

# Zur Regelung elastischer Roboter

Marco Antonio Arteaga Pérez

Forschungsbericht Nr. 14/96

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

**Übersicht:** Die Regelung elastischer Roboter ist ein anspruchsvolles Problem, da solche Handhabungssysteme mehr Ausgänge als Eingänge besitzen. Aufgabe des Reglers ist, daß die Ist-Werte der starren Koordinaten (der Gelenkwinkel) einer vorgegeben Bahn so genau wie möglich folgen, während die elastischen Koordinaten beschränkt bleiben. Der vorliegende Bericht stellt einen Regler vor, der dieses Ziel für elastische Roboter mit rotatorisch arbeitenden Gelenken erreicht.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg  
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik  
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

# Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	II
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Mathematische Voraussetzungen</b>	<b>2</b>
2.1 Zur Stabilität eines Systems . . . . .	2
2.2 Modelleigenschaften . . . . .	4
<b>3 Regelung elastischer Roboter</b>	<b>7</b>
3.1 Der Regler nach Slotine und Li für elastische Roboter . . . . .	7
3.2 Das Dämpfungsproblem . . . . .	25
<b>4 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>40</b>
<b>5 Literaturverzeichnis</b>	<b>41</b>
Anhang	44
<b>6 Modell eines zweiachsigen elastischen Roboters</b>	<b>44</b>

# Nomenklatur

## Skalare Größen

$d_i$	:	Abstand vom Schwerpunkt des $i$ -ten Gliedes zur $i$ -ten Achse [m]
$\delta_{ij}$	:	Element des Vektors $\delta$
$EI_i$	:	Biegesteifigkeit des $i$ -ten elastischen Gliedes [Nm <sup>2</sup> ]
$E_G$	:	Gleitmodul [Nm <sup>2</sup> ]
$g$	:	Gravitationskonstante [m/s <sup>2</sup> ]
$J$	:	Polares Widerstandsmoment [m <sup>3</sup> ]
$J_{oi}$	:	Trägheitsmoment des $i$ -ten Gliedes um die $i$ -te Gelenkachse [kgm <sup>2</sup> ]
$J_p$	:	Trägheitsmoment der Last $M_p$ [kgm <sup>2</sup> ]
$l_i$	:	Länge des $i$ -ten elastischen Gliedes ohne Deformation
$m$	:	Anzahl verallgemeinerter elastischer Koordinaten
$M_{hi}$	:	Masse der Nabe des $i$ -ten Motors [kg]
$m_i$	:	Anzahl verallgemeinerter elastischer Koordinaten des $i$ -ten Gliedes
$M_i$	:	Masse des $i$ -ten elastischen Gliedes [kg]
$n$	:	Anzahl verallgemeinerter starrer Koordinaten
$\phi_{ir}$	:	$r$ -te Eigenfunktion des $i$ -ten elastischen Gliedes
$q_{ij}$	:	Element des Vektors $q$
$\rho_i$	:	Gleichmäßig verteilte Masse des $i$ -ten elastischen Gliedes [kg/m]
$\theta_i$	:	Element des Vektors $\theta$
$v_{ij}, w_{ij}$	:	Deformation der Ordnung Null des $j$ -ten Modus des $i$ -ten Gliedes
$v_m$	:	Maximaler Normwert der Geschwindigkeit der verallgemeinerten Koordinaten

## Operatoren

$\ \cdot\ $	:	Norm eines Vektors oder einer Matrix
$\lambda_{\min}(\cdot)$	:	Minimaler Eigenwert einer Matrix
$\lambda_{\max}(\cdot)$	:	Maximaler Eigenwert einer Matrix

## Abkürzungen

EIG	:	Eigenschaft
GB	:	Gleichmäßig beschränkt
GES	:	Global exponentiell stabil
GBG	:	Gleichmäßig beschränkt ab einer Grenzzeit
GGBG	:	Global gleichmäßig beschränkt ab einer Grenzzeit

## Vektoren und Matrizen

$D$	:	Matrix der viskosen Gelenkreibung und der Strukturdämpfung der Glieder
$\Delta^m$	:	Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ , zu der die verallgemeinerten elastischen Koordinaten gehören
$\delta(t)$	:	Vektor verallgemeinerter elastischer Koordinaten
$g(q)$	:	Gravitationsvektor
$h(q, \dot{q})$	:	Coriolis- und Zentrifugalkraftvektor
$H(q)$	:	Trägheitsmatrix
$K$	:	Steifigkeitsmatrix
$K_p, \Lambda$	:	Matrizen der Reglersverstärkungen
$q(t)$	:	Vektor verallgemeinerter elastischer und starrer Koordinaten
$q_d(t)$	:	Sollbahnvektor verallgemeinerter elastischer und starrer Koordinaten
$\mathbb{Q}^{n+m}$	:	Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+m}$ , zu der die verallgemeinerten Koordinaten gehören
$\tau(t)$	:	Vektor verallgemeinerter Kräfte für die starren Eingänge
$\theta(t)$	:	Vektor verallgemeinerter starrer Koordinaten
$u(t)$	:	Vektor verallgemeinerter Kräfte

# 1 Einleitung

Die Regelung von Robotern ist ein anspruchsvolles Problem. Eine der wichtigsten Teilaufgaben, die ein Roboter durchführen muß, ist, daß dessen Koordinaten einer vorgegebenen Bahn folgen. Das heißt, der Ist-Wert und der Soll-Wert der starren Koordinaten (der Gelenkwinkel in der Regel) sollen übereinstimmen. Da es für einen starren Roboter so viele Eingänge wie Freiheitsgrade gibt, läßt sich das Problem auf verschieden Arten lösen (Slotine und Li 1987, Slotine 1988, Fu u. a. 1989, Ortega und Spong 1989, Spong und Vidyasagar 1989, Canudas de Wit u. a. 1990, Nicosia und Tomei 1990, Canudas de Wit u. a. 1992, Spong 1992, Feng und Postlethwaite 1993, Tang und Arteaga Pérez 1994, Qu 1994).

Bei elastischen Robotern treten mehrere Schwierigkeiten auf. In diesem Fall gibt es weniger Eingänge als Ausgänge, was gleichzeitig bedeutet, daß man nicht in der Lage ist, sowohl für die starren als auch für die elastischen Koordinaten eine beliebige Bahn vorzugeben, die genau verfolgt werden kann. Eine Lösung für dieses Problem besteht darin, nur die Soll-Bahn für die starren Koordinaten vorzugeben, während die Bahn für die elastischen so berechnet wird, daß die Übereinstimmung der starren Koordinaten erreicht wird (De Luca und Siciliano 1993a, 1993b, De Luca und Panzieri 1994). In De Luca und Siciliano (1993a) und De Luca und Panzieri (1994) wird ein Algorithmus zur Kompensation des Gravitationsvektors vorgeschlagen. Es handelt sich nicht darum, einer Bahn zu folgen, sondern nur um eine Punkt-zu-Punkt Regelung. Falls das System eine Dämpfung von Null besitzt, sollen mehrere Annahmen über die Trägheitsmatrix vorausgesetzt werden. In De Luca und Siciliano (1993b) wird das Bahnverfolgungsproblem betrachtet, allerdings ohne Gravitationsterm. Die Autoren schlagen keine Lösung vor, wenn die Dämpfung der Glieder des Roboters gleich Null ist. Eine wichtige Voraussetzung ist, daß das Modell des elastischen Roboters bekannt ist.

Im vorliegenden Bericht wird ein Regler vorgestellt, der die Übereinstimmung des Soll- und Ist-Wertes der verallgemeinerten Koordinaten erzielt. Hierbei wird die Bahn für die starren Koordinaten beliebig gewählt, während die Soll-Bahn der elastischen Koordinaten so berechnet wird, daß sie immer beschränkt bleibt. Um die Stabilität des Reglerkreises zu analysieren, werden die mathematischen Voraussetzungen im Abschnitt 2 vorgestellt. Abschnitt 3.1 beschreibt den Regler für den Fall, daß die Dämpfung der Glieder des Roboters ungleich Null ist, während im Abschnitt 3.2 die Annahme gemacht wird, daß dies nicht der Fall ist, und ein neuer Regler wird ausgelegt. Eine Zusammenfassung und Ausblick schließen den Forschungsbericht ab.

## 2 Mathematische Voraussetzungen

Eine übliche Teilaufgabe eines Roboters besteht darin, einer Bahn zu folgen. Das heißt, mittels eines Reglers soll der Ist-Wert der verallgemeinerten Koordinaten des Roboters mit einem gewissen Soll-Wert übereinstimmen. Um die Stabilität des gesamten Systems (Regler und Roboter) zu beweisen, kann man z. B. die Ljapunov-Theorie (Hahn 1967, Vidyasagar 1978, Slotine und Li 1991) oder die Passivitäts-Theorie (Desoer und Vidyasagar 1975) anwenden. Wegen ihrer Flexibilität wird die Ljapunov-Theorie am häufigsten benutzt. Im vorliegenden Forschungsbericht wird angenommen, daß der Leser deren Grundlagen kennt (Schwarz 1991), so daß nur besondere Definitionen bzw. Sätze im Abschnitt 2.1 anzugeben sind. Abschnitt 2.2 stellt das Modell eines elastischen Roboters mit einigen seiner wichtigsten Eigenschaften vor.

### 2.1 Zur Stabilität eines Systems

Im vorliegenden Abschnitt werden einige Sätze über die Stabilität eines Systems vorgestellt, das durch die Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.1)$$

beschrieben werden kann, wobei  $\mathbf{f}(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  bekannt ist.

Zuerst werden die folgenden Definitionen eingeführt:

**Definition 2.1** (Leitmann 1981)

Es sei eine Lösung  $\mathbf{x}(\cdot) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  von Gl. (2.1). Dann heißt diese Lösung gleichmäßig beschränkt [GB] (*uniformly bounded*), wenn eine von  $t_0$  unabhängige positive Konstante  $d(\mathbf{x}_0) < \infty$  existiert, so daß gilt

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq d(\mathbf{x}_0) \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (2.2)$$

□

**Definition 2.2** (Leitmann 1981)

Es sei eine Lösung  $\mathbf{x}(\cdot) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  von Gl. (2.1). Dann heißt diese Lösung gleichmäßig beschränkt ab einer Grenzzeit  $t_0 + T(\mathbf{x}_0, S)$  [GBG] (*uniformly ultimately bounded*) bezüglich der Menge  $S$ , wenn eine von  $t_0$  unabhängige nicht negative Konstante  $T(\mathbf{x}_0, S) < \infty$  existiert, so daß gilt  $\mathbf{x}(t) \in S \quad \forall t \geq t_0 + T(\mathbf{x}_0, S)$ . □

Anzumerken bleibt, daß ein System als global gleichmäßig beschränkt ab einer Grenzzeit [GGBG] gilt, wenn die Definition 2.2 für jede mögliche Anfangsbedingung gültig ist, d. h. wenn  $T(\mathbf{x}_0, S) = T(S)$  ist.

Wenn man wie üblich über die Stabilität des Ursprungs  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  spricht, dann besagen die Definitionen 2.1 und 2.2, daß die Zustände des Systems nicht unbedingt gegen Null konvergieren, sondern daß sie beschränkt bleiben. Die Definition 2.2 geht weiter und besagt auch, daß die einzelnen Zustandsvariablen gegen eine Menge konvergieren und darin bleiben. Die folgenden Sätze erläutern die Stabilität eines Systems im Sinne der definition 2.2.

**Satz 2.1** (Dawson u. a. 1991)

Gegeben sei ein kontinuierliches System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.3)$$

wobei  $\mathbf{x}$  ein  $n \times 1$  Vektor ist. Es sei  $V(\mathbf{x}, t)$  eine assoziierte Ljapunov-Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

$$\lambda_1 \|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq V(\mathbf{x}, t) \leq \lambda_2 \|\mathbf{x}(t)\|^2, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq -\lambda_3 \|\mathbf{x}(t)\|^2 + \epsilon e^{-\beta t}, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

wobei  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  und  $\epsilon$  positive Konstanten sind und  $\beta \geq 0$  ist. Wenn in (2.5)  $\beta = 0$  ist, dann sind die Zustände  $\mathbf{x}$  GGBG in dem Sinne, daß

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \left[ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \|\mathbf{x}_0\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{\epsilon}{\lambda_1 \lambda} [1 - e^{-\lambda t}] \right]^{1/2}, \quad (2.6)$$

wobei  $\lambda = \lambda_3/\lambda_2$  ist. Wenn  $\beta > 0$  ist, dann sind die Zustände global exponentiell stabil (GES) in dem Sinne, daß

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \begin{cases} \left[ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \|\mathbf{x}_0\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{\epsilon}{\lambda_1} t e^{-\lambda t} \right]^{1/2} & \text{wenn } \beta = \lambda \\ \left[ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \|\mathbf{x}_0\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{\epsilon}{\lambda_1(\lambda - \beta)} [e^{-\beta t} - e^{-\lambda t}] \right]^{1/2} & \text{wenn } \beta \neq \lambda \end{cases}$$

wobei ebenfalls  $\lambda = \lambda_3/\lambda_2$  ist.

□

**Satz 2.2** (Dawson u. a. 1991)

Gegeben sei ein kontinuierliches System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.7)$$

wobei  $\mathbf{x}$  ein  $n \times 1$  Vektor ist. Es sei  $V(\mathbf{x}, t)$  eine assoziierte Ljapunov-Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

$$\lambda_1 \|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq V(\mathbf{x}, t) \leq \lambda_2 \|\mathbf{x}(t)\|^2, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (2.8)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq -\lambda_3 \|\mathbf{x}(t)\|^2 + \|\mathbf{x}(t)\| \sigma e^{-\gamma t}, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (2.9)$$

wobei  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  und  $\sigma$  positive Konstanten sind und  $\gamma \geq 0$  ist. Wenn in Gl. (2.9)  $\gamma = 0$  ist, dann sind die Zustände  $\mathbf{x}$  GGSB in dem Sinne, daß

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \left[ \sqrt{\lambda_2} \|\mathbf{x}_0\| e^{-\lambda t/2} + \frac{\zeta}{\lambda} [1 - e^{-\lambda t/2}] \right] , \quad (2.10)$$

wobei  $\zeta = \sigma/\sqrt{\lambda_1}$  und  $\lambda = \lambda_3/\lambda_2$  ist. Wenn  $\gamma > 0$  ist, dann sind die Zustände GES in dem Sinne, daß

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \left[ \sqrt{\lambda_2} \|\mathbf{x}_0\| e^{-\lambda t/2} + \frac{\zeta}{2} t e^{-\lambda t/2} \right] & \text{wenn } \lambda = 2\gamma \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \left[ \sqrt{\lambda_2} \|\mathbf{x}_0\| e^{-\lambda t/2} + \frac{\zeta}{\lambda - 2\gamma} [e^{-\gamma t} - e^{-\lambda t/2}] \right] & \text{wenn } \lambda \neq 2\gamma \end{cases}$$

wobei  $\zeta = \sigma/\sqrt{\lambda_1}$  und  $\lambda = \lambda_3/\lambda_2$  ist. □

Die Sätze 2.1 und 2.2 werden im Kapitel 3 benutzt, um die Stabilität eines Reglers für elastische Roboter zu beweisen. Hierbei sind die Eigenschaften des Roboters von großer Bedeutung. Der nächste Abschnitt stellt das Modell eines elastischen Roboters vor.

## 2.2 Modelleigenschaften

Das Modell eines elastischen Roboters mit rotatorischen Gelenken kann als

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_e \mathbf{q} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} , \quad (2.11)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \triangleq \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \quad (2.12)$$

formuliert werden (Arteaga Pérez 1995b), wobei

$$\mathbf{u} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} \end{bmatrix} , \quad m = m_1 + \dots + m_n , \quad (2.13)$$

$$\mathbf{q}(t) \triangleq [q_{10}(t) \dots q_{n0}(t) \quad q_{11}(t) \dots q_{1m_1}(t) \dots q_{n1}(t) \dots q_{nm_n}(t)]^T \quad (2.14)$$

$$\triangleq [\boldsymbol{\theta}_1(t) \dots \boldsymbol{\theta}_n(t) \quad \boldsymbol{\delta}_{11}(t) \dots \boldsymbol{\delta}_{1m_1}(t) \dots \boldsymbol{\delta}_{n1}(t) \dots \boldsymbol{\delta}_{nm_n}(t)]^T$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_{n \times 1} \\ \boldsymbol{\delta}_{m \times 1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_e \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

gilt.  $q_{10} \dots q_{n0}$  (bzw.  $\boldsymbol{\theta}_1 \dots \boldsymbol{\theta}_n$ ) bezeichnen die verallgemeinerten starren Koordinaten und  $q_{11} \dots q_{nm_n}$  (bzw.  $\boldsymbol{\delta}_{11} \dots \boldsymbol{\delta}_{nm_n}$ ) die elastischen. Dabei entspricht jeweils der erste Index der Nummer des elastischen Gliedes und der zweite der Eigenschwingform. Weitere Erklärungen sind in Arteaga Pérez (1995b) nachzulesen.



Dieses Modell besitzt eine Vielzahl nützlicher Eigenschaften (Arteaga Pérez 1995b). Einige entstehen aus physikalischen Gründen und andere aus dem Modellbildungsverfahren. In diesem Abschnitt werden diejenigen vorgestellt, die für den Entwurf und den Stabilitätsbeweis des im Abschnitt 3 beschriebenen Reglers hilfreich sind. Die übrigen Eigenschaften, sowie der Beweis der in diesem Abschnitt vorgestellten, sind in Arteaga Pérez (1995b) zu finden. Zuerst werden die Normen definiert, die im vorliegenden Bericht genutzt werden.

### Definition 2.3

Die Norm eines Vektor  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n+m}$  ist durch

$$\|\mathbf{q}\| \triangleq \sqrt{\sum_{i=1}^{n+m} q_i^2} \quad (2.16)$$

gegeben. □

### Definition 2.4

Die Norm einer Matrix ist durch

$$\|\mathbf{A}\| \triangleq \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})} \quad (2.17)$$

gegeben. □

Die Definitionen 2.3 und 2.4 sind diejenigen der euklidischen und der daraus resultierenden Normen. Es gibt keinen Verlust der Allgemeingültigkeit, da alle Normen im  $\mathbb{R}^{n+m}$  äquivalent sind (Desoer und Vidyasagar 1975); d. h., die in diesem Forschungsbericht vorgestellten Ergebnisse sind für jede Norm im  $\mathbb{R}^{n+m}$  gültig. In diesem Rahmen gelten die folgenden Eigenschaften des Modells (2.11):

### Eigenschaft 2.1

Die Norm des Vektors  $\boldsymbol{\delta}$  ist durch

$$\|\boldsymbol{\delta}\| \leq \sqrt{\frac{2U_{e,max}}{\lambda_{\min}(\mathbf{K})}} \triangleq \bar{\delta}$$

begrenzt, wobei  $U_{e,max}$  die maximale potentielle Energie bezeichnet. Anders ausgedrückt sagt EIG 2.1, daß  $\delta_{ij} \in \Delta \subset \mathbb{R}^m$  gilt, wobei die Elemente von  $\Delta$  begrenzt sind. □

Zur Vereinfachung der weiteren Vorgehensweise wird

$$\mathbb{Q} \triangleq \mathbb{R}^n \times \Delta \subset \mathbb{R}^{n+m} \quad (2.18)$$

definiert.

### Eigenschaft 2.2

Die Trägheitsmatrix  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  ist symmetrisch und positiv definit. □

**Eigenschaft 2.3**

Die Matrix  $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \triangleq \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  ist schief-symmetrisch. □

**Eigenschaft 2.4**

Es gilt

$$\lambda_{\min}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{x} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))\|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^{n+m}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

□

**Eigenschaft 2.5**

Die Matrix  $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})$  existiert, und es gilt

$$\lambda_{\max}^{-1}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{x} \leq \lambda_{\min}^{-1}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))\|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^{n+m}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

□

**Eigenschaft 2.6**

Es gilt

$$0 < \sigma_{m1} \leq \|\mathbf{H}(\mathbf{q})\| \leq \sigma_{m2} < \infty \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^{n+m}.$$

□

**Eigenschaft 2.7**

Es gilt

$$0 < \sigma_{m3} \leq \|\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\| \leq \sigma_{m4} < \infty \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^{n+m}.$$

□

**Eigenschaft 2.8**

Es gilt

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq k_c \|\dot{\mathbf{q}}\| \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^{n+m}.$$

□

**Eigenschaft 2.9**

Es gibt eine Begrenzung für den Vektor  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ , d. h.

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| \leq \sigma_g, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^{n+m}.$$

□

### 3 Regelung elastischer Roboter

Im Gegensatz zur Regelung starrer Roboter entsteht bei der Regelung von elastischen Robotern die Schwierigkeit, daß diese Handhabungssysteme weniger Eingänge als Freiheitsgrade besitzen. Dies bedeutet, daß man bei elastischen Robotern nicht mehr eine beliebige Bahn für jede verallgemeinerte Koordinate angeben kann. Deshalb ist es wünschenswert, daß die starren Koordinaten immer noch einer beliebigen Bahn folgen, während die elastischen beschränkt bleiben. Es sollte auch Aufgabe des Reglers sein, die Dämpfung des Systems zu erhöhen. Im vorliegenden Abschnitt wird der Regler nach Slotine und Li (1987) zur Regelung elastischer Roboter benutzt. Es wird gezeigt, daß die oben beschriebene Aufgabe mit diesem Regler auszuführen ist. Außerdem wird die Soll-Bahn-Berechnung der elastischen Koordinaten so modifiziert, daß die Dämpfung des Systems erhöht wird.

#### 3.1 Der Regler nach Slotine und Li für elastische Roboter

Der Regler für starre Roboter nach Slotine und Li (1987) garantiert die Fehlerkonvergenz gegen Null zwischen der Soll- und Ist-Bahn der Koordinaten. Er ist die Basis für mehrere adaptive Regler (Slotine und Li 1988, Spong u. a. 1990, Tang und Arteaga Pérez 1994, Lammerts u. a. 1995). Obwohl dieser Regler prinzipiell als adaptiv gedacht worden ist, hat Spong (1992) einen robusten Regler nach ihm ausgelegt. Im Gegensatz zur Regelung mit inverser Dynamik (Spong und Vidyasagar 1989), die eine lineare Fehlergleichung liefert, nutzt das Regelungskonzept nach Slotine und Li die physikalischen Charakteristika des Systems aus (Slotine 1988). Genauso wie bei der Regelung mit inverser Dynamik wird vorausgesetzt, daß sowohl die Modellparameter als auch die Zustände des Roboters gut bekannt sind. Anzumerken bleibt, daß die letzte Annahme für elastische Roboter nicht leicht zu erfüllen ist, da nur die elastischen Koordinaten und nicht deren Geschwindigkeiten direkt meßbar sind (Arteaga Pérez 1995a). In diesem Fall ist ein Beobachter zu benutzen (Arteaga Pérez 1996a, 1996b). Da die Stabilität eines nichtlinearen Systems ohne Anwendung eines Beobachters fast garantiert bedeutet, daß dieses nicht stabil wird, wenn ein Beobachter verwendet wird, unabhängig davon, ob der Beobachter an sich stabil ist, wird ein Stabilitätsbeweis für das Gesamtsystem in zukünftigen Arbeiten durchgeführt werden.

Wie im Abschnitt 2 vorgestellt, lauten die Bewegungsgleichungen eines elastischen Roboters wie folgt

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_e\mathbf{q} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \quad . \quad (3.1)$$

Gegeben sei eine beschränkte Soll-Bahn  $\mathbf{q}_d$ , deren Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{q}}_d$  und Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{q}}_d$  bekannt und beschränkt sind. So ist der Fehler zwischen Ist- und Soll-Bahn als

$$\tilde{\mathbf{q}} \triangleq \mathbf{q} - \mathbf{q}_d \quad , \quad (3.2)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \triangleq \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d \quad (3.3)$$

zu definieren. In diesem Rahmen kann die Regelungsaufgabe üblicherweise als

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (3.4)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

formuliert werden. Bevor der Regler vorgestellt werden kann, sind die folgenden Variablen zu definieren:

$$\dot{\mathbf{q}}_r \triangleq \dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{q}}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{s} \triangleq \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{q}} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{q}}, \quad (3.7)$$

wobei  $\mathbf{\Lambda}$  eine positiv definite diagonale Matrix ist. Mit den vorherigen Definitionen ergibt sich der Regler für den elastischen Roboter zu:

$$\mathbf{u} \triangleq \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_d + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_p \mathbf{s}, \quad (3.8)$$

wobei  $\mathbf{K}_p > \mathbf{0}$  diagonal ist. Anzumerken bleibt, daß dieser Regler grundsätzlich der gleiche wie der in Lammerts u. a. (1995) vorgestellte ist, obgleich dort die Matrix  $\mathbf{K}_e$  mit  $\mathbf{q}_r$  und nicht mit  $\mathbf{q}_d$  multipliziert wird. Dieser kleine Unterschied ist von großer Bedeutung, da der Regler (3.8) bei der Berechnung der Soll-Bahn für die elastischen Koordinaten sich als stabil erweist, während Lammerts u. a. ihren Regler in diesem Sinne als instabil bezeichnen.

Wenn Gl. (3.8) in Gl. (3.1) eingesetzt wird, läßt sich die Fehlerdynamik als

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} = -[\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} + \mathbf{K}_e \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_{pD} \mathbf{s}], \quad (3.9)$$

$$\mathbf{K}_{pD} \triangleq \mathbf{K}_p + \mathbf{D} > 0 \quad (3.10)$$

schreiben. Diese Gleichung ist eher eine Funktion von  $\mathbf{s}$  als von  $\tilde{\mathbf{q}}$  und  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ . Im Grunde genommen ist Gleichung (3.9) bei starren Robotern nur eine Funktion von  $\mathbf{s}$ , weil  $\mathbf{s}$  als ein stabiler Filter erster Ordnung für  $\tilde{\mathbf{q}}$  betrachtet werden kann. Die Hauptidee von Slotine und Li ist die Benutzung des *Sliding Mode* Verfahrens, da die Fehlerkonvergenz gegen Null garantiert ist, wenn  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{s} = \mathbf{0}$  ist. Da die Stabilität von  $\tilde{\mathbf{q}}$  und  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$  in vorliegendem Forschungsbericht zu analysieren ist, wird die folgende Definition eingesetzt:

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Wenn der elastische Roboter so viele Eingänge wie Freiheitsgrade, wie im starren Fall, hätte, dann könnte man einen beliebigen Vektor  $\mathbf{q}_d$  wählen. Da dieses nicht der Fall ist, muß auch die Gleichung

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_d + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_p \mathbf{s} \quad (3.12)$$

erfüllt werden. Aus Gl. (3.12) ist die Soll-Bahn für die elastischen Koordinaten zu bestimmen. Dafür werden die folgenden Definitionen eingeführt:

$$\mathbf{s} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}_\theta \\ \mathbf{s}_\delta \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{K}_p \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{p\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{p\delta} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{D} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{D}_\theta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_\delta \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{K}_{pD} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pD\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{pD\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{p\theta} + \mathbf{D}_\theta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{p\delta} + \mathbf{D}_\delta \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{\Lambda} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_\theta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_\delta \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_r \triangleq \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_r \\ \dot{\boldsymbol{\delta}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_d - \mathbf{\Lambda}_\theta \tilde{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\boldsymbol{\delta}}_d - \mathbf{\Lambda}_\delta \tilde{\boldsymbol{\delta}} \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\theta\theta} & \mathbf{H}_{\theta\delta} \\ \mathbf{H}_{\theta\delta}^T & \mathbf{H}_{\delta\delta} \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\theta\theta} & \mathbf{C}_{\theta\delta} \\ \mathbf{C}_{\delta\theta} & \mathbf{C}_{\delta\delta} \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{g}_\theta \\ \mathbf{g}_\delta \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Mit Hilfe der Gln. (3.13) bis (3.21) kann Gl. (3.12) als

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\theta\theta} & \mathbf{H}_{\theta\delta} \\ \mathbf{H}_{\theta\delta}^T & \mathbf{H}_{\delta\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r \\ \ddot{\boldsymbol{\delta}}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\theta\theta} & \mathbf{C}_{\theta\delta} \\ \mathbf{C}_{\delta\theta} & \mathbf{C}_{\delta\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_r \\ \dot{\boldsymbol{\delta}}_r \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_d \\ \boldsymbol{\delta}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_\theta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_r \\ \dot{\boldsymbol{\delta}}_r \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{g}_\theta \\ \mathbf{g}_\delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{p\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{p\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_\theta \\ \mathbf{s}_\delta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

geschrieben werden. Aus Gl. (3.22) berechnet man sowohl den Eingangsvektor  $\boldsymbol{\tau}$  als auch die Soll-Bahn für die elastischen Koordinaten  $\boldsymbol{\delta}_d$ :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}_{\theta\theta} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r + \mathbf{H}_{\theta\delta} \ddot{\boldsymbol{\delta}}_r + \mathbf{C}_{\theta\theta} \dot{\boldsymbol{\theta}}_r + \mathbf{C}_{\theta\delta} \dot{\boldsymbol{\delta}}_r + \mathbf{D}_\theta \dot{\boldsymbol{\theta}}_r + \mathbf{g}_\theta - \mathbf{K}_{p\theta} \mathbf{s}_\theta, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\delta}}_d &= \mathbf{\Lambda}_\delta \dot{\boldsymbol{\delta}}_d - \mathbf{H}_{\delta\delta}^{-1} [\mathbf{C}_{\delta\delta} \dot{\boldsymbol{\delta}}_r + \mathbf{D}_\delta \dot{\boldsymbol{\delta}}_r - \mathbf{K}_{p\delta} \mathbf{s}_\delta + \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}_d \\ &\quad + \mathbf{H}_{\theta\delta}^T \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r + \mathbf{C}_{\delta\theta} \dot{\boldsymbol{\theta}}_r + \mathbf{g}_\delta], \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\boldsymbol{\delta}_d(0) = \dot{\boldsymbol{\delta}}_d(0) = \mathbf{0}. \quad (3.25)$$

Der folgende Satz garantiert, daß der Regler (3.23) zusammen mit der Soll-Bahn (3.24) asymptotisch stabil ist.

**Satz 3.1**

Gegeben sei eine beliebige Soll-Bahn  $\boldsymbol{\theta}_d$  mit beschränkter Geschwindigkeit und Beschleunigung. Wenn  $\|\dot{\boldsymbol{q}}\| \leq v_m$  ist, wobei  $v_m$  eine positive Konstante ist, dann bleiben die in den Gln. (3.24)–(3.25) angegebenen Soll-Bahnen  $\boldsymbol{\delta}_d$  und  $\dot{\boldsymbol{\delta}}_d$  beschränkt. Bei Anwendung des Reglers (3.23) ist die Gleichgewichtslage  $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$  von Gl. (3.9) asymptotisch stabil.

**Beweis**

Zuerst wird bewiesen, daß Gln. (3.24)–(3.25) eine beschränkte Soll-Bahn liefern, unabhängig davon, ob die Verfolgungsfehler Null sind oder nicht. Dafür werden die Variablen

$$\boldsymbol{s}_0 \triangleq \dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \boldsymbol{\Lambda}_\delta \boldsymbol{\delta}_d \quad , \quad (3.26)$$

$$\boldsymbol{x}_\delta \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_d \\ \dot{\boldsymbol{\delta}}_d \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

eingesetzt, so daß Gl. (3.24) sich zu

$$\boldsymbol{H} \dot{\boldsymbol{s}}_0 = -[\boldsymbol{C}_{\delta\delta} \boldsymbol{s}_0 + \boldsymbol{K}_{pD\delta} \boldsymbol{s}_0 + \boldsymbol{K} \boldsymbol{\delta}_d + \boldsymbol{f}_r] \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_r &\triangleq \boldsymbol{H}_{\theta\delta}^T \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r + \boldsymbol{C}_{\delta\theta} \dot{\boldsymbol{\theta}}_r + \boldsymbol{g}_\delta - \boldsymbol{H}_{\delta\delta} \boldsymbol{\Lambda}_\delta \dot{\boldsymbol{\delta}} \\ &\quad - \boldsymbol{C}_{\delta\delta} \boldsymbol{\Lambda}_\delta \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{D}_\delta \boldsymbol{\Lambda}_\delta \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{K}_{p\delta} [\dot{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{\Lambda}_\delta \boldsymbol{\delta}] \end{aligned} \quad (3.29)$$

umschreiben läßt. Da  $\|\boldsymbol{q}\| < \infty$  für elastische Roboter mit rotatorischen Gelenken gilt und  $\|\dot{\boldsymbol{q}}\| \leq v_m$  ist, ist  $\boldsymbol{f}_r$  nur eine Funktion von beschränkten Variablen, was bedeutet, daß eine positive Konstante  $f_{r \max}$  existiert, so daß

$$\|\boldsymbol{f}_r\| \leq f_{r \max} \quad (3.30)$$

gilt (siehe EIG 2.6 bis 2.9). Eine Ljapunov-Funktion für das System (3.28) ist

$$\begin{aligned} V_\delta(\boldsymbol{x}_\delta, t) &\triangleq V_\delta(\boldsymbol{x}_\delta) = \frac{1}{2} \boldsymbol{s}_0^T \boldsymbol{H}_{\delta\delta} \boldsymbol{s}_0 + \boldsymbol{\delta}_d^T \left[ \boldsymbol{\Lambda}_\delta \boldsymbol{K}_{pD\delta} + \frac{1}{2} \boldsymbol{K} \right] \boldsymbol{\delta}_d \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{x}_\delta^T \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{\Lambda}_\delta \boldsymbol{K}_{pD\delta} + \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Lambda}_\delta \boldsymbol{H}_{\delta\delta} \boldsymbol{\Lambda}_\delta & \boldsymbol{\Lambda}_\delta \boldsymbol{H}_{\delta\delta} \\ \boldsymbol{H}_{\delta\delta} \boldsymbol{\Lambda}_\delta & \boldsymbol{H}_{\delta\delta} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_\delta \\ &\triangleq \frac{1}{2} \boldsymbol{x}_\delta^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{x}_\delta \quad . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Wegen EIG 2.4 ergibt sich

$$\lambda_1 \|\boldsymbol{x}_\delta\|^2 \leq V_\delta(\boldsymbol{x}_\delta) \leq \lambda_2 \|\boldsymbol{x}_\delta\|^2 \quad , \quad (3.32)$$

$$\lambda_1 \triangleq \frac{1}{2} \min_{\boldsymbol{q} \in \mathbb{Q}^{n+m}} (\lambda_{\min}(\boldsymbol{M})) \quad , \quad (3.33)$$

$$\lambda_2 \triangleq \frac{1}{2} \max_{\boldsymbol{q} \in \mathbb{Q}^{n+m}} (\lambda_{\max}(\boldsymbol{M})) \quad . \quad (3.34)$$

Die Ableitung nach der Zeit von (3.31) lautet:

$$\dot{V}_\delta(\boldsymbol{x}_\delta) = \frac{1}{2} \boldsymbol{s}_0^T \dot{\boldsymbol{H}}_{\delta\delta} \boldsymbol{s}_0 + \dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta \boldsymbol{K}_{pD\delta} \boldsymbol{\delta}_d + \boldsymbol{\delta}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta \boldsymbol{K}_{pD\delta} \dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\delta}_d + \boldsymbol{s}_0^T \boldsymbol{H}_{\delta\delta} \dot{\boldsymbol{s}}_0 \quad . \quad (3.35)$$

Setzt man Gl. (3.28) in Gl. (3.35) ein und betrachtet EIG 2.3, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\dot{V}_\delta(\mathbf{x}_\delta) &= \frac{1}{2} \mathbf{s}_0^T \dot{\mathbf{H}}_{\delta\delta} \mathbf{s}_0 + \dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} \boldsymbol{\delta}_d + \boldsymbol{\delta}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} \dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}_d \\
&\quad - \mathbf{s}_0^T [\mathbf{C}_{\delta\delta} \mathbf{s}_0 + \mathbf{K}_{pD\delta} \mathbf{s}_0 + \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}_d + \mathbf{f}_r] \\
&= -\mathbf{s}_0^T \mathbf{K}_{pD\delta} \mathbf{s}_0 + \dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} \boldsymbol{\delta}_d + \boldsymbol{\delta}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} \dot{\boldsymbol{\delta}}_d - \mathbf{s}_0^T \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}_d + \dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}_d - \mathbf{s}_0^T \mathbf{f}_r \\
&= -[\dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T + \boldsymbol{\delta}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta] \mathbf{K}_{pD\delta} [\dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \boldsymbol{\Lambda}_\delta \boldsymbol{\delta}_d] + \dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} \boldsymbol{\delta}_d + \boldsymbol{\delta}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} \dot{\boldsymbol{\delta}}_d \\
&\quad - [\dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T + \boldsymbol{\delta}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta] \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}_d + \dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}_d - \mathbf{s}_0^T \mathbf{f}_r \\
&= -\dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T \mathbf{K}_{pD\delta} \dot{\boldsymbol{\delta}}_d - \dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T \mathbf{K}_{pD\delta} \boldsymbol{\Lambda}_\delta \boldsymbol{\delta}_d - \boldsymbol{\delta}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} \dot{\boldsymbol{\delta}}_d - \boldsymbol{\delta}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} \boldsymbol{\Lambda}_\delta \boldsymbol{\delta}_d \\
&\quad + \dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} \boldsymbol{\delta}_d + \boldsymbol{\delta}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} \dot{\boldsymbol{\delta}}_d - \boldsymbol{\delta}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}_d - \mathbf{s}_0^T \mathbf{f}_r \\
&= -\dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T \mathbf{K}_{pD\delta} \dot{\boldsymbol{\delta}}_d - \boldsymbol{\delta}_d^T [\boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} \boldsymbol{\Lambda}_\delta + \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}] \boldsymbol{\delta}_d - \mathbf{s}_0^T \mathbf{f}_r \\
&= -\mathbf{x}_\delta^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} \boldsymbol{\Lambda}_\delta + \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{pD\delta} \end{bmatrix} \mathbf{x}_\delta - \mathbf{s}_0^T \mathbf{f}_r \\
&\triangleq -\mathbf{x}_\delta^T \mathbf{P} \mathbf{x}_\delta - \mathbf{s}_0^T \mathbf{f}_r \\
&\leq -\lambda_3 \|\mathbf{x}_\delta\|^2 - \mathbf{s}_0^T \mathbf{f}_r \quad ,
\end{aligned} \tag{3.36}$$

wobei

$$\lambda_3 \triangleq \lambda_{\min}(\mathbf{P}) = \min(\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{pD\delta}), \lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda}_\delta)^2 \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{pD\delta}) + \lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda}_\delta) \lambda_{\min}(\mathbf{K})) \tag{3.37}$$

ist. Da

$$\|\mathbf{s}_0\| = \|\dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \boldsymbol{\Lambda}_\delta \boldsymbol{\delta}_d\| \leq \|\dot{\boldsymbol{\delta}}_d\| + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda}_\delta) \|\boldsymbol{\delta}_d\| \leq (1 + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda}_\delta)) \|\mathbf{x}_\delta\| \tag{3.38}$$

gilt, läßt sich Gl. (3.36) als

$$\begin{aligned}
\dot{V}_\delta(\mathbf{x}_\delta) &\leq -\lambda_3 \|\mathbf{x}_\delta\|^2 + (1 + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda}_\delta)) f_{r \max} \|\mathbf{x}_\delta\| \\
&\triangleq -\lambda_3 \|\mathbf{x}_\delta\|^2 + \sigma \|\mathbf{x}_\delta\|
\end{aligned} \tag{3.39}$$

schreiben. Durch Anwenden des Satzes 2.2 mit  $\gamma = 0$  wird bewiesen, daß  $\|\mathbf{x}_\delta\|$  beschränkt ist. Es bleibt zu beweisen, daß  $\mathbf{x}$  gegen Null konvergiert. Dafür wird die folgende Ljapunov-Funktion definiert:

$$V(\mathbf{x}, t) \triangleq V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \tilde{\mathbf{q}}^T \left[ \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K}_{pD} + \frac{1}{2} \mathbf{K}_e \right] \tilde{\mathbf{q}} \quad , \tag{3.40}$$

deren Ableitung lautet:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K}_{pD} \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K}_{pD} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{K}_e \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}} \quad . \tag{3.41}$$

Setzt man Gl. (3.9) in Gl. (3.41) ein und betrachtet EIG 2.3, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K}_{pD} \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K}_{pD} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{K}_e \tilde{\mathbf{q}} \\
&\quad - \mathbf{s}^T [\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s} + \mathbf{K}_e \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_{pD} \mathbf{s}] \\
&= -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_{pD} \mathbf{s} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K}_{pD} \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K}_{pD} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_e \tilde{\mathbf{q}} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{K}_e \tilde{\mathbf{q}} \\
&= -[\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T + \tilde{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\Lambda}] \mathbf{K}_{pD} [\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \boldsymbol{\Lambda} \tilde{\mathbf{q}}] + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K}_{pD} \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{K}_{pD} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
& -[\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T + \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda] \mathbf{K}_e \tilde{\mathbf{q}} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{K}_e \tilde{\mathbf{q}} \\
= & -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{K}_{pD} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{K}_{pD} \Lambda \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{K}_{pD} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{K}_{pD} \Lambda \tilde{\mathbf{q}} \\
& + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \Lambda \mathbf{K}_{pD} \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{K}_{pD} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{K}_e \tilde{\mathbf{q}} \\
= & -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{K}_{pD} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \tilde{\mathbf{q}}^T [\Lambda \mathbf{K}_{pD} \Lambda + \Lambda \mathbf{K}_e] \tilde{\mathbf{q}} \\
= & -\mathbf{x}^T \begin{bmatrix} \Lambda \mathbf{K}_{pD} \Lambda + \Lambda \mathbf{K}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{pD} \end{bmatrix} \mathbf{x} \\
\leq & 0 .
\end{aligned}$$

Da  $V(\mathbf{x}) = 0$  gilt, nur wenn  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  ist, ist die asymptotische Stabilität von  $\mathbf{x}$  bewiesen.  $\square$

Es ist interessant, das Verhalten der durch Gl. (3.24) gegebenen Bahn zu untersuchen. Dazu wird angenommen, daß die starren Koordinaten einen konstanten Wert erreichen sollen und daß  $\mathbf{x}$  Null ist. In diesem Fall vereinfacht sich Gl. (3.24) zu

$$\mathbf{H}_{\delta\delta} \ddot{\boldsymbol{\delta}}_d + \mathbf{C}_{\delta\delta} \dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \mathbf{D}_\delta \dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}_d + \mathbf{g}_\delta = \mathbf{0} . \quad (3.43)$$

Wenn man davon ausgeht, daß der Gravitationsterm  $\mathbf{g}_\delta(\mathbf{q})$  nur eine Funktion von  $\boldsymbol{\theta}$  ist (De Luca und Siciliano 1993b, De Luca und Panzieri 1994), d. h.  $\mathbf{g}_\delta(\mathbf{q}) = \mathbf{g}_\delta(\boldsymbol{\theta})$  gilt, dann wird  $\mathbf{g}_\delta$  ein konstanter Vektor, so daß sich eine neue Variable  $\mathbf{y}$  definieren läßt:

$$\mathbf{y} \triangleq \boldsymbol{\delta}_d + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}_\delta , \quad (3.44)$$

wobei Gl. (3.43) zu

$$\mathbf{H}_{\delta\delta} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}_{\delta\delta} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}_\delta \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K} \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (3.45)$$

umzuschreiben ist. Benutzt man die Ljapunov-Funktion

$$V_y(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{H}_{\delta\delta} \dot{\mathbf{y}} , \quad (3.46)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
\dot{V}_y &= \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{K} \mathbf{y} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}^T \dot{\mathbf{H}}_{\delta\delta} \dot{\mathbf{y}} + \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{H}_{\delta\delta} \ddot{\mathbf{y}} \\
&= \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{K} \mathbf{y} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}} \dot{\mathbf{H}}_{\delta\delta} \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}^T [\mathbf{C}_{\delta\delta} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}_\delta \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K} \mathbf{y}] \\
&= -\dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{D}_\delta \dot{\mathbf{y}} \leq 0 .
\end{aligned} \quad (3.47)$$

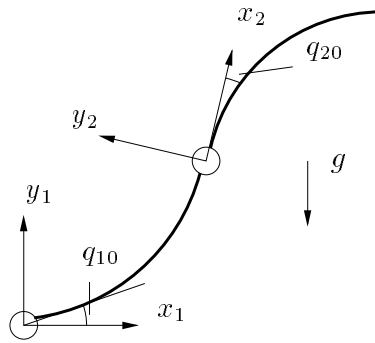
Bei der Berechnung von Gl. (3.47) wurden Gl. (3.45) und EIG 2.3 verwendet. Da  $\dot{V}_y$  Null nur für  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$  ist, kann man den Satz der invarianten Mengen (*invariant set theorem*) anwenden (Hahn 1967, Slotine und Li 1991, De Luca und Siciliano 1993a), um die asymptotische Stabilität der Gleichgewichtslage von Gl. (3.45) zu beweisen. Da Gl. (3.45) zu

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{H}_{\delta\delta}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{y} \quad (3.48)$$



wird, wenn  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$  gilt, bedeutet dies, daß die größte invariante Menge in  $\dot{V}_y = 0$   $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$  ist, und gleichzeitig, daß die Gleichgewichtslage asymptotisch stabil ist. Wenn  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  wird, erreicht  $\delta_d$  den Wert  $-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{g}_\delta$ . Dies ist das gleiche Ergebnis wie in De Luca und Siciliano (1993b) und De Luca und Panzieri (1994).

Um den Regler (3.23) zu testen, wird ein zweiachsiger Roboter simuliert (Bild 3.1). Dieser Roboter wurde von De Luca und Siciliano (1991) als ein ebener Roboter modelliert und in De Luca und Siciliano (1993b) um einen Gravitationsvektor erweitert. In der Simulation wird angenommen, daß die Anfangsbedingungen gleich Null für alle außer der ersten starren Koordinate ( $\theta_1$ ) sind. Es gilt  $\theta_1(0) = -90^\circ$ , d. h. der Roboter ist am Anfang in seiner Ruhelage.



**Bild 3.1:** Elastischer Roboter mit zwei Gliedern

Die Parameter des Reglers (die auch für den nächsten Abschnitt gültig sind) lauten:

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

In der ersten Simulation wird

$$\boldsymbol{\theta}_d = \begin{bmatrix} -45^\circ \\ 0^\circ \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

als Soll-Bahn für die starren Koordinaten vorgegeben. Die Ergebnisse sind in den Bildern 3.2 bis 3.5 dargestellt. Die Momente an den Gelenken, also die Ausgänge des Reglers, sind in Bild 3.6 zu sehen. Wie vorausgesetzt, konvergieren die Fehler gegen Null, sowohl für die starren als auch für die elastischen Koordinaten. Die Soll-Bahnen der elastischen Koordinaten ergeben sich als beschränkt und deren End-Werte lauten:

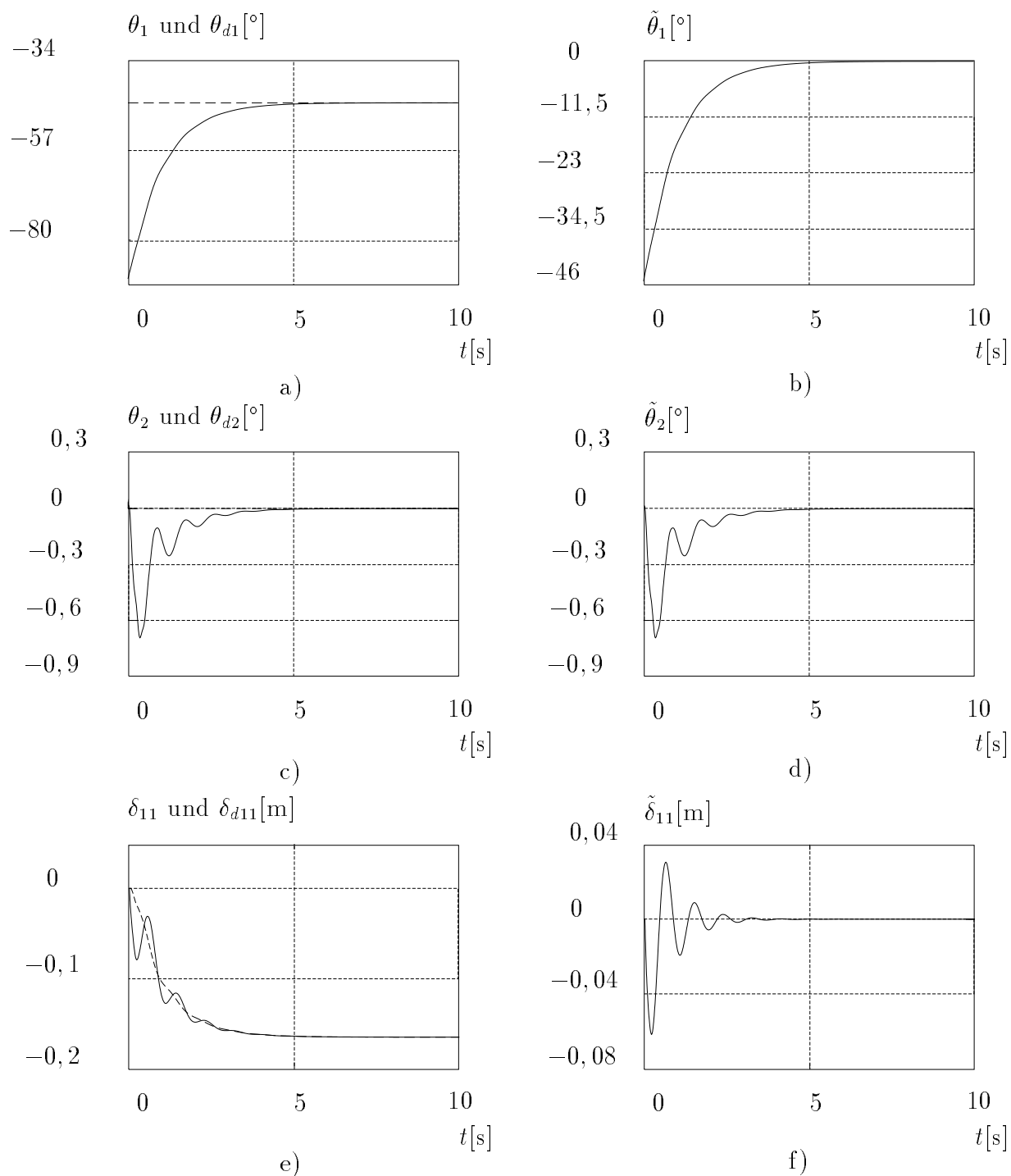
$$\boldsymbol{\delta}_d = \begin{bmatrix} -0,166[\text{m}] \\ -0,00615[\text{m}] \\ -0,00555[\text{m}] \\ -0,000075[\text{m}] \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

was grundsätzlich das gleiche Ergebnis wie in De Luca und Siciliano (1993b) ist.

Da der Regler (3.23) nicht nur für konstante Soll-Bahnen, sondern auch für zeitvariante Soll-Bahnen ausgelegt worden ist, wird er mit zwei Sinus-Funktionen für die starren Koordinaten getestet:

$$\boldsymbol{\theta}_d = \begin{bmatrix} -90^\circ + 10^\circ \sin(t) \\ 10^\circ \sin(t) \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

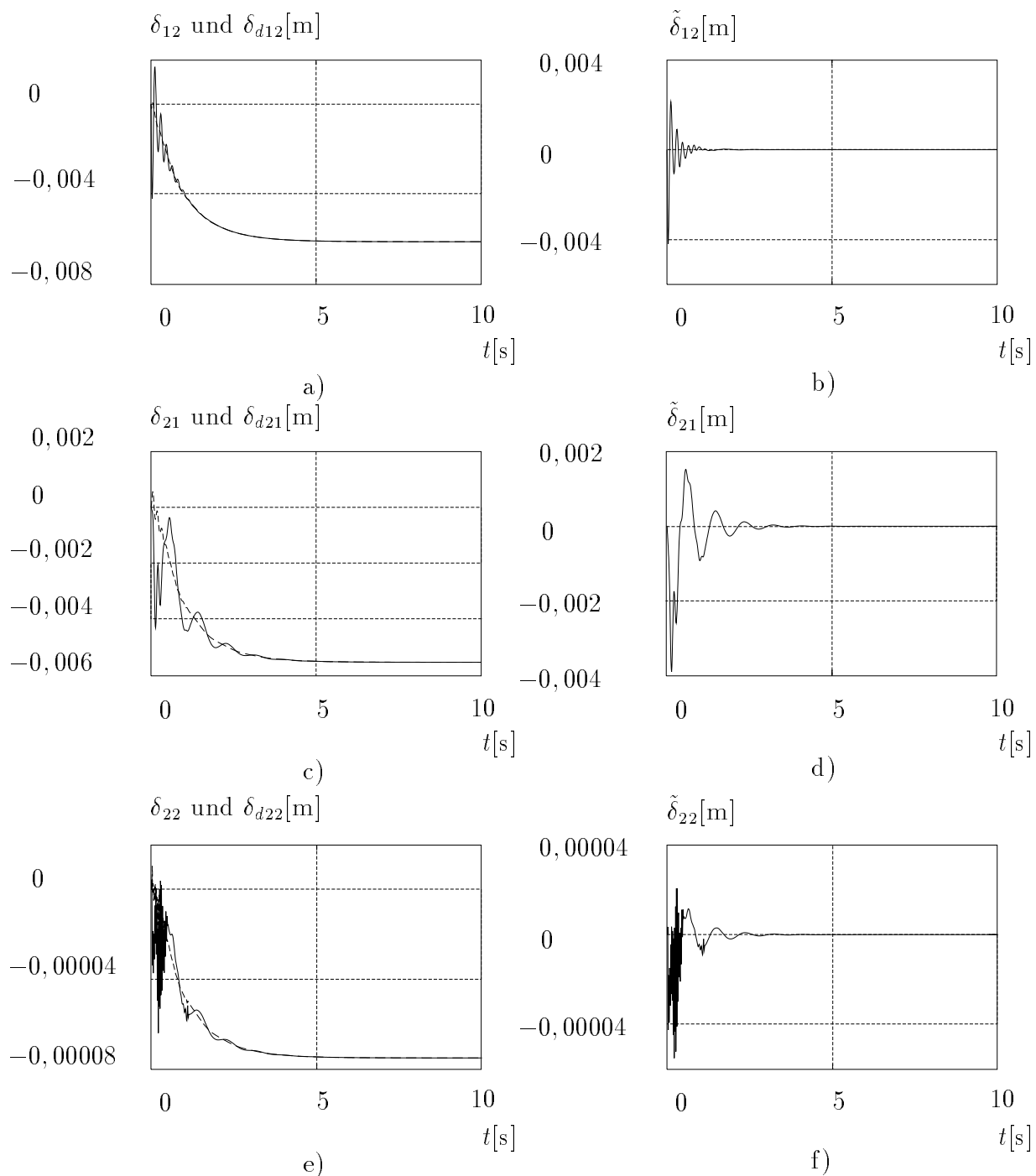
Die Ergebnisse sind in den Bildern 3.7 bis 3.10 zu sehen. Genauso wie vorher konvergieren die Fehler gegen Null und die elastischen Koordinaten bleiben beschränkt. Die Momente an den Gelenken sind in Bild 3.11 zu betrachten.



**Bild 3.2:** Simulationsergebnisse eines elastischen Roboters.

Konstante Soll-Bahn für die starren Koordinaten. Regler (3.23).

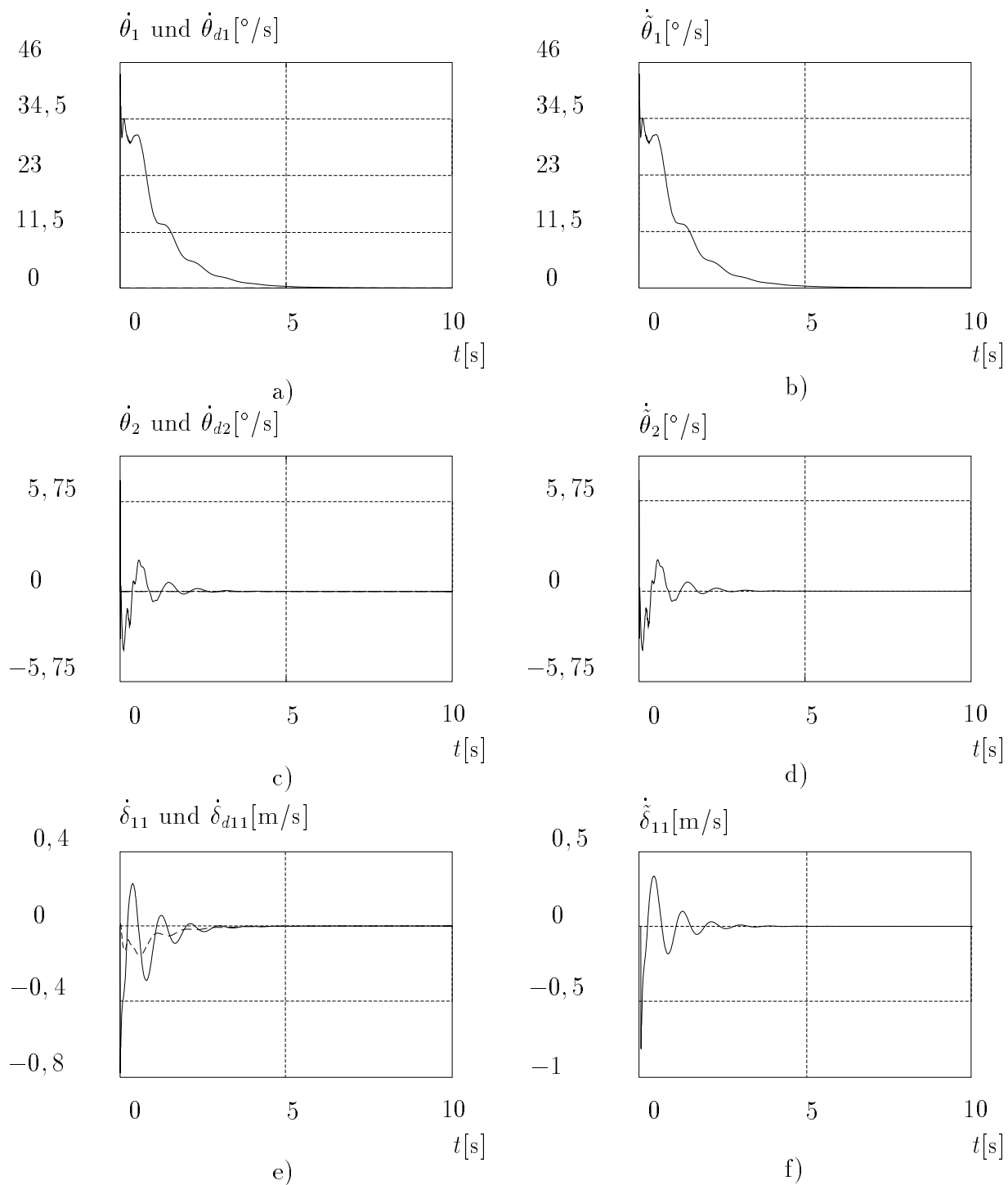
- a) Koordinate  $\theta_1$  (—) und deren Soll-Bahn  $\theta_{d1}$  (- - -);
- b) Fehlerverlauf  $\tilde{\theta}_1$ ;
- c) Koordinate  $\theta_2$  (—) und deren Soll-Bahn  $\theta_{d2}$  (- - -);
- d) Fehlerverlauf  $\tilde{\theta}_2$ ;
- e) Koordinate  $\delta_{11}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d11}$  (- - -);
- f) Fehlerverlauf  $\tilde{\delta}_{11}$ .



**Bild 3.3:** Simulationsergebnisse eines elastischen Roboters.

Konstante Soll-Bahn für die starren Koordinaten. Regler (3.23).

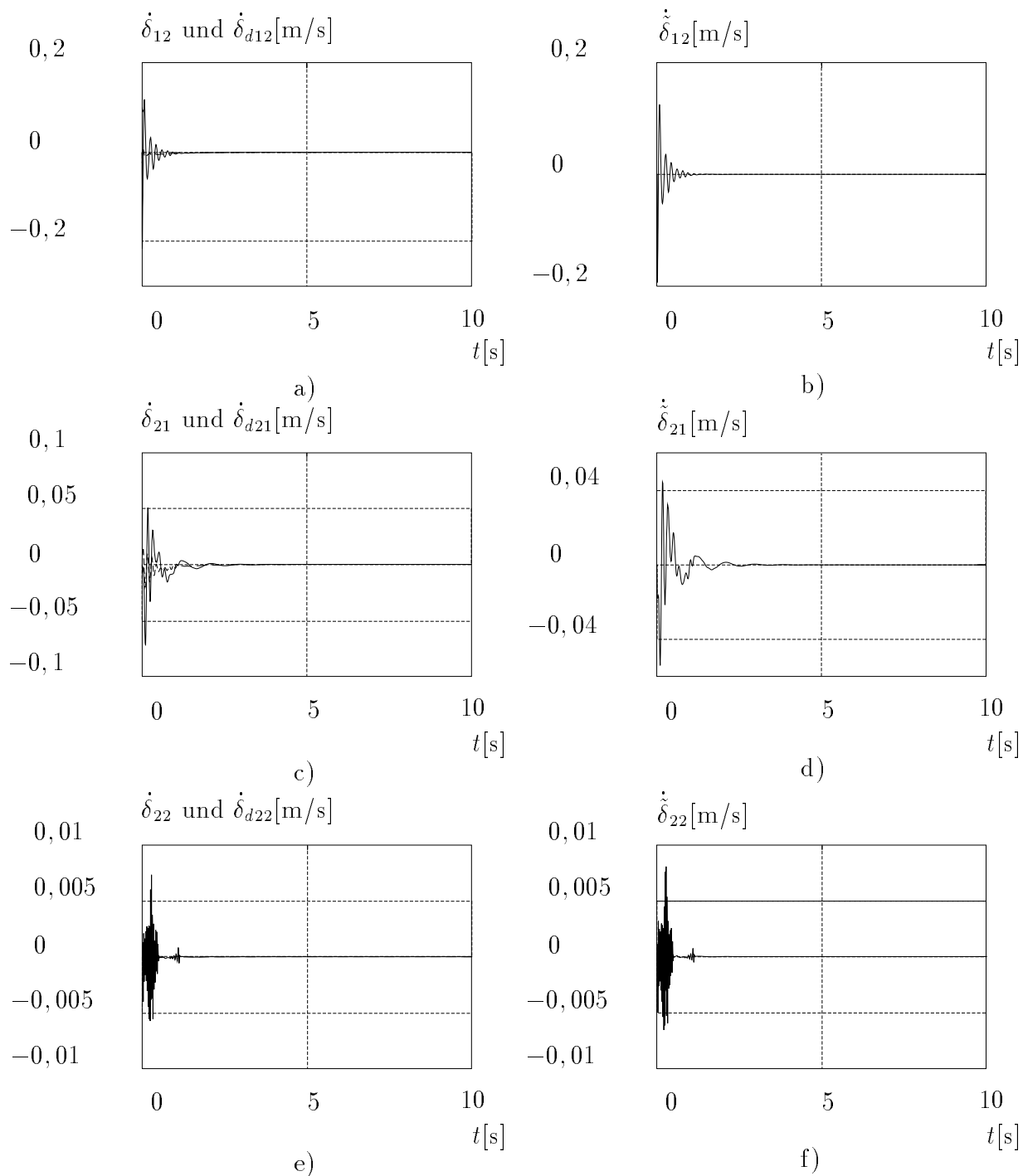
- a) Koordinate  $\delta_{12}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d12}$  (- - -);
- b) Fehlerverlauf  $\tilde{\delta}_{12}$ ;
- c) Koordinate  $\delta_{21}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d21}$  (- - -);
- d) Fehlerverlauf  $\tilde{\delta}_{21}$ ;
- e) Koordinate  $\delta_{22}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d22}$  (- - -);
- f) Fehlerverlauf  $\tilde{\delta}_{22}$ .



**Bild 3.4:** Simulationsergebnisse eines elastischen Roboters.

Konstante Soll-Bahn für die starren Koordinaten. Regler (3.23).

- a) Koordinate  $\dot{\theta}_1$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\theta}_{d1}$  (- - -);
- b) Fehlerverlauf  $\dot{\theta}_1$ ;
- c) Koordinate  $\dot{\theta}_2$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\theta}_{d2}$  (- - -);
- d) Fehlerverlauf  $\dot{\theta}_2$ ;
- e) Koordinate  $\dot{\delta}_{11}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d11}$  (- - -);
- f) Fehlerverlauf  $\dot{\delta}_{11}$ .



**Bild 3.5:** Simulationsergebnisse eines elastischen Roboters.

Konstante Soll-Bahn für die starren Koordinaten. Regler (3.23).

a) Koordinate  $\dot{\delta}_{12}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d12}$  (- - -);

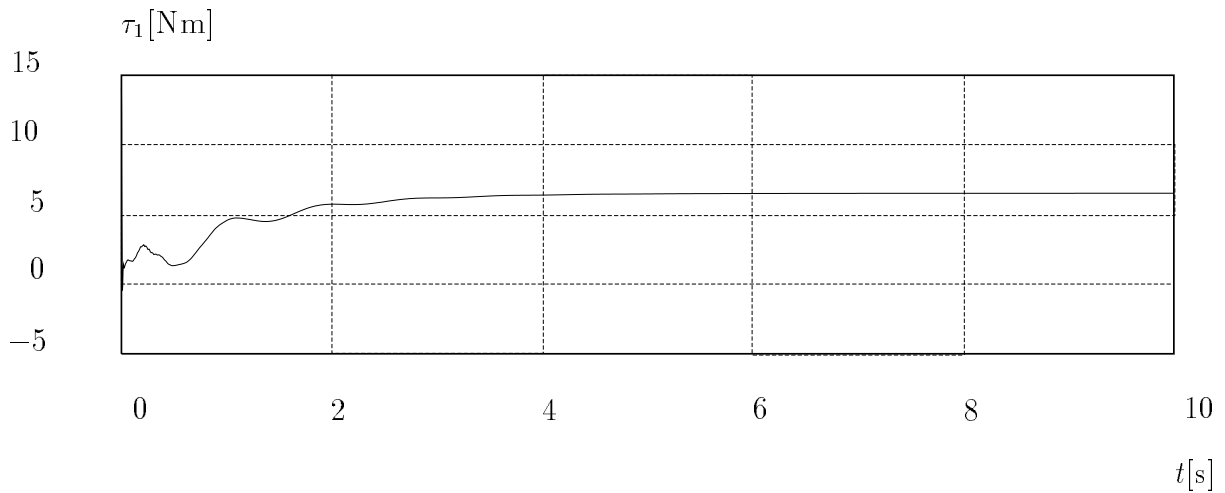
b) Fehlerverlauf  $\dot{\delta}_{12}$ ;

c) Koordinate  $\dot{\delta}_{21}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d21}$  (- - -);

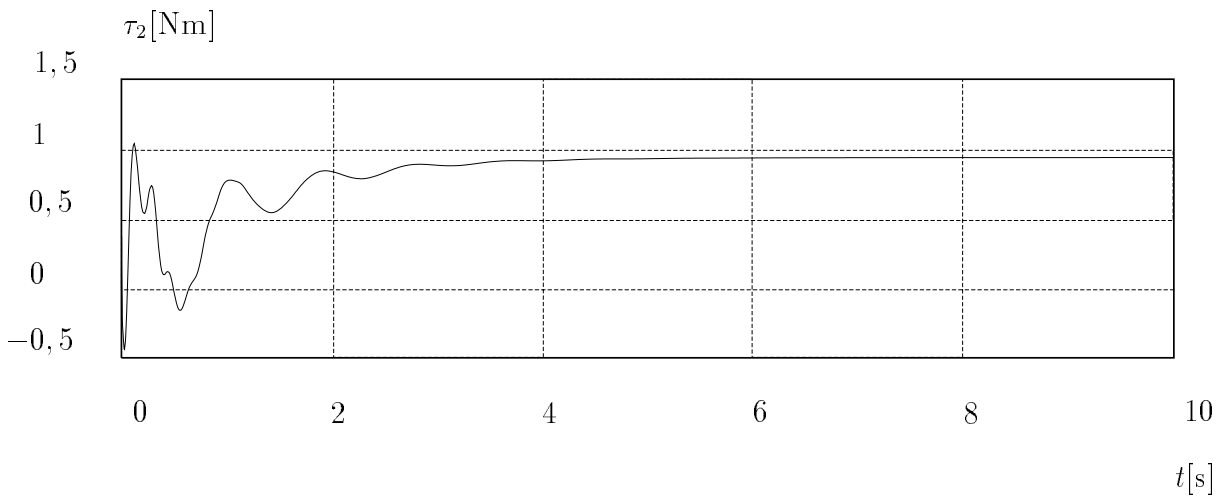
d) Fehlerverlauf  $\dot{\delta}_{21}$ ;

e) Koordinate  $\dot{\delta}_{22}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d22}$  (- - -);

f) Fehlerverlauf  $\dot{\delta}_{22}$ .



a)



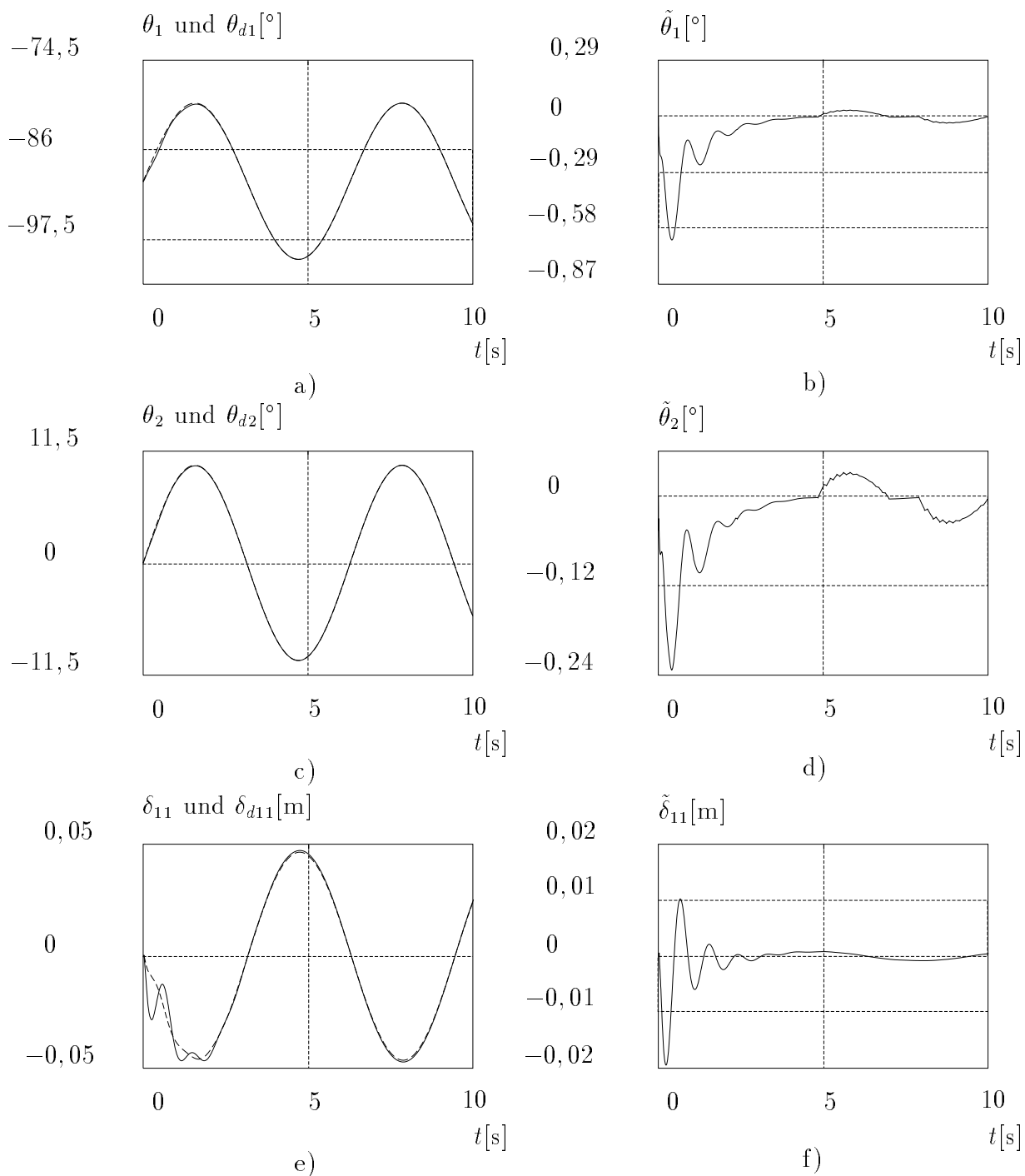
b)

**Bild 3.6:** Simulationsergebnisse eines elastischen Roboters.

Konstante Soll-Bahn für die starren Koordinaten. Regler (3.23).

a) Eingang  $\tau_1$ ;

b) Eingang  $\tau_2$ .

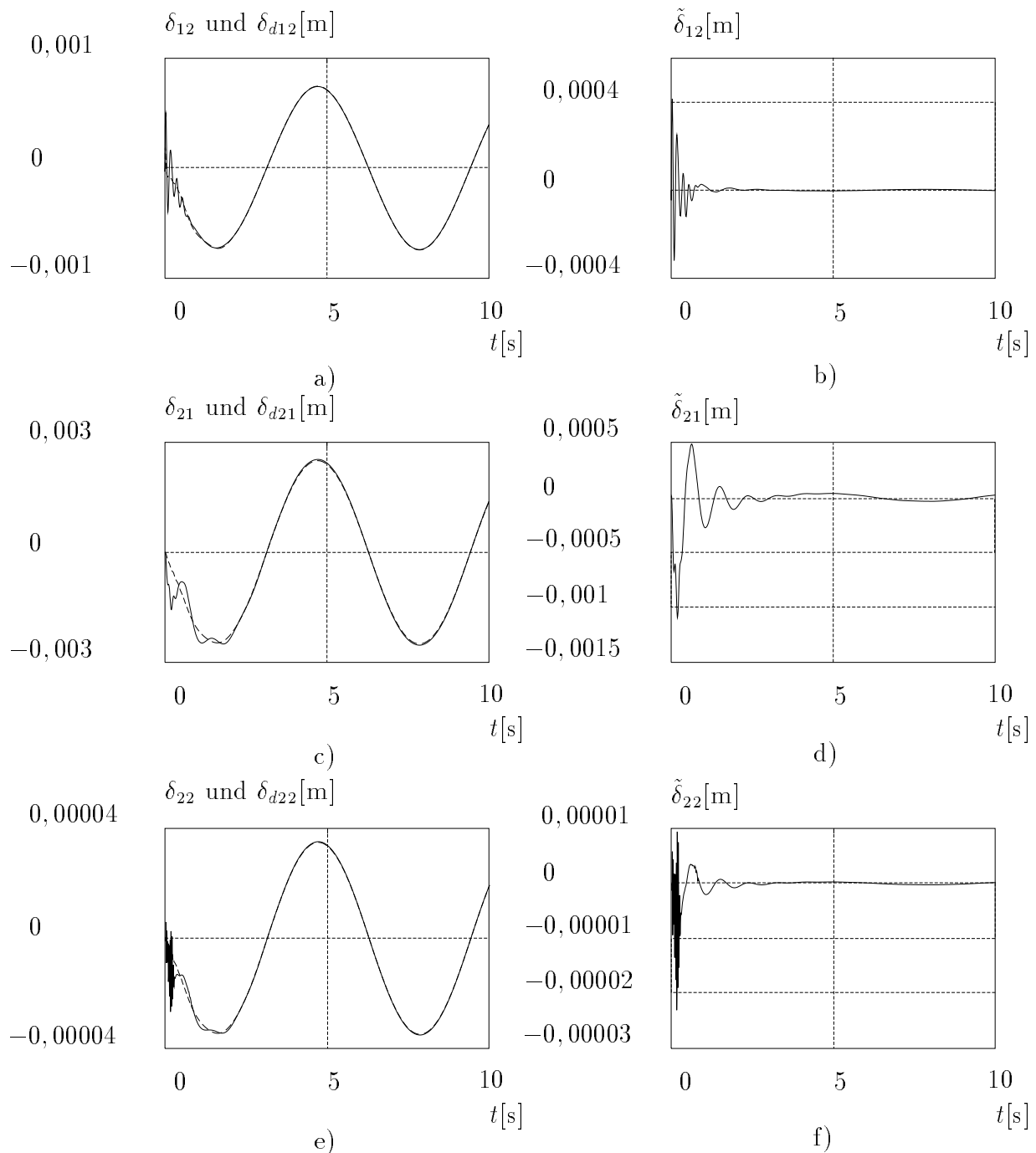


**Bild 3.7:** Simulationsergebnisse eines elastischen Roboters.

Sinusförmige Soll-Bahn für die starren Koordinaten. Regler (3.23).

- a) Koordinate  $\theta_1$  (—) und deren Soll-Bahn  $\theta_{d1}$  (- - -);
- b) Fehlerverlauf  $\tilde{\theta}_1$ ;
- c) Koordinate  $\theta_2$  (—) und deren Soll-Bahn  $\theta_{d2}$  (- - -);
- d) Fehlerverlauf  $\tilde{\theta}_2$ ;
- e) Koordinate  $\delta_{11}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d11}$  (- - -);
- f) Fehlerverlauf  $\tilde{\delta}_{11}$ .

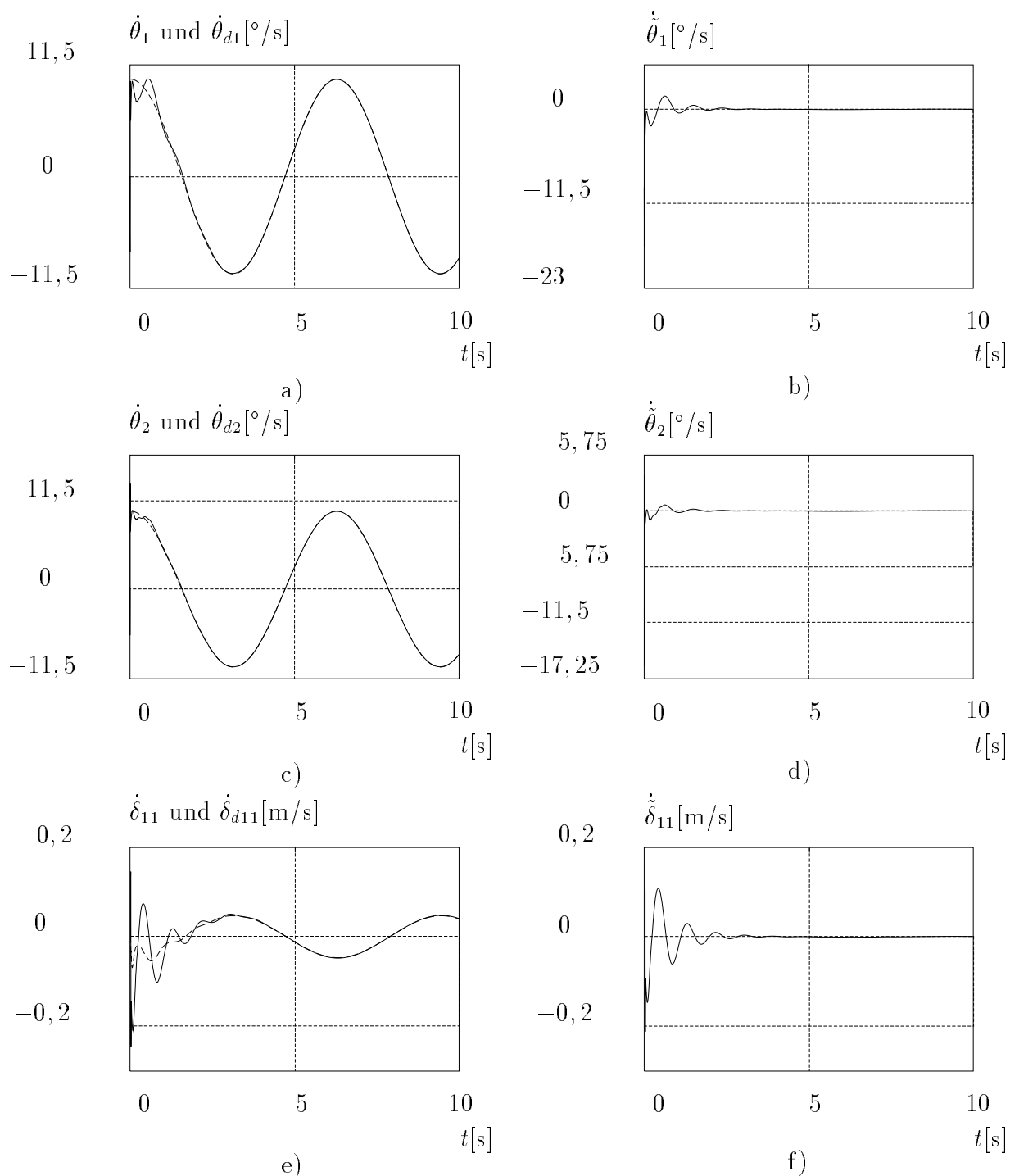




**Bild 3.8:** Simulationsergebnisse eines elastischen Roboters.

Sinusförmige Soll-Bahn für die starren Koordinaten. Regler (3.23).

- a) Koordinate  $\delta_{12}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d12}$  (- - -);
- b) Fehlerverlauf  $\tilde{\delta}_{12}$ ;
- c) Koordinate  $\delta_{21}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d21}$  (- - -);
- d) Fehlerverlauf  $\tilde{\delta}_{21}$ ;
- e) Koordinate  $\delta_{22}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d22}$  (- - -);
- f) Fehlerverlauf  $\tilde{\delta}_{22}$ .



**Bild 3.9:** Simulationsergebnisse eines elastischen Roboters.

Sinusförmige Soll-Bahn für die starren Koordinaten. Regler (3.23).

a) Koordinate  $\dot{\theta}_1$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\theta}_{d1}$  (- - -);

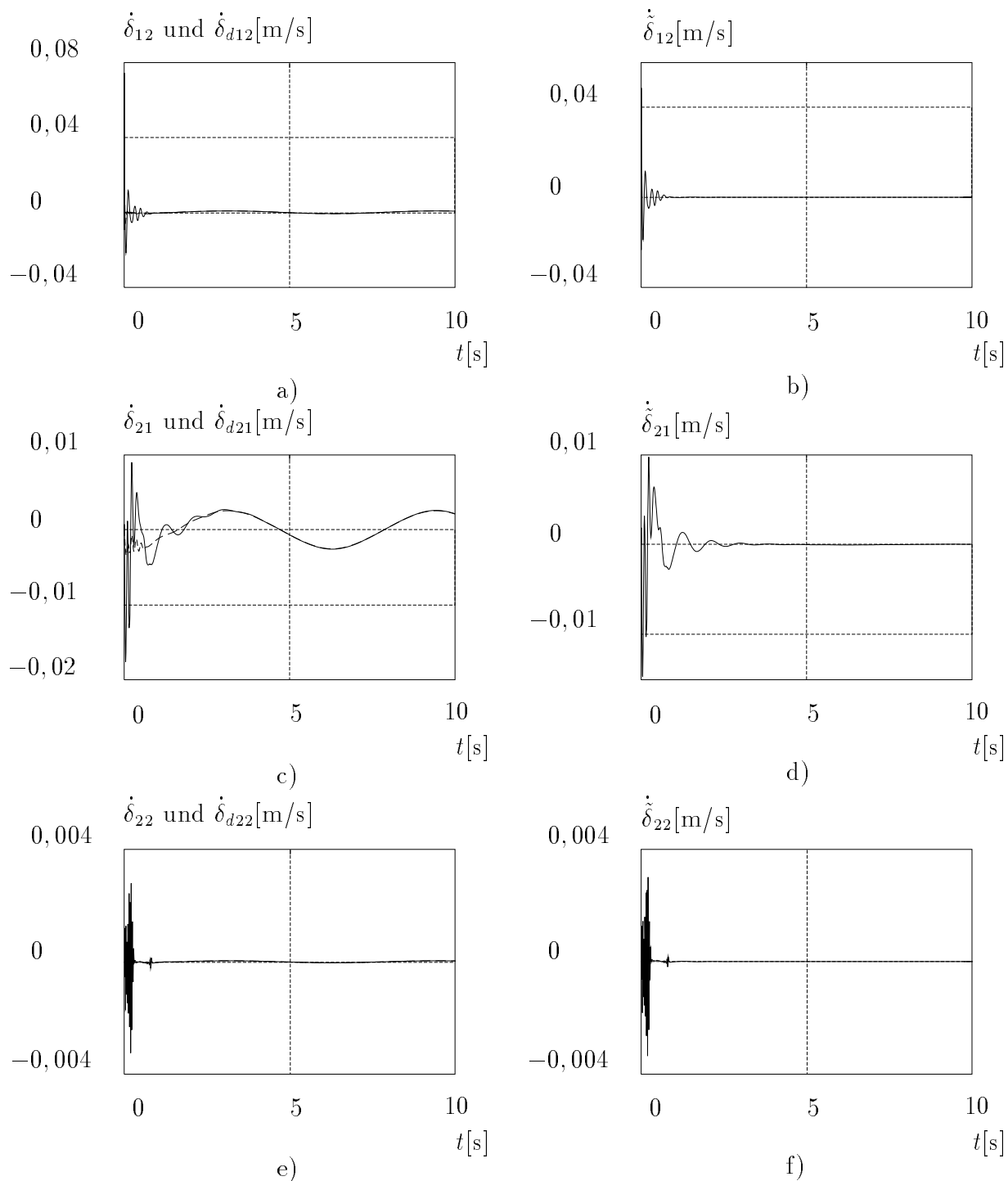
b) Fehlerverlauf  $\dot{\theta}_1$ ;

c) Koordinate  $\dot{\theta}_2$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\theta}_{d2}$  (- - -);

d) Fehlerverlauf  $\dot{\theta}_2$ ;

e) Koordinate  $\dot{\delta}_{11}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d11}$  (- - -);

f) Fehlerverlauf  $\dot{\delta}_{11}$ .



**Bild 3.10:** Simulationsergebnisse eines elastischen Roboters.

Sinusförmige Soll-Bahn für die starren Koordinaten. Regler (3.23).

a) Koordinate  $\dot{\delta}_{12}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d12}$  (- - -);

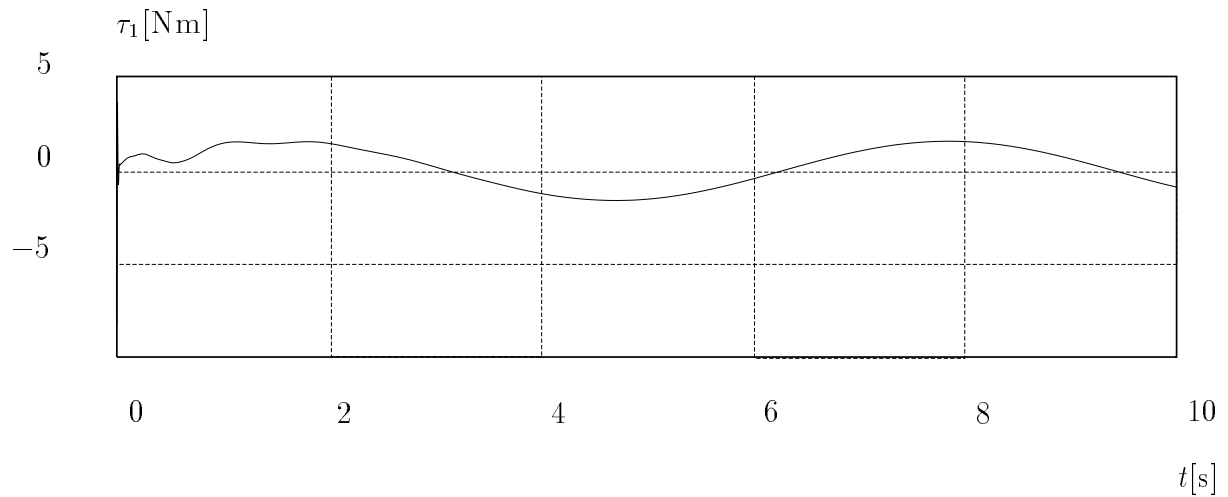
b) Fehlerverlauf  $\dot{\delta}_{12}$ ;

c) Koordinate  $\dot{\delta}_{21}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d21}$  (- - -);

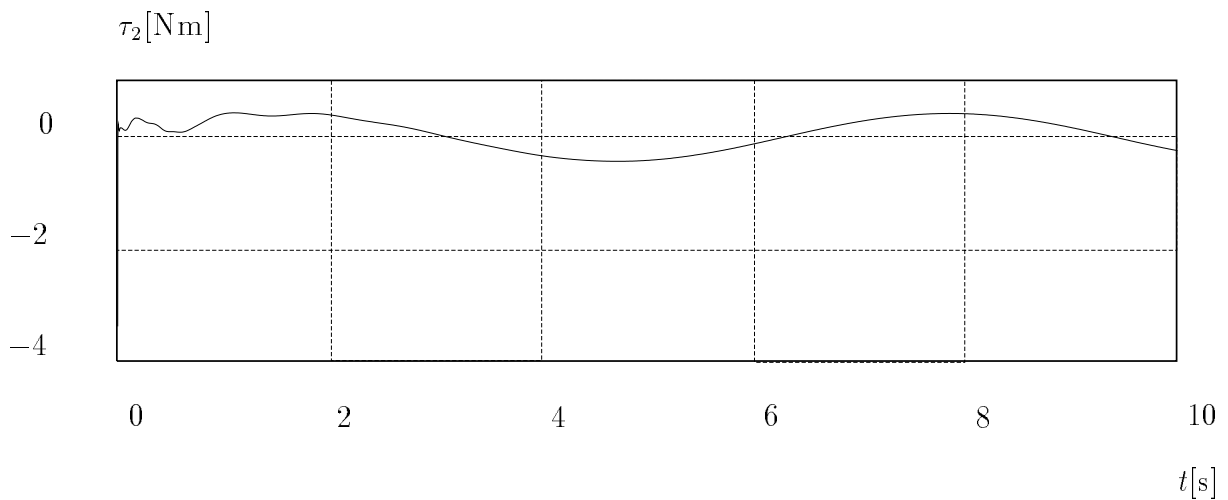
d) Fehlerverlauf  $\dot{\delta}_{21}$ ;

e) Koordinate  $\dot{\delta}_{22}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d22}$  (- - -);

f) Fehlerverlauf  $\dot{\delta}_{22}$ .



a)



b)

**Bild 3.11:** Simulationsergebnisse eines elastischen Roboters.

Sinusförmige Soll-Bahn für die starren Koordinaten. Regler (3.23).

a) Eingang  $\tau_1$ ;b) Eingang  $\tau_2$ .

## 3.2 Das Dämpfungsproblem

Im vorherigen Abschnitt wurde ein Regler für elastische Roboter zur Bahnverfolgung starrer Koordinaten vorgestellt. Da die Soll-Bahn der elastischen Koordinaten nicht beliebig ausgewählt werden kann, ist diese nach Gl. (3.24) zu bestimmen. Analysiert man den Fall, wenn die Soll-Bahn der starren Koordinaten konstant ist, dann ergibt sich die folgende Gleichung, wenn  $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$  gilt:

$$\boldsymbol{H}_{\delta\delta}\ddot{\boldsymbol{\delta}}_d + \boldsymbol{C}_{\delta\delta}\dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \boldsymbol{D}_\delta\dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \boldsymbol{K}\boldsymbol{\delta}_d + \boldsymbol{g}_\delta = \mathbf{0} \quad . \quad (3.54)$$

Da der Fehler Null ist, d. h. da  $\boldsymbol{\delta} \equiv \boldsymbol{\delta}_d$  ist, beschreibt Gl. (3.54) nicht nur die Dynamik der Soll-Bahn  $\boldsymbol{\delta}_d$ , sondern auch die der Ist-Bahn  $\boldsymbol{\delta}$ . Nimmt man an, daß  $\boldsymbol{D}_\delta = \mathbf{0}$  ist (was für ein physikalisches System nie der Fall sein kann (Bernzen 1996)), dann ist es klar, daß  $\boldsymbol{\delta}$  und  $\boldsymbol{\delta}_d$  schwingen werden. Da Gl. (3.54) eigentlich zum Regler und nicht zum physikalischen System gehört, darf man einen Term der Form  $\boldsymbol{D}_\Delta\dot{\boldsymbol{\delta}}_d$  addieren, wobei  $\boldsymbol{D}_\Delta > \mathbf{0}$  und diagonal ist. *Wenn der Fehler immer noch Null wäre, dann wäre die Soll-Bahn  $\boldsymbol{\delta}_d$  gedämpft und, demzufolge auch die Ist-Bahn  $\boldsymbol{\delta}$ .* Hier gilt die Stabilitätsanalyse des vorherigen Abschnitts nicht mehr. Wenn man den Term  $\boldsymbol{D}_\Delta\dot{\boldsymbol{\delta}}_d$  als eine Störung betrachtet, dann ist ein robuster Regler auszulegen, der diese „Störung“ bekämpfen kann (Corless und Leitmann 1981, Leitmann 1981, Dawson u. a. 1991, Qu und Dawson 1991, Spong 1992, Yaz 1993). So wird der folgende Regler vorgeschlagen:

$$\boldsymbol{u} \triangleq \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_r + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}_r + \boldsymbol{K}_e\boldsymbol{q}_d + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}}_r + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) - \boldsymbol{K}_p\boldsymbol{s} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \boldsymbol{D}_\Delta\dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \boldsymbol{f} \end{bmatrix} \quad , \quad (3.55)$$

wobei die Elemente des Vektors  $\boldsymbol{f}$  durch

$$f_{ij} \triangleq -\dot{\delta}_{dij} \frac{(\dot{\delta}_{dij}s_{\delta ij})d_{ij}}{\|\dot{\delta}_{dij}s_{\delta ij}\| + \epsilon_{ij}e^{-\beta_{ij}t}} \quad , \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m_i \quad , \quad (3.56)$$

gegeben sind, wobei  $s_{\delta ij}$  Element von  $\boldsymbol{s}_\delta$ ,  $\dot{\delta}_{dij}$  Element von  $\dot{\boldsymbol{\delta}}_d$  und  $d_{ij}$  Element von  $\boldsymbol{D}_\Delta$  ist. Diesmal wird angenommen, daß  $\boldsymbol{D} \geq \mathbf{0}$  ist. Bei Gl. (3.55) bleibt der Vektor  $\boldsymbol{\tau}$  unverändert (siehe Gl. (3.23)), während die Soll-Bahn  $\boldsymbol{\delta}_d$  durch

$$\ddot{\boldsymbol{\delta}}_d = \boldsymbol{\Lambda}_\delta\dot{\boldsymbol{\delta}} - \boldsymbol{H}_{\delta\delta}^{-1} \left( \boldsymbol{C}_{\delta\delta}\dot{\boldsymbol{\delta}}_r + \boldsymbol{D}_\delta\dot{\boldsymbol{\delta}}_r - \boldsymbol{K}_{p\delta}\boldsymbol{s}_\delta + \boldsymbol{K}\boldsymbol{\delta}_d \right. \quad (3.57)$$

$$\left. + \boldsymbol{H}_{\theta\delta}^T\ddot{\boldsymbol{\theta}}_r + \boldsymbol{C}_{\delta\theta}\dot{\boldsymbol{\theta}}_r + \boldsymbol{g}_\delta + \boldsymbol{D}_\Delta\dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \boldsymbol{f} \right) \quad , \quad (3.58)$$

$$\boldsymbol{\delta}_d(0) = \dot{\boldsymbol{\delta}}_d(0) = \mathbf{0} \quad (3.58)$$

bestimmt werden muß. In diesem Fall läßt sich die Fehlerdynamik durch

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{s}} = -[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{s} + \boldsymbol{K}_e\tilde{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}_{pD}\boldsymbol{s}] + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{D}_\Delta\dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \boldsymbol{f} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

beschreiben. Der folgende Satz erläutert die Stabilität des neuen Gesamtsystems.

**Satz 3.2**

Gegeben sei eine beliebige Soll-Bahn  $\boldsymbol{\theta}_d$  mit beschränkter Geschwindigkeit und Beschleunigung. Wenn  $\|\dot{\boldsymbol{q}}\| \leq v_m$  ist, wobei  $v_m$  eine positive Konstante ist, dann bleiben die in den Gln. (3.57)–(3.58) angegebenen Soll-Bahnen  $\boldsymbol{\delta}_d$  und  $\dot{\boldsymbol{\delta}}_d$  beschränkt, wenn  $\lambda_3 \triangleq \lambda_{\min}(\mathbf{P}) - (1 + \lambda_{\max}(\mathbf{\Lambda}_\delta))(1 + \sqrt{n+m})\lambda_{\max}(\mathbf{D}_\Delta) > 0$ , wobei  $\lambda_{\min}(\mathbf{P})$  entsprechend Gl. (3.37) gegeben ist. Bei Anwendung des Reglers (3.23) ist die Gleichgewichtslage  $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$  von Gl. (3.59) GES im Sinne von Satz 2.1.

**Beweis**

Der Beweis ist grundsätzlich der gleiche wie beim Satz 3.1. Um die Beschränktheit von  $\boldsymbol{\delta}_d$  und  $\dot{\boldsymbol{\delta}}_d$  festzustellen, werden die Variablen  $\boldsymbol{x}_\delta$  und  $\boldsymbol{s}_0$  noch einmal verwendet (siehe Gln. (3.26) und (3.27)), deren Dynamik durch

$$\mathbf{H}_{\delta\delta}\dot{\boldsymbol{s}}_0 = -[\mathbf{C}_{\delta\delta}\boldsymbol{s}_0 + \mathbf{K}_{pD\delta}\boldsymbol{s}_0 + \mathbf{K}\boldsymbol{\delta}_d + \mathbf{f}_r + \mathbf{f} + \mathbf{D}_\Delta\dot{\boldsymbol{\delta}}_d] \quad (3.60)$$

beschrieben wird, wobei  $\mathbf{f}_r$  der gleiche Vektor wie in Gl. (3.29) ist. Dabei gilt immer noch, daß  $\|\mathbf{f}_r\| \leq f_{r\max}$  ist. Verwendet man die Ljapunov-Funktion

$$\begin{aligned} V_\delta(\boldsymbol{x}_\delta, t) &\triangleq V_\delta(\boldsymbol{x}_\delta) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_\delta^T \mathbf{M} \boldsymbol{x}_\delta \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{s}_0^T \mathbf{H}_{\delta\delta}\boldsymbol{s}_0 + \boldsymbol{\delta}_d^T \left[ \mathbf{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} + \frac{1}{2}\mathbf{K} \right] \boldsymbol{\delta}_d, \end{aligned} \quad (3.61)$$

mit  $\mathbf{M}$  wie in Gl. (3.31), gilt

$$\lambda_1 \|\boldsymbol{x}_\delta\|^2 \leq V_\delta(\boldsymbol{x}_\delta) \leq \lambda_2 \|\boldsymbol{x}_\delta\|^2, \quad (3.62)$$

$$\lambda_1 \triangleq \frac{1}{2} \min_{\boldsymbol{q} \in \mathbb{Q}^{n+m}} (\lambda_{\min}(\mathbf{M})), \quad (3.63)$$

$$\lambda_2 \triangleq \frac{1}{2} \max_{\boldsymbol{q} \in \mathbb{Q}^{n+m}} (\lambda_{\max}(\mathbf{M})). \quad (3.64)$$

Die Ableitung von (3.61) läßt sich mit Gl. (3.36) berechnen, wenn der Term  $\mathbf{f} + \mathbf{D}_\Delta\dot{\boldsymbol{\delta}}_d$  berücksichtigt wird:

$$\dot{V}_\delta(\boldsymbol{x}_\delta) \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{P})\|\boldsymbol{x}_\delta\|^2 - \boldsymbol{s}_0^T (\mathbf{f}_r + \mathbf{f} + \mathbf{D}_\Delta\dot{\boldsymbol{\delta}}_d), \quad (3.65)$$

wobei  $\lambda_{\min}(\mathbf{P})$  durch Gl. (3.37) gegeben ist. Aus Gl. (3.56) ergibt sich

$$\|\mathbf{f}\| \leq \lambda_{\max}(\mathbf{D}_\Delta)\sqrt{n+m}\|\dot{\boldsymbol{\delta}}_d\|, \quad (3.66)$$

so daß (siehe (3.38))

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{s}_0^T (\mathbf{f}_r + \mathbf{f} + \mathbf{D}_\Delta\dot{\boldsymbol{\delta}}_d)\| &\leq \\ &(1 + \lambda_{\max}(\mathbf{\Lambda}_\delta))\|\boldsymbol{x}_\delta\|(f_{r\max} + \lambda_{\max}(\mathbf{D}_\Delta)(1 + \sqrt{n+m})\|\boldsymbol{x}_\delta\|) \end{aligned} \quad (3.67)$$

gilt. Gleichung (3.65) läßt sich zu

$$\dot{V}_\delta(\boldsymbol{x}_\delta) \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{P})\|\boldsymbol{x}_\delta\|^2 \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} &+ (1 + \lambda_{\max}(\mathbf{\Lambda}_\delta))\|\boldsymbol{x}_\delta\|(f_{r\max} + \lambda_{\max}(\mathbf{D}_\Delta)(1 + \sqrt{n+m})\|\boldsymbol{x}_\delta\|) \\ &= -[\lambda_{\min}(\mathbf{P}) - (1 + \lambda_{\max}(\mathbf{\Lambda}_\delta))\lambda_{\max}(\mathbf{D}_\Delta)(1 + \sqrt{n+m})]\|\boldsymbol{x}_\delta\|^2 \\ &+ (1 + \lambda_{\max}(\mathbf{\Lambda}_\delta))f_{r\max}\|\boldsymbol{x}_\delta\| \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\triangleq -\lambda_3\|\boldsymbol{x}_\delta\|^2 + \sigma\|\boldsymbol{x}_\delta\|$$

umschreiben. Da es Voraussetzung ist, daß  $\lambda_3 > 0$  ist, wird beim Anwenden des Satzes 2.2 mit  $\gamma = 0$  bewiesen, daß  $\|\mathbf{x}_\delta\|$  beschränkt ist. Es bleibt zu beweisen, daß  $\mathbf{x}$  gegen Null konvergiert. Dafür wird die Ljapunov-Funktion

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}, t) \triangleq V(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \tilde{\mathbf{q}}^T \left[ \Lambda \mathbf{K}_{pD} + \frac{1}{2} \mathbf{K}_e \right] \tilde{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 2\Lambda \mathbf{K}_{pD} + \mathbf{K}_e + \Lambda \mathbf{H}(\mathbf{q}) \Lambda & \Lambda \mathbf{H}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{q}) \Lambda & \mathbf{H}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ &\triangleq \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{N} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.70)$$

angesetzt. Wegen EIG 2.4 ergibt sich

$$\lambda_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \lambda_2 \|\mathbf{x}\|^2, \quad (3.71)$$

$$\lambda_1 \triangleq \frac{1}{2} \min_{\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^{n+m}} (\lambda_{\min}(\mathbf{N})) , \quad (3.72)$$

$$\lambda_2 \triangleq \frac{1}{2} \max_{\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^{n+m}} (\lambda_{\max}(\mathbf{N})) . \quad (3.73)$$

Die Ableitung von (3.70) kann man aus Gl. (3.42) und (3.59) berechnen:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{x}^T \begin{bmatrix} \Lambda \mathbf{K}_{pD} \Lambda + \Lambda \mathbf{K}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{pD} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{s}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_\Delta \dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \mathbf{f} \end{bmatrix} \\ &\triangleq -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{s}_\delta^T (\mathbf{D}_\Delta \dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \mathbf{f}) \\ &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{x}\|^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \left( (\dot{\delta}_{dij} s_{\delta ij}) d_{ij} - d_{ij} \frac{\|\dot{\delta}_{dij} s_{\delta ij}\|^2}{\|\dot{\delta}_{dij} s_{\delta ij}\| + \epsilon_{ij} e^{-\beta_{ij} t}} \right) \\ &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{x}\|^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \left( \|\dot{\delta}_{dij} s_{\delta ij}\| d_{ij} - d_{ij} \frac{\|\dot{\delta}_{dij} s_{\delta ij}\|^2}{\|\dot{\delta}_{dij} s_{\delta ij}\| + \epsilon_{ij} e^{-\beta_{ij} t}} \right) \\ &= -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{x}\|^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \left( d_{ij} \frac{\|\dot{\delta}_{dij} s_{\delta ij}\|}{\|\dot{\delta}_{dij} s_{\delta ij}\| + \epsilon_{ij} e^{-\beta_{ij} t}} \epsilon_{ij} e^{-\beta_{ij} t} \right) \\ &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{x}\|^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} (d_{ij} \epsilon_{ij} e^{-\beta_{ij} t}) \\ &= -\lambda_3 \|\mathbf{x}\|^2 + \epsilon e^{-\beta t} , \end{aligned} \quad (3.74)$$

wobei

$$\lambda_3 \triangleq \lambda_{\min}(\mathbf{Q}) , \quad (3.75)$$

$$\epsilon \triangleq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} d_{ij} \epsilon_{ij} , \quad (3.76)$$

$$\beta \triangleq \min(\beta_{ij}) , \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m_i . \quad (3.77)$$

gilt. Durch Anwendung von Satz 2.1 läßt sich Satz 3.2 beweisen.  $\square$

Der Satz 3.2 garantiert grundsätzlich das gleiche wie der Satz 3.1, so daß es vielleicht nicht offensichtlich ist, daß die Dämpfung des Systems erhöht worden ist. Nimmt man

wieder an, daß der Vektor  $\boldsymbol{x} \equiv \mathbf{0}$  ist, so ergibt sich die folgende Dynamik der Soll-Bahn  $\boldsymbol{\delta}_d$

$$\mathbf{H}_{\delta\delta}\ddot{\boldsymbol{\delta}}_d + \mathbf{C}_{\delta\delta}\dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \mathbf{D}_{\Delta}\dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \mathbf{K}\boldsymbol{\delta}_d + \mathbf{g}_{\delta} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad , \quad (3.78)$$

wenn  $\mathbf{D}_{\delta} = \mathbf{0}$  ist. Unter der Annahme, daß  $\mathbf{g}_{\delta}(\mathbf{q}) = \mathbf{g}_{\delta}(\boldsymbol{\theta})$  gilt, läßt sich die Variable  $\mathbf{y}$  (siehe Gl.(3.44)) wieder verwenden, so daß Gl. (3.78) als

$$\mathbf{H}_{\delta\delta}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}_{\delta\delta}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}_{\Delta}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{0} \quad . \quad (3.79)$$

geschrieben werden kann. Benutzt man die gleiche Ljapunov-Funktion wie vorher (siehe Gl. (3.46)), so ergibt sich deren Ableitung als

$$\begin{aligned} \dot{V}_y &= -\dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{D}_{\Delta} \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{f}(\dot{\mathbf{y}}) & (3.80) \\ &= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \left( d_{ij} \dot{y}_{ij}^2 - d_{ij} \dot{y}_{ij}^2 \frac{\dot{y}_{ij} s_{\delta ij}}{\|\dot{y}_{ij} s_{\delta ij}\| + \epsilon_{ij} e^{-\beta_{ij} t}} \right) \\ &= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} d_{ij} \dot{y}_{ij}^2 \left( 1 - \frac{\dot{y}_{ij} s_{\delta ij}}{\|\dot{y}_{ij} s_{\delta ij}\| + \epsilon_{ij} e^{-\beta_{ij} t}} \right) \leq 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.81)$$

Auch in diesem Fall ist  $\dot{V}_y$  Null nur für  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$ , so daß die Stabilität der Gleichgewichtslage  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$  durch Anwenden des gleichen Arguments wie vorher zu beweisen ist. Da die Soll-Bahn  $\boldsymbol{\delta}_d$  gedämpft ist, muß auch die Ist-Bahn  $\boldsymbol{\delta}$  gedämpft sein.

Anzumerken bleibt, daß der Regler an sich der gleiche wie im vorherigen Abschnitt ist, mit einer Änderung bei der Berechnung der Soll-Bahn für die elastischen Koordinaten. So wird der Regler (3.23) zusammen mit der neuen Soll-Bahn (3.57) getestet. Hierbei gelten die gleichen Matrizen  $\mathbf{K}_p$  (3.49) und  $\mathbf{\Lambda}$  (3.50). Die Parameter  $\epsilon_{ij}$  und  $\beta_{ij}$  in (3.56) sind jeweils 0,00001 und 0,001.

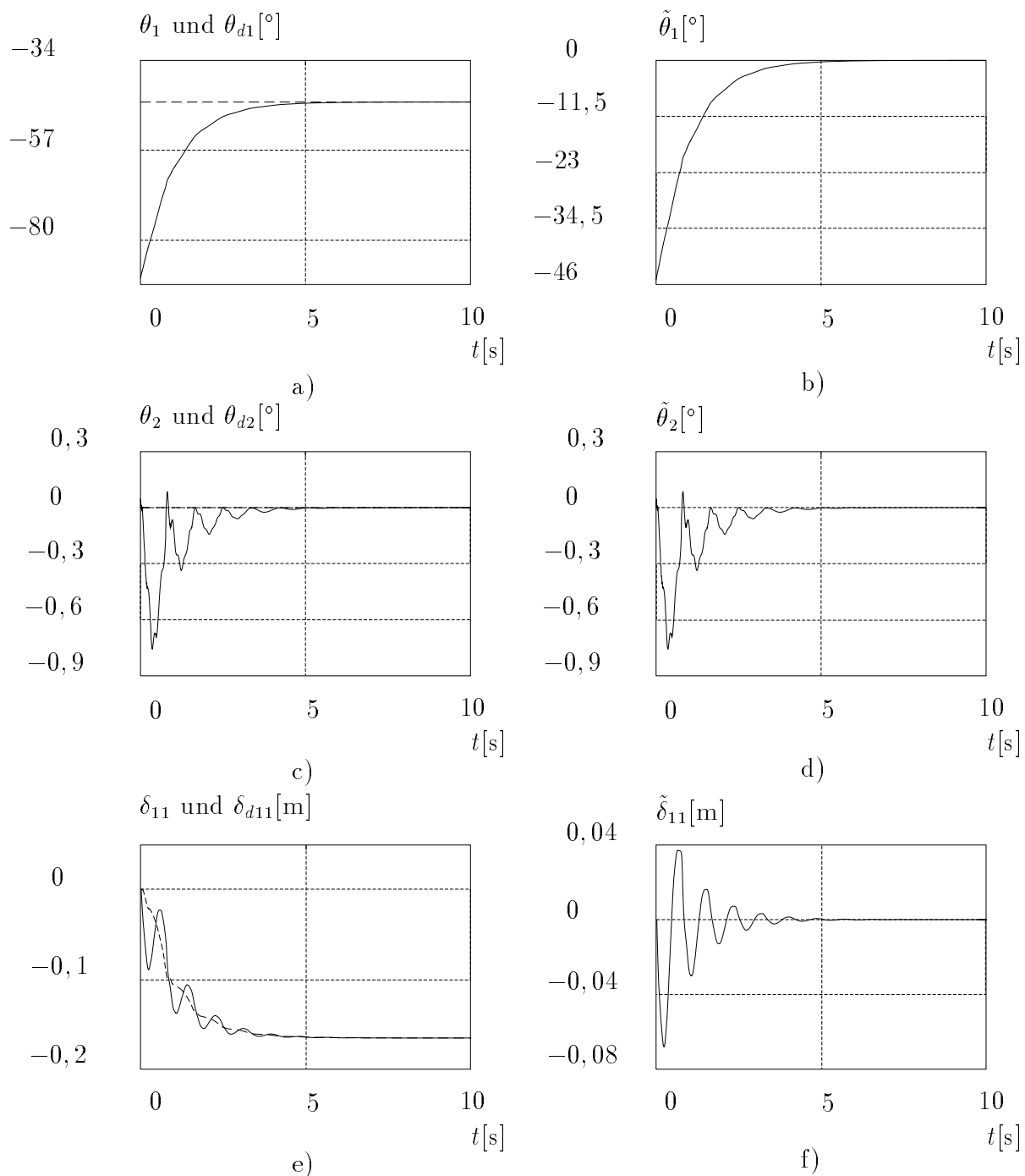
In der ersten Simulation wird für die starren Koordinaten die konstante Soll-Bahn nach Gl. (3.51) vorgegebenen. Es wird angenommen, daß  $\mathbf{D}_{\delta} \equiv \mathbf{0}$  ist, während  $\mathbf{D}_{\Delta}$  die alten Werte der Matrix  $\mathbf{D}_{\delta}$  besitzt. Die Ergebnisse in diesem Fall sind in den Bildern 3.12 bis 3.15 zu sehen. Wie vorausgesehen, werden die möglichen Schwingungen unterdrückt. Bild 3.13 a) zeigt deutlich, wie die Soll-Bahn der elastischen Koordinate  $\delta_{d12}$  fast gar nicht oszilliert, während die Ist-Bahn schwingt. In weniger als 5s verschwinden die Schwingungen. In diesem Fall gelten die gleichen End-Werte der Soll-Bahnen für die elastischen Koordinaten wie vorher (siehe Gl. (3.52)). Die Momente an den Gelenken sind in Bild 3.16 zu sehen. Mit Ausnahme von zwei Spitzen um  $t = 1s$  sind diese nicht wesentlich größer als in dem Fall des gedämpften Systems.

Die Simulationsergebnisse für die sinusförmigen Signale sind in den Bildern 3.17 bis 3.20 zu sehen. Diese Soll-Bahnen sind natürlich aufwendiger für den Regler, insbesondere für die Koordinaten größerer Ordnung. So schwingt  $\delta_{22}$  bis etwa 6s stark, wenn der Regler die Oszillationen bekämpfen kann (siehe Bild 3.18 e)). Danach ergibt sich das gleiche wie



im vorherigen Abschnitt. Die Momente an den Gelenken sind in Bild 3.21 zu sehen. Sie bleiben beschränkt. Mit Ausnahme von einigen Spitzen sind sie nicht wesentlich größer als vorher.

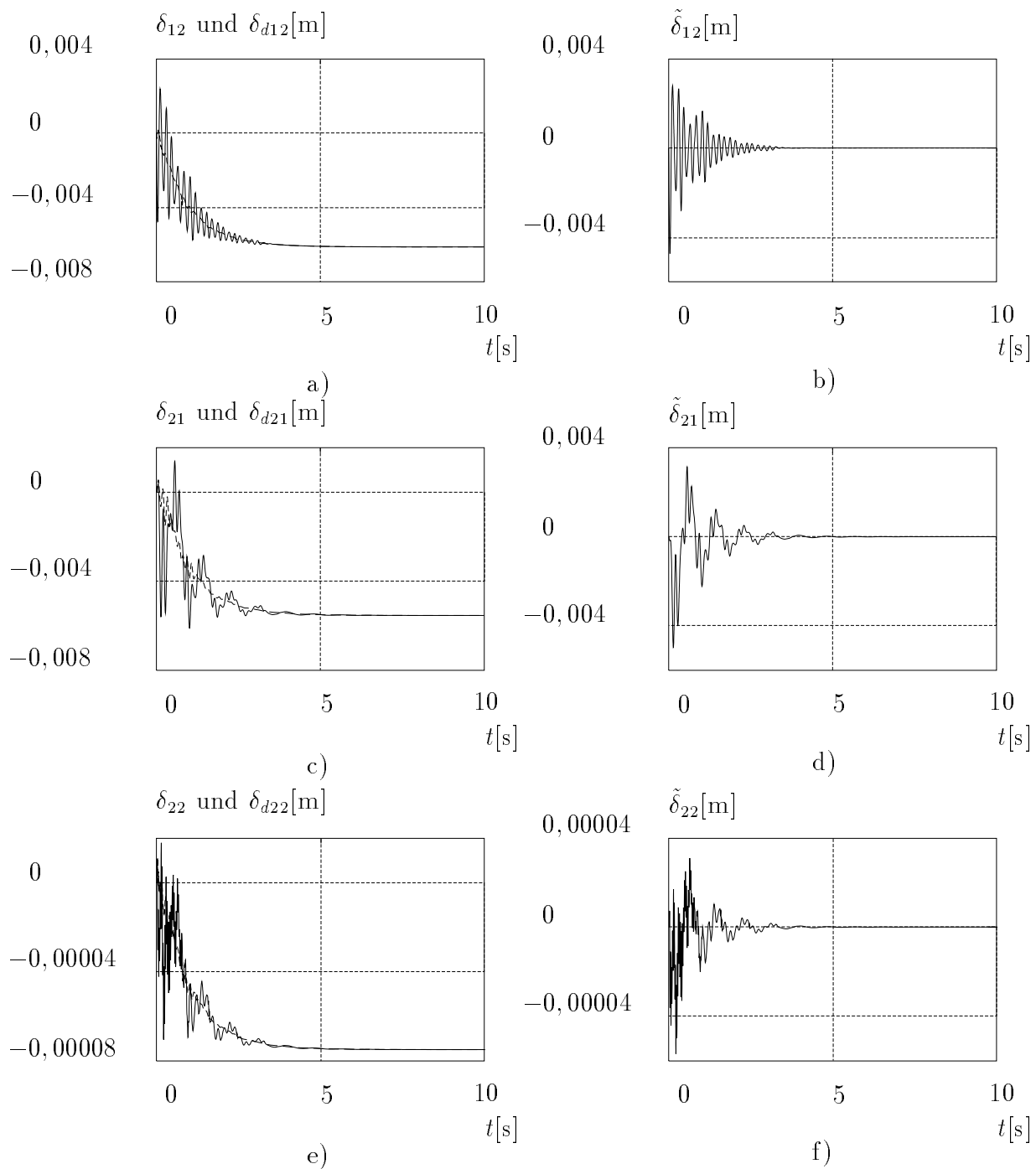
Erwähnt werden muß, daß die Stabilitätsanalyse der Gleichgewichtslage  $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$  unabhängig von der Beschränktheit von  $\boldsymbol{\delta}_d$  und  $\dot{\boldsymbol{\delta}}_d$  ist, so daß die Bedingung  $\lambda_3 > 0$  eventuell nicht zu betrachten ist, da Gl. (3.78) ausgenutzt werden kann, um das Verhalten von  $\boldsymbol{\delta}_d$  und  $\dot{\boldsymbol{\delta}}_d$  zu kennen.



**Bild 3.12:** Simulationsergebnisse eines elastischen Roboters.

Konstante Soll-Bahn für die starren Koordinaten. Regler (3.23) zusammen mit Gl. (3.57).

- a) Koordinate  $\theta_1$  (—) und deren Soll-Bahn  $\theta_{d1}$  (- - -);
- b) Fehlerverlauf  $\tilde{\theta}_1$ ;
- c) Koordinate  $\theta_2$  (—) und deren Soll-Bahn  $\theta_{d2}$  (- - -);
- d) Fehlerverlauf  $\tilde{\theta}_2$ ;
- e) Koordinate  $\delta_{11}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d11}$  (- - -);
- f) Fehlerverlauf  $\tilde{\delta}_{11}$ .



**Bild 3.13:** Simulationsergebnisse eines elastischen Roboters.

Konstante Soll-Bahn für die starren Koordinaten. Regler (3.23) zusammen mit Gl. (3.57).

a) Koordinate  $\delta_{12}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d12}$  (- - -);

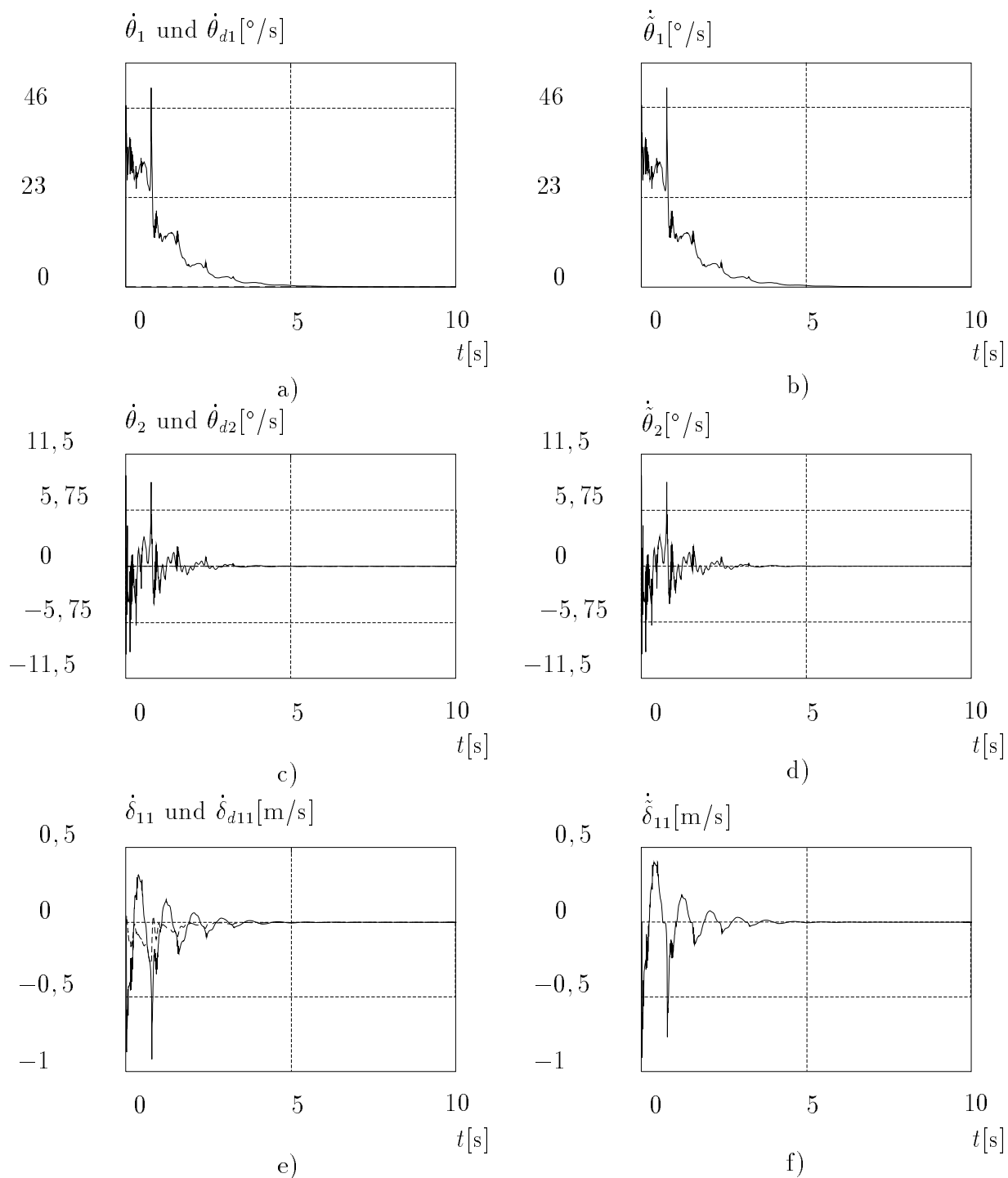
b) Fehlerverlauf  $\tilde{\delta}_{12}$ ;

c) Koordinate  $\delta_{21}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d21}$  (- - -);

d) Fehlerverlauf  $\tilde{\delta}_{21}$ ;

e) Koordinate  $\delta_{22}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d22}$  (- - -);

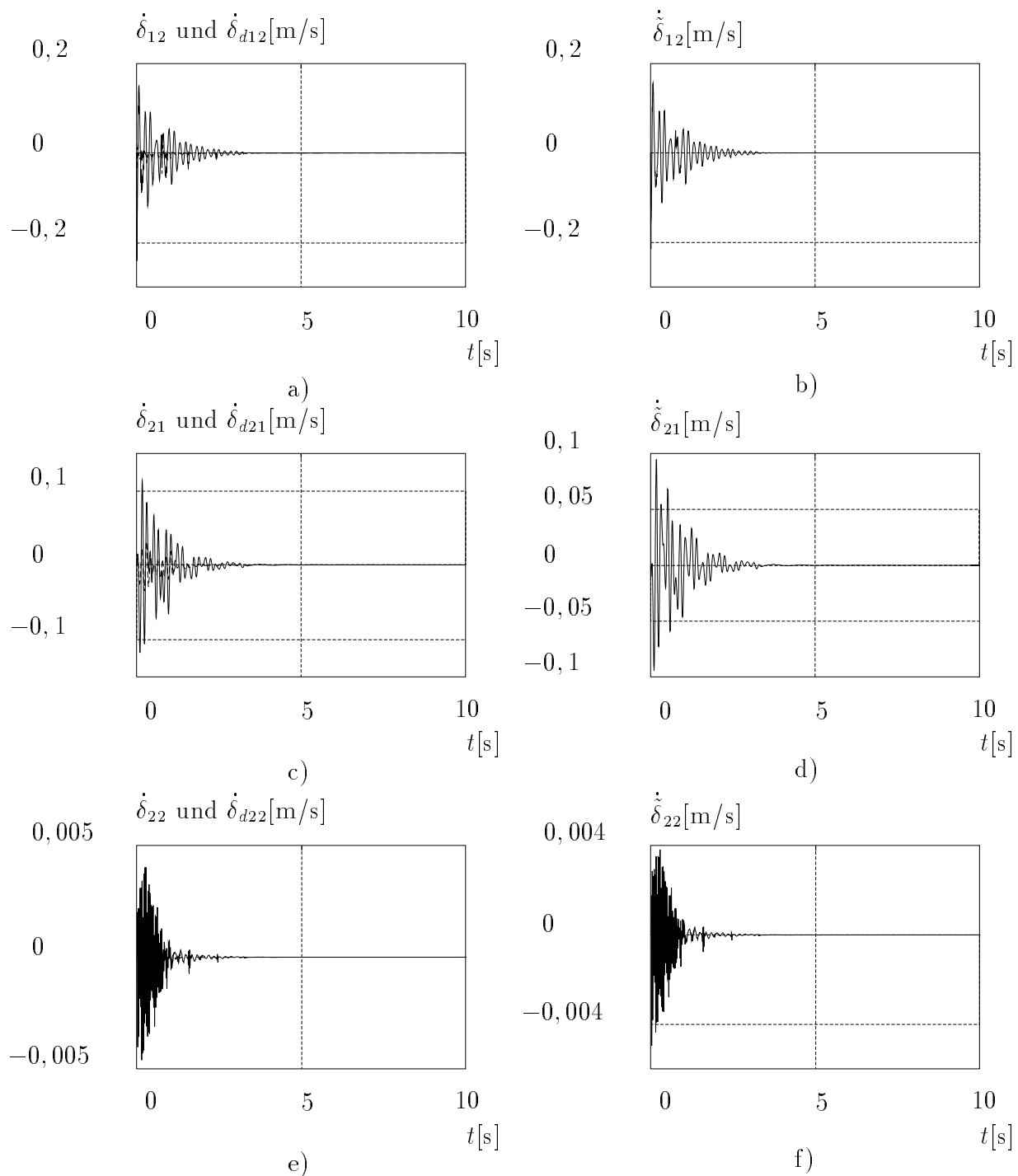
f) Fehlerverlauf  $\tilde{\delta}_{22}$ .



**Bild 3.14:** Simulationsergebnisse eines elastischen Roboters.

Konstante Soll-Bahn für die starren Koordinaten. Regler (3.23) zusammen mit Gl. (3.57).

- a) Koordinate  $\dot{\theta}_1$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\theta}_{d1}$  (- - -);
- b) Fehlerverlauf  $\dot{\theta}_1$ ;
- c) Koordinate  $\dot{\theta}_2$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\theta}_{d2}$  (- - -);
- d) Fehlerverlauf  $\dot{\theta}_2$ ;
- e) Koordinate  $\dot{\delta}_{11}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d11}$  (- - -);
- f) Fehlerverlauf  $\dot{\delta}_{11}$ .



**Bild 3.15:** Simulationsergebnisse eines elastischen Roboters.

Konstante Soll-Bahn für die starren Koordinaten. Regler (3.23) zusammen mit Gl. (3.57).

a) Koordinate  $\dot{\delta}_{12}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d12}$  (- - -);

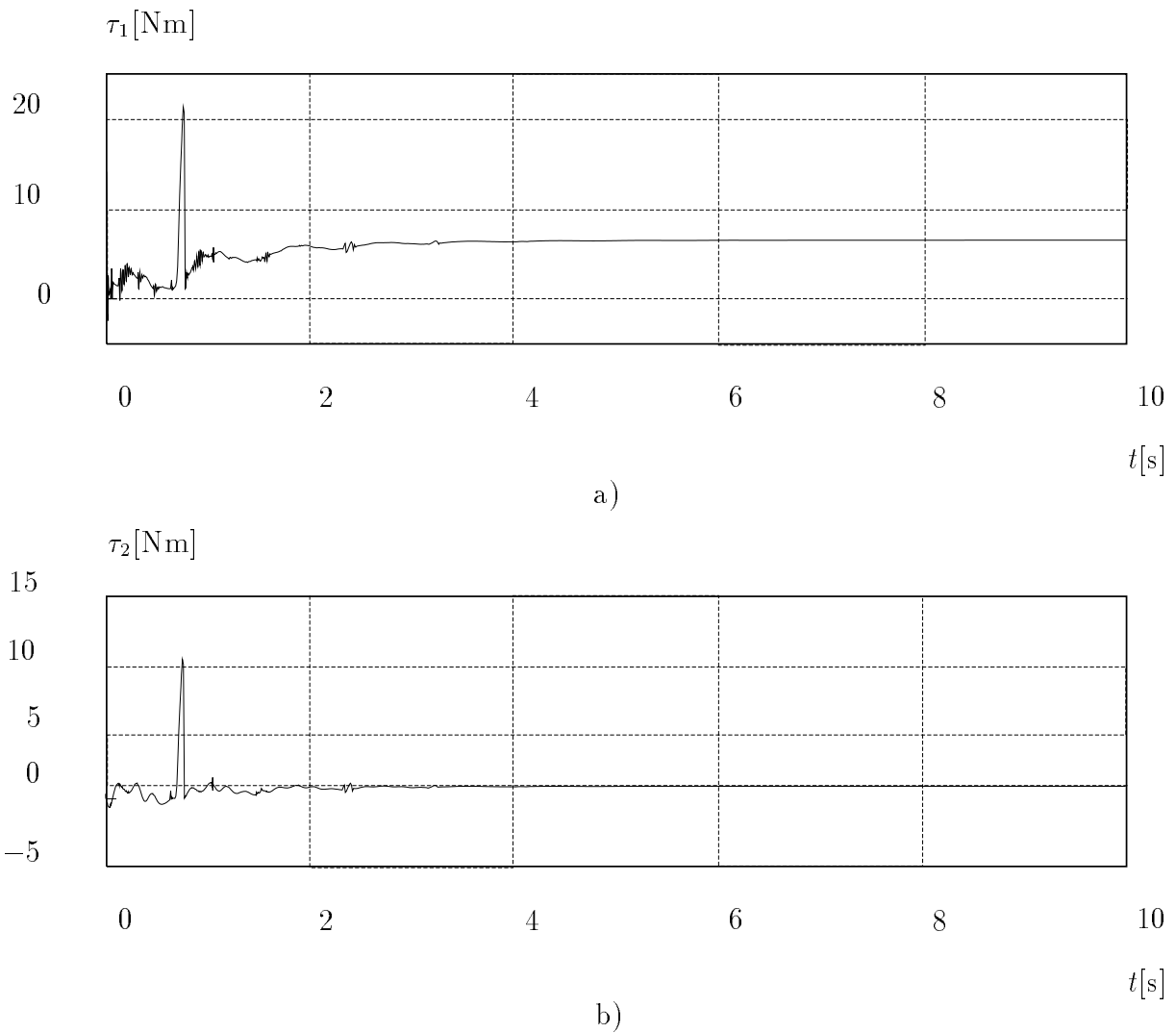
b) Fehlerverlauf  $\dot{\delta}_{12}$ ;

c) Koordinate  $\dot{\delta}_{21}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d21}$  (- - -);

d) Fehlerverlauf  $\dot{\delta}_{21}$ ;

e) Koordinate  $\dot{\delta}_{22}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d22}$  (- - -);

f) Fehlerverlauf  $\dot{\delta}_{22}$ .

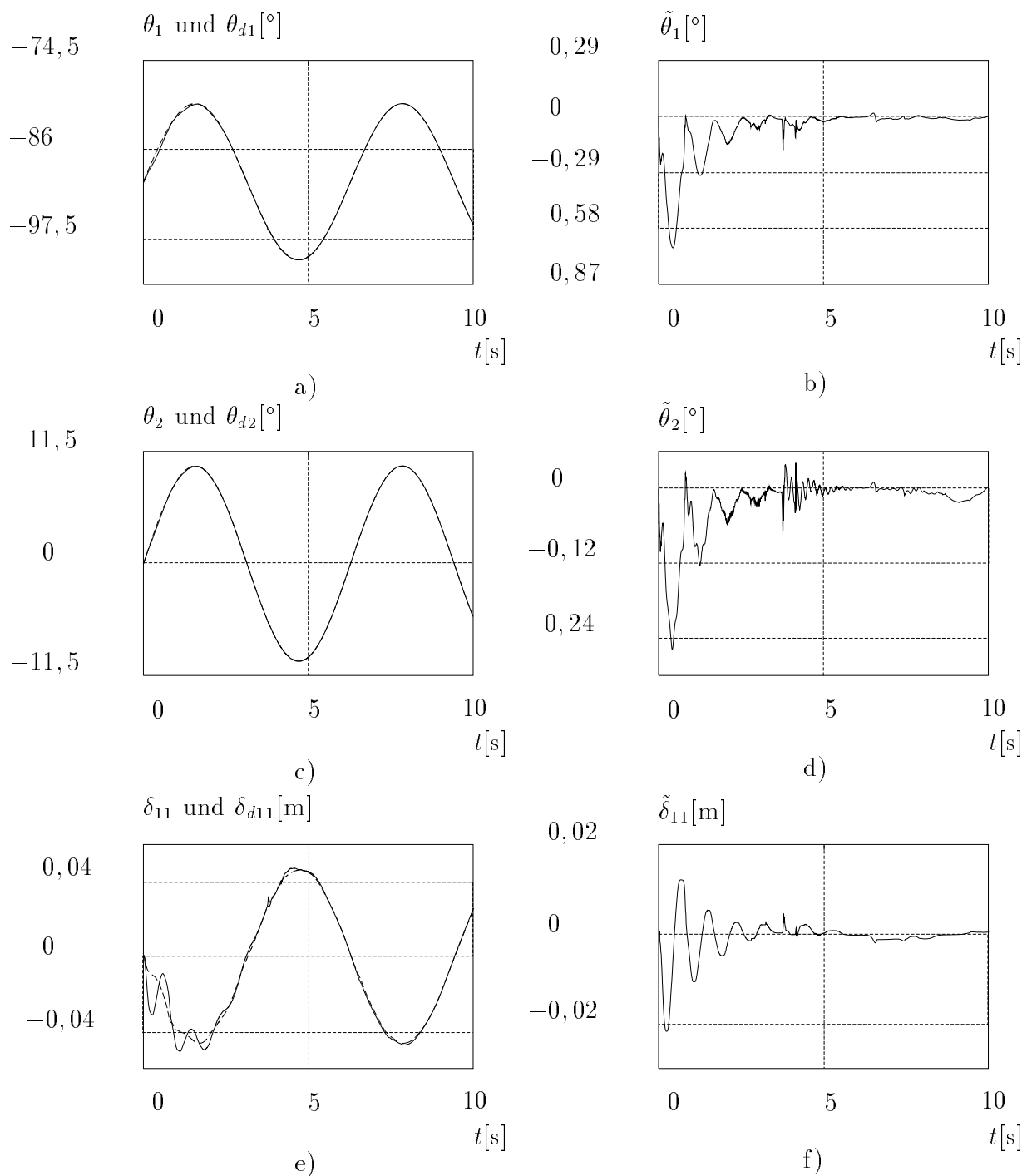


**Bild 3.16:** Simulationsergebnisse eines elastischen Roboters.

Konstante Soll-Bahn für die starren Koordinaten. Regler (3.23) zusammen mit Gl. (3.57).

a) Eingang  $\tau_1$ ;

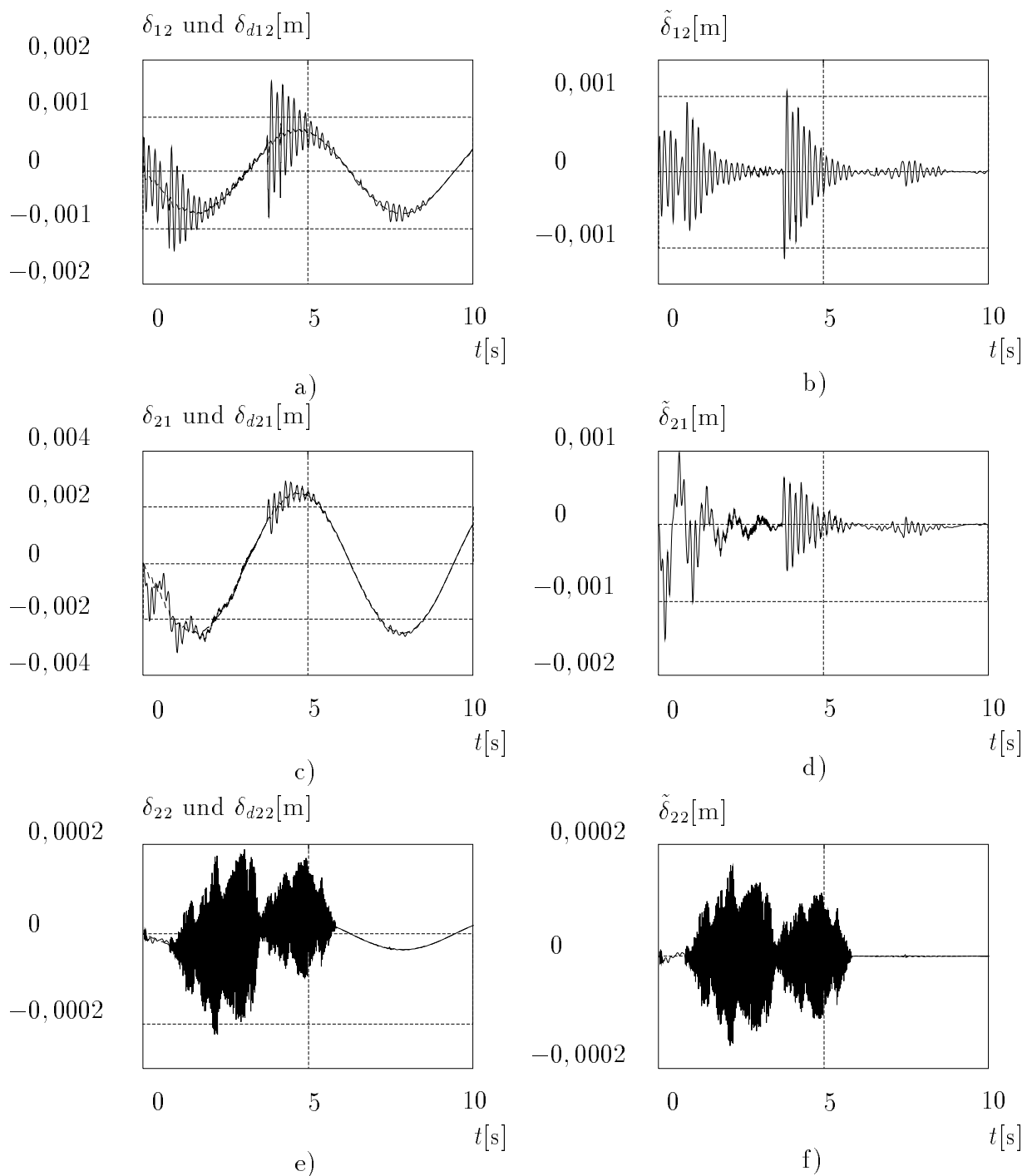
b) Eingang  $\tau_2$ .



**Bild 3.17:** Simulationsergebnisse eines elastischen Roboters.

Sinusförmige Soll-Bahn für die starren Koordinaten. Regler (3.23) zusammen mit Gl. (3.57).

- a) Koordinate  $\theta_1$  (—) und deren Soll-Bahn  $\theta_{d1}$  (- - -);
- b) Fehlerverlauf  $\tilde{\theta}_1$ ;
- c) Koordinate  $\theta_2$  (—) und deren Soll-Bahn  $\theta_{d2}$  (- - -);
- d) Fehlerverlauf  $\tilde{\theta}_2$ ;
- e) Koordinate  $\delta_{11}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d11}$  (- - -);
- f) Fehlerverlauf  $\tilde{\delta}_{11}$ .



**Bild 3.18:** Simulationsergebnisse eines elastischen Roboters.

Sinusförmige Soll-Bahn für die starren Koordinaten. Regler (3.23) zusammen mit Gl. (3.57).

a) Koordinate  $\delta_{12}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d12}$  (- - -);

b) Fehlerverlauf  $\tilde{\delta}_{12}$ ;

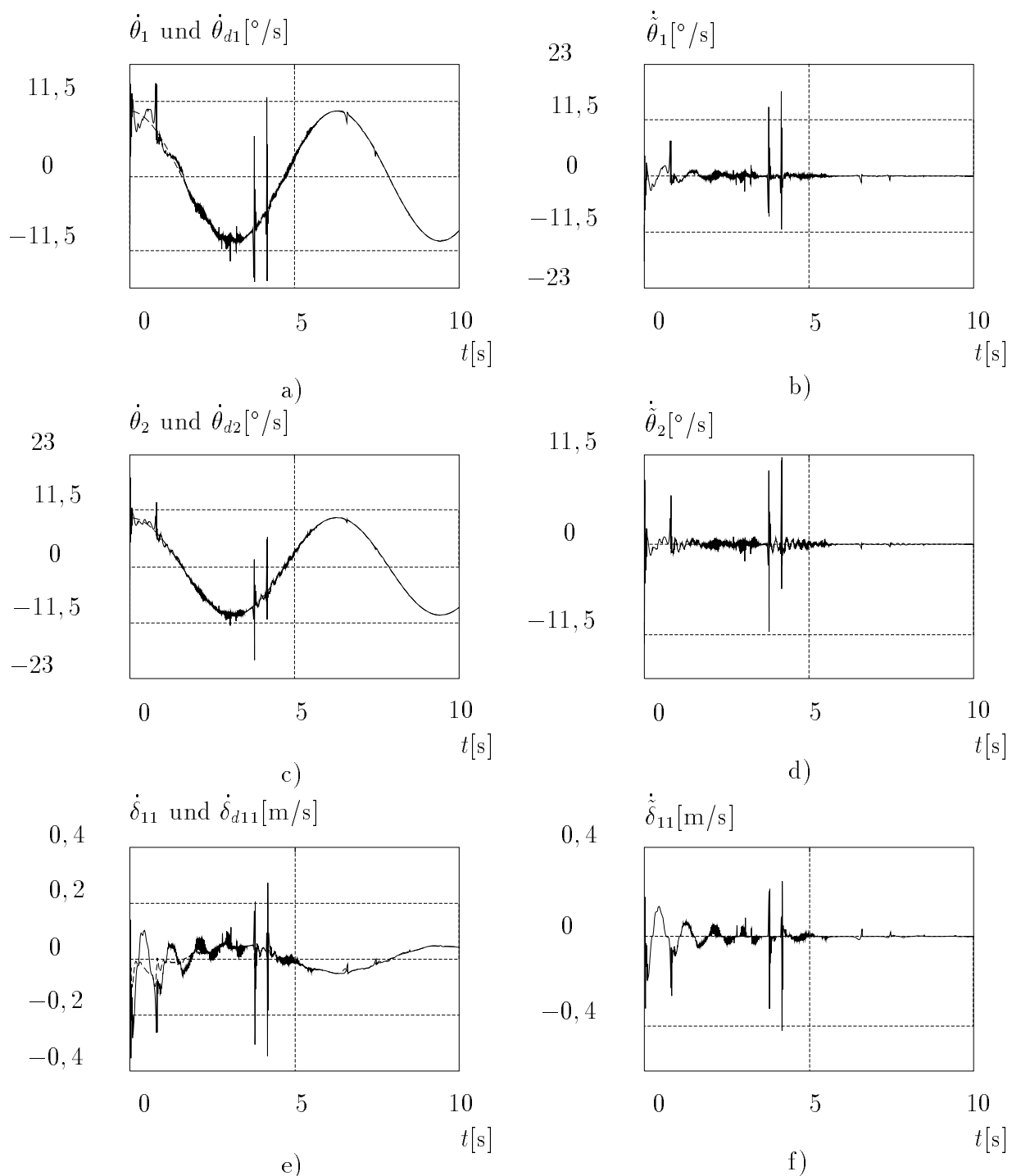
c) Koordinate  $\delta_{21}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d21}$  (- - -);

d) Fehlerverlauf  $\tilde{\delta}_{21}$ ;

e) Koordinate  $\delta_{22}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d22}$  (- - -);

f) Fehlerverlauf  $\tilde{\delta}_{22}$ .

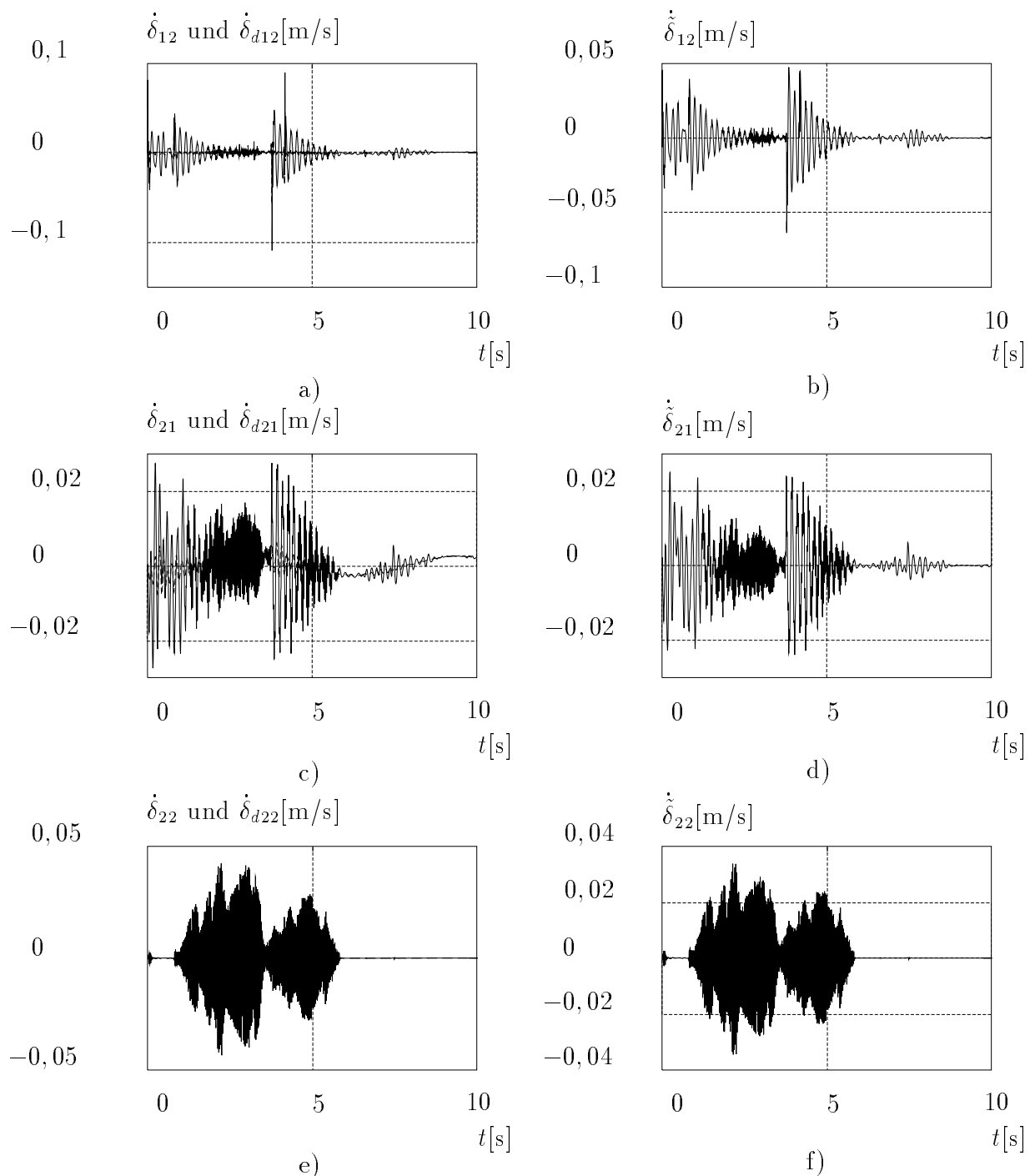




**Bild 3.19:** Simulationsergebnisse eines elastischen Roboters.

Sinusförmige Soll-Bahn für die starren Koordinaten. Regler (3.23) zusammen mit Gl. (3.57).

- a) Koordinate  $\dot{\theta}_1$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\theta}_{d1}$  (- - -);
- b) Fehlerverlauf  $\dot{\theta}_1$ ;
- c) Koordinate  $\dot{\theta}_2$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\theta}_{d2}$  (- - -);
- d) Fehlerverlauf  $\dot{\theta}_2$ ;
- e) Koordinate  $\dot{\delta}_{11}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d11}$  (- - -);
- f) Fehlerverlauf  $\dot{\delta}_{11}$ .



**Bild 3.20:** Simulationsergebnisse eines elastischen Roboters.

Sinusförmige Soll-Bahn für die starren Koordinaten. Regler (3.23) zusammen mit Gl. (3.57).

a) Koordinate  $\dot{\delta}_{12}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d12}$  (- - -);

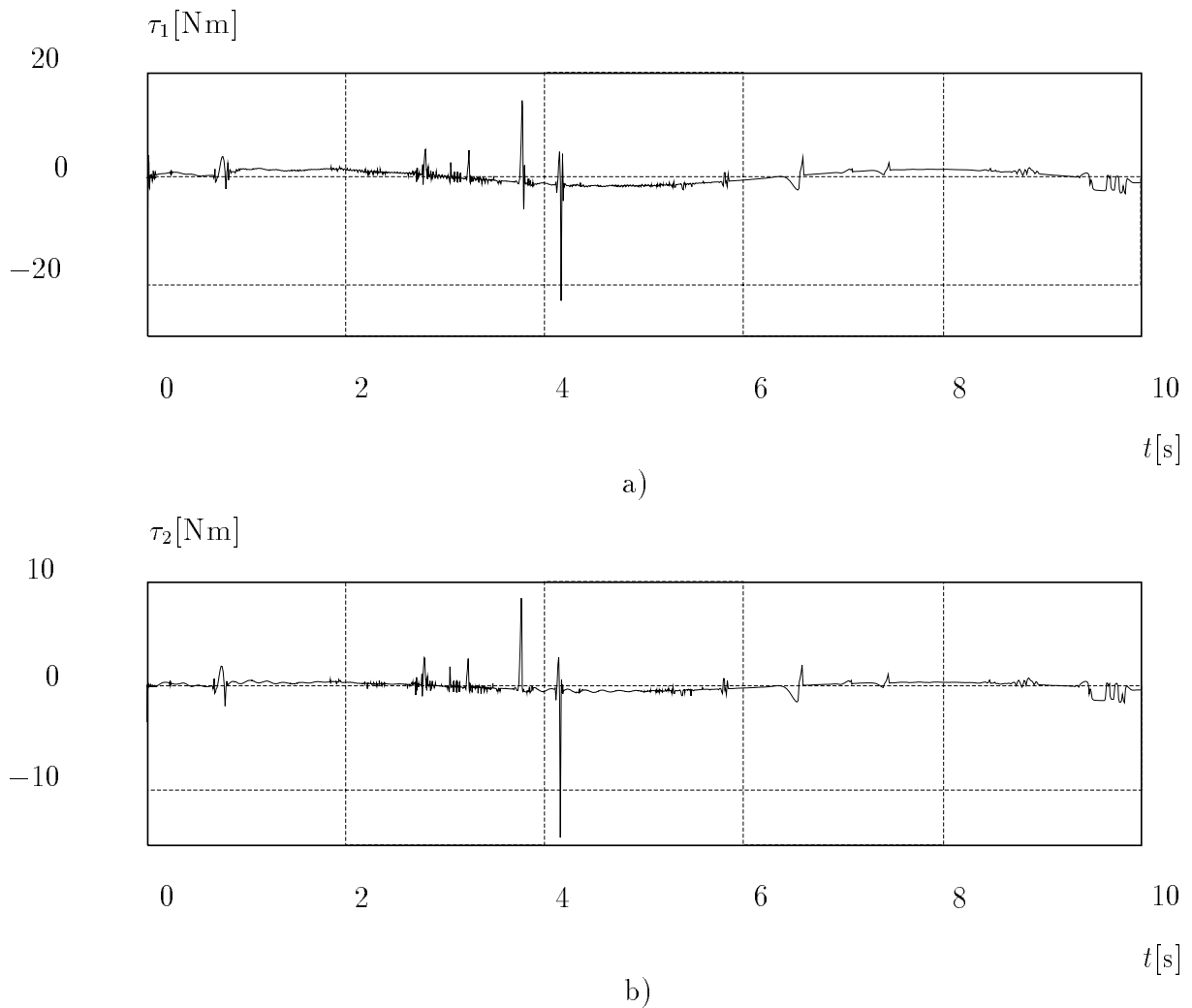
b) Fehlerverlauf  $\dot{\delta}_{12}$ ;

c) Koordinate  $\dot{\delta}_{21}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d21}$  (- - -);

d) Fehlerverlauf  $\dot{\delta}_{21}$ ;

e) Koordinate  $\dot{\delta}_{22}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d22}$  (- - -);

f) Fehlerverlauf  $\dot{\delta}_{22}$ .



**Bild 3.21:** Simulationsergebnisse eines elastischen Roboters.

Sinusförmige Soll-Bahn für die starren Koordinaten. Regler (3.23) zusammen mit Gl. (3.57).

a) Eingang  $\tau_1$ ;

b) Eingang  $\tau_2$ .

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

Im vorliegenden Forschungsbericht wird die Auslegung eines nichtlinearen Reglers für elastische Roboter diskutiert. Der Regler basiert auf einem bekannten Regler für starre Roboter. Dessen Ziel ist prinzipiell die Bahnverfolgung der starren Koordinaten. Hierbei ist eine Soll-Bahn für die elastischen Koordinaten zu berechnen, da diese nicht beliebig auszuwählen sind. Die Stabilitätsanalyse nutzt die Ljapunov-Theorie aus. Es ist anzumerken, daß physikalische Eigenschaften des Roboters verwendet werden, um eine Ljapunov-Funktion zu finden und deren Ableitung zu berechnen. Um den Regler zu testen, wird ein räumlicher elastischer Roboter mit zwei Gliedern zusammen mit dem Regler simuliert.

Da die resultierende Soll-Bahn für die elastischen Koordinaten bei diesem Regler nur von der Dynamik des elastischen Roboters abhängt, ist dieser nicht in der Lage, Schwingungen zu bekämpfen. Um dieses Problem zu lösen, wird die Berechnung der Soll-Bahn für die elastischen Koordinaten modifiziert. Damit kann der Regler das ganze System dämpfen, auch wenn die Dämpfung des Roboters Null wäre. Hauptidee ist es dabei die Schwingungen der Soll-Bahn zu unterdrücken, während der Verfolgungsfehler immer noch gegen Null konvergiert. Letzteres wurde mittels eines Satzes der robusten Regelung durchgeführt, da die Dämpfung für die Soll-Bahn der elastischen Koordinaten als eine Störung für das gesamte System betrachtet werden kann. Die Simulationsergebnisse sind als gut zu bezeichnen, da die Schwingungen eines Roboters ohne Dämpfung in weniger als 10 Sekunden abklingen. Wie schnell sich die Schwingungen unterdrücken lassen, hängt von den Parametern  $\epsilon_{ij}$  und  $\beta_{ij}$  des Reglers ab. Je kleiner die  $\epsilon_{ij}$  oder je größer die  $\beta_{ij}$  sind, desto besser gedämpft. Trotzdem soll man bei einem physikalischen System aufpassen, da die nicht modellierten höheren Eigenfrequenzen auftreten könnten, wenn die  $\epsilon_{ij}$  zu klein bzw. die  $\beta_{ij}$  zu groß gewählt werden. Da jedoch jedes physikalischen System immer gedämpft ist, sollte es keine Notwendigkeit geben, diese Parameter zu gering bzw. zu groß einzustellen.

Für die Reglerauslegung wird vorausgesetzt, daß alle verallgemeinerten Koordinaten zusammen mit deren Ableitungen nach der Zeit zur Verfügung stehen. Da letzteres bei direkter Messung nicht zu erreichen ist, soll ein Beobachter verwendet werden. In diesem Fall gibt keine Garantie, daß das gesamte System immer noch stabil bleibt. Als zukünftige Arbeit ist die Stabilität der in diesem Bericht vorgeschlagenen Regler zusammen mit einem Beobachter zu untersuchen.

Der Verfasser dankt dem DAAD für seine Unterstützung.

## 5 Literaturverzeichnis

- Arteaga Pérez, M. A.** 1995a. *Zur Positionsbestimmung bei elastischen Robotern*. Forschungsbericht Nr. 9/95. MSRT. Universität Duisburg.
- Arteaga Pérez, M. A.** 1995b. *Über die Eigenschaften des Modells eines elastischen Roboters*. Forschungsbericht Nr. 17/95. MSRT. Universität Duisburg.
- Arteaga Pérez, M. A.** 1996a. A Nonlinear Observer for Flexible Robot Arms. *Proceedings of 4th IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation*. Maleme, Krete. Greece. 144–149.
- Arteaga Pérez, M. A.** 1996b. *Nichtlineare Beobachter für elastische Roboter*. Forschungsbericht Nr. 4/96. MSRT. Universität Duisburg.
- Bernzen, W.** 1996. *Ein Ansatz zur Schwingungsdämpfung eines elastischen Roboterarms*. Forschungsbericht Nr. 13/96. MSRT. Universität Duisburg.
- Canudas de Wit, C., K. J. Åström und N. Fixot.** 1990. Computed Torque Control via a Non-linear Observer. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 4. 443–452.
- Canudas de Wit, C., N. Fixot und K. J. Åström.** 1992. Trajectory Tracking in Robot Manipulators via Nonlinear Estimated State Feedback. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 8(1). 138–144.
- Corless, M. J. und G. Leitmann.** 1981. Continuous State Feedback Guaranteeing Uniform Ultimate Boundedness for Uncertain Dynamic Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 26. 1139–1144.
- Dawson, D. M., Z. Qu und S. Lim.** 1991. Re-thinking the Robust Control of Robot Manipulators. *Proceedings of 30th Conference on Decision and Control, IEEE*. Brighton. England. 1043–1045.
- De Luca, A. und S. Panzieri.** 1994. An Iterative Scheme for Learning Gravity Compensation in Flexible Robot Arms. *Automatica* 30(6). 993–1002.
- De Luca, A. und B. Siciliano.** 1991. Closed-Form Dynamic Model of Planar Multilink Lightweight Robots. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 21(4). 826–839.
- De Luca, A. und B. Siciliano.** 1993a. Inversion-Based Nonlinear Control of Robot Arms with Flexible Links. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 16(6). 1169–1176.
- De Luca, A. und B. Siciliano.** 1993b. Regulation of Flexible Arms Under Gravity. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 9(4). 463–467.

- Desoer, C. A.** und **M. Vidyasagar.** 1975. *Feedback Systems: Input–Output Properties.* New York: Academic Press.
- Feng, W.** und **I. Postlethwaite.** 1993. A Simple Robust Control Scheme for Robot Manipulators With Only Joint Position Measurements. *The International Journal of Robotics Research* 12(5). 490–496.
- Fu, K. S., R. C. Gonzalez** und **C. S. G. Lee.** 1989. *Robotic: Control, Sensing, Vision and Intelligence [In Spanisch].* México, D. F.: McGraw–Hill.
- Hahn, W.** 1967. *Stability of Motion.* USA: Springer–Verlag.
- Lammerts, I. M. M., F. E. Veldpaus, M. J. G. Van de Molengraft** und **J. J. Kok.** 1995. Adaptive Computed Reference Computed Torque Control of Flexible Robots. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Transactions of the ASME* 117. 31–36.
- Leitmann, G.** 1981. On the Efficacy of Nonlinear Control in Uncertain Linear Systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Transactions of the ASME* 102. 95–102.
- Nicosia, S.** und **P. Tomei.** 1990. Robot Control by Using Only Joint Position Measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control* 35(9). 1058–1061.
- Ortega, R.** und **M. W. Spong.** 1989. Adaptive Motion Control of Rigid Robots: a Tutorial. *Automatica* 25(6). 877–888.
- Qu, Z.** 1994. Global Stability of Trajectory Tracking of Robot under PD Control. *Dynamics and Control* 4. 59–71.
- Qu, Z.** und **D. M. Dawson.** 1991. Continuous State Feedback Control Guaranteeing Exponential Stability for Uncertain Dynamical Systems. *Proceedings of 30th Conference on Decision and Control, IEEE.* Brighton. England. 2636–2638.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme: Systemtheoretische Grundlagen.* München; Wien: Oldenbourg.
- Slotine, J. J. E.** 1988. Putting Physics in Control – The Example of Robotics. *IEEE Control Systems Magazine* 8(4). 12–17.
- Slotine, J. J. E.** und **W. Li.** 1987. On the Adaptive Control of Robot Manipulators. *The International Journal of Robotics Research* 6(3). 49–59.
- Slotine, J. J. E.** und **W. Li.** 1988. Adaptive Manipulator Control: A Case Study. *IEEE Transactions on Automatic Control* 33(11). 995–1003.

- 
- Slotine, J. J. E.** und **W. Li.** 1991. *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice–Hall.
- Spong, M. W.** 1992. On the Robust Control of Robot Manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control* 37(11). 1782–1786.
- Spong, M. W., R. Ortega** und **R. Kelly.** 1990. Comments on „Adaptive Manipulator Control: A Case Study“. *IEEE Transactions on Automatic Control* 35(6). 761–762.
- Spong, M. W.** und **M. Vidyasagar.** 1989. *Robot Dynamics and Control*. New York: John Wiley & Sons.
- Tang, Y.** und **M. A. Arteaga Pérez.** 1994. Adaptive Control of Robot Manipulators Based on Passivity. *IEEE Transactions on Automatic Control* 39(9). 1871–1875.
- Vidyasagar, M.** 1978. *Nonlinear Systems Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice–Hall.
- Yaz, E.** 1993. Comments on „On the Robust Control of Robot Manipulators“. *IEEE Transactions on Automatic Control* 38(3). 511–512.

## 6 Modell eines zweiachsigen elastischen Roboters

Das Modell, das im Kapitel 3 dieses Forschungsberichtes für Simulationen benutzt wurde, wurde zuerst von De Luca und Siciliano (1991) entwickelt, um die Dynamik eines in der Ebene bewegten elastischen Roboters mit zwei elastischen Gliedern zu beschreiben. Dieses Modell wird in De Luca und Siciliano (1993b) modifiziert, um einen Gravitations-term einzufügen (Bild 3.1). Um die Elastizität zu berücksichtigen, werden zwei elastische Freiheitsgrade pro Glied angenommen, d. h. es gibt zwei verallgemeinerte starre und vier verallgemeinerte elastische Koordinaten. In diesem Anhang werden die Parameter des Modells angegeben, das in Matrixform lautet:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_e \mathbf{q} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} .$$

Die Elemente der symmetrischen Matrix  $\mathbf{H}$  sind durch

$$H_{11} = m_{111} + m_{112}c_2 + (m_{113}t_1 + m_{114}t_2)s_2 ,$$

$$H_{12} = m_{121} + m_{122}c_2 + (m_{123}t_1 + m_{124}t_2)s_2 ,$$

$$H_{13} = m_{131} + m_{132}c_2 + (m_{133}t_2 + m_{134}\delta_{12})s_2 ,$$

$$H_{14} = m_{141} + m_{142}c_2 + (m_{143}t_2 + m_{144}\delta_{11})s_2 ,$$

$$H_{15} = m_{151} + m_{152}c_2 + m_{153}t_1s_2 ,$$

$$H_{16} = m_{161} + m_{162}c_2 + m_{163}t_1s_2 ,$$

$$H_{22} = m_{221} ,$$

$$H_{23} = m_{231} + m_{232}c_2 + (m_{233}t_2 + m_{234}t_3)s_2 ,$$

$$H_{24} = m_{241} + m_{242}c_2 + (m_{243}t_2 + m_{244}t_3)s_2 ,$$

$$H_{25} = m_{251} ,$$

$$H_{26} = m_{261} ,$$

$$H_{33} = m_{331} + m_{332}c_2 + m_{333}t_2s_2 ,$$

$$H_{34} = m_{341} + m_{342}c_2 + m_{343}t_2s_2 ,$$

$$H_{35} = m_{351} + m_{352}c_2 + m_{353}t_3s_2 ,$$

$$H_{36} = m_{361} + m_{362}c_2 + m_{363}t_3s_2 ,$$

$$H_{44} = m_{441} + m_{442}c_2 + m_{443}t_2s_2 ,$$

$$H_{45} = m_{451} + m_{452}c_2 + m_{453}t_3s_2 ,$$

$$H_{46} = m_{461} + m_{462}c_2 + m_{463}t_3s_2 ,$$

$$H_{55} = m_{551} ,$$

$$H_{56} = m_{561} ,$$

$$H_{66} = m_{661}$$

gegeben, wobei

$$s_1 \stackrel{\Delta}{=} \sin(q_{10}) ,$$



$$\begin{aligned}
s_2 &\stackrel{\Delta}{=} \sin(q_{20}) \quad , \\
c_1 &\stackrel{\Delta}{=} \cos(q_{10}) \quad , \\
c_2 &\stackrel{\Delta}{=} \cos(q_{20}) \quad , \\
s_{12} &\stackrel{\Delta}{=} \sin(q_{10} + q_{20}) \quad , \\
c_{12} &\stackrel{\Delta}{=} \cos(q_{10} + q_{20}) \quad , \\
t_1 &\stackrel{\Delta}{=} t_{11}\delta_{11} + t_{12}\delta_{12} \quad , \\
t_2 &\stackrel{\Delta}{=} t_{21}\delta_{21} + t_{22}\delta_{22} \quad , \\
t_3 &\stackrel{\Delta}{=} t_{31}\delta_{11} + t_{32}\delta_{12} \quad , \\
t_{11} &= \phi_{11e} - l_1\phi'_{11e} \quad , \\
t_{12} &= \phi_{12e} - l_1\phi'_{12e} \quad , \\
t_{21} &= v_{21} + M_p\phi_{21e} \quad , \\
t_{22} &= v_{22} + M_p\phi_{22e} \quad , \\
t_{31} &= \phi'_{11e} \quad , \\
t_{32} &= \phi'_{12e} \quad , \\
m_{111} &= J_{h1} + J_{o1} + J_{h2} + M_{h2}l_1^2 + J_{o2} + M_2l_1^2 + J_p + M_p(l_1^2 + l_2^2) \quad , \\
m_{112} &= 2(M_2d_2 + M_p l_2)l_1 \quad , \\
m_{113} &= 2(M_2d_2 + M_p l_2) \quad , \\
m_{114} &= -2l_1 \quad , \\
m_{121} &= J_{h2} + J_{o2} + J_p + M_p l_2^2 \quad , \\
m_{122} &= (M_2d_2 + M_p l_2)l_1 \quad , \\
m_{123} &= M_2d_2 + M_p l_2 \quad , \\
m_{124} &= -l_1 \quad , \\
m_{131} &= w_{11} + (J_{h2} + J_{o2} + J_p + M_p l_2^2)\phi'_{11e} + (M_{h2} + M_2 + M_p)l_1\phi_{11e} \quad , \\
m_{132} &= (M_2d_2 + M_p l_2)(\phi_{11e} + l_1\phi'_{11e}) \quad , \\
m_{133} &= -(\phi_{11e} + l_1\phi'_{11e}) \quad , \\
m_{134} &= -(M_2d_2 + M_p l_2)(\phi_{11e}\phi'_{12e} - \phi_{12e}\phi'_{11e}) \quad , \\
m_{141} &= w_{12} + (J_{h2} + J_{o2} + J_p + M_p l_2^2)\phi'_{12e} + (M_{h2} + M_2 + M_p)l_1\phi_{12e} \quad , \\
m_{142} &= (M_2d_2 + M_p l_2)(\phi_{12e} + l_1\phi'_{12e}) \quad , \\
m_{143} &= -(\phi_{12e} + l_1\phi'_{12e}) \quad , \\
m_{144} &= -(M_2d_2 + M_p l_2)(\phi_{12e}\phi'_{11e} - \phi_{11e}\phi'_{12e}) \quad , \\
m_{151} &= w_{21} + J_p\phi'_{21e} + M_p l_2\phi_{21e} \quad , \\
m_{152} &= (v_{21} + M_p\phi_{21e})l_1 \quad , \\
m_{153} &= v_{21} + M_p\phi_{21e} \quad , \\
m_{161} &= w_{22} + J_p\phi'_{22e} + M_p l_2\phi_{22e} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{162} &= (v_{22} + M_p \phi_{22e}) l_1 \quad , \\
m_{163} &= v_{22} + M_p \phi_{22e} \quad , \\
m_{221} &= J_{h2} + J_{o2} + J_p + M_p l_2^2 \quad , \\
m_{231} &= (J_{h2} + J_{o2} + J_p + M_p l_2^2) \phi'_{11e} \quad , \\
m_{232} &= (M_2 d_2 + M_p l_2) \phi_{11e} \quad , \\
m_{233} &= -\phi_{11e} \quad , \\
m_{234} &= -(M_2 d_2 + M_p l_2) \phi_{11e} \quad , \\
m_{241} &= (J_{h2} + J_{o2} + J_p + M_p l_2^2) \phi'_{12e} \quad , \\
m_{242} &= (M_2 d_2 + M_p l_2) \phi_{12e} \quad , \\
m_{243} &= -\phi_{12e} \quad , \\
m_{244} &= -(M_2 d_2 + M_p l_2) \phi_{12e} \quad , \\
m_{251} &= w_{21} + J_p \phi'_{21e} + M_p l_2 \phi_{21e} \quad , \\
m_{261} &= w_{22} + J_p \phi'_{22e} + M_p l_2 \phi_{22e} \quad , \\
m_{331} &= M_1 \quad , \\
m_{332} &= 2(M_2 d_2 + M_p l_2) \phi_{11e} \phi'_{11e} \quad , \\
m_{333} &= -2\phi_{11e} \phi'_{11e} \quad , \\
m_{341} &= 0 \quad , \\
m_{342} &= (M_2 d_2 + M_p l_2) (\phi_{11e} \phi'_{12e} + \phi_{12e} \phi'_{11e}) \quad , \\
m_{343} &= -(\phi_{11e} \phi'_{12e} + \phi_{12e} \phi'_{11e}) \quad , \\
m_{351} &= (w_{21} + J_p \phi'_{21e} + M_p l_2 \phi_{21e}) \phi'_{11e} \quad , \\
m_{352} &= (v_{21} + M_p \phi_{21e}) \phi_{11e} \quad , \\
m_{353} &= -(v_{21} + M_p \phi_{21e}) \phi_{11e} \quad , \\
m_{361} &= (w_{22} + J_p \phi'_{22e} + M_p l_2 \phi_{22e}) \phi'_{11e} \quad , \\
m_{362} &= (v_{22} + M_p \phi_{22e}) \phi_{11e} \quad , \\
m_{363} &= -(v_{22} + M_p \phi_{22e}) \phi_{11e} \quad , \\
m_{441} &= M_1 \quad , \\
m_{442} &= 2(M_2 d_2 + M_p l_2) \phi_{12e} \phi'_{12e} \quad , \\
m_{443} &= -2\phi_{12e} \phi'_{12e} \quad , \\
m_{451} &= (w_{21} + J_p \phi'_{21e} + M_p l_2 \phi_{21e}) \phi'_{12e} \quad , \\
m_{452} &= (v_{21} + M_p \phi_{21e}) \phi_{12e} \quad , \\
m_{453} &= -(v_{21} + M_p \phi_{21e}) \phi_{12e} \quad , \\
m_{461} &= (w_{22} + J_p \phi'_{22e} + M_p l_2 \phi_{22e}) \phi'_{12e} \quad , \\
m_{462} &= (v_{22} + M_p \phi_{22e}) \phi_{12e} \quad , \\
m_{463} &= -(v_{22} + M_p \phi_{22e}) \phi_{12e} \quad , \\
m_{551} &= M_2 \quad ,
\end{aligned}$$

$$m_{561} = 0 \quad ,$$

$$m_{661} = M_2$$

gilt. Die folgenden Parameter sind verschieden von denen in De Luca und Siciliano (1991) angegebenen:

$$\rho_1 = 1,0 \text{ kg/m} \quad ,$$

$$\rho_2 = 1,0 \text{ kg/m} \quad ,$$

$$l_1 = 0,5 \text{ m} \quad ,$$

$$l_2 = 0,5 \text{ m} \quad ,$$

$$d_1 = 0,25 \text{ m} \quad ,$$

$$d_2 = 0,25 \text{ m} \quad ,$$

$$M_1 = 0,5 \text{ kg} \quad ,$$

$$M_2 = 0,5 \text{ kg} \quad ,$$

$$M_p = 0,1 \text{ kg} \quad ,$$

$$M_{h1} = 1 \text{ kg} \quad ,$$

$$M_{h2} = 1 \text{ kg} \quad ,$$

$$J_{o1} = 0,0083 \text{ kg m}^2 \quad ,$$

$$J_{o2} = 0,0083 \text{ kg m}^2 \quad ,$$

$$J_{h1} = 0,1 \text{ kg m}^2 \quad ,$$

$$J_{h2} = 0,1 \text{ kg m}^2 \quad ,$$

$$J_p = 0,0005 \text{ kg m}^2 \quad ,$$

$$EI_1 = 10 \text{ N m}^2 \quad ,$$

$$EI_2 = 10 \text{ N m}^2 \quad ,$$

$$\phi_{11e} = 0,39 \quad ,$$

$$\phi_{12e} = 0,36 \quad ,$$

$$\phi'_{11e} = 1,34 \quad ,$$

$$\phi'_{12e} = -1,38 \quad ,$$

$$\phi_{21e} = 1,49 \quad ,$$

$$\phi_{22e} = -0,75 \quad ,$$

$$\phi'_{21e} = 4,30 \quad ,$$

$$\phi'_{22e} = -15,49 \quad ,$$

$$v_{11} = 0,069 \quad ,$$

$$v_{12} = 0,12 \quad ,$$

$$v_{21} = 0,28 \quad ,$$

$$v_{22} = 0,30 \quad ,$$

$$\phi_{ije} = \phi_{ij}(l_i) \quad ,$$

$$\phi'_{ije} = \frac{d\phi_{ij}(l_i)}{dx} .$$

Die Parameter  $w_{11}, w_{12}, w_{21}$  und  $w_{22}$  sind in De Luca und Siciliano (1993) nicht angegeben, aber sie lassen sich durch

$$w_{ij} = \int_0^{l_i} \rho_i \phi_{ij}(x_i) x_i dx_i$$

berechnen (De Luca und Siciliano 1991), wodurch sich

$$\begin{aligned} w_{11} &= 0,026 \quad , \\ w_{12} &= 0,0405 \quad , \\ w_{21} &= 0,104 \quad , \\ w_{22} &= 0,073 \end{aligned}$$

ergibt. Die Elemente des Coriolis- und Zentrifugalkraftvektors  $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  sind durch

$$\begin{aligned} h_1 &= ((h_{101}\dot{q}_{20} + h_{102}\dot{\delta}_{11} + h_{103}\dot{\delta}_{12} + h_{104}\dot{\delta}_{21} + h_{105}\dot{\delta}_{22})\dot{q}_{10} \\ &+ (h_{106}\dot{q}_{20} + h_{107}\dot{\delta}_{11} + h_{108}\dot{\delta}_{12} + h_{109}\dot{\delta}_{21} + h_{110}\dot{\delta}_{22})\dot{q}_{20} \\ &+ (h_{111}\dot{\delta}_{21} + h_{112}\dot{\delta}_{22})\dot{\delta}_{11} + (h_{113}\dot{\delta}_{21} + h_{114}\dot{\delta}_{22})\dot{\delta}_{12})s_2 \\ &+ ((h_{115}\dot{q}_{10} + h_{116}\dot{q}_{20} + h_{117}\dot{\delta}_{21} + h_{118}\dot{\delta}_{22})t_1 \\ &+ (h_{119}\dot{q}_{10} + h_{120}\dot{q}_{20} + h_{121}\dot{\delta}_{11} + h_{122}\dot{\delta}_{12})t_2 \\ &+ h_{123}\delta_{12}\dot{\delta}_{11} + h_{124}\delta_{11}\dot{\delta}_{12})\dot{q}_{20}c_2 \quad , \\ h_2 &= (h_{201}\dot{q}_{10} + h_{202}\dot{\delta}_{11} + h_{203}\dot{\delta}_{12})\dot{q}_{10}s_2 \\ &+ (((h_{204}\dot{q}_{10} + h_{205}\dot{\delta}_{21} + h_{206}\dot{\delta}_{22})t_1 \\ &+ (h_{207}\dot{q}_{10} + h_{208}\dot{\delta}_{11} + h_{209}\dot{\delta}_{12})t_2 \\ &+ h_{210}\delta_{12}\dot{\delta}_{11} + h_{211}\delta_{11}\dot{\delta}_{12})\dot{q}_{10} \\ &+ (((h_{212}\dot{\delta}_{11} + h_{213}\dot{\delta}_{12})t_2 + (h_{214}\dot{\delta}_{21} + h_{215}\dot{\delta}_{22})t_3)\dot{\delta}_{11} \\ &+ (h_{216}\dot{\delta}_{12}t_2 + (h_{217}\dot{\delta}_{21} + h_{218}\dot{\delta}_{22})t_3)\dot{\delta}_{12}))c_2 \quad , \\ h_3 &= ((h_{301}\dot{q}_{10} + h_{302}\dot{q}_{20} + h_{303}\dot{\delta}_{12} + h_{304}\dot{\delta}_{21} + h_{305}\dot{\delta}_{22})\dot{q}_{10} \\ &+ (h_{306}\dot{q}_{20} + h_{307}\dot{\delta}_{11} + h_{308}\dot{\delta}_{12} + h_{309}\dot{\delta}_{21} + h_{310}\dot{\delta}_{22})\dot{q}_{20} \\ &+ (h_{311}\dot{\delta}_{21} + h_{312}\dot{\delta}_{22})\dot{\delta}_{11} + (h_{313}\dot{\delta}_{21} + h_{314}\dot{\delta}_{22})\dot{\delta}_{12})s_2 \\ &+ ((h_{315}\dot{q}_{10} + h_{316}\dot{q}_{20} + h_{317}\dot{\delta}_{11} + h_{318}\dot{\delta}_{12})t_2 \\ &+ (h_{319}\dot{q}_{20} + h_{320}\dot{\delta}_{21} + h_{321}\dot{\delta}_{22})t_3 \\ &+ h_{322}\delta_{12}\dot{q}_{10})\dot{q}_{20}c_2 \quad , \\ h_4 &= ((h_{401}\dot{q}_{10} + h_{402}\dot{q}_{20} + h_{403}\dot{\delta}_{11} + h_{404}\dot{\delta}_{21} + h_{405}\dot{\delta}_{22})\dot{q}_{10} \\ &+ (h_{406}\dot{q}_{20} + h_{407}\dot{\delta}_{11} + h_{408}\dot{\delta}_{12} + h_{409}\dot{\delta}_{21} + h_{410}\dot{\delta}_{22})\dot{q}_{20} \\ &+ (h_{411}\dot{\delta}_{21} + h_{412}\dot{\delta}_{22})\dot{\delta}_{11} + (h_{413}\dot{\delta}_{21} + h_{414}\dot{\delta}_{22})\dot{\delta}_{12})s_2 \\ &+ ((h_{415}\dot{q}_{10} + h_{416}\dot{q}_{20} + h_{417}\dot{\delta}_{11} + h_{418}\dot{\delta}_{12})t_2 \\ &+ (h_{419}\dot{q}_{20} + h_{420}\dot{\delta}_{21} + h_{421}\dot{\delta}_{22})t_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + h_{422}\delta_{11}\dot{q}_{10})\dot{q}_{20}c_2 \quad , \\
h_5 & = (h_{501}\dot{q}_{10} + h_{502}\dot{\delta}_{11} + h_{503}\dot{\delta}_{12})\dot{q}_{10}s_2 \\
& + (h_{504}t_1\dot{q}_{10} + (h_{505}\dot{\delta}_{11} + h_{506}\dot{\delta}_{12})t_3)\dot{q}_{20}c_2 \quad , \\
h_6 & = (h_{601}\dot{q}_{10} + h_{602}\dot{\delta}_{11} + h_{603}\dot{\delta}_{12})\dot{q}_{10}s_2 \\
& + (h_{604}t_1\dot{q}_{10} + (h_{605}\dot{\delta}_{11} + h_{606}\dot{\delta}_{12})t_3)\dot{q}_{20}c_2
\end{aligned}$$

gegeben. Für die Eigenfrequenzen der elastischen Glieder gilt:

$$\begin{aligned}
\omega_{11} & = 2\pi 1,40 \quad , \\
\omega_{12} & = 2\pi 5,10 \quad , \\
\omega_{21} & = 2\pi 5,21 \quad , \\
\omega_{22} & = 2\pi 32,46 \quad .
\end{aligned}$$

Die Elemente der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  und der Matrix der viskosen Gelenkreibung und der Strukturdämpfung der Glieder  $\mathbf{D}$  sind

$$\begin{aligned}
k_{11} & = \omega_{11}^2 M_1 \quad , \\
k_{22} & = \omega_{12}^2 M_1 \quad , \\
k_{33} & = \omega_{21}^2 M_2 \quad , \\
k_{44} & = \omega_{22}^2 M_2 \quad , \\
d_{11} & = 0 \quad , \\
d_{22} & = 0 \quad , \\
d_{33} & = 0,1\sqrt{k_{33}} \quad , \\
d_{44} & = 0,1\sqrt{k_{44}} \quad , \\
d_{55} & = 0,1\sqrt{k_{55}} \quad , \\
d_{66} & = 0,1\sqrt{k_{66}} \quad .
\end{aligned}$$

Die Elemente des Gravitationsvektors sind (De Luca und Siciliano 1993b):

$$\begin{aligned}
g_1 & = g_{11}c_1 + (g_{12}\delta_{11} + g_{13}\delta_{12})s_1 + g_{14}c_{12} + (g_{15}\delta_{11} + g_{16}\delta_{12} + g_{17}\delta_{21} + g_{18}\delta_{22})s_{12} \quad , \\
g_2 & = g_{21}c_{12} + (g_{22}\delta_{11} + g_{23}\delta_{12} + g_{24}\delta_{21} + g_{25}\delta_{22})s_{12} \quad , \\
g_3 & = g_{31}c_1 + g_{32}c_{12} \quad , \\
g_4 & = g_{41}c_1 + g_{42}c_{12} \quad , \\
g_5 & = g_{51}c_{12} \quad , \\
g_6 & = g_{61}c_{12} \quad ,
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
g & = 9,81\text{m/s}^2 \quad , \\
g_{11} & = g(M_1d_1 + (M_2 + M_{h2} + M_p)l_1) \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{12} &= -g((M_2 + M_{h2} + M_p)\phi_{11e} + v_{11}) \quad , \\
g_{13} &= -g((M_2 + M_{h2} + M_p)\phi_{12e} + v_{12}) \quad , \\
g_{14} &= g(M_2d_2 + M_pl_2) \quad , \\
g_{15} &= -g(M_2d_2 + M_pl_2)\phi'_{11e} \quad , \\
g_{16} &= -g(M_2d_2 + M_pl_2)\phi'_{12e} \quad , \\
g_{17} &= -g(M_p\phi_{21e} + v_{21}) \quad , \\
g_{18} &= -g(M_p\phi_{22e} + v_{22}) \quad , \\
g_{21} &= g(M_2d_2 + M_pl_2) \quad , \\
g_{22} &= -g(M_2d_2 + M_pl_2)\phi'_{11e} \quad , \\
g_{23} &= -g(M_2d_2 + M_pl_2)\phi'_{12e} \quad , \\
g_{24} &= -g(M_p\phi_{21e} + v_{21}) \quad , \\
g_{25} &= -g(M_p\phi_{22e} + v_{22}) \quad , \\
g_{31} &= g((M_2 + M_{h2} + M_p)\phi_{11e} + v_{11}) \quad , \\
g_{32} &= g(M_2d_2 + M_pl_2)\phi'_{11e} \quad , \\
g_{41} &= g((M_2 + M_{h2} + M_p)\phi_{12e} + v_{12}) \quad , \\
g_{42} &= g(M_2d_2 + M_pl_2)\phi'_{12e} \quad , \\
g_{51} &= g(M_p\phi_{21e} + v_{21}) \quad , \\
g_{61} &= g(M_p\phi_{22e} + v_{22})
\end{aligned}$$

gilt.