

Zur Störgrößenentkopplung nichtlinearer Mehrgrößensysteme

Markus Senger

Forschungsbericht Nr. 16/96

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Die Störgrößenentkoppelbarkeit ist in der Vergangenheit vielfach diskutiert worden. Daraus resultiert eine Reihe von verschiedenartigen Beschreibungen und Lösungen des Problems. Dieser Bericht stellt einige Ansätze zur Störsignalentkoppelbarkeit vor und diskutiert die Übertragbarkeit auf eine graphentheoretische Betrachtungsweise. Die graphentheoretische Betrachtung ist deshalb von Interesse, weil sie in vielen Fällen eine Behandlung von Systemen hoher Ordnung überhaupt erst ermöglicht oder aber zumindest eine signifikante Einsparung an Rechenzeit bedeutet. Ein besonderes Augenmerk wird in diesem Bericht zudem auf die Synthese der störsignalentkoppelnden Rückführung gelegt, da sie für die regelungstechnische Praxis das eigentliche Ziel der Untersuchungen zur Störsignalentkoppelbarkeit darstellt.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	II
1 Einleitung	1
2 Mathematische Grundlagen	2
2.1 Differentialgeometrische Begriffe	2
2.2 Differentialalgebraische Begriffe	3
2.3 Ranking	5
2.4 Graphen	5
3 Beschreibung des Entkopplungsproblems	7
3.1 Statische Störsignalentkopplung	7
3.2 Dynamische Störsignalentkopplung	8
4 Anwendungsbeispiele	14
4.1 Auswertung der differentialalgebraischen Bedingung	14
4.2 Anwendungen zur Bestimmung störentkoppelnder Rückführungen	17
4.3 Graphentheoretische Betrachtung	18
5 Zusammenfassung	24
6 Literaturverzeichnis	25
Anhang	27
A Definitionen	27
B Modell des Hydraulikdifferentialzylinders	28

Nomenklatur

Skalare Größen:

A	:	Kolbenfläche
φ	:	Kolbenflächenverhältnis
c_H	:	Kenngröße der Haftreibung
d	:	Differenzengrad
$E_{\text{Öl,A}}, E_{\text{Öl,B}}$:	Ölelastizitäten
F_V, F_C, F_H	:	Reibungskenngrößen
F_R	:	Reibkraft
$V_{\text{LA}}, V_{\text{LB}}$:	Ölvolumina
H	:	Kolbenhub
m	:	Ordnung des Eingangssignalvektors \mathbf{u}
m_K	:	Kolbenmasse
n	:	Ordnung des Zustandsvektors \mathbf{x}
p	:	Ordnung des Ausgangssignalvektors \mathbf{y}
q	:	Ordnung des Störsignalvektors \mathbf{w}
Q_A, Q_B	:	Volumenströme
u_i^1	:	i -te Eingangsgröße
v_i	:	i -te neue Eingangsgröße
V_A, V_B	:	Ölvolumina
$V_{\text{LA}}, V_{\text{LB}}$:	Ölvolumina in den Leitungen
w_i	:	i -te Störgröße
x_i	:	i -te Zustandsvariable
y_i	:	i -te Ausgangsgröße
$z_{i,j}$:	i -ter substituierter Knoten vor dem j -ten Eingang
ρ^*	:	differentieller Rang
$\rho_{\text{Öl}}$:	Dichte des Hydrauliköls
ρ_l	:	kleinster Grad der Ausgangssignalableitung, der zur u -linksunabhängigkeit führt
σ	:	Anzahl der u -linksunabhängigen Ausgangsgrößen
σ_n	:	Anzahl der Nullstellen in Unendlichen vom Grade $\leq n$
φ	:	Kolbenflächenverhältnis
ω_0	:	Eigenfrequenz

Matrizen, Vektoren, Körper:

$\mathbf{a}(\mathbf{x})$:	Systemvektorfeld
$\mathbf{b}(\mathbf{x})$:	Eingangsvektorfeld
$\mathbf{B}(\mathbf{x})$:	Eingangsvektorraum
$\mathbf{c}(\mathbf{x})$:	Ausgangsvektorfeld

d	:	Vektorieller Differenzegrad
$\mathbf{p}(\mathbf{x})$:	Eingangsvektorfeld der Störung
$\mathbf{P}(\mathbf{x})$:	Eingangsvektorraum der Störungen
\mathcal{E}	:	Vektorraum
\mathcal{U}	:	Umgebung
K, \bar{K}	:	Körper
L	:	Körpererweiterung oder Erweiterungskörper
Υ	:	Vektor der ρ_l -ten Ausgangssignalableitungen
ψ_0, ψ_1, ψ_2	:	Vektorfelder
Ω^m	:	Menge aller analytischen Abbildungen von \mathbb{R} in \mathbb{R}^m
$\Omega_{L/K}$:	differentieller Vektorraum

Operatoren:

\times	:	Vektorprodukt
\oplus	:	Kompositionsoperator

1 Einleitung

Die Störsignalentkopplung ist eine wichtige Anwendung der Regelungstechnik. Diese Aufgabe ist durch die Suche nach Eingangssignalen bestimmt, die bewirken, daß die Systemausgänge nicht von den Störsignaleingängen beeinflußt werden. Für nichtlineare Systeme stellt sich damit die Aufgabe, Kenngrößen zu finden, die das System dahingehend charakterisieren, daß eine Aussage über die Lösbarkeit der Störsignalentkopplung sowie die dafür notwendigen und hinreichenden Bedingungen getroffen werden kann. Das Ziel ist weiterhin, eine Rückführung zu finden, die eine solche Entkopplung der Ausgänge von den Störgrößen gewährleistet.

Die Beschreibung nichtlinearer Systeme kann über unterschiedliche mathematische Ansätze erfolgen. Dabei weisen die verschiedenen Beschreibungsarten spezifische Vor- und Nachteile auf. Im diesem Zusammenhang sind in erster Linie folgende Eigenschaften zu nennen: der Aufwand zur Beschreibung und zur Beweisführung, die Möglichkeit zur Synthese störsignalentkoppelnder Rückführungen und schließlich die lokale oder globale Gültigkeit der Problemlösung im Arbeitsraum.

In diesem Bericht werden drei verschiedene Ansätze mit sehr unterschiedlichen Eigenschaften vorgestellt. Zunächst wird die Bedingung für die Störsignalentkoppelbarkeit mit einer statischen Rückführung mit Hilfe der Differentialgeometrie und Lie-Algebra formuliert (Schwarz 1991, Isidori 1995). Weiterhin wird eine Problemlösung auf der Grundlage differentialalgebraischer Kenngrößen vorgestellt, die eine sehr prägnante Darstellungsart ermöglicht. Eine weitere Vorgehensweise stellt die Methode des Rankings dar, auf die ausführlich eingegangen wird. Schließlich wird die graphentheoretische Beschreibung des Störsignalentkopplungsproblems behandelt. Anhand eines Vergleichs mit der Methode der Anordnung werden die Grenzen der Lösbarkeit des Syntheseproblems der Störsignalentkoppelbarkeit auf graphentheoretischem Weg aufgezeigt.

Der vorliegende Bericht gliedert sich wie folgt: In dem folgenden Abschnitt sind einige mathematische Grundlagen zusammengestellt, die zum Verständnis notwendig sind. Der dritte Abschnitt enthält die Darstellungen der Problemlösungen auf verschiedene Weisen. Die Übertragung der im dritten Abschnitt vorgestellten Lösungswege auf Betrachtungen am Systemgraph sowie einige Hinweise zu Parallelen zwischen den Ansätzen sind im vierten Abschnitt wiedergegeben. Weiterhin enthält dieser Abschnitt einige Beispiele. Der Bericht schließt mit einer Zusammenfassung.

2 Mathematische Grundlagen

Für die Beschreibung des Entkopplungsproblems sind einige mathematische Hilfsmittel notwendig, die wegen der verschiedenen Beschreibungsarten recht vielseitig sind. In diesem Abschnitt sind einige wichtige Begriffe zusammengestellt.

2.1 Differentialgeometrische Begriffe

Für eine differentialgeometrische Beschreibung des Störgrößenentkopplungsproblems wird im wesentlichen auf die wiederholte bzw. k -fache Lie-Ableitung zurückgegriffen, deren Definition in Anhang A dargestellt ist. Mit deren Hilfe kann der Differenzegrad \mathbf{d} eines nichtlinearen Mehrgrößensystems definiert werden:

Definition 2.1 (Isidori 1995)

Ein analytisches Mehrgrößensystem mit linearer Steuerung

$$\Sigma_{ALS} : \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} & , \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \\ &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j(\mathbf{x})u_j & (2.1) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{c}(\mathbf{x}) & , \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

hat den (Vektor-)Differenzegrad $\mathbf{d} = \{d_1, \dots, d_p\}$ für alle \mathbf{x} in einer Umgebung von \mathbf{x}_0 , wenn

a)

$$L_{\mathbf{b}_j} L_{\mathbf{a}}^k c_i(\mathbf{x}) \quad \forall \quad \begin{cases} 1 \leq j \leq m \\ k < d_i - 1 \\ 1 \leq i \leq p \end{cases} \quad \text{und} \quad (2.2)$$

b) die $p \times m$ -Matrix

$$\begin{bmatrix} L_{\mathbf{b}_1} L_{\mathbf{a}}^{d_1-1} c_1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{\mathbf{b}_m} L_{\mathbf{a}}^{d_1-1} c_1(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{b}_1} L_{\mathbf{a}}^{d_2-1} c_2(\mathbf{x}) & \cdots & L_{\mathbf{b}_m} L_{\mathbf{a}}^{d_2-1} c_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{\mathbf{b}_1} L_{\mathbf{a}}^{d_p-1} c_p(\mathbf{x}) & \cdots & L_{\mathbf{b}_m} L_{\mathbf{a}}^{d_p-1} c_p(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

an dem Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ nichtsingulär ist.

□

Für ein Eingrößensystem ist der Differenzegrad entsprechend ein Skalar. Der Differenzegrad setzt sich gerade aus den Ordnungen d_i der Ableitungen der i -ten Ausgangsgrößen zusammen, bei denen erstmalig mindestens eine Eingangsgröße u_j auftaucht. In Abhängigkeit des Differenzegrades des Systems kann eine störentkoppelnde Rückführung angegeben werden.

2.2 Differentialalgebraische Begriffe

Die differentialalgebraische Systembeschreibung ermöglicht eine sehr kompakte Darstellung des Störsignalentkopplungsproblems. Dazu bedient man sich der Körpertheorie. An dieser Stelle werden einige Begriffe zusammengestellt, die bei Wey (1992) ausführlich vorgestellt sind und für die Kennzeichnung des von Fliess (1986) eingeführten Ranges nichtlinearer Systeme benötigt werden.

Ein Körper ist in der Mathematik ein kommutativer Ring, in dem alle von Null verschiedenen Elemente eine Gruppe bilden (Gellert u. a. 1985). Das bedeutet, daß die in einem Körper enthaltenen Elemente bezüglich der Addition und der Multiplikation eine Abelsche Gruppe bilden. Somit gelten folgende Gruppenaxiome für die Elemente eines Körpers:

- Das *Kommutativgesetz* gilt für Addition und Multiplikation (hierin liegt die Kommutativität begründet),
- Das *Assoziativgesetz* gilt für Addition und Multiplikation,
- Das *Distributivgesetz* gilt und verknüpft Addition und Multiplikation,
- Es existiert ein *neutrales Element* für Addition und Multiplikation,
- Es existiert ein *inverses Element* für Addition und Multiplikation.

Ein differentieller Körper K ist ein Körper, in dem zusätzlich zu den oben angegebenen Operationen die Differentiation d/dt erklärt ist:

$$\begin{aligned} \frac{d(a+b)}{dt} &= \dot{a} + \dot{b} \\ \frac{d(ab)}{dt} &= \dot{a}b + a\dot{b} \end{aligned}, \quad \forall a, b \in K \quad . \quad (2.4)$$

Ist das Ergebnis der Differentiation stets in K enthalten, was im Gegensatz zu der Anwendung der in den Gruppenaxiomen auftretenden Operatoren nicht notwendig erfüllt sein muß, so spricht man von einem differentiellen Ideal.

Es sei K ein Unterkörper von einem Körper L . Es heißt dann L eine Körpererweiterung von K , mit der Schreibweise L/K . Die Elemente aus L können nun in algebraische und transzendente, d. h. nicht algebraische, Elemente unterteilt werden (Gellert u. a. 1985):

- Ein Element $a \in L$ heißt *algebraisch* in Bezug auf K , wenn a einer algebraischen Gleichung $\sum f_i a^i$ genügt, deren Koeffizienten f_i Elemente aus K sind.
- Ein Element $a \in L$ heißt *transzendent* über K genau dann, wenn es nicht algebraisch über K ist.

Analog gilt für eine differentielle Körpererweiterung:

- Ein Element $a \in L$ heißt *differentiell algebraisch* über K , wenn a einer algebraischen Gleichung $P(a, \dot{a}, \dots, a^{(\alpha)}) = 0$, $\alpha \in \mathbb{N}$ genügt, deren Koeffizienten Elemente aus K sind.
- Ein Element $a \in L$ heißt *differentiell transzendent* über K genau dann, wenn es nicht differentiell algebraisch über K ist.

Mit diesen Begriffen lassen sich die Kenngrößen *Transzendenzgrad* und *differentieller Transzendenzgrad* formulieren:

- Die Menge aller transzendenten Elemente einer Körpererweiterung bildet eine Transzendenzbasis. Der *Transzendenzgrad* $\text{trg } L/K$ einer Körpererweiterung ist gleich der Mächtigkeit der Transzendenzbasis.
- Die Menge aller differentiell transzendenten Elemente einer Körpererweiterung bildet eine differentielle Transzendenzbasis. Der *differentielle Transzendenzgrad* $\text{diff. trg } L/K$ einer Körpererweiterung ist gleich der Mächtigkeit der differentiellen Transzendenzbasis.

Im weiteren werden folgende Bezeichnungen für spezielle Körper verwendet:

- $K(\mathbf{x})$ bezeichnet den differentiellen Körper, der aus den rationalen Funktionen in x_i mit Koeffizienten aus K besteht.
- $K\langle \mathbf{x} \rangle$ bezeichnet den differentiellen Körper, der aus den rationalen Funktionen in $x_i^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{N}$ mit Koeffizienten aus K besteht.

Damit kann der differentielle Rang eines Systems definiert werden:

Definition 2.2 (Fliess 1986)

Der differentielle Rang eines Systems ist gleich dem differentiellen Transzendenzgrad $\text{diff. trg } K\langle \mathbf{y} \rangle/K$ der Körpererweiterung $K\langle \mathbf{y} \rangle/K$. \square

Die hier angegebenen Größen sind ausreichend für eine differentialalgebraische Formulierung des Störsignalentkopplungsproblems.

Es können verschiedene Wege beschritten werden, um differentialalgebraische Kenngrößen für ein gegebenes System zu berechnen. Bei den in Abschnitt 4 dargestellten Vorgehensweisen werden verschiedene Begriffe verwendet, die an dieser Stelle kurz erklärt werden:

Meromorphe Funktionen

Eine Funktion heißt dann und nur dann meromorph über einem offenen Gebiet, wenn die einzigen Singularitäten in diesem Gebiet Pole sind. Wenn eine Funktion über der gesamten Ebene meromorph ist, dann handelt es sich um eine rational algebraische Funktion,

die als Quotient zweier Polynome dargestellt werden kann (Korn und Korn 1968). Im folgenden wird immer von einer über der gesamten Ebene meromorphen Funktion ausgegangen, wenn von einer meromorphen Funktion gesprochen wird.

Struktur im Unendlichen

Die Struktur im Unendlichen eines Systems ist durch die Liste $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ gegeben. Darin gibt σ_k die Anzahl der Nullstellen im Unendlichen der Ordnung kleiner oder gleich k , $k = 1, \dots, n$, an (Di Benedetto u. a. 1989). Die Bestimmung der Struktur im Unendlichen kann über Rangbestimmungen nichtdifferentieller Vektorräume erfolgen, die über einem Körper aus meromorphen Funktionen aufgespannt werden (siehe auch Abschnitt 4).

Regularität

Eine Funktion heißt regulär in einem Gebiet, wenn sie in einer Umgebung um einen beliebigen Punkt \mathbf{x} aus diesem Gebiet differenzierbar ist (Bronstein und Semendjajew 1991). Insbesondere ist dann eine dynamische Rückführung $\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{v}$, mit \mathbf{v} als neuem Eingang, regulär, wenn das System mit Rückführung eine surjektive Abbildung darstellt:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\dim z} \times \Omega^m \rightarrow \Omega^m \quad (2.5)$$

$$(\mathbf{x}(0), \mathbf{z}(0), \mathbf{v}(t)) \rightarrow \mathbf{u}(t) \quad . \quad (2.6)$$

Dabei stellt Ω^m die Menge aller analytischen Abbildungen von \mathbb{R} in \mathbb{R}^m dar.

2.3 Ranking

Die Idee des Rankings besteht darin, daß mit einer Anzahl von betrachteten Mengenelementen eine Folge nach bestimmten Anordnungsregeln gebildet wird. Anhand der resultierenden Anordnung können Eigenschaften für die Elemente der Folge angegeben werden, die sich für die Beweisführung bei der Synthese einer störentkoppelnden Rückführung bei Mehrgrößensystemen nutzen lassen. Für die Beschreibung nichtlinearer Mehrgrößensysteme werden die Ableitungen $\{y_l^{(k)}\}$ der Ausgänge bzw. deren Differentiale $\{dy_l^{(k)}\}$ in folgender Weise angeordnet:

$$\{dy_1, dy_2, \dots, dy_p, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_p, \dots, dy_1^{(k)}, dy_2^{(k)}, \dots, dy_p^{(k)}, \dots\} \quad , \quad (2.7)$$

$$\{y_1, y_2, \dots, y_p, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_p, \dots, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_p^{(k)}, \dots\} \quad , \quad (2.8)$$

so daß $y_{l_1}^{(k_1)}$ dann und nur dann links von $y_{l_2}^{(k_2)}$ steht, wenn $k_1 < k_2$ oder $l_1 < l_2 \wedge k_1 = k_2$. Hierfür wird die Schreibweise $y_{l_1}^{(k_1)} \prec y_{l_2}^{(k_2)}$ verwendet.

2.4 Graphen

Das Tangentialsystem eines nichtlinearen Mehrgrößensystems kann durch einen gerichteten Graph dargestellt werden und ermöglicht so eine anschauliche Systemanalyse. Ein

gerichteter Graph besteht aus Eingangs-, Zustands- und Ausgangsknoten, die auf folgende Weise durch Kanten miteinander verbunden sind (siehe auch Reinschke (1988), Wey (1993)):

- Es existiert eine gerichtete Kante vom Eingangsknoten j zum Zustandsknoten i mit dem Gewicht $b_{i,j}$, wenn gilt:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial u_j} = b_{i,j} \neq 0 \quad .$$

- Es existiert eine gerichtete Kante vom Zustandsknoten j zum Zustandsknoten i mit dem Gewicht $\tilde{a}_{i,j}$, wenn gilt:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} = \tilde{a}_{i,j} \neq 0 \quad .$$

- Es existiert eine gerichtete Kante vom Zustandsknoten j zum Ausgangsknoten i mit dem Gewicht $c_{i,j}$, wenn gilt:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = c_{i,j} \neq 0 \quad .$$

In einem Systemgraph können durch Verbindungen über mehrere Knoten Pfade, also aneinandergereihte Kanten, gebildet werden. Die Anzahl der so aneinandergereihten Kanten heißt Pfadlänge. Das Produkt der Kantengewichte eines Pfades heißt Pfadgewicht. Anhand des nach obigen Regeln gebildeten Graphen können verschiedene Systemkenngrößen bestimmt werden.

3 Beschreibung des Entkopplungsproblems

Die Aufgabe der Störsignalentkopplung kann als die Suche nach einem Rückführgesetz in dem Zustand \mathbf{x} und einem neuen Eingang \mathbf{v} beschrieben werden, so daß die Stellgröße \mathbf{u} bewirkt, daß der Ausgang \mathbf{y} von dem Störsignal \mathbf{w} nicht beeinflußt wird. Die Aufgabe kann auf verschiedenen Wegen gelöst werden. Diese können nach der Art der resultierenden Rückführung in

- statische Störsignalentkopplung und
- dynamische Störsignalentkopplung

unterteilt werden. Im folgenden soll auf diese Lösungsmöglichkeiten näher eingegangen werden.

3.1 Statische Störsignalentkopplung

Es werde an dieser Stelle ein analytisches SISO-System mit linearer Steuerung (ALS) der folgenden Form betrachtet:

$$\Sigma_{ALS} : \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u + \mathbf{p}(\mathbf{x})w \\ y &= c(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n . \quad (3.1)$$

Gemäß der Herleitung in Isidori (1995) und Schwarz (1991) gilt für ein ALS:

Satz 3.1 (Isidori 1995, Schwarz 1991)

Ein durch Gl. (3.1) beschriebenes System habe den Differenzegrad d an einem Arbeitspunkt \mathbf{x}_0 und \mathcal{U}_0 sei eine Umgebung um \mathbf{x}_0 . Das Problem, eine Zustandsrückführung der Form $u = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})v$ zu finden, die lokal um \mathbf{x}_0 definiert ist und den Systemausgang y von dem Störsignal w entkoppelt, kann dann und nur dann gelöst werden, wenn

$$L_{\mathbf{p}}L_{\mathbf{a}}^i c(\mathbf{x}(t)) = 0 \quad \forall \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq i \leq d-1 \\ \wedge \quad \mathbf{x}(t) \in \mathcal{U}_0 \end{array} \right. . \quad (3.2)$$

Ist Gl. (3.2) erfüllt, so lautet die Lösung:

$$u(t) = \frac{-L_{\mathbf{a}}^d c(\mathbf{x}(t)) + v(t)}{L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}^{d-1} c(\mathbf{x}(t))} . \quad (3.3)$$

□

Die Rückführung gemäß Gl. (3.3) bewirkt ein lineares Verhalten zwischen v und y , wobei die Störung in einem vom Ausgang unbeobachtbaren Unterraum verbleibt. Ein Nachteil der in Satz 3.1 verwendeten differentialgeometrischen Betrachtungsweise ist, daß lediglich eine lokal gültige Aussage über das betrachtete System getroffen werden kann. Da der Fall der statischen Rückführung ein Sonderfall der dynamischen Rückführung ist, liefert der folgende Abschnitt zudem eine allgemeinere Aussage.

3.2 Dynamische Störsignalentkopplung

Betrachtet wird ein analytisches System (AS):

$$\Sigma_{AS} : \quad \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad , \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \quad , \\ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^q \quad , \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \quad . \end{array} \quad (3.4)$$

In differentialalgebraischer Betrachtungsweise wird ein nichtlineares System als Körpererweiterung $K\langle \mathbf{y} \rangle / K$ beschrieben. Dieses System habe den Eingang $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_m]^T$ und den Störsignaleingang $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_q]^T$. Damit gilt für den differentiellen Rang:

$$\rho^* = \text{diff. trg } K\langle \mathbf{y} \rangle / K \leq \min(p, m + q) \quad . \quad (3.5)$$

Die angegebene obere Schranke folgt aus der Tatsache, daß $m + q$ unabhängige Eingangsgrößen vorhanden sind und die Ausgangsgrößen y_i , $i = 1, \dots, p$ differentiell algebraisch über $K\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ sind. Da die Eingänge u_i , $i = 1, \dots, m$ als unabhängig angenommen werden, gilt:

$$\text{diff. trg } K\langle \mathbf{u} \rangle / K = m \quad . \quad (3.6)$$

Zudem seien die Eingänge \mathbf{u} und \mathbf{w} voneinander unbeeinflusst, so daß folgender Zusammenhang Gültigkeit besitzt:

$$\text{diff. trg } K\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle / K = \text{diff. trg } K\langle \mathbf{u} \rangle / K + \text{diff. trg } K\langle \mathbf{w} \rangle / K \quad . \quad (3.7)$$

Das Problem der Störsignalentkopplung besteht nun darin, ein Rückführgesetz und einen neuen Eingang $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_m]^T$ zu finden, so daß der Ausgang \mathbf{y} nicht mehr durch das Störsignal sondern nur durch das neue Eingangssignal \mathbf{v} beeinflusst wird. Wenn der Ausgang \mathbf{y} störsignalentkoppelt ist, dann kann dieses durch die algebraische Unabhängigkeit der Körpererweiterungen $K\langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle / K$ und $K\langle \mathbf{w} \rangle / K$ ausgedrückt werden. Als notwendige und hinreichende Bedingung für Entkoppelbarkeit des Störsignals kann der folgende Satz angegeben werden.

Satz 3.2 (Delaleau und Fliess 1993)

Der Ausgang \mathbf{y} eines analytischen Systems (Gl. 3.4) kann dann und nur dann von dem Störsignal \mathbf{w} entkoppelt werden, wenn

$$\rho^* = \text{diff. trg } K\langle \mathbf{y}, \mathbf{w} \rangle / K\langle \mathbf{w} \rangle \quad . \quad (3.8)$$

□

Gleichung (3.8) besagt, daß der differentielle Transzendenzgrad des Systems unabhängig von der Störung \mathbf{w} ist und gleich dem differentiellen Rang ρ^* des ungestörten Systems ist. In anderen Worten bedeutet das, daß kein Polynom P existiert, für welches gilt:

$$\wedge \quad \frac{P(\mathbf{y}, \dots, \mathbf{y}^{(\alpha)}, \mathbf{w}, \dots, \mathbf{w}^{(\beta)})}{\frac{\partial P}{\partial(\mathbf{y}, \dots, \mathbf{y}^{(\alpha)})}} \times \frac{\partial P}{\partial(\mathbf{w}, \dots, \mathbf{w}^{(\beta)})} \neq 0 \quad (3.9)$$

Über die Art der Rückführung ist in Satz 3.2 nichts ausgesagt. Insbesondere ist die Bildung der Rückführung durch ein Vektorfeld $\mathbf{P}(\mathbf{y}, \dots, \mathbf{y}^{(\alpha)}, \mathbf{w}, \dots, \mathbf{w}^{(\beta)}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(\gamma)}) = \mathbf{0}$ möglich, was die Kenntnis der Störsignale und deren Ableitungen impliziert. Die Aussage in Satz 3.2 ist damit die schwächstmögliche notwendige und hinreichende Bedingung für Störerkoppelbarkeit. Zudem hat sie im Gegensatz zu differentialgeometrisch beschriebenen Bedingungen globale Gültigkeit für den gesamten Arbeitsraum. Im Gegensatz dazu geben Huijberts u. a. (1992) den folgenden Satz an (siehe auch Wey und Svaricek (1995)):

Satz 3.3 (Huijberts u. a. 1992)

Es liege ein analytisches System Σ_{AS} vor, das quadratisch ($p = m$) und differentiell linksinvertierbar ($\rho^ = m$) sei. Dieses System werde an einem streng regulären Punkt \mathbf{x}_0 betrachtet. Die dynamische Störsignalentkopplung mit Messung der Störung ist für dieses System dann und nur dann lokal um \mathbf{x}_0 möglich, wenn das gestörte System $\Sigma_{\mathbf{w}}$ und das ungestörte System Σ_0 die gleiche algebraische Struktur im Unendlichen haben. \square*

Damit ist offensichtlich in Satz 3.2 eine allgemeingültigere Bedingung für Störsignalentkopplung gegeben, als mit Satz 3.3. Die Bedingungen in Satz 3.2 und Satz 3.3 sind für ein gegebenes analytisches System überprüfbar.

Die differentialalgebraische Darstellung des Problems der Störsignalentkopplung ist sehr kompakt, ermöglicht aber nicht ohne weiteres die Synthese einer entkoppelnden Rückführung. Im folgenden wird eine umfassendere Darstellung verwendet, die aber die Angabe eines Rückführgesetzes erlaubt. Für den Fall, daß eine Störsignalentkopplung durch eine statische Rückführung nicht möglich ist, kann oftmals eine dynamische Zustandsrückführung der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{v} \\ \mathbf{u} &= \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{v} \end{aligned}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \quad (3.10)$$

zur Lösung des Problems für ein System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{E}(\mathbf{x})\mathbf{w} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

gefunden werden. Ist zudem die Störung \mathbf{w} meßbar, so kann die dynamische Rückführung aus Gl. (3.10) um einen Term erweitert werden, in den die Störung eingeht:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{v} + \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{w} \\ \mathbf{u} &= \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{v} + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{w} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ein Rückführgesetz ergibt sich aus folgender Vorgehensweise: Es werden die Systemausgänge so oft nach der Zeit abgeleitet, bis eine Eingangsgröße u_i auftritt. Durch Anwendung des Rankings und sukzessives Ersetzen der Eingangsgrößen kann man die Ordnung der für die Rückführung benötigten Dynamik bestimmen. Anhand der Umkehrbarkeit der resultierenden Darstellungen kann die Störsignalentkoppelbarkeit überprüft werden.

Diese Vorgehensweise wird im folgenden genauer erläutert.

Im weiteren wird angenommen, daß die Eingangsgröße \mathbf{u} n -mal stetig differenzierbar sei. Werden sukzessive die zeitlichen Ableitungen

$$\begin{aligned} y_l &= h_l^{(0)}(\mathbf{x}) \\ \dot{y}_l &= h_l^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ &\vdots \\ y_l^{(k)} &= h_l^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k-1)}) \end{aligned}$$

der Systemausgänge y_l , $1 \leq l \leq p$ und anschließend deren totale Differentiale gebildet, so ergibt sich folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} dy_l &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_l^{(0)}}{\partial x_i} dx_i \\ &\vdots \\ dy_l^{(k)} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_l^{(k)}}{\partial x_i} dx_i + \sum_{\nu=0}^{k-1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial h_l^{(k)}}{\partial u_j^{(\nu)}} du_j^{(\nu)} \quad , \quad k \geq 1 \quad . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Definiert man wie Di Benedetto u. a. (1989) einen (nichtdifferentiellen) Körper \mathcal{K} der rationalen Funktionen in $\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)}$ mit meromorphen Koeffizienten in \mathbf{x} sowie einen Vektorraum \mathcal{E} über \mathcal{K} , der von $d\mathbf{x}$ und $d\mathbf{u}^{(\nu)}$, $0 \leq \nu \leq n-1$ aufgespannt wird, dann stellt $dy_l^{(k)}$, $0 \leq k \leq n$ einen Vektor in \mathcal{E} dar. Für den Vektorraum \mathcal{E} gilt die Zerlegung

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_x \oplus \mathcal{E}_u \quad , \quad (3.14)$$

mit den Unterräumen

$$\mathcal{E}_x = \text{span}_{\mathcal{K}}\{dx_i | 1 \leq i \leq n\} \quad \text{und} \quad (3.15)$$

$$\mathcal{E}_u = \text{span}_{\mathcal{K}}\{du_j^{(\nu)} | 1 \leq j \leq n \wedge 0 \leq \nu \leq n-1\} \quad . \quad (3.16)$$

Für die weitere Beschreibung werden die Elemente $\{dy_l^{(k)}\}$ bzw. $\{y_l^{(k)}\}$, wie in Abschnitt 2 beschrieben, angeordnet:

$$\{dy_1, dy_2, \dots, dy_p, d\dot{y}_1, d\dot{y}_2, \dots, d\dot{y}_p, \dots, dy_1^{(k)}, dy_2^{(k)}, \dots, dy_p^{(k)}, \dots\} \quad , \quad (3.17)$$

$$\{y_1, y_2, \dots, y_p, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_p, \dots, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_p^{(k)}, \dots\} \quad . \quad (3.18)$$

Definition 3.1 (Cao und Zheng 1992)

$dy_l^{(k)}$ wird als u -linksabhängig bezeichnet, wenn

$$dy_l^{(k)} \in \mathcal{E}_x + \text{span}_{\mathcal{K}}\{dy_\alpha^{(\beta)} | y_\alpha^{(\beta)} \prec y_l^{(k)}\} \quad . \quad (3.19)$$

Andernfalls wird $dy_l^{(k)}$ als u -linksunabhängiger Vektor in (3.17) bezeichnet. Entsprechend wird ein Element $y_l^{(k)}$ aus (3.18) u -linksabhängig (bzw. u -linksunabhängig) genannt. \square

Mit

$$L_u = \{y_l^{(k)} | y_l^{(k)} \text{ ist } u\text{-linksunabhängig}\} \quad (3.20)$$

gilt folgende Aussage:

Lemma 3.1 (Cao und Zheng 1992)

Wenn $y_l^{(k)}$ u -linksabhängig ist, d. h. $y_l^{(k)} \notin L_u$, dann existiert eine Funktion ϕ , so daß

$$y_l^{(k)} = \phi(\mathbf{x}, y_\alpha^{(\beta)} | y_\alpha^{(\beta)} \prec y_l^{(k)} \wedge y_\alpha^{(\beta)} \in L_u) \quad . \quad (3.21)$$

□

Es lassen sich nun Invarianten des Systems (3.11) angeben, mit deren Hilfe die Bedingungen für die Störsignalentkoppelbarkeit formuliert werden können. Cao und Zheng (1992) geben verschiedene Invarianten an, die in Verbindung zu den von Fliess (1986) und Di Benedetto u. a. (1989) definierten stehen. Für die Störsignalentkoppelbarkeit sind die folgenden Invarianten relevant:

$$\rho_l = \begin{cases} \infty & , \text{ wenn } y_l^{(k)} \notin L_u, \quad \forall k \geq 0 \\ \min\{k | y_l^{(k)} \in L_u\} & , \text{ sonst} \end{cases} \quad , \quad l = 1, \dots, p \quad . \quad (3.22)$$

Damit gilt insbesondere

Lemma 3.2

Wenn $\rho_l < \infty$ ist, dann existiert eine eindeutige Funktion $\psi_{l,j}, j = 0, \dots, m$, so daß

$$\begin{aligned} y_l^{(\rho_l)} &= \psi_{l,0}(\mathbf{x}, y_\alpha^{(\beta)} | y_\alpha^{(\beta)} \prec y_l^{(\rho_l)} \wedge y_\alpha^{(\beta)} \in L_u) \\ &+ \sum_{j=1}^m \psi_{l,j}(\mathbf{x}, y_\alpha^{(\beta)} | y_\alpha^{(\beta)} \prec y_l^{(\rho_l)} \wedge y_\alpha^{(\beta)} \in L_u) \cdot u_j \quad . \end{aligned} \quad (3.23)$$

□

Für die weiteren Ausführungen ist die folgende Aussage nützlich:

Lemma 3.3

Wenn $y_l^{(k)} \in L_u$, dann gilt auch: $y_l^{(k+1)} \in L_u$. Folglich ist $y_l^{(k)} \in L_u$ dann und nur dann, wenn $k \geq \rho_l$. □

Für ein ALS gemäß Gl. (3.11) kann nun der Vektor der Eingangsgrößen zu $\bar{\mathbf{u}} = [\mathbf{u}^T \mathbf{w}^T]^T$ erweitert werden und analog zu den vorangegangenen Darstellungen $\rho_l, l = 1, \dots, m + q$ gebildet werden. Dabei kann ohne Verlust der Allgemeingültigkeit eine Anordnung analog zu Gl. (3.17) bzw. Gl. (3.18) mit einer Permutation der Ausgangssignalindizes $l_i, i = 1, \dots, p$ in der Art erreicht werden, daß gilt:

$$\begin{aligned} &y_{l_1} \prec y_{l_2} \prec \dots \prec y_{l_p} \\ \wedge \quad &\rho_{l_1} \leq \rho_{l_2} \leq \dots \leq \rho_{l_p} \leq \infty \quad . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Mit

$$\sigma = \text{Mächtigkeit}\{\rho_l | \rho_l < \infty, l = 1, \dots, p\} \quad (3.25)$$

bedeutet dieses, daß $y_\alpha^{(\beta)} \in L_u$ nur möglich ist, wenn $\alpha \leq \sigma$. Aus Lemma 3.2 folgt, daß eine eindeutige Funktion $\psi_{l,j}$, $1 \leq l \leq \sigma$, $0 \leq j \leq m+q$ existiert:

$$y_l^{(\rho_l)} = \psi_{l,0} + \sum_{j=1}^m \psi_{l,j} u_j + \sum_{j=m+1}^{m+q} \psi_{l,j} w_{j-m} \quad . \quad (3.26)$$

Gl. (3.26) kann in Matrixform als

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\psi}_0 + [\boldsymbol{\psi}_1 \ \boldsymbol{\psi}_2] \bar{\mathbf{u}} \quad , \quad (3.27)$$

mit $\mathbf{Y} = [y_1^{(\rho_1)}, \dots, y_\sigma^{(\rho_\sigma)}]^T$ geschrieben werden, und es gilt $\text{rang}[\boldsymbol{\psi}_1 \ \boldsymbol{\psi}_2] = \sigma$ (Cao und Zheng 1992). Als notwendige und hinreichende Bedingung für die Störsignalentkoppelbarkeit kann nun angegeben werden:

Satz 3.4

Es existiert dann und nur dann ein reguläres dynamisches Rückführgesetz (Gl. (3.10)), welches das System (Gl. (3.11)) von der Störung \mathbf{w} entkoppelt, wenn $\boldsymbol{\psi}_2 = \mathbf{0}$ und $\sigma \leq m$. \square

Beweis:

Da der Beweis die Konstruktion der Rückführung enthält, wird hier der Beweis dafür skizziert, daß die Bedingung in Satz 3.4 hinreichend ist. Lemma 3.2 liefert

$$y_l^{(\rho_l)} = \sum_{j=0}^{m+q} \psi_{l,j}(\mathbf{x}, y_\alpha^{(\beta)} | y_\alpha^{(\beta)} \prec y_l^{(\rho)} \wedge y_\alpha^{(\beta)} \in L_u) \cdot \bar{u}_j \quad (3.28)$$

mit $\bar{u}_0 \equiv 1$. Aus Gl. (3.22) und Gl. (3.24) folgt, daß Gl. (3.28) geschrieben werden kann als

$$y_l^{(\rho_l)} = \sum_{j=0}^{m+q} \psi_{l,j}(\mathbf{x}, y_\alpha^{(\beta)} | \alpha < \sigma \wedge \rho_\alpha \leq \beta \leq \rho_\sigma) \cdot \bar{u}_j \quad . \quad (3.29)$$

Es wird nun eine Kette von $r_s - 1$ Integratoren mit

$$r_s = \max\{\beta | \exists l, j, s, \frac{\partial \psi_{l,j}}{\partial y_s^{(\beta)}} \neq 0\} \quad (3.30)$$

vor diejenigen Eingänge geschaltet, welche für die u -Linksunabhängigkeit von $y_s^{(\beta)}$ verantwortlich sind. Es gilt also

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1,s} &= z_{2,s} \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r_s-1,s} &= v_s \end{aligned} \quad , \quad (3.31)$$

mit $1 \leq s \leq \sigma$. Ersetzt man $y_\alpha^{(\beta)}$ durch $z_{1+\beta-\rho_\alpha, \alpha}$, dann ergibt sich aus Gl. (3.29):

$$z_{1,l} = \sum_{j=0}^{m+q} \psi_{l,j}(\mathbf{x}, z_{1+\beta-\rho_\alpha, \alpha} | \alpha < \sigma \wedge \rho_\alpha \leq \beta \leq \rho_\sigma) \cdot \bar{u}_j \quad . \quad (3.32)$$

Die Matrix $[\psi_1 \ \psi_2]$ ist eine $\sigma \times (m+q)$ -Matrix. Es sei $\bar{\mathcal{K}}$ der Körper der meromorphen Funktionen in \mathbf{x} und \mathbf{z} , dann ist $[\psi_1 \ \psi_2]$ eine Matrix über $\bar{\mathcal{K}}$, die zudem den Rang $\text{rang}[\psi_1 \ \psi_2] = \sigma$ aufweist. Da nach Voraussetzung $\psi_2 = \mathbf{0}$ ist und $\sigma \leq m$, kann stets eine Matrix \mathbf{R} über $\bar{\mathcal{K}}$ gewählt werden, so daß $[\psi_1^T \ \mathbf{R}^T]^T$ eine invertierbare $m \times m$ -Matrix darstellt, wodurch \mathbf{u} bestimmbar wird. Aus der Darstellung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{v}_b \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad , \quad (3.33)$$

mit $\mathbf{v}_b \in \mathbb{R}^{m-\sigma}$ folgt:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 - \psi_0 \\ \mathbf{v}_b \end{bmatrix} \quad . \quad (3.34)$$

Ein Vergleich von Gl. (3.32) und Gl. (3.23) liefert

$$y_l^{\rho_l}(t) = z_{1,l}(t) \quad , \quad 1 \leq l \leq \sigma \quad , \quad (3.35)$$

für das Gesamtsystem. Da $z_{1,l}$ nur von $\mathbf{z}(0)$ und $\mathbf{v}_s(t)$ abhängt (vgl. Gl. (3.31)), ist $y_l^{\rho_l}(t)$ von der Störung \mathbf{w} unbeeinflusst. Gemäß Lemma 3.1 existiert aber für $y_l^{(k)} \notin L_u$, d. h. $k < \rho_l$, immer eine eindeutige Funktion ϕ , so daß

$$y_l^{(k)} = \phi(\mathbf{x}, y_\alpha^{(\beta)} | y_\alpha^{(\beta)} \prec y_l^{(k)} \wedge y_\alpha^{(\beta)} \in L_u) \quad (3.36)$$

und damit ist $y_l^{(k)}$ nur über höhere Ableitungen abhängig von den Eingängen. Somit ist auch $y_l(t)$ von der Störung entkoppelt, da $y_l^{\rho_l}(t)$ nicht von der Störung abhängt. \square

Für den Fall, daß die Störung \mathbf{w} meßbar ist, kann weiterhin folgender Satz angegeben werden:

Satz 3.5

Es existiert dann und nur dann ein reguläres dynamisches Rückführgesetz (Gl. (3.12)), welches das System (Gl. (3.11)) von der Störung \mathbf{w} entkoppelt, wenn $\text{rang } \psi_1 = \sigma$ und $\sigma \leq m$. \square

Der Beweis kann analog zu dem von Satz 3.4 erbracht werden und führt auf die Stellgröße

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 - \psi_0 - \psi_2 \mathbf{w} \\ \mathbf{v}_b \end{bmatrix} \quad . \quad (3.37)$$

4 Anwendungsbeispiele

Für die in dem vorangegangenen Abschnitt dargestellten theoretischen Betrachtungen werden in diesem Abschnitt einige Beispiele gebracht. Des weiteren werden zum einen die graphentheoretische Bestimmung der differentialalgebraischen Kenngröße differentieller Rang dargestellt und zum anderen praktische Anwendungen zur Bestimmung störentkoppelter Rückführungen vorgestellt. Schließlich wird eine Vorgehensweise zur graphentheoretischen Synthese der Rückführungen vorgeschlagen.

4.1 Auswertung der differentialalgebraischen Bedingung

Die hier angegebene Vorgehensweise verwendet die Struktur im Unendlichen als Systeminvariante zur Bestimmung der gesuchten Kenngrößen und folgt den Darstellungen von Di Benedetto u. a. (1989), Wey (1993), Wey (1994), Wey und Svaricek (1995). Für die unmittelbare Berechnung differentialalgebraischer Kenngrößen ist die bisher verwendete Darstellung nicht geeignet. Daher geht man zu einer Beschreibung mit Methoden der linearen Algebra über. Dazu bieten sich Kähler-Differentiale $d_{L/K}$ an, die durch folgende Darstellung gegeben sind:

$$d_{L/K} \eta(\mathbf{v}) = \sum_i \frac{\partial \eta(\mathbf{v})}{\partial v_i} d_{L/K} v_i \quad , \quad \mathbf{v} \in L \quad . \quad (4.1)$$

Die Anwendung der Kähler-Differentiale stellt eine Abbildung von Elementen aus L in einen differentiellen Vektorraum $\Omega_{L/K}$ dar. Damit läßt sich eine Körpererweiterung durch einen Vektorraum darstellen, der durch die Kähler-Differentiale der Elemente der Körpererweiterung aufgespannt wird. Betrachtet man den Ausgang eines ALS und dessen zeitliche Ableitungen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}] \\ \ddot{\mathbf{y}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) &= \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}] + \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} \\ &\vdots \\ \mathbf{y}^{(k+1)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(k)}) &= \frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}] + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial \mathbf{u}^{(l)}} \mathbf{u}^{(l+1)} \quad , \end{aligned} \quad (4.2)$$

so lassen sich diese durch Kähler-Differentiale darstellen:

$$d_{K\langle \mathbf{y} \rangle / K} \mathbf{y}^{(k)} = \frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial \mathbf{x}} d_{K\langle \mathbf{y} \rangle / K} \mathbf{x} + \left[\frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial \mathbf{u}} \cdots \frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial \mathbf{u}^{(k-1)}} \right] \begin{bmatrix} d_{K\langle \mathbf{y} \rangle / K} \mathbf{u} \\ \vdots \\ d_{K\langle \mathbf{y} \rangle / K} \mathbf{u}^{(k-1)} \end{bmatrix} \quad . \quad (4.3)$$

Die maximale Anzahl der *differentiell algebraisch* unabhängigen Elemente der Körpererweiterung $K\langle \mathbf{y} \rangle / K$ entspricht der maximalen Anzahl der *differentiell linear* unabhängigen

Elemente $d_{K\langle \mathbf{y} \rangle / Ky_i}$ aus $\Omega_{K\langle \mathbf{y} \rangle / K}$ (Johnson 1969). Faßt man nun die Elemente $d_{K\langle \mathbf{y} \rangle / Ky_i}^{(k)}$ als unabhängige Größen auf und spannt die Vektorräume

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \text{span}_{\bar{K}} \{d\mathbf{x}\} \quad , \\ \mathcal{E}_1 &= \text{span}_{\bar{K}} \{d\mathbf{x}, d\dot{\mathbf{y}}\} \quad , \\ &\vdots \\ \mathcal{E}_k &= \text{span}_{\bar{K}} \{d\mathbf{x}, d\dot{\mathbf{y}}, \dots, d\mathbf{y}^{(k)}\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

über dem Körper \bar{K} , der aus $K\langle \mathbf{u} \rangle$ sowie meromorphen Koeffizienten in \mathbf{x} gebildet ist, auf, so ergibt sich die Struktur im Unendlichen gemäß

Definition 4.1 (Di Benedetto u. a. 1989)

Die Anzahl σ_k der Nullstellen im Unendlichen der Ordnung kleiner oder gleich k , $k \geq 1$ ist gleich $\sigma_k = \dim \mathcal{E}_k - \dim \mathcal{E}_{k-1}$. Die Struktur im Unendlichen ist durch $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ gegeben. \square

Der differentielle Rang $\rho^* = \text{diff. trg } K\langle \mathbf{y} \rangle / K$ ergibt sich aus den nichtdifferentiellen Dimensionen $\dim \mathcal{E}_k$ zu (Di Benedetto u. a. 1989)

$$\rho^* = \sigma_n = \dim \mathcal{E}_n - \dim \mathcal{E}_{n-1} \quad (4.5)$$

und entspricht der Gesamtanzahl der Nullstellen im Unendlichen. Damit besteht die Möglichkeit, den differentiellen Rang durch eine Dimensionsbestimmung (nichtdifferentieller) Vektorräume zu ermitteln, die über eine Rangbestimmung von Jacobi-Matrizen erfolgen kann (vgl. Wey (1993)). Für Systeme hoher Ordnung ist diese Vorgehensweise jedoch mit einem extrem hohen Bedarf an Rechenkapazität verbunden, so daß für diesen Fall graphentheoretische Methoden eher zum Ziel führen.

Ein Weg, die Graphentheorie hier zu nutzen besteht darin, zunächst den generischen Rang ρ_{gen}^* eines Systems, der durch die Anzahl der knotendisjunkten Ein-/Ausgangspfade im Systemgraph gegeben ist, zu ermitteln und anschließend den differentiellen Rang zu bestimmen. Dieses geschieht auf folgende Weise (vgl. Wey (1993)): Es werden für alle möglichen Paare knotendisjunkter Pfade gleicher Gesamtlänge die Produkte aus den Pfadgewichten gebildet. Stimmen die Produkte für alle Paare überein, so ergibt sich der differentielle Rang ρ^* zu

$$\rho^* = \rho_{\text{gen}}^* - 1 \quad . \quad (4.6)$$

Andernfalls stimmt der differentielle Rang mit dem generischen Rang überein:

$$\rho^* = \rho_{\text{gen}}^* \quad . \quad (4.7)$$

Der differentielle Rang kann auf diese Weise sowohl für das ungestörte als auch für das gestörte System ermittelt werden, und somit kann geklärt werden, ob das System gemäß Satz 3.2 vom Störsignal entkoppelbar ist.

Beispiel

Das Verhalten eines Hydraulikdifferentialzylinders mit Servoventil kann durch folgendes Modell, das in Anhang B ausführlich wiedergegeben ist, dargestellt werden:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{m_{\text{ges}}(x_1)} \left(\left(x_3 - \frac{x_4}{\varphi} \right) A - F_R(x_2) \right) \\ \frac{E_{\ddot{O}1,A}(x_3)}{V_A(x_1)} \left(-Ax_2 + Q_A(x_3, x_5) \right) \\ \frac{E_{\ddot{O}1,B}(x_4)}{V_B(x_1)} \left(\frac{A}{\varphi} x_2 + Q_B(x_4, x_5) \right) \\ x_6 \\ -2D\omega_0 x_6 - \omega_0^2 x_5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_{\text{ges}}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{x} \quad (4.9)$$

Die Störung stellt in diesem Beispiel die auf den Differentialzylinder einwirkende Kraft $F_L =: w$ dar. Aus dem Modell folgt der in Bild 4.1 abgebildete Systemgraph. Da es sich um ein SISO-System handelt, ist die Anzahl der knotendisjunkten Ein-/Ausgangspfade sowohl für das ungestörte als auch für das gestörte System gleich eins und damit gilt:

$$\rho^* = \rho_w^* = 1 \quad . \quad (4.10)$$

Daran ändert sich auch nichts, wenn das System kein streng strukturelles Verhalten aufweist, da der Systemausgang in jedem Fall von der Eingangsgröße abhängt. Somit ist das System gemäß Satz 3.2 vom Störsignal w entkoppelbar. Satz 3.2 schließt auch Rückführungen, welche Störsignalleitungen enthalten, nicht aus. Anhand des Graphen in Bild 4.1 ist ersichtlich, daß der Ein-/Ausgangspfad von u ausgehend um drei Kanten länger ist als der von w ausgehende. Das hat zur Folge, daß für die Störsignalentkopplung mindestens die ersten drei Ableitungen des Störsignals nach der Zeit bekannt sein müssen. Das im nächsten Abschnitt vorgestellte Beispiel verdeutlicht die Zusammenhänge.

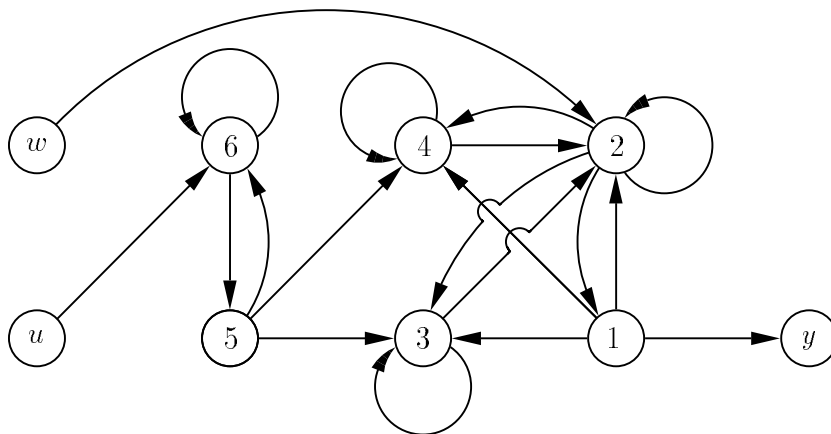


Bild 4.1: Graph des Differentialzylindermodells

4.2 Anwendungen zur Bestimmung störentkoppelnder Rückführungen

Um die auf der Grundlage des Rankings in Abschnitt 3 dargestellten Ausführungen zur Ermittlung einer entkoppelnden Rückführung zu verdeutlichen, wird ein Beispielsystem angeführt, für das Wey und Svaricek (1995) bereits die Störsignalentkoppelbarkeit nachgewiesen haben, ohne eine entkoppelnde Rückführung zu berechnen. Das System lautet:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ 0 \\ x_5 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_4 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \quad , \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Es werden zunächst die Ableitungen der Ausgangssignale gebildet, wobei sich herausstellt, daß für das hier betrachtete System keine Umnummerierung der Ausgänge für das Ranking notwendig ist.

$$\dot{y}_1 = u_1 \quad (u\text{-linksunabhängig}) \quad \Rightarrow \rho_1 = 1 \quad , \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= x_3 + x_4 u_1 \quad , \\ &= x_3 + x_4 \dot{y}_1 \quad , \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\ddot{y}_2 = u_2 + x_5 \dot{y}_1 + x_4 \ddot{y}_1 \quad (u\text{-linksunabhängig}) \quad \Rightarrow \rho_2 = 2 \quad . \quad (4.14)$$

Daraus folgt, daß gemäß Gl. (3.30) $r_1 - 1 = 1$ Integrator vor dem Eingang u_1 plaziert werden muß und kein Integrator vor u_2 , da r_2 nicht existiert. Da nach Gl. (3.25) $\sigma = 2$ und damit gleich m ist, entfällt die Wahl der Matrix \mathbf{R} , weil $\boldsymbol{\psi}_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Ersetzt man wie in Gl. (3.32) $\dot{y}_\alpha^{(\beta)}$ durch $z_{1+\beta-\rho_\alpha, \alpha}$ und setzt gemäß Gl. (3.31) $z_{2,1} = v_1$ bzw. $z_{1,2} = v_2$, dann ergibt sich aus Gln. (4.12) und (4.14):

$$\begin{bmatrix} z_{1,1} \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ x_5 z_{1,1} + x_4 v_1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\psi}_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\psi}_1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad . \quad (4.15)$$

Offensichtlich ist $\boldsymbol{\psi}_2 = \mathbf{0}$, und folglich ist wegen Satz 3.4 eine dynamische Störsignalentkopplung ohne Messung der Störung möglich. Aus Gl. (4.15) folgt unmittelbar:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{1,1} \\ v_2 - x_5 z_{1,1} - x_4 v_1 \end{bmatrix} \quad . \quad (4.16)$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem von Wey und Svaricek (1995) durch Betrachtung der Kantengewichte gefundenen Ergebnis überein.

4.3 Graphentheoretische Betrachtung

Zieht man den in Bild 4.2 dargestellten Systemgraph mit störentkoppelnder Rückführung in Betracht, so liegt die folgende systematische Vorgehensweise zur Bestimmung der Rückführung u_i nahe:

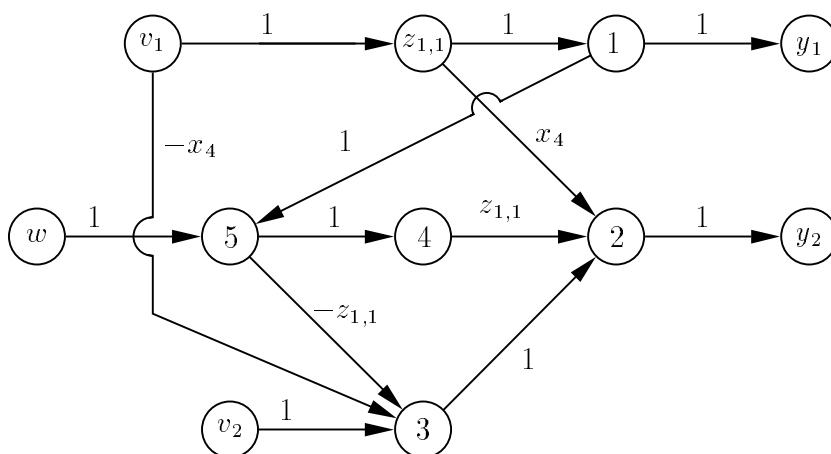


Bild 4.2: Graph des entkoppelten Systems aus Gln. (4.11)

Ist u_i die Eingangsgröße, die bei der ρ_i -fachen Differentiation der Ausgangsgröße y_j gemäß Gl. (3.29) auftritt, so bestimmt sich die störentkoppelnde Rückführung u_i aus den von y_j aus zurückverfolgten Pfaden der Länge ρ_j . Die Rückführung u_i ergibt sich aus den Gewichten der zu berücksichtigenden Pfade der Länge ρ_j multipliziert mit der Ableitung der Variablen, in deren Knoten sie enden. Diese Produkte werden aufsummiert, gleich $z_{1,i}$ gesetzt und diese Gleichung nach u_i aufgelöst. Die hier benötigte Ableitung der Variablen nach der Zeit sind bei gegebenem analytischem System Σ_{AS} bekannt.

Diese Vorgehensweise entspricht scheinbar der Umkehrung der Ausgangssignalableitungen wie sie bei der Methode des Rankings auch erfolgt. Daß der vorgeschlagene Ablauf nicht für alle Systeme zum Erfolg führen kann, wird durch die Tatsache deutlich, daß der Graph nur die ersten partiellen Ableitungen als Kantengewichte enthält und somit die Ausgangssignalableitungen insbesondere dann nicht mehr übersichtlich anhand des Graphen rekonstruiert werden können, wenn eine wiederholte Anwendung der Produkt- und/oder Kettenregel bei der Differentiation notwendig ist. Ein weiteres Beispiel soll die Grenzen der vorgeschlagenen, einfachen graphentheoretischen Synthese der Rückführung verdeutlichen und zu einer Eingrenzung der Systeme führen, für die diese Vorgehensweise anwendbar ist.

Es wird das vorangegangene Beispiel erweitert, indem eine weitere Zustandsvariable eingeführt wird. Es gelte:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_6 \\ \dot{x}_6 &= u_2 \end{aligned} \quad , \quad (4.17)$$

ansonsten entspreche das System dem aus Gl. (4.11). Es gilt nun wieder

$$\dot{y}_1 = u_1 \quad (u\text{-linksunabhängig}) \Rightarrow \rho_1 = 1 \quad , \quad (4.18)$$

$$\dot{y}_2 = x_3 + x_4 u_1 \quad ,$$

$$= x_3 + x_4 \dot{y}_1 \quad ,$$

$$\ddot{y}_2 = x_6 + x_5 \dot{y}_1 + x_4 \ddot{y}_1 \quad ,$$

$$y_2^{(3)} = u_2 + (x_1 + w) \dot{y}_1 + 2x_5 \ddot{y}_1 + x_4 y_3^{(3)} \quad (u\text{-linksunabh.}) \Rightarrow \rho_2 = 3 \quad . \quad (4.19)$$

und mit $\dot{y}_\alpha^{(\beta)} = z_{1+\beta-\rho_\alpha,\alpha}$ und $z_{3,1} = v_1$ bzw. $z_{1,2} = v_2$:

$$\begin{bmatrix} z_{1,1} \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ x_1 z_{1,1} + 2x_5 z_{2,1} + x_4 v_1 \end{bmatrix}}_{\psi_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\psi_1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ z_{1,1} \end{bmatrix}}_{\psi_2} w \quad . \quad (4.20)$$

Nach Satz 3.5 existiert ein störentkoppelndes dynamisches Rückführgesetz gemäß Gl. (3.12), da der Rang der Matrix ψ_1 gleich zwei ist. Die Rückführung ergibt sich zu

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{1,1} \\ v_2 - (x_1 + w)z_{1,1} - 2x_5 z_{2,1} - x_4 v_1 \end{bmatrix} \quad . \quad (4.21)$$

Daraus resultiert der in Bild 4.3 dargestellte Graph für das störentkoppelte Modell. Betrachtet man die oben vorgeschlagene graphentheoretische Vorgehensweise, so wird deutlich, daß diese hier nicht zu dem korrekten Ergebnis führt, da der Term $-2x_5 z_{2,1}$ aus Gl. (4.21) verloren geht. Die Begründung liegt in der schon erwähnten Schwierigkeit, die vollständigen Ausgangssignalableitungen aus dem Graph zu ermitteln.

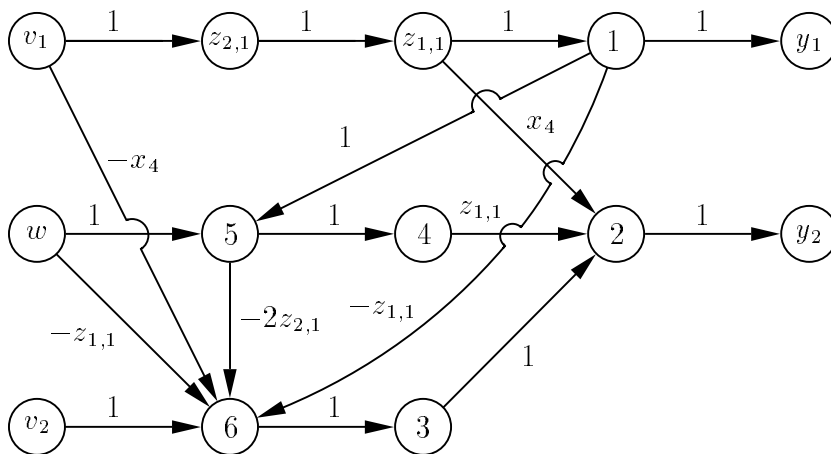


Bild 4.3: Graph des entkoppelten, gemäß Gl. (4.17) erweiterten Systems aus Gl. (4.11)

Es kann aber die Klasse der analytischen Systeme auf solche Systeme eingeschränkt werden, für die anhand des Systemgraphen nicht nur die Störsignalentkoppelbarkeit, sondern auch die Synthese der Rückführung „mit Papier und Bleistift“ nach der oben angegebenen Methode ermittelt werden kann. Die Ermittlung der Rückführung nach der Methode des Rankings bedient sich im wesentlichen zweier Schritte:

a) Differentiation und

b) Invertierung der Matrix $[\boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{R}^T]^T$ aus Gl. (3.33).

Wie schon angesprochen, lassen sich diese Operationen i. allg. nicht anschaulich am Graph nachvollziehen. Betrachtet man allgemein eine beliebige Ableitung einer Funktion $\xi(\boldsymbol{\Theta})$ nach der Zeit:

$$\dot{\xi}(\boldsymbol{\Theta}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi}{\partial \Theta_i} \dot{\Theta}_i \quad , \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}(\boldsymbol{\Theta}) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi}{\partial \Theta_i} \dot{\Theta}_i \right)}{\partial \Theta_j} \dot{\Theta}_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{\frac{\partial^2 \xi}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j}}_a \dot{\Theta}_i \dot{\Theta}_j + \frac{\partial \xi}{\partial \Theta_i} \frac{\partial \dot{\Theta}_i}{\partial \Theta_j} \dot{\Theta}_j \right) \quad , \end{aligned} \quad (4.23)$$

so wird deutlich, das nur die zeitlichen Ausgangssignalableitungen am Graph direkt ablesbar sind, bei denen lediglich eine einmalige partielle Ableitung auftritt, die von \mathbf{x} , \mathbf{u} , \mathbf{w} abhängt, da der Term a in Gl. (4.23) nicht am Graph ablesbar ist. Das bedeutet, daß die l -te Ableitung nur dann anschaulich am Graph rekonstruiert werden kann, wenn in allen Ableitungen niedrigerer Ordnung die partiellen Ableitungen verschwinden. Ist diese Bedingung erfüllt, so folgt als Verallgemeinerung von Gl. (4.23):

$$\xi^{(l)} = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_l=1}^n \left(\underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial \Theta_{i_1}}}_a \prod_{k=1}^{l-1} \underbrace{\frac{\partial \dot{\Theta}_{i_k}}{\partial \Theta_{i_{k+1}}}}_b \dot{\Theta}_{i_l} \right) \quad (4.24)$$

Diese Ableitung ist nun sehr wohl am Graph ablesbar, da die partiellen Ableitungen a und b in Gl. (4.24) die Kantengewichte darstellen und die zeitlichen Ableitungen der Parameter Θ_i für ein gegebenes analytisches System bekannt sind. Es werden daher folgende Einschränkungen gemacht:

a) Für das betrachtete System dürfen die ersten $\rho_l - 1$ Kanten der von dem l -ten Ausgangsknoten zurückverfolgten Pfade keine Gewichte besitzen, die von den Zustandsvariablen oder Eingangsgrößen abhängen. Diese Forderung resultiert aus der notwendigen Rekonstruierbarkeit der Ausgangssignalableitungen. Mit dieser Einschränkung wird sichergestellt, daß keine wiederholte Anwendung der Ketten- oder Produktregel bei den notwendigen Differentiationen des Ausgangssignals y_l notwendig ist und Gl. (4.24) anwendbar ist. Diese Forderung ist z. B. für lineare Systeme stets erfüllt.

b) Es darf in den Ausgangssignalableitungen $y_l^{(\rho_l)}$ jeweils nur eine neue Eingangsgröße enthalten sein. Dann ist die Matrix $[\boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{R}^T]^T$ (mit geeigneter Wahl von \mathbf{R}) nur auf

der Hauptdiagonalen belegt und der Schritt der Invertierung stellt bei graphentheoretischer Betrachtung einen vertretbaren Aufwand dar, denn für eine $m \times m$ -Matrix N , die nur auf der Hauptdiagonalen belegt ist, ergibt sich die Inverse besonders einfach zu

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_{1,1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_{2,2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n_{m,m}} \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

d.h. es muß für die Bestimmung von u_i , $i = 1, \dots, m$, jeweils nur eine einzelne Gleichung und kein Gleichungssystem gelöst werden.

Für diese Systeme läßt sich die Synthese der entkoppelnden Rückführung durch eine graphentheoretische Vorgehensweise erreichen, da für diese eingeschränkte Menge von Systemen eine graphentheoretische Vorgehensweise angegeben werden kann, die mit der Synthese nach der Methode des Rankings übereinstimmt und deshalb keines gesonderten Beweises bedarf:

Satz 4.1

Ein System sei durch eine dynamische Rückführung störentkoppelbar und erfülle folgende Bedingungen:

- *Die ersten $\rho_l - 1$ Kanten der von dem l -ten Ausgangsknoten zurückverfolgten Pfade des Systemgraphen besitzen keine Gewichte, die von den Zustandsvariablen abhängen.*
- *Es ist in $y_l^{(\rho_l)}$ jeweils nur eine neue Eingangsgröße enthalten, die für die u -Linksunabhängigkeit verantwortlich ist.*

Ist u_i die Eingangsgröße, die bei der ρ_l -fachen Differentiation der Ausgangsgröße y_j gemäß Gl. (3.29) auftritt, so bestimmt sich die störentkoppelnde Rückführung u_i aus den von y_j aus zurückverfolgten Pfaden der Länge ρ_j . Die Rückführung u_i ergibt sich aus den Gewichten der zu berücksichtigenden Pfade multipliziert mit der Ableitung der Variablen, in deren Knoten sie enden. Diese Produkte werden aufsummiert, gleich $z_{1,i}$ gesetzt und die resultierende Gleichung nach u_i aufgelöst. \square

Um Satz 4.1 zu verdeutlichen wird ein weiteres Beispielsystem betrachtet:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + x_4 u_1 \\ \dot{x}_3 &= x_5 u_2 \\ \dot{x}_4 &= u_2 \\ \dot{x}_5 &= w \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

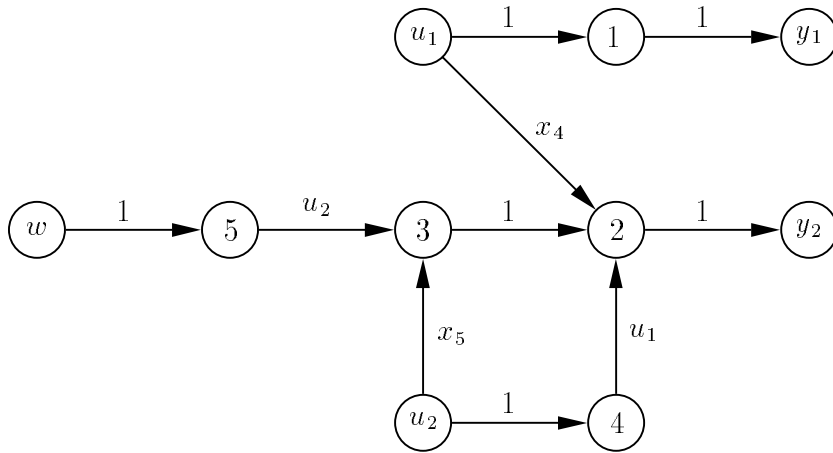


Bild 4.4: Graph des Systems aus Gl. (4.26)

Diesem System ist der Graph in Bild 4.4 zuzuordnen. Weiterhin ist das System störerkoppelbar, wie mit Hilfe von Satz 3.2 oder Satz 3.4 gezeigt werden kann. Betrachtet man die kürzesten knotendisjunkten Ein-/Ausgangspfade, so erkennt man, daß der in y_1 endende Pfad die Länge zwei hat und der in y_2 endende Pfad die Länge drei. Durch Vorschalten eines Knotens vor u_1 wird sichergestellt, daß alle in y_2 einlaufenden Pfade bis zur Länge drei zurückverfolgt werden können. Es resultiert der Graph in Bild 4.5. Zur Bestimmung von u_1 muß nur der umgekehrte Pfad $y_1 \rightarrow x_1$ berücksichtigt werden, der das Gewicht 1 hat. Somit gilt:

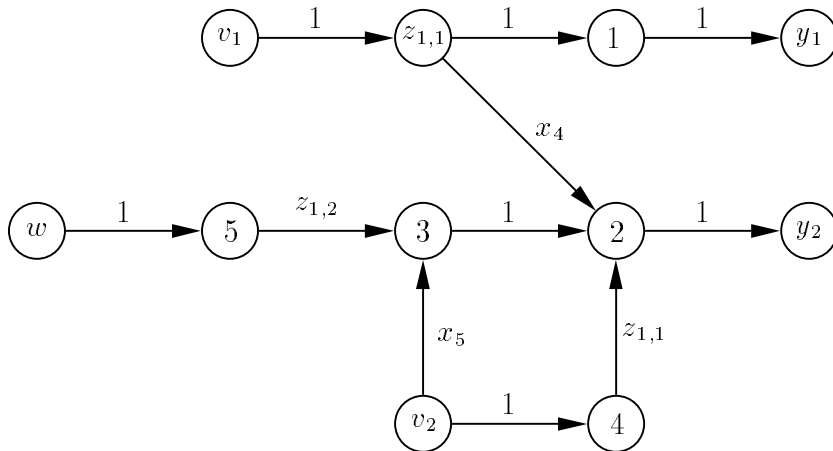


Bild 4.5: Erweiterter Graph des Systems aus Gl. (4.26)

$$\begin{aligned} z_{1,1} &= 1 \cdot \dot{x}_1 \\ \Leftrightarrow u_1 &= z_{1,1} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Zur Bestimmung von u_2 müssen die zurückverfolgten Pfade $y_2 \rightarrow x_2 \rightarrow z_{1,1}$ mit dem Gewicht x_4 , $y_2 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3$ mit dem Gewicht 1 sowie $y_2 \rightarrow x_2 \rightarrow x_4$ mit dem Gewicht $z_{1,1}$ berücksichtigt werden. Daraus folgt für u_2

$$z_{1,2} = v_2 = x_4 \dot{z}_{1,1} + 1 \cdot \dot{x}_3 + z_{1,1} \dot{x}_4$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow u_2 &= \frac{v_2 - x_4 \dot{z}_{1,1}}{x_5 + z_{1,1}} \\ &= \frac{v_2 - x_4 v_1}{x_5 + z_{1,1}} .\end{aligned}\tag{4.28}$$

Dieses Rückführgesetz stimmt mit dem Ergebnis überein, welches nach der Methode des Rankings bestimmt werden kann.

5 Zusammenfassung

Dieser Bericht stellt verschiedene Betrachtungsweisen des Problems der Störsignalentkoppelbarkeit vor. Neben der Systemanalyse hinsichtlich der Lösbarkeit des Problems wird auf die Synthese der entkoppelnden Rückführung näher eingegangen. Die Darstellungen in Abschnitt 3 zeigen dabei deutlich den in Abhängigkeit von der gewählten Beschreibungsart variierenden mathematischen Aufwand. Zudem ist nicht mit allen Beschreibungsarten die Synthese einer Rückführung möglich.

Es zeigt sich, daß trotz der recht aufwendigen Formulierung die Methode des Rankings eine zuverlässige Synthese einer Rückführung ermöglicht. Zudem gestaltet sich die Ermittlung der Rückführung ungleich einfacher als die Problemformulierung. Der Fall, daß eine Matrix \mathbf{R} zu wählen ist, bedeutet im übrigen lediglich, daß für eine störentkoppelnde Rückführung nicht alle Eingänge benötigt werden. Beschränkt man sich auf die Bestimmung der ersten σ Eingangsgrößen, so ist das Verfahren besonders einfach automatisierbar.

Die Diskussion der Übertragbarkeit der Ermittlung der störentkoppelnden Rückführung auf eine graphentheoretische Systembetrachtung zeigt die Grenzen der graphentheoretischen Synthesemöglichkeiten auf. Diese Grenzen liegen vornehmlich in der Tatsache begründet, daß die Kanten aus den ersten partiellen Ableitungen der Zustandsvariablen bzw. Ausgangsgrößen gebildet werden. Dennoch ist eine Synthese der gesuchten Rückführung anhand des Graphen möglich, wenn das betrachtete System bestimmte, direkt am Graphen ablesbare Bedingungen erfüllt, wie in Abschnitt 4 gezeigt ist.

Eine Implementierung der Synthese der entkoppelnden Rückführung in der symbolverarbeitenden Programmiersprache MAPLE ist sowohl für die graphentheoretische Vorgehensweise als auch für die Methode des Rankings möglich und wird daher angestrebt.

Da die Analyse nichtlinearer Systeme hinsichtlich vieler Fragen schon möglich ist, die Synthese von Regelungsstrategien jedoch in vielen Fällen noch nicht geklärt ist, verbleibt hier ein interessantes Arbeitsfeld. Insbesondere wird es interessant sein, ob die Graphentheorie für Synthesezwecke eine ebenso hohe Eignung aufweist, wie sie sich für Analysezwecke schon gezeigt hat.

Der Autor bedankt sich bei Herrn Holger Hebisch für die gründliche Durchsicht dieses Berichtes sowie einige nützliche Hinweise.

6 Literaturverzeichnis

- Bronstein, I. N.** und **K. A. Semendjajew**. 1991. *Taschenbuch der Mathematik*. Stuttgart: Teubner.
- Cao, L.** und **Y.-F. Zheng**. 1992. Disturbance decoupling via dynamic feedback. *International Journal of Systems Science* 23(5). 683–694.
- Delaleau, E.** und **M. Fliess**. 1993. Nonlinear disturbance rejection by quasi-static state feedback. *Proceedings of the International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems MTNS '93: Volume II: Invited and Contributed Papers*. Regensburg, Germany.
- Di Benedetto, M. D., J. W. Grizzle** und **C. H. Moog**. 1989. Rank invariants of nonlinear systems. *Society for industrial and applied mathematics SIAM Journal on Control and Optimization* 27. 658–672.
- Fliess, M.** 1986. Nonlinear control theory and differential algebra. *Modelling and Adaptive Control: Lecture Notes in Control and Information Science*, hg. von S. Engell. Berlin: Springer.
- Gellert, W., H. Kästner** und **S. Neuber** (Hgg.). 1985. *Lexikon der Mathematik*. Leipzig: VEB Bibliographisches Institut.
- Huijberts, H. J. C., H. Nijmeijer** und **L. L. M. Van der Wegen**. 1992. Dynamic disturbance decoupling for nonlinear systems. *Society for industrial and applied mathematics SIAM Journal on Control* 30(2). 336–349.
- Isidori, A.** 1995. *Nonlinear control systems*. Berlin: Springer.
- Johnson, J.** 1969. Kähler differentials and differential algebra. *Annals of Mathematics* 89. 92–98.
- Korn, G. A.** und **T. M. Korn**. 1968. *Mathematical handbook for scientists and engineers*. New York: McGraw-Hill.
- Reinschke, K.** 1988. *Multivariable Control — A Graph-Theoretic Approach*. Berlin: Springer.
- Riege, B.** 1995. *Zur Modellbildung und Regelung eines hydraulisch angetriebenen elastischen Roboters*. Diplomarbeit (unveröffentlicht). Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik. Fachbereich Maschinenbau. Universität Duisburg.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme: Systemtheoretische Grundlagen*. München: Oldenbourg.

- Wey, T.** 1992. *Einführung in die Differentialalgebra und ihre Anwendung auf nichtlineare Systeme*. Forschungsbericht 10/92. Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik. Fachbereich Maschinenbau. Universität Duisburg.
- Wey, T.** 1993. *Zur graphentheoretischen Charakterisierung des Ranges nichtlinearer Mehrgrößensysteme*. Forschungsbericht 04/93. Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik. Fachbereich Maschinenbau. Universität Duisburg.
- Wey, T.** 1994. *Zur Entkopplung nichtlinearer Systeme: ein graphentheoretischer Ansatz*. Forschungsbericht 04/94. Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik. Fachbereich Maschinenbau. Universität Duisburg.
- Wey, T.** und **F. Svaricek.** 1995. Disturbance decoupling for non-linear structured systems. *Applied Mathematics and Computer Science* 5(3). 547–559.

A Definitionen

Die hier aufgeführten Definitionen sind entnommen aus Schwarz (1991).

Definition A.1

Die Lie-Ableitung der skalaren Funktion $\lambda(\mathbf{x})$ entlang eines Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ist definiert als

$$L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{A.1})$$

□

Definition A.2

Die wiederholte Lie-Ableitung der skalaren Funktion $\lambda(\mathbf{x})$ entlang eines Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ und anschließend entlang eines Vektorfeldes $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ ist definiert als

$$L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial x_j} f_j(\mathbf{x}) \right] \right\} g_i(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{A.2})$$

□

Daraus folgt für die k -fache Lie-Ableitung:

Definition A.3

Die k -fache Lie-Ableitung der skalaren Funktion $\lambda(\mathbf{x})$ entlang eines Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ist rekursiv definiert als

$$L_{\mathbf{f}}^k \lambda(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(L_{\mathbf{f}}^{k-1} \lambda(\mathbf{x}) \right) f_i(\mathbf{x}) \quad , \quad \text{mit} \quad L_{\mathbf{f}}^0 \lambda(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{A.3})$$

□

B Modell des Hydraulikdifferentialzylinders

Das hier dargestellte Systemmodell gibt das Verhalten eines hydraulischen Differentialzylinders wieder und wurde bereits von Riege (1995) ausführlich diskutiert. Es werden folgende Zustandsvariablen gewählt:

- x_1 : Weg des Zylinderkolbens,
- x_2 : Geschwindigkeit des Zylinderkolbens,
- x_3 : Druck in Zylinderkammer A,
- x_4 : Druck in Zylinderkammer B,
- x_5 : Weg des Steuerkolbens im Servoventil und
- x_6 : Geschwindigkeit des Steuerkolbens im Servoventil.

Zudem wird die Gesamtersatzmasse m_{ges} durch Kolbenmasse m_K und Ölvolumen in den Zylinderkammern bestimmt:

$$m_{\text{ges}} = m_K + \rho_{\text{Öl}}(V_A + V_B) \quad . \quad (\text{B.1})$$

V_A und V_B sind die von der Zylinderkolbenposition abhängigen Ölvolumina und setzen sich zusammen aus dem Volumen des Öls in den Zylinderkammern und den Ölvolumina V_{LA} und V_{LB} in den Leitungen und ergeben sich bei einem Kolbenhub H zu

$$V_A = V_{LA} + \left(\frac{H}{2} + x_1\right) A \quad , \quad (\text{B.2})$$

$$V_B = V_{LB} + \left(\frac{H}{2} - x_1\right) \frac{A}{\varphi} \quad . \quad (\text{B.3})$$

Darin stellt φ das Flächenverhältnis von Kolbenfläche A zur Kolbenringfläche des Differentialzylinders dar. Die Reibkraft F_R im Hydraulikzylinder wird durch die drei Anteile viskose, coulombsche und Haftreibung modelliert:

$$F_R(x_2) = F_V x_2 + \text{sign}(x_2) \left(F_C + F_H \exp\left(-\frac{|x_2|}{c_H}\right) \right) \quad . \quad (\text{B.4})$$

Die Volumenströme Q_A und Q_B berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned} Q_A(x_3, x_5) &= B_A \left[\text{sg}(x_5) \text{sign}(p_0 - x_3) \sqrt{|p_0 - x_3|} \right. \\ &\quad \left. - \text{sg}(-x_5) \text{sign}(x_3 - p_T) \sqrt{|x_3 - p_T|} \right] \quad , \\ Q_B(x_4, x_5) &= B_B \left[\text{sg}(-x_5) \text{sign}(p_0 - x_4) \sqrt{|p_0 - x_4|} \right. \\ &\quad \left. - \text{sg}(x_5) \text{sign}(x_4 - p_T) \sqrt{|x_4 - p_T|} \right] \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

mit

$$\text{sg}(x) = \begin{cases} x & \forall x \geq 0 \\ 0 & \forall x < 0 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

und den Durchflußkoeffizienten B_A und B_B . Die Elastizitätsmoduln werden folgendermaßen berechnet:

$$E_{\ddot{O}l,A}(x_3) = 0,5E_{\ddot{O}l,\max} \log_{10} \left(100 \left(0,9 \frac{x_3}{p_{\max}} + 0,03 \right) \right) , \quad (\text{B.7})$$

$$E_{\ddot{O}l,B}(x_4) = 0,5E_{\ddot{O}l,\max} \log_{10} \left(100 \left(0,9 \frac{x_4}{p_{\max}} + 0,03 \right) \right) . \quad (\text{B.8})$$

Mit u als normierter Steuerspannung am Servoventil resultiert das bereits in Abschnitt 4 angegebene Modell aus den Kräftegleichgewichten für Zylinderkolben und Steuerkolben:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 , \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m_{\text{ges}}} \left[\left(x_3 - \frac{x_4}{\varphi} \right) A - F_R(x_2) - F_L \right] , \\ \dot{x}_3 &= \frac{E_{\ddot{O}l,A}(x_3)}{V_A(x_1)} \left(-Ax_2 + Q_A(x_3, x_5) \right) , \\ \dot{x}_4 &= \frac{E_{\ddot{O}l,B}(x_4)}{V_B(x_1)} \left(\frac{A}{\varphi} x_2 + Q_B(x_4, x_5) \right) , \\ \dot{x}_5 &= x_6 , \\ \dot{x}_6 &= \omega_0^2 \left(u - \frac{2D}{\omega_0} x_6 - x_5 \right) , \\ y &= x_1 . \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$