtbarkeit

Zur Überprüfung der Beobachtbarkeit werden die Ausgänge des elastischen Roboters zunächst festgelegt. Allgemein gilt für den Systemausgang:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{C} \left[\Theta_1 : \Theta_2 : \delta_{1,1} : \dots : \delta_{2,2} : \dot{\Theta}_1 : \dot{\Theta}_2 : \dot{\delta}_{1,1} : \dots : \dot{\delta}_{2,2} \right]^T \quad . \quad (5.11)$$

Betrachtet werden im folgenden mehrere unterschiedliche Möglichkeiten zur Bestimmung der verallgemeinerten starren und elastischen Koordinaten. Es werden jeweils die Beobachtbarkeitsmatrizen nach dem Kalman-Kriterium (3.5) für die unterschiedlichen Konstellationen berechnet und dann eine Rangbestimmung

$$\text{rang } \mathbf{Q}_B = r \leq n = 12 \quad (5.12)$$

durchgeführt. Die Ergebnisse der Untersuchung sind in Tabelle 5.1 dargestellt. Wie der Tabelle entnommen werden kann, ist das System immer nur dann vollständig beobachtbar,

wenn die beiden starren Koordinaten auch Systemausgänge sind. Das System ist auch vollständig beobachtbar, wenn nur die Winkel Θ_1 und Θ_2 gemessen werden. Die beiden Winkel beinhalten in diesem Fall einer idealen Modellierung sämtliche Informationen über alle Koordinaten. Ferner ist zu beobachten, daß der Rangabfall der Beobachtbarkeitsmatrix höher ist, wenn nur eine elastische Koordinate als Ausgang gewählt wird, als für den Fall der Wahl einer starren Koordinate.

Tabelle 5.1: Ergebnisse der Rangbestimmung für unterschiedliche Sensorkonstellationen

Sensor für die Koordinate						rang Q_B	Bemerkung
Θ_1	Θ_2	δ_{11}	δ_{12}	δ_{21}	δ_{22}		
×	×					12	System vollständig beobachtbar
×						10	
	×					10	
		×				8	
			×			8	
				×		8	
					×	8	
×		×	×	×	×	10	
	×	×	×	×	×	10	
×	×	×	×	×	×	12	

5.2 Nichtlineares Modell (ALS)

Sollen die Strukturinvarianten des nichtlinearen Systems nach Gl. (5.1) untersucht werden, muß das System zunächst in die Normalform für ALS (Gl. 2.1) überführt werden. Das geschieht beispielsweise durch den Ansatz:

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ B^{-1}\mathbf{h} + B^{-1}K\mathbf{q} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ B^{-1}Q_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_1(\mathbf{x})} u_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ B^{-1}Q_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_2(\mathbf{x})} u_2 \quad . \quad (5.13)$$

Da als Eingänge die beiden Gelenkmomente u_1 und u_2 auftreten, werden diese aufgeteilt, damit das System nach Kriterium 2.1 bewertbar ist, mit

$$Q_U \mathbf{u} = Q_1 u_1 + Q_2 u_2 \quad \text{mit } Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{12} \quad . \quad (5.14)$$

Zur Untersuchung der Steuerbarkeit wird entsprechend Kriterium (2.1) die Steuerbarkeitsmatrix mit Hilfe der Lie-Klammern (s. Anhang A) bestimmt zu:

$$Q_S = \left[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \ ; \ [\mathbf{a}, \mathbf{b}_1], [\mathbf{a}, \mathbf{b}_2] \ ; \ [\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}_1]], [\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}_2]] \ ; \ \dots \right] \quad . \quad (5.15)$$

In diesem Anwendungsbeispiel entsteht eine Steuerbarkeitsmatrix der Dimension (12×12) . Die Berechnung erfolgt mit Hilfe des Programms MAPLE. Der rechnerische Aufwand dabei ist sehr hoch. Schon die Invertierung der Massenmatrix \mathbf{B} und die Bestimmung der Steuerbarkeitsmatrix dauert auf einem Pentium P90 mit einem Arbeitsspeicher von 32 MB mehrere Stunden. Die Bestimmung des Ranges der Steuerbarkeitsmatrix mußte erfolglos abgebrochen werden. Es wird daher für zukünftige Untersuchungen notwendig sein, die Berechnungen auf Rechnern mit größeren Rechenleistungen durchzuführen oder effizientere Berechnungsverfahren zu entwickeln.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dem vorliegenden Forschungsbericht wird die Strukturanalyse vereinfachter Modelle elastischer Roboter mit einem bzw. zwei Gliedern durchgeführt. Dazu werden zunächst verschiedene Kriterien zur Steuer- und Beobachtbarkeitsanalyse von nichtlinearen Systemen im Überblick vorgestellt. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der praktischen Handhabbarkeit. Im einzelnen werden die auszuwertenden Kriterien für einfachere Unterklassen der nichtlinearen Systeme, im besonderen ALS, QLS und BLS sowie linearer Systeme dargestellt.

Im Anschluß daran erfolgt die Anwendung der oben vorgestellten Kriterien auf zwei Beispielsysteme. Dabei handelt es sich einerseits um einen einachsigen elastischen Arm, von dem zwei lineare Modelle sowie ein bilineares Modell vorgestellt und untersucht werden. Andererseits wird ein aus der Literatur bekanntes Modell eines zweiachsigen elastischen Arms analysiert. Bei dem nichtlinearen Modell der Form ALS ergeben sich erhebliche Schwierigkeiten bei der Durchführung der Berechnungen auf einem Digitalrechner, da die Auswertung der Rangbedingungen sehr viel Rechenleistung beansprucht, so daß hier noch Forschungsbedarf besteht, die Algorithmen effizienter zu gestalten.

Ein weiterer Schwerpunkt künftiger Arbeiten wird die Bestimmung und Strukturuntersuchung von Approximationsmodellen höherer als erster Ordnung (QLS) sein. Diese Modelle sollen durch Parameteridentifikation auf der Basis von komplexen nichtlinearen Modellen, die mit dem Mehrkörpersimulationsprogramm M \square BILE (Kecskeméthy 1996) erstellt werden, oder aus an Versuchsträgern gemessenen Ein-/Ausgangsdaten gewonnen werden. Eine Alternative hierzu bietet die Modellvereinfachung, bei der eine Taylorreihenentwicklung mit Abbruch bei höheren Gliedern stattfindet. Auch diese Modelle sollen vergleichend auf Steuer- und Beobachtbarkeit hin untersucht werden.

Einen weiteren Schritt stellt der Übergang von baumstrukturartigen Robotern auf elastische Handhabungssysteme mit kinematischen Schleifen dar, auch vor dem Hintergrund des im Labor des Fachgebiets Meß-, Steuer- und Regelungstechnik vorhandenen dreiachsigen elastischen Roboters (Bernzen 1995). Ferner soll bei der Strukturuntersuchung berücksichtigt werden, inwieweit Parameterveränderungen der Systeme Einfluß auf die Strukturinvarianten haben können. Cho u. a. (1991) zum Beispiel zeigen, daß bei Vergrößerung der Endmasse eines elastischen Balkens die Eigenschaft Beobachtbarkeit des Systems praktisch verloren geht, obwohl das System rein rechnerisch noch beobachtbar ist. Hier ist man durch Rundungsfehler und die schlecht konditionierte Beobachtbarkeitsmatrix nicht mehr in der Lage, alle Systemzustände mit einem Beobachter zu rekonstruieren. Diese und ähnliche Effekte müssen noch genauer untersucht werden.

7 Literaturverzeichnis

- Arteaga Pérez, M. A.** 1996. *Nichtlineare Beobachter für elastische Roboter*. Forschungsbericht 4/96. MSRT. Universität Duisburg.
- Bernzen, W.** 1995. *Der Versuchsträger „hydraulisch angetriebener elastischer Roboter“*. Forschungsbericht 21/95. MSRT. Universität Duisburg.
- Birk, J.** 1992. *Rechnergestützte Analyse und Lösung nichtlinearer Beobachtungsaufgaben*. Dissertation. Universität Stuttgart. VDI Fortschritt-Berichte. Reihe 8. Nr. 294. Düsseldorf: VDI.
- Cho, K., N. Hori und J. Angeles.** 1991. On the controllability and observability of flexible beams under rigid-body motion. *IECON '91, Kobe, Japan*. 455–460.
- De Luca, A. und B. Siciliano.** 1991. Closed-form dynamic model of planar multilink lightweight robots. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 21(4). 826–839.
- Föllinger, O.** 1992. *Regelungstechnik*. Heidelberg: Hüthig.
- Fraser, A. R. und R. W. Daniel.** 1991. *Perturbation Techniques for flexible Manipulators*. Boston, London, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Ingenbleek, R.** 1996. *Zustandsbeobachter für zeitdiskrete nichtlineare Systeme – Geometrische Analyse und Synthese*. Dissertation. MSRT. Universität Duisburg. VDI Fortschritt-Berichte. Reihe 8. Nr. 527. Düsseldorf, VDI.
- Isidori, A.** 1995. *Nonlinear Control Systems*. Berlin: Springer.
- Jelali, M.** 1993. *Zur Beobachtbarkeits-Analyse zustandsquadratischer Systeme mit linearer Steuerung (QLS)*. Forschungsbericht 11/93. MSRT. Universität Duisburg.
- Jelali, M.** 1994. *Zur Steuer- und Beobachtbarkeits-Analyse der QLS*. Forschungsbericht 01/94. MSRT. Universität Duisburg.
- Kalman, R. E., P. L. Falb und M. A. Arbib.** 1969. *Topics in Mathematical System Theory*. New York: McGraw-Hill.
- Kecskeméthy, A.** 1996. *M²BILE-User's Guide and Reference Manual*. Fachgebiet Mechatronik. Universität Duisburg.
- Kobayashi, T.** 1992. Some remarks on controllability and observability of a flexible beam model. *Int. J. Systems Sciences* 23(12). 2349–2357.
- Lemmen, M. und M. Jelali.** 1996. *Differentialgeometrische Steuer- und Beobachtbarkeits-Analyse nichtlinearer Systeme*. Forschungsbericht 8/96. MSRT. Universität Duisburg.

- Lemmen, M.** 1995. *Steuerbarkeit – Erreichbarkeit – Zugänglichkeit (algebraische und differentialgeometrische Aspekte)*. Forschungsbericht 3/95. MSRT. Universität Duisburg.
- Miu, D. K.** 1991. Physical interpretation of transfer function zeros for simple control systems with mechanical flexibilities. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 113. 419–424.
- Nicosia, S.** und **A. Tornambè.** 1991. Bilinear models in parameter estimation and control of flexible robot arms. *New Trends in Systems Theory*, hg. von G. Conte, A. M. Perdon und B. Wyman. 546–553. Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser.
- Nijmeijer, H.** und **A. J. van der Schaft.** 1990. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. New York: Springer.
- Rugh, W. J.** 1981. *Nonlinear System Theory*. Baltimore: John Hopkins University Press.
- Schwarz, H.** 1969. *Einführung in die moderne Systemtheorie*. Braunschweig: Vieweg.
- Schwarz, H.** 1971. *Mehrfachregelungen II*. Berlin: Springer.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme – Systemtheoretische Grundlagen*. München: Oldenbourg.
- Spector, V. A.** 1988. *Modeling of Flexible Systems for Control System Design*. Dissertation. University of Southern Carolina, Department of Mechanical Engineering.
- Tomei, P.** und **A. Tornambè.** 1988. Approximate modelling of robots having elastic links. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 18(5). 831–839.

A Lie–Algebra

Lie–Ableitung

Eine Lie–Ableitung stellt die Ableitung einer skalaren Funktion entlang eines Vektorfeldes dar. Sei λ eine skalare Funktion und \mathbf{f} ein Vektorfeld der Dimension n . Dann ist die Lie–Ableitung von λ entlang \mathbf{f} definiert als:

$$L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\partial\lambda(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial\lambda(\mathbf{x})}{\partial x_1} \dots \frac{\partial\lambda(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Bei dem Ergebnis handelt es sich wieder um eine skalare Größe. Es kann also eine mehrfache Anwendung des Operators vorgenommen werden. Mit den beiden Vektorfeldern \mathbf{f} und \mathbf{g} , die die gleiche Dimension n besitzen, ergibt sich die Lie–Ableitung $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x})$ zu:

$$L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}))}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial(L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}))}{\partial x_1} \dots \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}))}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Analog wird die mehrfache Ableitung entlang \mathbf{f} , bezeichnet mit $L_{\mathbf{f}}^k\lambda(\mathbf{x})$, rekursiv berechnet entsprechend der Rechenvorschrift

$$L_{\mathbf{f}}^k\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}^{k-1}\lambda(\mathbf{x}))}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial(L_{\mathbf{f}}^{k-1}\lambda(\mathbf{x}))}{\partial x_1} \dots \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}^{k-1}\lambda(\mathbf{x}))}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Lie–Klammer

Die Lie–Klammer, die Ableitung eines Vektorfeldes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ entlang des Vektorfeldes $\mathbf{b}(\mathbf{x})$, mit $\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{b}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ berechnet sich zu

$$\text{ad}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}(\mathbf{x}) = [\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{b}(\mathbf{x})] = \mathbf{b}_x(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}_x(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.4})$$

mit

$$\mathbf{a}_x(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Das Ergebnis der Lie–Klammer ist dann wieder ein Vektorfeld der Dimension n .

Lie–Ableitung eines Kovektorfeldes entlang eines Vektorfeldes

Die Lie–Ableitung eines Kovektorfeldes $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})$ entlang eines Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}) = [\gamma_1(\mathbf{x}), \dots, \gamma_n(\mathbf{x})] \quad (\text{A.6})$$

ist definiert zu

$$L_{\mathbf{f}}^*\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}^T(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.7})$$

Das Ergebnis ist wieder ein Kovektorfeld.

B Parameter der Beispielsysteme

B.1 Einachsiger Roboterarm

Die physikalischen Parameter des bilinearen Modells des schwerkraftbehafteten einachsigen elastischen Roboterarms ergeben sich nach Nicosia und Tornambè (1991) zu:

$L = 1 \text{ m}$: Länge des Arms
$M = 1 \text{ kg}$: Masse
$EI = 100 \text{ N m}^2$: konstante Biegesteifigkeit

Die einzelnen Parameter der Matrizen und Vektoren \mathbf{N}_1 , \mathbf{d} , \mathbf{N}_0 und \mathbf{b} werden wie folgt festgelegt (vgl. Gl. 4.22):

$$\begin{aligned}
 d_3 &= 4g(\sin(x_{01}) - x_{01}\cos(x_{01}))/L + 16gx_{01}x_{02}\sin(x_{01}) \\
 d_4 &= -10g(\sin(x_{01}) - x_{01}\cos(x_{01}))/(3L^2) - 20gx_{01}x_{02}\sin(x_{01})/L \\
 a_{31} &= 4g\cos(x_{01})/L - 16gx_{02}\sin(x_{01}) \\
 a_{41} &= -10g\cos(x_{01})/(3L^2) + 20gx_{02}\sin(x_{01})/L \\
 a_{32} &= 16g\cos(x_{01}) + 240EI/(ML^2) \\
 a_{42} &= -20g\cos(x_{01})/L + 260EI/(ML^3) \\
 n_{32} &= -20,04x_{02}^2/(M(48L^2x_{02}^2 + 5)^2) \\
 n_{42} &= -28,80x_{02}^2/(ML(48L^2x_{02}^2 + 5)^2) \\
 b_3 &= -n_{32} \\
 b_4 &= -n_{42}
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen (x_{01}, x_{02}) die Werte von (x_1, x_2) am Arbeitspunkt.

B.2 Zweiachsiger Roboterarm

Dieses Beispielmodell wird in De Luca und Siciliano (1991) vorgestellt. Eine Implementierung in MATLAB im Rahmen eines Beobachterentwurfs erfolgte durch Arteaga Pérez (1996). In beiden Quellen sind sowohl die physikalischen Parameter wie auch im einzelnen die Belegung der Systemmatrizen angegeben. Aus Gründen der Vollständigkeit werden hier noch einmal die wichtigsten physikalischen Daten des zweiachsigen Roboters aufgeführt.

Arme 1 und 2	
$l_1 = 0,5 \text{ m}$: Länge des ersten Armes
$l_2 = 0,5 \text{ m}$: Länge des zweiten Armes
$d_2 = 0,25 \text{ m}$: Abstand des Schwerpunktes von Arm 2 zum zweiten Gelenk
$\mu_1 = 0,2 \text{ kg m}^{-1}$: konstante Massenbelegung Arm 1
$\mu_2 = 0,2 \text{ kg m}^{-1}$: konstante Massenbelegung Arm 2
$m_1 = 0,1 \text{ kg}$: Masse Arm 1
$m_2 = 0,1 \text{ kg}$: Masse Arm 2
$J_{01} = 0,0083 \text{ kg m}^2$: Trägheitsmoment des 1. Arms
$J_{02} = 0,0083 \text{ kg m}^2$: Trägheitsmoment des 2. Arms
$EI = 1 \text{ Nm}^2$: konstante Biegesteifigkeit der beiden Arme
Endmasse	
$m_P = 0,1 \text{ kg}$: Endmasse
$J_P = 0,0005 \text{ kg m}^2$: Endpunktträgheitsmoment
Antriebseinheiten	
$m_{h2} = 1 \text{ kg}$: Masse der Motorwelle 2
$J_{h1} = 0,1 \text{ kg m}^2$: Trägheitsmoment Motorwelle 1
$J_{h2} = 0,1 \text{ kg m}^2$: Trägheitsmoment Motorwelle 2