

QLS mit linearer Eigendynamik

Helmut Schwarz

Forschungsbericht Nr. 18/96

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Die hier eingeführten und betrachteten QLS haben zahlreiche Eigenschaften mit den BLS gemeinsam. Bei der Verwendung als Approximationsmodelle für nichtlineare technische Systeme liefern die QLS aber deutlich bessere Approximationsergebnisse als BLS, so daß sich der leicht erhöhte Aufwand vielfach bei der praktischen Anwendung lohnen wird.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	II
1 Einleitung	1
2 QLS: Quadratische Zustandsmodelle mit linearer Steuerung	2
3 Kanonische Strukturen für QLS mit linearer Eigendynamik	8
4 Regelgesetze für QLS mit linearer Eigendynamik	13
4.1 Linearisierende Zustandsrückführung	13
4.2 Stabilisierende Zustandsrückführung	14
5 Zustandsbeobachter für QLS mit linearer Eigendynamik	15
6 Meß- und Simulationsergebnisse zur praktischen Anwendung	17
6.1 Prüfstand „Langer Zylinder“	17
6.2 Elastischer Roboterarm	20
7 Zusammenfassung und Ausblick	22

Formelzeichen und Bezeichnungen

Abkürzungen

AS	Analytisches System
ALS	Analytisches System mit linearer Steuerung
BLS	Bilineares System
LS	Lineares System
NBNF	Nichtlineare Beobachternormalform
PLS	Polynomsystem
QLS	Quadratisches System im Zustand mit linearer Steuerung

Formelzeichen

$\mathbf{a}(\mathbf{x})$	Drift-Term eines ALS
\mathbf{A}	Systemmatrix
\mathbf{b}, \mathbf{B}	Eingangsmatrix
$\mathbf{b}(\mathbf{x})$	nichtlineare Eingangsmatrix
\mathbf{c}^T, \mathbf{C}	Ausgangsmatrix
$C(\lambda)$	charakteristisches Polynom einer Matrix
$c(\mathbf{x})$	nichtlineare Ausgangsfunktion
$\mathbf{c}(\mathbf{x})$	nichtlineare Ausgangsspaltenmatrix
$f(t)$	Zeitfunktion
$g(t, \tau)$	Volterra-Kern; Gewichtsfunktion eines linearen Systems
Φ	Fluß

1 Einleitung

Die nichtlineare Approximation nichtlinearer Systeme durch bilineare Systeme (BLS) konnte an Beispielen hydrostatischer Antriebe in der Arbeitsgruppe des Autors mit sehr gutem Erfolg gezeigt werden (Beater 1987, Guo 1991, Schwarz 1991). Die Regelung dieser technischen Systeme kann dann auf der Basis eines Reglerentwurfs für das bilineare Modell erfolgen. Aus Gründen der gesicherten Stabilisierbarkeit ist hier in erster Linie zunächst die quadratische Zustandsrückführung (Gutmann 1981, Mohler 1991) zu nennen, die auch Beater (1987) in einer modifizierten Form zur Regelung von hydrostatischen Translationsantrieben erfolgreich einsetzt.

Da der Systemzustand eines technischen Systems in der überwiegenden Zahl der Anwendungsfälle nicht vollständig meßbar ist, muß ersatzweise ein Beobachter zur Zustandsschätzung eingesetzt werden, also im Falle der bilinearen Modelle ein Beobachter für BLS. Bei diesen Beobachtern ist durch geeignete Beobachtungsfehlerrückführung das asymptotische Abklingen des Schätzfehlers zu sichern. Dies ist besonders übersichtlich erreichbar, wenn durch geeignete Zustandsmodelltransformationen eine nichtlineare Beobachternormalform (NBNF) erzeugt werden kann, mit der die Schätzfehlerdifferentialgleichung eine homogene lineare Form erhält (Zeit 1985, Keller 1986, Schwarz 1990, 1992a).

Wird der Zustand eines BLS in Beobachternormalform über einen Identitätsbeobachter vom Luenbergertyp (Luenberger 1964) geschätzt, dann ist die Schätzfehlerdynamik linear und im Prinzip durch die Beobachterverstärkung in weiteren Grenzen beliebig einstellbar. Wenn dann als Regelung die quadratische Zustandsregelung (Gutmann 1981, Beater 1987) verwendet wird, läßt sich für das Gesamtregelungskonzept ein *Separationsprinzip*, wie für lineare Systeme gültig (Kailath 1980), nachweisen (Schwarz 1992b, 1997).

Für die nichtlineare Approximation der dynamischen Gleichungen elastischer Handhabungssysteme eignen sich Systeme mit quadratischer Zustandsabhängigkeit deutlich besser als lineare oder bilineare Approximationen (Bernzen 1994, Schwarz u.a. 1995). Dies war die Motivation, die Ergebnisse für BLS (Schwarz 1997) auf QLS zu erweitern. Im Abschnitt 2 werden die betrachteten QLS vorgestellt, deren kanonische Strukturen in Abschnitt 3 definiert werden. Die Einführung einer stabilisierenden Rückführung für die betrachteten QLS ist Gegenstand von Abschnitt 4. Ein QLS-Beobachter mit linearer Fehlerdynamik wird im 5. Abschnitt vorgestellt. Die Existenz eines erweiterten Separationsprinzips wird in Abschnitt 6 diskutiert. Im Abschnitt 7 werden Ergebnisse für hydraulische Linearantriebe und einen elastischen Roboterarm vorgestellt. Eine Zusammenfassung und ein Ausblick auf weitere Arbeiten schließen diesen Bericht ab.

2 QLS: Quadratische Zustandsmodelle mit linearer Steuerung

Innerhalb der nichtlinearen Systeme der Klasse ALS – analytische Zustandsabhängigkeit und linear eingehende Steuerung –:

$$\sum_{ALS} \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{b}(\mathbf{x}(t))u(t) \\ y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \end{array} ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(0) ; \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

also den zeitinvarianten Eingrößen–ALS mit linearer Meßgleichung ohne direkten Durchgriff der Steuerung $u(t)$ auf die Meßgröße $y(t)$, sind die BLS (bilineare Systeme) die einfachste Unterklasse:

$$\sum_{BLS} \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + [\mathbf{N}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}]u(t) \\ y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \end{array} ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(0) ; \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

Diese einfach und durchsichtig aufgebauten Systeme zeigen schon ausgeprägtes nichtlineares Verhalten, weshalb sie in der Gruppe des Autors seit mehr als 15 Jahren intensiv studiert und vor allem auch als Approximationsmodelle für nichtlineare technische Systeme erfolgreich eingesetzt werden (Schwarz 1991, 1995).

Geht man von der allgemeineren nichtlinearen Systembeschreibung der ALS nach Gl.(2.1) aus, dann stellen die Terme $\mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{N}\mathbf{x}(t)$ in (2.2) die linearen Glieder von Taylorreihenentwicklungen von $\mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$ bzw. $\mathbf{b}(\mathbf{x}(t))$ in (2.1) dar. Es ist deshalb naheliegend, die Systemklasse der Polynomsysteme mit linearer Steuerung (PLS)

$$\sum_{PLS} \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mathbf{A}_i \mathbf{x}^{(i)}(t) + \left[\sum_{j=0}^s \mathbf{B}_j \mathbf{x}^{(j)}(t) \right] u(t) \\ y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \end{array} ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) ; \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \quad (2.3)$$

zur Approximation des nichtlinearen Systemverhaltens technischer Systeme heranzuziehen. In (2.3) wurde zur übersichtlichen Darstellung die Kronecker Potenz– bzw. Produkt–Notation verwendet:

$$\mathbf{x}^{(i)}(t) = \underbrace{\mathbf{x}(t) \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}(t)}_{i\text{-mal}}. \quad (2.4)$$

Mit $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ist z. B.:

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = [x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, \dots, x_1x_n, x_2x_1, x_2^2, \dots, x_n^2]^T \in \mathbb{R}^{n^2}. \quad (2.5)$$

So bestechend die allgemeine Form der PLS (2.3) zunächst erscheint, so blähen sich die Terme schon ab $n \geq 2$ gewaltig auf. In (2.3) sind \mathbf{A}_2 und \mathbf{B}_2 rechteckige n, m Matrizen mit $m = n^2$.

Innerhalb der Klasse der PLS sind nun neben den linearen Systemen und den BLS die Systeme mit quadratischen Gliedern und linearer Steuerung (QLS) die nächst komplexere

Systemklasse, die vom Autor und den Mitarbeitern betrachtet und deren Brauchbarkeit zur weitergehenden Approximation nichtlinearer Systeme untersucht wird.

Ausgehend von den Polynomsystemen (PLS) in Gl.(2.3) werden nun die quadratischen Systeme mit linearer Steuerung (QLS) definiert:

$$\sum_{QLS} \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2\mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) + [\mathbf{b} + \mathbf{B}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t)]u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) \quad ; \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Zur Vereinfachung, insbesondere bei der Bezeichnung der Matrizenelemente, wurde die Notation gegenüber Gl.(2.3) leicht modifiziert, und es soll im einzelnen gelten:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &=: \mathbf{A} = [a_{ij}] \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\ \mathbf{A}_2 &=: [{}_2a_{ij}] \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n^2 \\ \mathbf{B}_0 &=: \mathbf{b} = [b_1, \dots, b_n]^T \\ \mathbf{B}_1 &=: \mathbf{B} = [b_{ij}] \quad (\text{entspricht } \mathbf{N} \text{ in Gl.(2.2))} \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\ \mathbf{B}_2 &=: [{}_2b_{ij}] \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n^2 . \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

In Bild 2.1 ist das System nach Gl.(2.6) als Blockschaltbild dargestellt, wobei ein neu eingeführtes Symbol für die Kroneckermultiplikation verwendet wird.

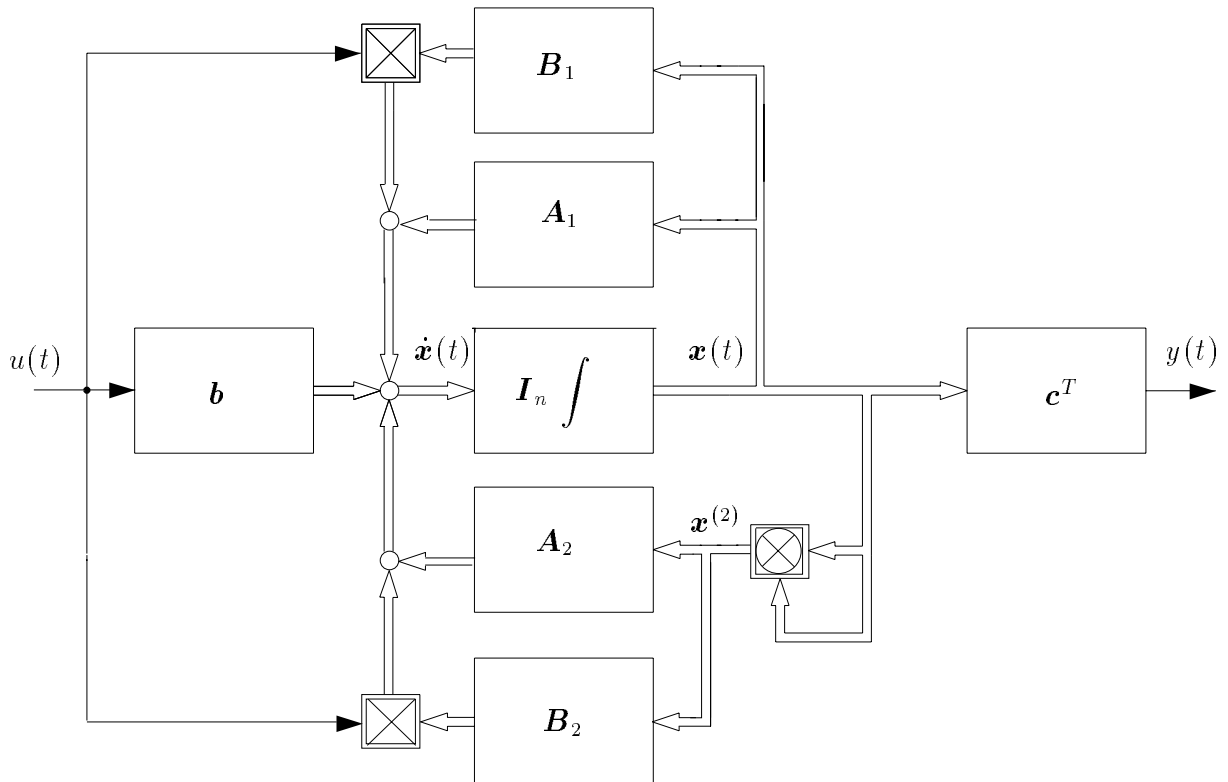


Bild 2.1: Blockschaltbild der QLS nach Gl.(2.6)

Abweichend von der allgemeinen Beschreibung mittels Kroneckerprodukten in (2.3) und (2.6) können QLS auch mittels konventioneller Matrizennotation dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t) & \mathbf{Q}_1\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}^T(t) & \mathbf{Q}_2\mathbf{x}(t) \\ & \vdots \\ \mathbf{x}^T(t) & \mathbf{Q}_n\mathbf{x}(t) \end{bmatrix} + \left[\mathbf{b} + \mathbf{B}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t) & \mathbf{R}_1\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}^T(t) & \mathbf{R}_2\mathbf{x}(t) \\ & \vdots \\ \mathbf{x}^T(t) & \mathbf{R}_n\mathbf{x}(t) \end{bmatrix} \right] u(t) \quad (2.8) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) \quad , \end{aligned}$$

wobei in den skalaren quadratischen Formen die \mathbf{Q}_i und \mathbf{R}_i quadratische n, n -Matrizen sind.

Wird in (2.6) $\mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{0}$ gesetzt, erhält man das BLS aus Gl.(2.2). Innerhalb der QLS lassen sich nun u. a. zwei wesentliche Klassen unterscheiden:

$$\begin{aligned} \sum_{QLS_1} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + [\mathbf{b}_0 + \mathbf{B}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t)]u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) \quad ; \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \quad . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Definition 2.1

QLS nach Gl.(2.9) sollen QLS mit linearer Eigendynamik heißen. □

Die QLS mit linearer Eigendynamik sind die nach den BLS nächst komplexere Unterklasse der ALS, sind aber bezüglich Beobachtbarkeitsuntersuchungen und Beobachterentwurf noch gut handhabbar (Jelali 1993). In Bild 2.2 ist ein QLS mit linearer Eigendynamik als Blockschaltbild dargestellt. Daneben existieren die Systeme:

$$\begin{aligned} \sum_{QLS_2} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2\mathbf{x}^{(2)}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) \quad , \end{aligned} \quad (2.10)$$

die in diesem Bericht nicht weiter betrachtet werden.

Das Übertragungsverhalten eines nichtlinearen Systems kann mittels Volterra'schen Reihen beschrieben werden (Schwarz 1991):

$$y(t) = g_0(t) + \int_0^t \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{\nu-1}} g_\nu(t, \tau_1, \dots, \tau_\nu) u(\tau_1) \dots u(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_1 \quad . \quad (2.11)$$

Die Kerne g_ν in (2.11) – die als verallgemeinerte Gewichtsfunktionen deutbar sind – lassen sich unter gewissen Voraussetzungen explizit analytisch bestimmen: ¹

Satz 2.1 : (Isidori 1995)

Unter der Voraussetzung, daß

- i) $\mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$ und $\mathbf{b}(\mathbf{x}(t))$ in Gl. (2.1) analytische Vektorfelder sind und

¹ Zeitargumente werden zur besseren Übersichtlichkeit häufig nicht angegeben.

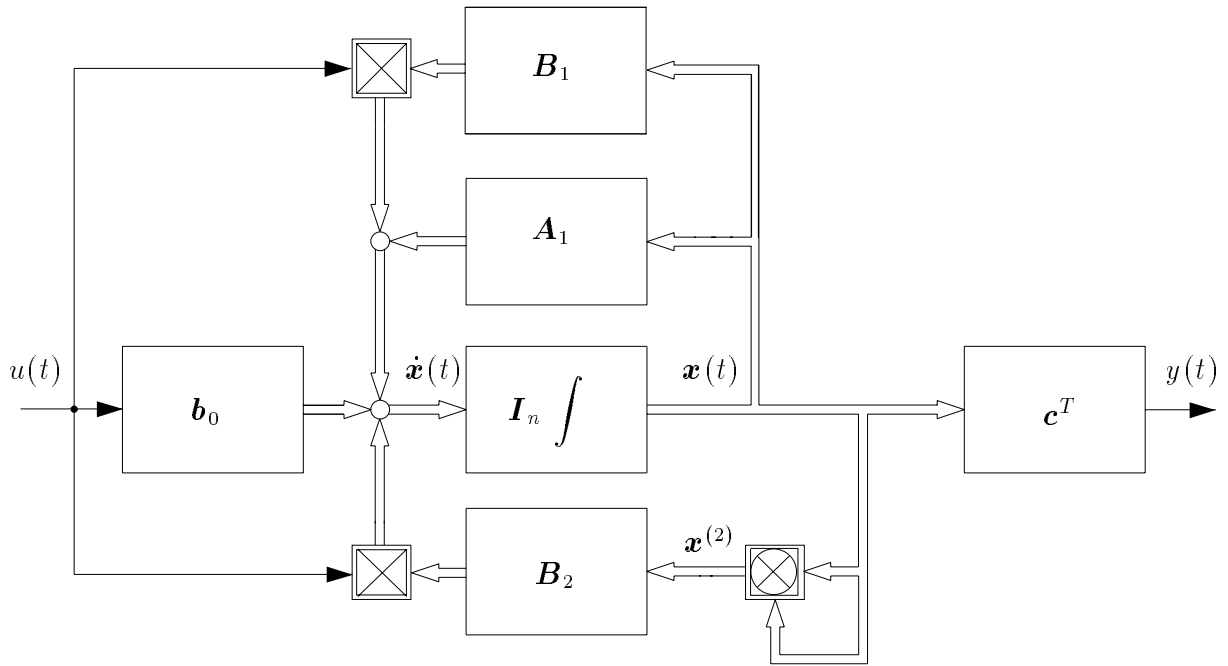


Bild 2.2: Blockschaltbild eines QLS mit linearer Eigendynamik

ii) $\max |u(\tau)| < 1$; $0 \leq \tau \leq T$ mit T hinreichend klein,

hat das ALS nach Gl. (2.1) eine Volterra-Reihendarstellung nach Gl.(2.11) mit den Volterra-Kernen

$$\left. \begin{aligned}
 g_0(t) &= \mathbf{c}^T \Phi_t^a(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} \\
 g_1(t, \tau_1) &= L_{P_{\tau_1}} \mathbf{c}^T \Phi_t^a(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} \\
 g_2(t, \tau_1, \tau_2) &= L_{P_{\tau_2}} L_{P_{\tau_1}} \mathbf{c}^T \Phi_t^a(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} \\
 &\vdots \\
 g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) &= L_{P_{\tau_i}} \dots L_{P_{\tau_1}} \mathbf{c}^T \Phi_t^a(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} ; L_{P_{\tau_i}}(\cdot) = \left[\frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T P_{\tau_i}(\mathbf{x})
 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

mit

$$P_t(\mathbf{x}) = (\Phi_{-t}^a)_* \mathbf{b} \circ \Phi_t^a(\mathbf{x}) = (\Phi_{-t}^a)_* \mathbf{b}(\Phi_t^a(\mathbf{x})) \quad ; \quad (\cdot)_* = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.13)$$

□

Hierbei gilt folgende Definition:

Definition 2.2 : (Isidori 1995, Schwarz 1991)

a) Mit dem *Fluß* $\Phi_t^a(\mathbf{x})$ eines Vektorfeldes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ wird die glatte Funktion von t und \mathbf{x} bezeichnet, welche die Eigenschaft hat, die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \quad (2.14)$$

zu erfüllen. Mit anderen Worten ist $\Phi_t^a(\mathbf{x})$ eine glatte Funktion, für die gilt:

$$\frac{d}{dt}\Phi_t^a(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\Phi_t^a(\mathbf{x})) \quad ; \quad \Phi_0^a(\mathbf{x}) = \mathbf{x} . \quad (2.15)$$

b) Für hinreichend kleine Zeiten t_1, t_2 gelten die zu der Fundamentalmatrix eines linearen Zustandsmodells analogen Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \text{i) } & [\Phi_{t_1}^a(\mathbf{x})]^{-1} = \Phi_{-t_1}^a(\mathbf{x}) \\ \text{ii) } & \Phi_{t_1+t_2}^a(\mathbf{x}) = \Phi_{t_1}^a(\mathbf{x})\Phi_{t_2}^a(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad \square$$

Im Falle der BLS und der QLS_1 , – also den Systemen mit „linearer Eigendynamik“ – ist Φ die bekannte Fundamentalmatrix linearer Systeme, so daß die Auswertung der Beziehung in 2.12 und 2.13 mit

$$\Phi_t^a(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 \quad ; \quad \mathbf{P}_t(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{b} \quad (2.16)$$

für das *lineare System* liefert:

$$\sum_{LS} \left. \begin{aligned} g_0(t) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 \\ g_1(t, \tau_1) &= \mathbf{L}_{\mathbf{P}_{\tau_1}} \mathbf{c}^T \Phi_t^a(\mathbf{x}_0) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)}\mathbf{b} \\ g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) &= \mathbf{L}_{\mathbf{P}_{\tau_i}} \dots \mathbf{L}_{\mathbf{P}_{\tau_1}} \mathbf{c}^T \Phi_t^a(\mathbf{x}_0) = 0 \quad ; \quad i \geq 2 \end{aligned} \right\} . \quad (2.17)$$

Für die BLS erhält man das bekannte Ergebnis (Schwarz 1991) über:

$$\Phi_t^a(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x} \quad ; \quad \mathbf{P}_t(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{A}t}(\mathbf{N}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x} + \mathbf{b}) \quad (2.18)$$

zu:

$$\sum_{BLS} \left\{ \begin{aligned} g_0(t) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 \\ g_1(t, \tau_1) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)}\mathbf{N}e^{\mathbf{A}\tau_1}\mathbf{x}_0 + \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)}\mathbf{b} \\ g_2(t, \tau_1, \tau_2) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)}\mathbf{N}e^{\mathbf{A}(\tau_1-\tau_2)}\mathbf{N}e^{\mathbf{A}\tau_2}\mathbf{x}_0 + \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)}\mathbf{N}e^{\mathbf{A}(\tau_1-\tau_2)}\mathbf{b} \\ &\vdots \\ g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)}\mathbf{N}e^{\mathbf{A}(\tau_1-\tau_2)}\mathbf{N} \dots \mathbf{N}e^{\mathbf{A}\tau_i}\mathbf{x}_0 + \\ &\quad + \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)}\mathbf{N}e^{\mathbf{A}(\tau_1-\tau_2)}\mathbf{N} \dots \mathbf{N}e^{\mathbf{A}(\tau_{i-1}-\tau_i)}\mathbf{b} \\ &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \left[\prod_{j=1}^{i-1} \mathbf{N}e^{\mathbf{A}(\tau_j-\tau_{j+1})} \right] \mathbf{N}e^{\mathbf{A}\tau_i}\mathbf{x}_0 + \\ &\quad + \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \left[\prod_{j=1}^{i-1} \mathbf{N}e^{\mathbf{A}(\tau_j-\tau_{j+1})} \right] \mathbf{b} . \end{aligned} \right\} (2.19)$$

Auch für die QLS mit linearer Eigendynamik (2.9) läßt sich Gl. (2.17) noch auswerten (Jelali 1993). Mit

$$\Phi_t^a(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 ; \quad \mathbf{P}_t(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{A}t} (\mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}t} \otimes e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{B} e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x} + \mathbf{b}) \quad (2.20)$$

und

$$(e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}) \otimes (e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}) = e^{\mathbf{A}t} \otimes e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \quad (2.21)$$

erhalt man die ersten Kerne des Systems (2.9) zu

$$\left. \begin{aligned} g_0(t) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 \\ g_1(t, \tau_1) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} [\mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_1} \mathcal{K}_\otimes^0 |_{\mathbf{x}_0} + \mathbf{B} e^{\mathbf{A}\tau_1} \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}] \\ g_2(t, \tau_1, \tau_2) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} [\mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_1} \mathcal{K}_\otimes^0 |_{\mathbf{x}_0} + \mathbf{B} e^{\mathbf{A}\tau_1}] \times \\ &\quad \times e^{-\mathbf{A}\tau_2} [\mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_2} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_2} \mathcal{K}_\otimes^0 |_{\mathbf{x}_0} + \mathbf{B} e^{\mathbf{A}\tau_2} \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}] \\ g_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \{ \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_1} \mathcal{K}_\otimes^2 \otimes [e^{-\mathbf{A}\tau_2} \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_2} e^{\mathbf{A}\tau_2} \mathcal{K}_\otimes^0 |_{\mathbf{x}_0}] + \\ &\quad + \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_1} \mathcal{K}_\otimes^1 |_{\mathbf{x}_0} e^{-\mathbf{A}\tau_2} \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_2} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_2} \mathcal{K}_\otimes^1 |_{\mathbf{x}_0} + \\ &\quad + \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_1} \mathcal{K}_\otimes^2 \mathbf{I}_n \otimes [e^{-\mathbf{A}\tau_2} \mathbf{B} e^{\mathbf{A}\tau_2} \mathbf{x}_0] + \\ &\quad + \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_1} \mathcal{K}_\otimes^1 |_{\mathbf{x}_0} e^{-\mathbf{A}\tau_2} \mathbf{B} e^{\mathbf{A}\tau_2} + \\ &\quad + \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_1} \mathcal{K}_\otimes^2 \mathbf{I}_n \otimes [e^{-\mathbf{A}\tau_2} \mathbf{b}] + \\ &\quad + \mathbf{B} e^{\mathbf{A}(\tau_1-\tau_1)} \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_2} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_2} \mathcal{K}_\otimes^1 |_{\mathbf{x}_0} + \mathbf{B} e^{\mathbf{A}(\tau_1-\tau_2)} \mathbf{B} e^{\mathbf{A}\tau_2} \} \times \\ &\quad \times e^{-\mathbf{A}\tau_2} [\mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_2} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_2} \mathcal{K}_\otimes^0 |_{\mathbf{x}_0} + \mathbf{B} e^{\mathbf{A}\tau_2} \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}] \\ &\quad \vdots \\ g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} g_{i-1}(t, \tau_1, \dots, \tau_{i-1}) |_{\mathbf{x}_0} \mathbf{P}_{\tau_i}^f \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

mit den Abkurzungen:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{K}_\otimes^0 &= \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n^2} \\ \mathcal{K}_\otimes^1 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{K}_\otimes^0 \in \mathbb{R}^{n^2 \times n} \\ \mathcal{K}_\otimes^2 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{K}_\otimes^1 = \text{konstante Matrix } \forall \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n; \mathcal{K}_\otimes^2 \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2} . \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Fur die Anfangsbedingungen $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, die durch geeignete Koordinatenfestlegung immer erreichbar ist, vereinfacht sich die Beziehung (2.22) erheblich zu:

$$\left. \begin{aligned} g_0(t) &= 0 \\ g_1(t, \tau_1) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \mathbf{b} \\ g_2(t, \tau_1, \tau_2) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \mathbf{B} e^{\mathbf{A}(\tau_1-\tau_2)} \mathbf{b} \\ g_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_1} \mathcal{K}_\otimes^2 \mathbf{I}_n \otimes [e^{-\mathbf{A}\tau_2} \mathbf{b}] e^{-\mathbf{A}\tau_3} \mathbf{b} + \\ &\quad + \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \mathbf{B} e^{\mathbf{A}(\tau_1-\tau_2)} \mathbf{B} e^{\mathbf{A}(\tau_2-\tau_3)} \mathbf{b} \\ &\quad \vdots \end{aligned} \right\} . \quad (2.24)$$

3 Kanonische Strukturen für QLS mit linearer Eigendynamik

Nach Zeitz (1985) sollen kanonische Systemstrukturen diese Eigenschaften haben:

- a) *Konsistenz*: Die entsprechenden Normalformen für lineare Systeme sind Spezialfälle der noch zu besprechenden kanonischen Formen.
- b) *Charakteristische Merkmale*: Der Name der kanonischen Form soll die wesentlichen Eigenschaften bezeichnen.
- c) *Äquivalenz*: Es muß eine nichtsinguläre Koordinatentransformation in die betreffende Normalform existieren, wenn das Originalsystem die entsprechende Eigenschaft besitzt.

In diesem Beitrag werden nur die ersten beiden Punkte explizit besprochen, da die behandelten Systeme zunächst zur approximativen Modellierung technischer Systeme dienen sollen. Dabei soll die Methode der Systemidentifikation – sei es in der Simulation oder am realen System – zur Modellgewinnung im Vordergrund stehen. Bei der Parameteridentifikation ist es aber außerordentlich nützlich, wenn das Systemverhalten mit einer minimalen Parameterzahl beschrieben werden kann, wodurch die Systemnormalformen ein natürlicher Einstieg in diese Problemstellung sind.

Auf die Angabe expliziter Äquivalenztransformationen, mit denen allgemeine QLS auf die jeweilige Normalform transformiert werden können, wird hier verzichtet. Die prinzipielle Existenz solcher Transformationen muß in jedem Einzelfall geprüft werden und wird wie bei den BLS schwerwiegenden Restriktionen unterliegen. Zwar sind die QLS eine Untermenge der analytischen Systeme mit linearer Steuerung (ALS), für die die Existenz von Äquivalenztransformationen auf die von Zeitz (1985) definierten Normalformen prinzipiell nachgewiesen wurde: Ein ALS kann damit in ein ALS in Normalform transformiert werden. Das beinhaltet aber auch, daß jedes QLS in eine Normalform transformiert werden kann, die dann aber *fast immer kein* QLS, sondern ein allgemeines ALS sein wird.

In der Literatur (Zeitz 1985, Schwarz 1991) werden in bezug auf die Eigenschaften Steuerbarkeit/Erreichbarkeit und Beobachtbarkeit/Unterscheidbarkeit diese 4 kanonischen Strukturen unterschieden:

- i) Steuerbarkeits–kanonische Form
- ii) Regelungs–kanonische Form
- iii) Beobachtbarkeits–kanonische Form
- iv) Beobachter–kanonische Form

Im Falle der ALS haben die Strukturen i) und iii) die Eigenschaften, daß die Matrizen der Kriterien für lokale Steuerbarkeit bzw. lokale Beobachtbarkeit im Falle der n -Steuerbarkeit bzw. n -Beobachtbarkeit gleich der Einheitsmatrix \mathbf{I}_n sind. Die Strukturen ii) bzw. iv) erlauben eine sehr übersichtliche Synthese einer linearisierten Zustandsregelung bzw. des Beobachterentwurfs mit linearer Fehlerdynamik.

Für die in diesem Bericht interessierenden Systeme *QLS mit linearer Eigendynamik* werden solche kanonischen Strukturen definiert, für die vor allem die obigen Eigenschaften a) *Konsistenz* und b) *Charakteristische Merkmale* zutreffen. Bei der Steuerbarkeitsstruktur müssen dabei Abstriche gemacht werden, da ein System in strenger Steuerbarkeitsstruktur bei QLS **nicht** existiert. Es wird daher, wie bei den BLS vom Autor vorgeschlagen, eine Steuerbarkeitsnormalform im erweiterten Sinn vereinbart:

Definition 3.1

Ein QLS (2.6) mit linearer Eigendynamik liegt in Steuerbarkeitsnormalform im weiteren Sinn vor, wenn sein Zustandsmodell die folgende Struktur hat:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= [\mathbf{E} - \mathbf{a}]\mathbf{x}(t) + \left[\begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + [\mathbf{0}:\mathbf{b}_1]\mathbf{x}(t) + [\mathbf{0}:\mathbf{b}_2]\mathbf{x}^{[2]}(t) \right] u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \end{aligned} \quad (3.1a)$$

oder detaillierter:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \cdots & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_n \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & b_{11} \\ & b_{12} \\ & \vdots \\ & b_{1n} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & b_{21} \\ & b_{22} \\ & \vdots \\ & b_{2n} \end{bmatrix} \mathbf{x}^{[2]}(t) \right] u(t) \\ y(t) &= [c_1, c_2, \dots, c_n] \mathbf{x}(t) \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \end{aligned} \quad (3.1b)$$

□

Anders als Gl.(2.4) definiert, wird in Gl.(3.1a) die reduzierte Kroneckerpotenz $\mathbf{x}^{[i]}$ verwendet, bei der alle mehrfach (redundant) auftretenden Produkte unterdrückt werden.

$$\text{Für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ gilt dann } \mathbf{x}^{[2]} \in \mathbb{R}^r \quad (3.2)$$

$$\text{mit } r = n(n+1)/2 \quad . \quad (3.3)$$

In Bild 3.1 ist das QLS (3.1) veranschaulicht.

Definition 3.2

Ein QLS mit linearer Eigendynamik liegt in Regelungsnormalform vor, wenn es diese Zustandsdarstellung hat:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) +$$

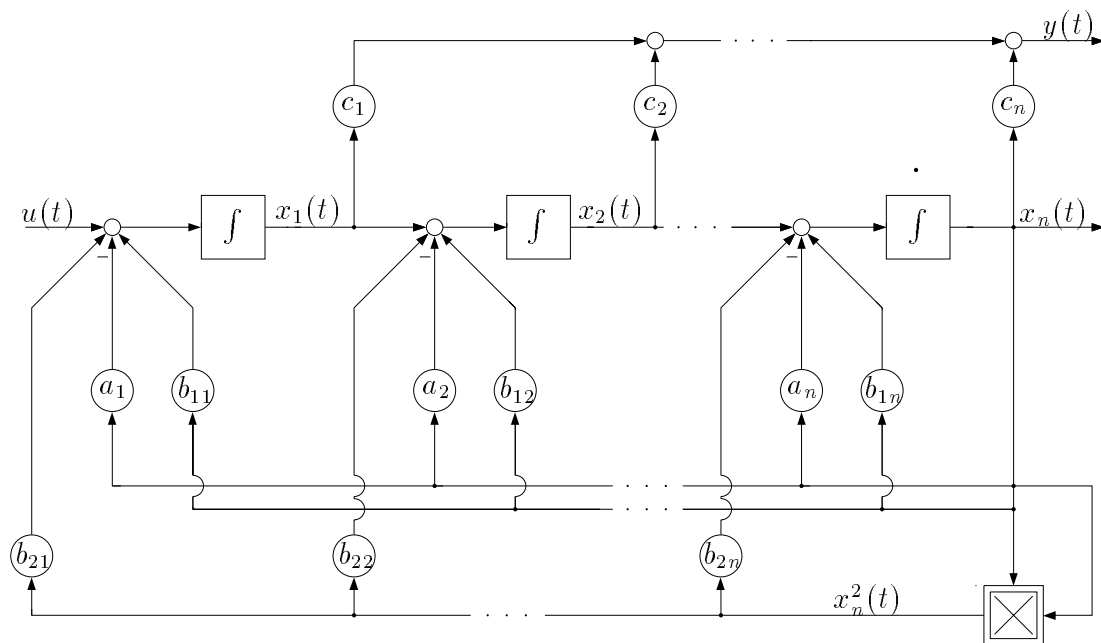


Bild 3.1: Bildliche Darstellung der QLS mit linearer Eigendynamik in Steuerbarkeitskanonischer Form nach Gl.(3.1a)

$$\begin{aligned}
 & + \left[\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & \cdots & b_{2r} \end{bmatrix} \mathbf{x}^{[2]}(t) \right] u(t) \quad (3.4) \\
 y(t) & = [c_1, c_2, \dots, c_n] \mathbf{x}(t) \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \quad ; \quad r = n(n+1)/2 .
 \end{aligned}$$

□

Dieses System ist im Bild 3.2 als Blockschaltbild dargestellt.

Definition 3.3

Ein QLS mit linearer Eigendynamik in Beobachtbarkeitsnormalform hat dieses Zustandsmodell:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}(t) & = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \\
 & + \left[\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & \cdots & b_{2r} \end{bmatrix} \mathbf{x}^{[2]}(t) \right] u(t) \quad (3.5) \\
 y(t) & = [1, 0, \dots, 0] \mathbf{x}(t) = x_1(t) \quad ; \quad r = \frac{n(n+1)}{2} .
 \end{aligned}$$

□

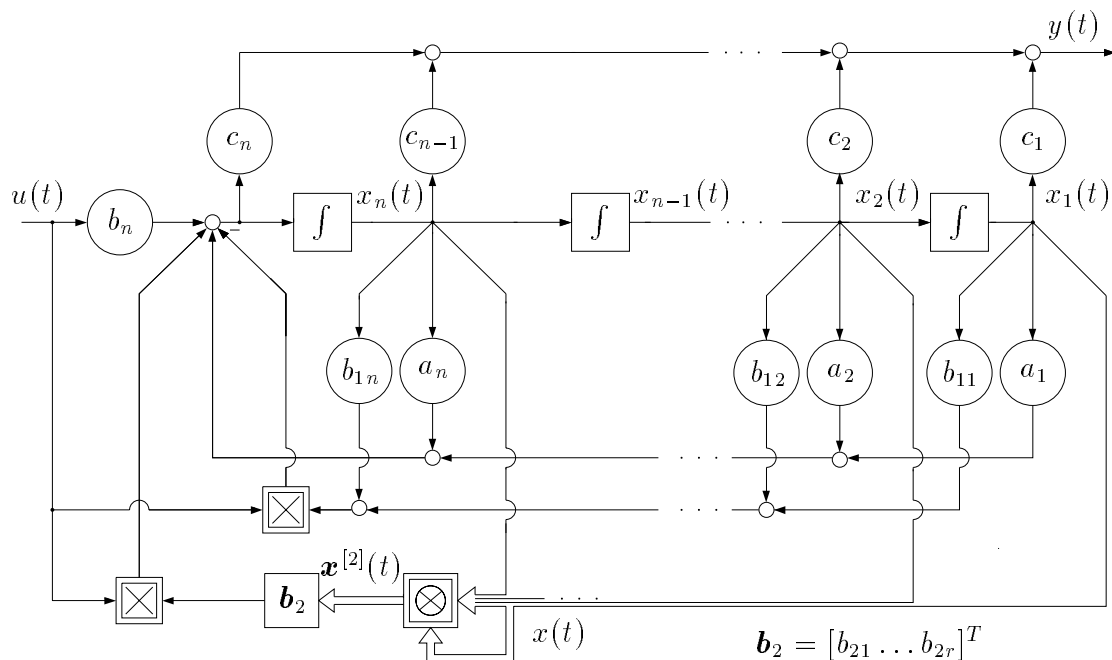


Bild 3.2: QLS mit linearer Eigendynamik in Regelungsnormform

Das Bild 3.3 veranschaulicht die Struktur des Systems nach Definition 3.3.

Definition 3.4

Ein QLS mit linearer Eigendynamik in (reduzierter) Keller–Beobachternormform hat dieses Zustandsmodell:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \\
 &+ \left[\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{bmatrix} x_n(t) + \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{2n} \end{bmatrix} x_n^2(t) \right] u(t) \\
 y(t) &= [0, \dots, 0, 1] \mathbf{x}(t) = x_n(t) \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) .
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

□

Das Bild 3.4 veranschaulicht das QLS in Beobachternormform, das weiter unten noch detaillierter diskutiert wird.

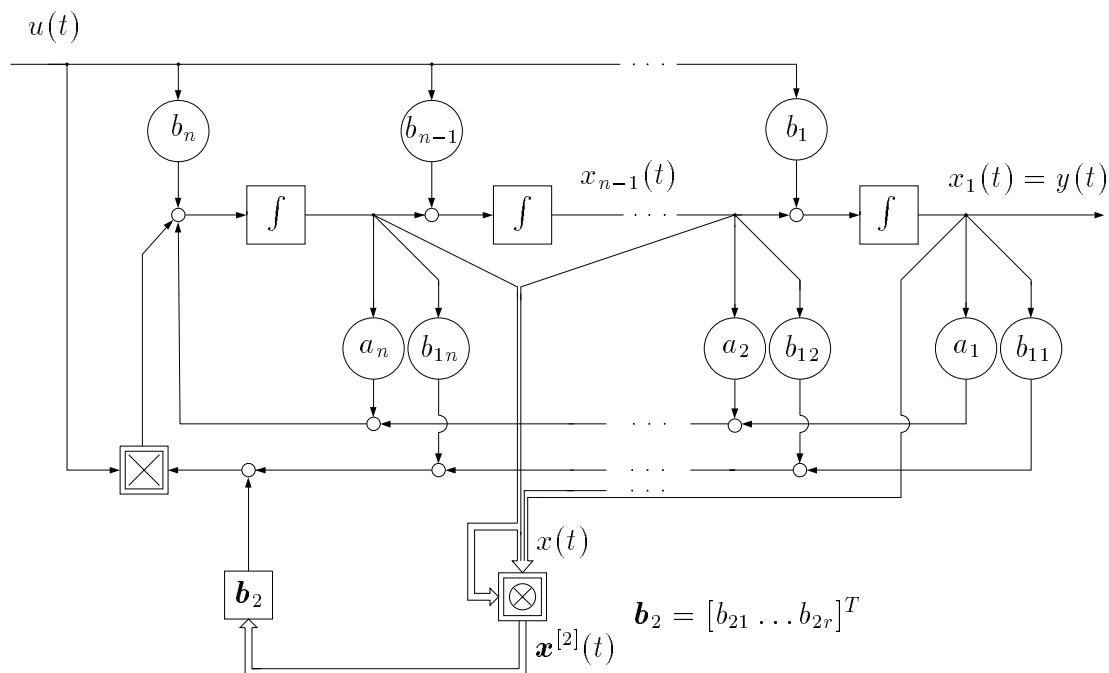


Bild 3.3: QLS nach Definition 3.3 in Beobachtbarkeitsnormalform

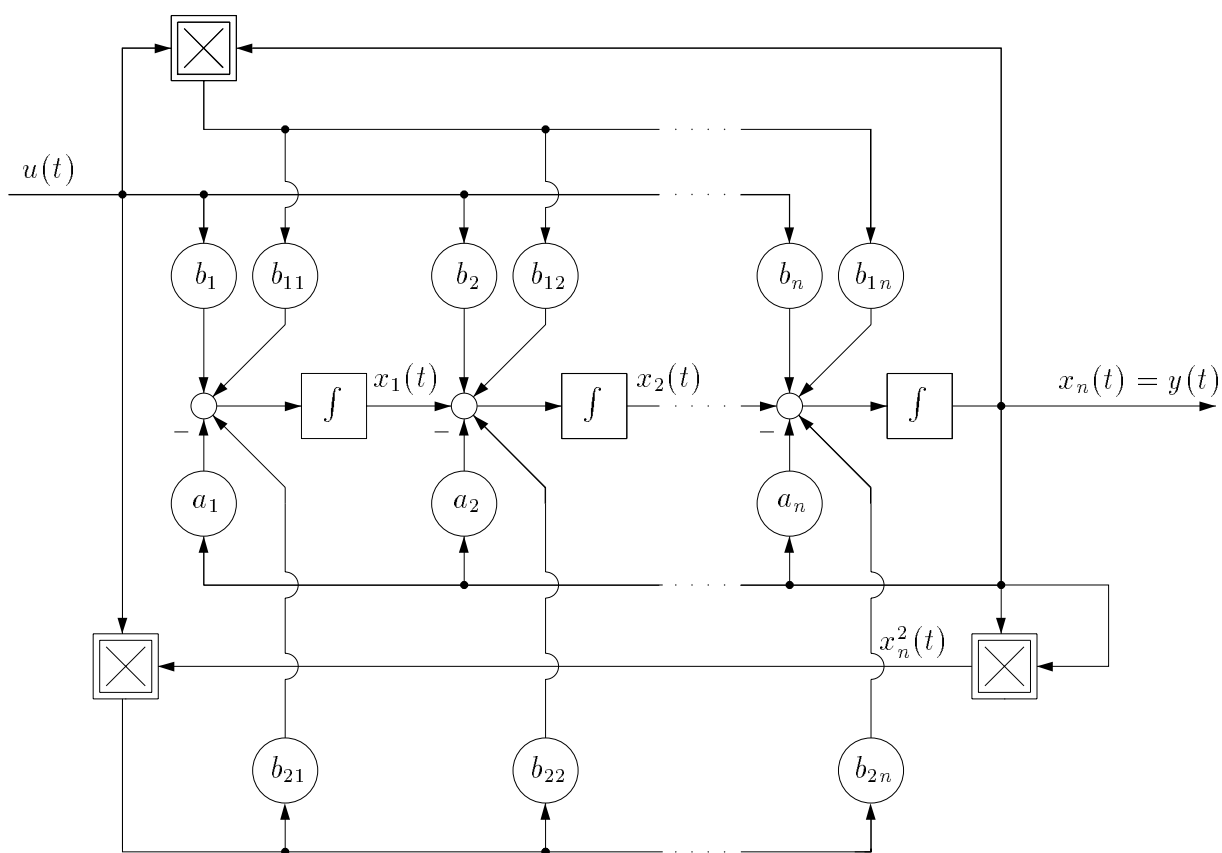


Bild 3.4: Beobachternormalform eines QLS mit linearer Eigendynamik

4 Regelgesetze für QLS mit linearer Eigendynamik

In diesem Abschnitt werden zwei Zustandsregler für die hier interessierenden QLS mit linearer Eigendynamik diskutiert.

- a) *Linearisierende Zustandsrückführung nach Isidori*
- b) *Stabilisierende Rückführung mit garantierter Ljapunov-Stabilität*

4.1 Linearisierende Zustandsrückführung

Für ein ALS mit linearer Meßgleichung der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{b}(\mathbf{x}(t))u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \end{aligned} \quad (4.1)$$

mit maximalem Differenzegrad – das System hat keine endliche Nulldynamik – läßt sich eine linearisierende Rückführung nach Isidori (Isidori 1995) in Originalkoordinaten angeben zu:

$$u = - \frac{L_a^n \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i L_a^i \mathbf{c}^T \mathbf{x} - V u^*(t)}{L_b L_a^{n-1} \mathbf{c}^T \mathbf{x}} \quad . \quad (4.2)$$

Hierin sind L_a, L_b die bekannten Lie-Ableitungen, α_i für $i = 0, \dots, n-1$ die Polynomkoeffizienten des charakterisierenden Polynoms

$$C(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n \quad (4.3)$$

des linearisierten Systems. V ist die Übertragungsverstärkung und $u^*(t)$ die neue Eingangsgröße des linearisierten Systems.

Wird nun (4.2) auf das QLS mit linearer Eigendynamik

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + [\mathbf{b} + \mathbf{B}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{x}^{[2]}(t)] u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \end{aligned} \quad (4.4)$$

angewendet, wird zunächst gefunden:

$$u(t) = - \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{A}^n \mathbf{x}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{c}^T \mathbf{A}^i \mathbf{x}(t) - V u^*(t)}{\mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} [\mathbf{b} + \mathbf{B}_1 \mathbf{x} + \mathbf{B}_2 \mathbf{x}^{[2]}(t)]} \quad . \quad (4.5)$$

Eine Berücksichtigung der speziellen Matrizenbesetzung der beobachterkanonischen Form Gl.(4.4) vereinfacht diese Beziehung nicht. Vielmehr wird man bei der praktischen Anwendung rechnergestützt mittels symbolverarbeitender Software die gewünschte Steuerung in jedem Einzelfall berechnen müssen. Legt man die Koeffizienten von (4.3) so fest, daß $C(\lambda)$ des linearisierten Systems ein Hurwitzpolynom ist, dann liefert das Regelgesetz nach Konstruktion ein stabiles System.

4.2 Stabilisierende Zustandsrückführung

Es wird zunächst das allgemeine ALS mit linearer Eigendynamik untersucht.

Definition 4.1

ALS der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}(t)) \cdot u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \quad ,\end{aligned}\tag{4.6}$$

worin $\mathbf{b}(\mathbf{x}(t))$ ein analytisches Vektorfeld ist, werden als ALS mit linearer Eigendynamik bezeichnet. \square

Wird das System (4.6) in Anlehnung an die Vorgehensweise bei bilinearen Systemen (Gutmann 1981, Beater 1987) mit einer Zustandsrückführung der Form

$$u(t) = -\mathbf{b}^T(\mathbf{x}(t))\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) \quad ; \quad \mathbf{Q} : \text{positiv definit}\tag{4.7}$$

geregelt, ist dieses Ergebnis nachzuweisen:

Satz 4.1

Es existiert eine zeitinvariante Rückführmatrix \mathbf{Q} , die die globale asymptotische Stabilität der Ruhelage $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ des rückgekoppelten Systems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}(t))u(t)\tag{4.8}$$

$$u(t) = -\mathbf{b}^T(\mathbf{x}(t))\mathbf{Q}\mathbf{x}(t)\tag{4.9}$$

gewährleistet, dann und nur dann, wenn alle Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} negative Realteile besitzen. \square

Beweis:

Das Ergebnis des Satzes wird mit der direkten Methode nach Ljapunov nachgewiesen. Hierzu wird mit der positiv definiten Rückführmatrix \mathbf{Q} eine Ljapunovfunktion gewählt, wobei zur Erhöhung der Übersichtlichkeit die Zeitargumente zunächst unterdrückt werden:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \quad , \quad \mathbf{Q} : \text{positiv definit} .\tag{4.10}$$

Als zeitliche Ableitung erhalten wir hieraus zusammen mit (4.8) und (4.9):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}) &= \dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \mathbf{b}^T(\mathbf{x}) \mathbf{Q} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T [\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}] \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \mathbf{b}^T(\mathbf{x}) \mathbf{Q} \mathbf{x}\end{aligned}\tag{4.11}$$

Der zweite Term ist als quadratische Form (zusammen mit dem Minuszeichen) negativ semidefinit. Der erste Term ist nur negativ semidefinit, wenn die Systemmatrix \mathbf{A} keine

Eigenwerte mit positiven Realteilen hat (Willems 1970). Daß $\dot{V}(x)$ negativ semidefinit ist, ist *hinreichend* für die Stabilität des untersuchten Systems. \square

Die QLS mit linearer Eigendynamik stellen neben den BLS eine weitere Unterklasse des Systems nach Definition 4.1, Gl.(4.6) dar. Mit (4.4) und (4.7) hat für die betrachteten QLS die vorgeschlagene, global stabilisierende Rückführung diese Form:

$$u(t) = - [\mathbf{b}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{x}^{[2]}(t)] \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) \quad . \quad (4.12)$$

Ist das QLS mit linearer Eigendynamik eine Approximation der nichtlinearen dynamischen Gleichungen eines technischen Systems, insbesondere eines (elektro–hydraulischen) Antriebssystems, kann erwartet werden, daß die Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} nicht alle strikt negative Realteile haben. Vielmehr kann dann auch ein Eigenwert $\lambda = 0$ auftreten. In diesem Fall muß dann mittels Ljapunov Theorie wie von Beater (1987) für BLS gezeigt, weiter geprüft werden, wie groß der Eingangsbereich des Stabilitätsgebietes um den Arbeitspunkt $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ist und ob weitere Ruhelagen existieren.

5 Zustandsbeobachter für QLS mit linearer Eigendynamik

Auf der Grundlage der Keller–Beobachternormalform der QLS mit linearer Eigendynamik (Definition 3.4, Gl.(3.6), Bild 3.4) läßt sich ein Beobachter mit linearer Fehlerdynamik, wie in (Schwarz 1990) allgemein für ALS gezeigt, angeben.

Wird ein Identitätsbeobachter wie bei Luenberger (Kailath 1980, Schwarz 1991):

$$\begin{aligned} \text{Systemgleichung} \quad : \quad \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + [\mathbf{b} + \mathbf{B}_1 \mathbf{x} + \mathbf{B}_2 \mathbf{x}^{[2]}] u(t) \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \text{Beobachter} \quad : \quad \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + [\mathbf{b} + \mathbf{B}_1 \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_2 \hat{\mathbf{x}}^{[2]} u(t) + \mathbf{K} [y - \hat{y}]] \\ \hat{y} &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (5.2)$$

angesetzt und die Differentialgleichung des Fehlers $\boldsymbol{\epsilon}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ durch Subtraktion der Gl.(5.2) von (5.1) bestimmt:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{A} \boldsymbol{\epsilon} + [\mathbf{b} + \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{B}_2 [\mathbf{x}^{[2]} - \hat{\mathbf{x}}^{[2]}] u - \mathbf{K} \mathbf{c}^T \boldsymbol{\epsilon}] \quad , \quad (5.3)$$

ist zu erkennen, daß auch die Fehlerdynamik einer nichtlinearen (QLS)–Beziehung genügt.

Eine lineare Fehlerdynamik ergibt sich, wenn das QLS in (5.1) die kanonische Form (3.6) hat und darüberhinaus der Beobachter nicht über den geschätzten Ausgang $\hat{y}(t)$, sondern über den gemessenen Systemausgang $y(t)$ zurückgeführt wird (Bild 5.1). Die System– und Beobachtergleichungen haben dann diese Form:

$$\begin{aligned} \text{System} \quad : \quad \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{E} \mathbf{x}(t) - \mathbf{a} x_n(t) + [\mathbf{b} + \mathbf{b}_1 x_n(t) + \mathbf{b}_2 x_n^2(t)] u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) = x_n(t) \end{aligned} \quad (5.4)$$

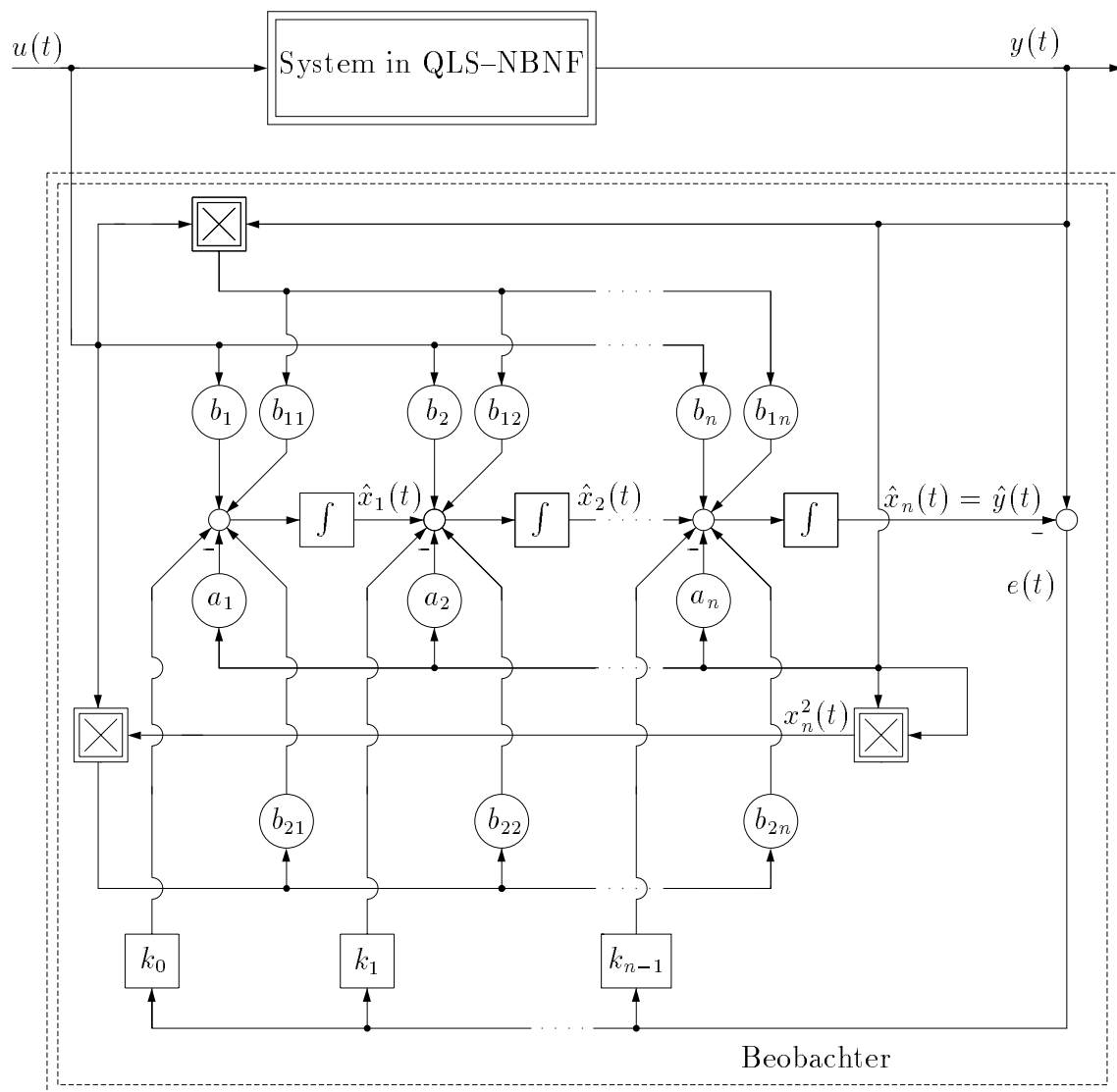


Bild 5.1: Beobachter mit linearer Fehlerdynamik für ein QLS mit linearer Eigendynamik in Beobachternormalform

$$\begin{aligned}
 \text{Beobachter} : \quad \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) &= \mathbf{E}_n \hat{\boldsymbol{x}}(t) - \mathbf{a} x_n(t) + [\mathbf{b} + \mathbf{b}_1 x_n(t) + \mathbf{b}_2 x_n^2(t)] u(t) + \\
 &\quad + \mathbf{K} [y(t) - \hat{y}(t)] \\
 \hat{y}(t) &= \mathbf{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}(t) = \hat{x}_n(t) \quad .
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Wird nun Gl.(5.5) von Gl.(5.4) abgezogen, werden vor allem die Produktterme mit $u(t)$ eliminiert und für den Fehler $\boldsymbol{\epsilon}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(t) &= \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}(t) - \mathbf{K} \mathbf{c}^T \boldsymbol{\epsilon}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -K_0 \\ 1 & 0 & -K_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & K_{n-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}(t) \\
 \boldsymbol{\epsilon}_0 &= \boldsymbol{\epsilon}(0) = \boldsymbol{x}_0 - \hat{\boldsymbol{x}}_0 \quad .
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Der Schätzfehler genügt also einer linearen homogenen Gleichung; er hat somit eine lineare

Dynamik. Das Einschwingverhalten und insbesondere das Stabilitätsverhalten kann über die Beobachterrückführverstärkung, den Verstärkungsvektor $\mathbf{K}^T = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ eingestellt werden. Die $k_i, i = 1, 2, \dots, n$ sind die Polynomkoeffizienten des charakteristischen Polynoms der Fehlerdynamik, das ein Hurwitzpolynom sein muß.

Für lineare Systeme existiert das bekannte von Kalman für die optimale Regelung stochastisch gestörter linearer Systeme gefundene *Separationsprinzip* (Kailath 1980), das besagt: Die Auslegung der Dynamik des Regelkreises (Festlegung einer Zustandsrückführung) und Auslegung der Beobachterdynamik sind separat ohne gegenseitige Rückwirkung durchführbar. Ein solches Separationsprinzip gilt in der Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme nicht.

Von Delepaut (1991) wurde aber gezeigt, daß für nichtlineare Beobachter mit exponentieller Fehlerdynamik und nichtlinearen, stabilisierenden Regelgesetzen für zu regelnde, nichtlineare Regelstrecken ein *lokales* Separationsprinzip der linearen Approximation in Ruhelage existiert. Der Autor hat in Schwarz (1992b, 1997) gezeigt, daß für BLS in Beobachternormalform und bei Auslegung einer linearisierenden quadratischen Zustandsregelung eine global gültige Separierbarkeit existiert. Es wird vermutet, bleibt aber noch nachzuweisen, daß auch für die hier behandelten QLS mit linearer Eigendynamik ein Separationsprinzip existiert.

6 Meß- und Simulationsergebnisse zur praktischen Anwendung

In diesem Abschnitt sind die Ergebnisse der Identifikationen für die Modellstrukturen (2.2), (2.9) und (3.6) in Keller-Beobachternormalform dokumentiert. Weiterhin werden die Ergebnisse des Beobachters dargestellt, dessen Struktur in Bild 5.1 abgebildet ist. Es wurden Modelle für den „Langen Zylinder“-Prüfstand im Fluidlabor von MSRT sowie Approximationsmodelle für einen elastischen Handhabungsarm untersucht (Schwarz und Senger 1996).

6.1 Prüfstand „Langer Zylinder“

Die Modelle wurden anhand der Geschwindigkeitssignale des betrachteten Zylinderkolbens identifiziert. Für die Beurteilung der Modellgüte werden an dieser Stelle Sprungantworten als Validierungsdaten verwendet. Die betrachteten normierten Eingangssignalsprunghöhen betragen $u = 0,1$, $u = 0,3$, $u = 0,5$, $u = 0,7$ und $u = 0,9$.

Bild 6.1 zeigt die simulierten Sprungantworten für ein identifiziertes BLS 5. Ordnung sowie die zugehörigen Meßdaten des elektro-hydraulischen Servoantriebes. Die Meßdaten wurden vor der Registrierung in Bild 6.1 durch eine gleitende Mittelwertbildung $\hat{y}(k) = 0,2(y(k-2) + y(k-1) + y(k) + y(k+1) + y(k+2))$ geglättet. Dieses Glättungsfilter

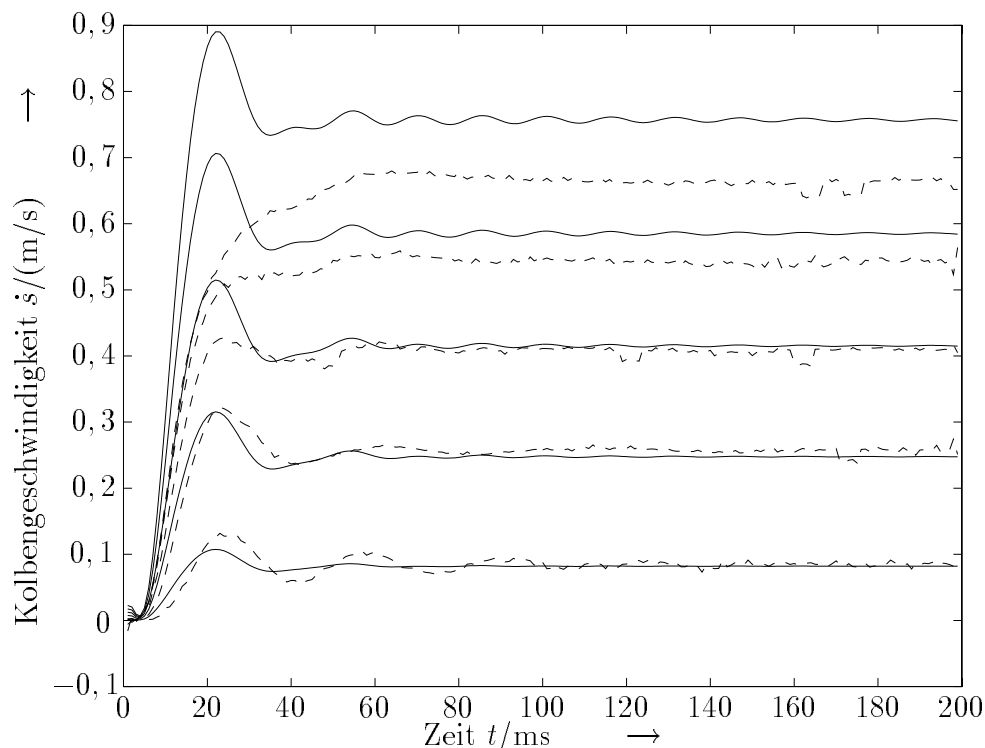


Bild 6.1: Validierungsergebnis des BLS-Langzylindermodells 5. Ordnung in Keller–Beobachternormalform (Meßdaten gestrichelt)

ist ein nicht kausales Filter, d. h. die aufgenommenen Meßwerte wurden off–line gefiltert und dann weiter verarbeitet.

Bild 6.2 zeigt die Validierungsergebnisse für ein QLS mit linearer Eigendynamik 4. Ordnung in Keller–Beobachternormalform. Es ist deutlich die Gütesteigerung im Vergleich zum bilinearen Modell erkennbar.

Bild 6.3 zeigt die Validierungsergebnisse für ein QLS 4. Ordnung (Gl. (2.6)) in Keller–Beobachternormalform. Im Vergleich der Systemantworten eines QLS-Modells (Gl. (2.6)) und des QLS mit linearer Eigendynamik (Gl. (2.9)) ist mit dem bloßen Auge anhand der Bilder 6.2 und 6.3 kein Unterschied in der Modellgüte feststellbar. Daraus folgt, daß neben der guten Handhabbarkeit der Keller–Beobachternormalform beim Beobachterentwurf zusätzlich die geringere Anzahl an Modellparametern bei fast identischer Modellgüte die Betrachtung der Keller–Beobachternormalform eines QLS mit linearer Eigendynamik nahelegt.

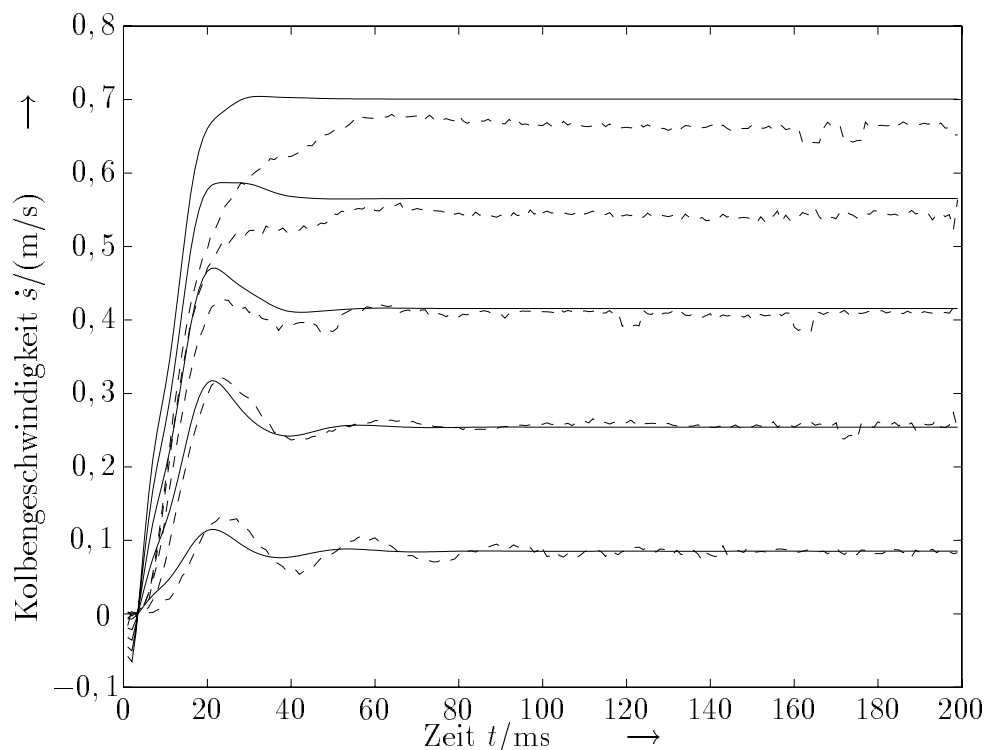


Bild 6.2: Validierungsergebnis des Langzylindermodells 4. Ordnung (QLS mit linearer Eigendynamik) in Keller-Beobachternormalform (Meßdaten gestrichelt)

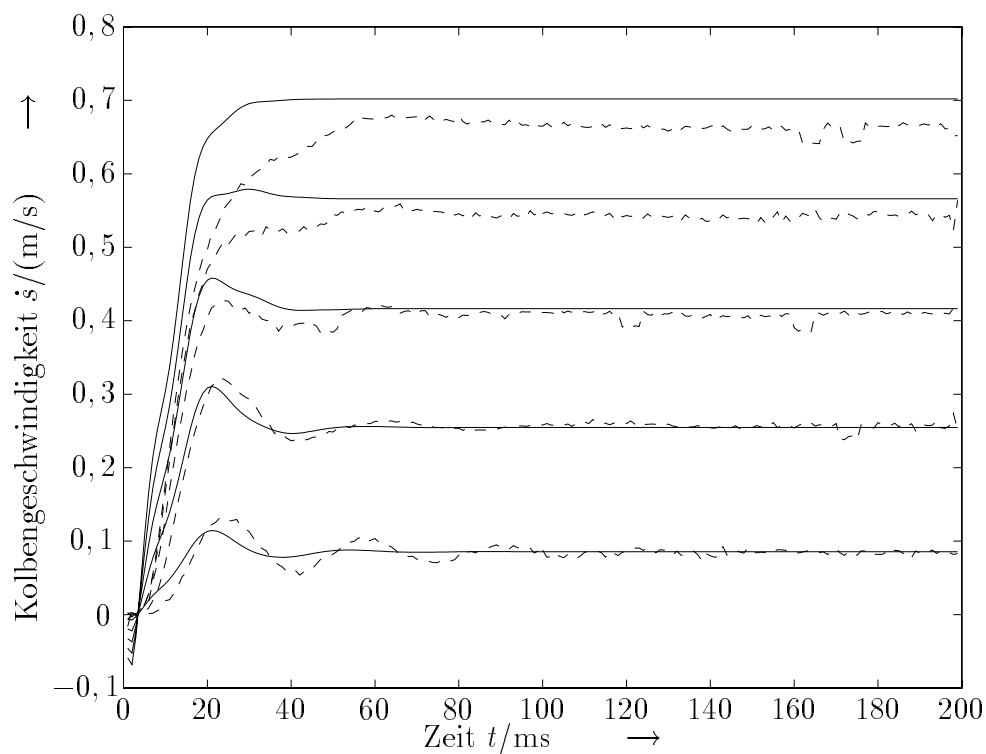


Bild 6.3: Validierungsergebnis des QLS-Langzylindermodells 4. Ordnung (Gl. (3.6)) in Keller-Beobachternormalform (Meßdaten gestrichelt)

Die mit dem Beobachter der in Bild 5.1 dargestellten Struktur (QLS mit linearer Eigendynamik) erzielten Ergebnisse sind in Bild 6.4 wiedergegeben, wobei für einen Stellgrößensprung von $u = 0,5$ die aus den verrauschten Meßdaten des vierten Zustandes beobachteten Zustände (durchgezogene Linien) abgebildet sind. Zum Vergleich sind für die ersten drei Zustände simulierte Modellausgangsdaten und für den vierten Zustand entsprechend die Meßdaten in die Diagramme eingetragen (gestrichelte Linien). Es wird anhand des Bildes 6.4 deutlich, daß selbst aus verrauschten Meßsignalen die Zustände durch den Beobachter gut rekonstruiert werden können.

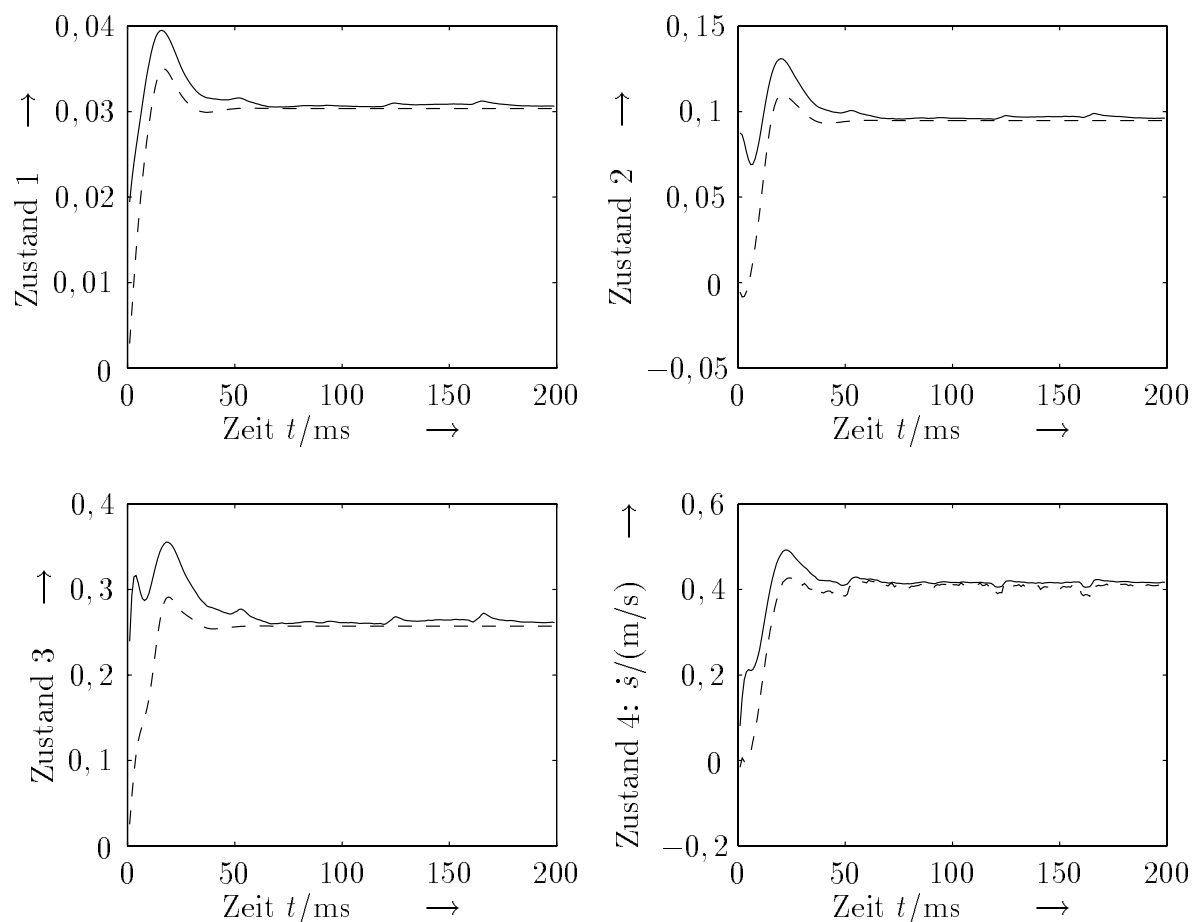


Bild 6.4: Beobachtete und gemessene/simulierte Zustände. Die ersten drei Zustände sind nicht meßbar, daher sind simulierte Modelldaten und beobachtete Daten für diese Zustände dargestellt (gemessene Daten bzw. simulierte Modelldaten sind gestrichelt dargestellt).

6.2 Elastischer Roboterarm

Für einen mechanisch stabilisierten einarmigen, elastischen Roboter wurde aus MOBILE-Simulationsdaten ein QLS 2. Ordnung mit linearer Eigendynamik in Keller-Beobachternormalform identifiziert sowie ein Beobachter der in Bild 5.1 abgebildeten Struktur

untersucht. Die Ergebnisse werden an dieser Stelle wiedergegeben. Bild 6.5 zeigt die Validierungsergebnisse für Eingangssignalsprünge von $u = 3\text{N}$, $u = 6\text{N}$, $u = 12\text{N}$, $u = 18\text{N}$, $u = 24\text{N}$ und $u = 30\text{N}$. Die simulierten Modelldaten des QLS mit linearer Eigendynamik in Keller–Beobachternormalform sind mit durchgezogenen Linien dargestellt. Zum Vergleich sind die Daten des Originalsystems gestrichelt dargestellt. Es ist die ausgesprochen gute Übereinstimmung zwischen Originalsystem (MOBILE–Modell) und dem identifizierten Modell erkennbar.

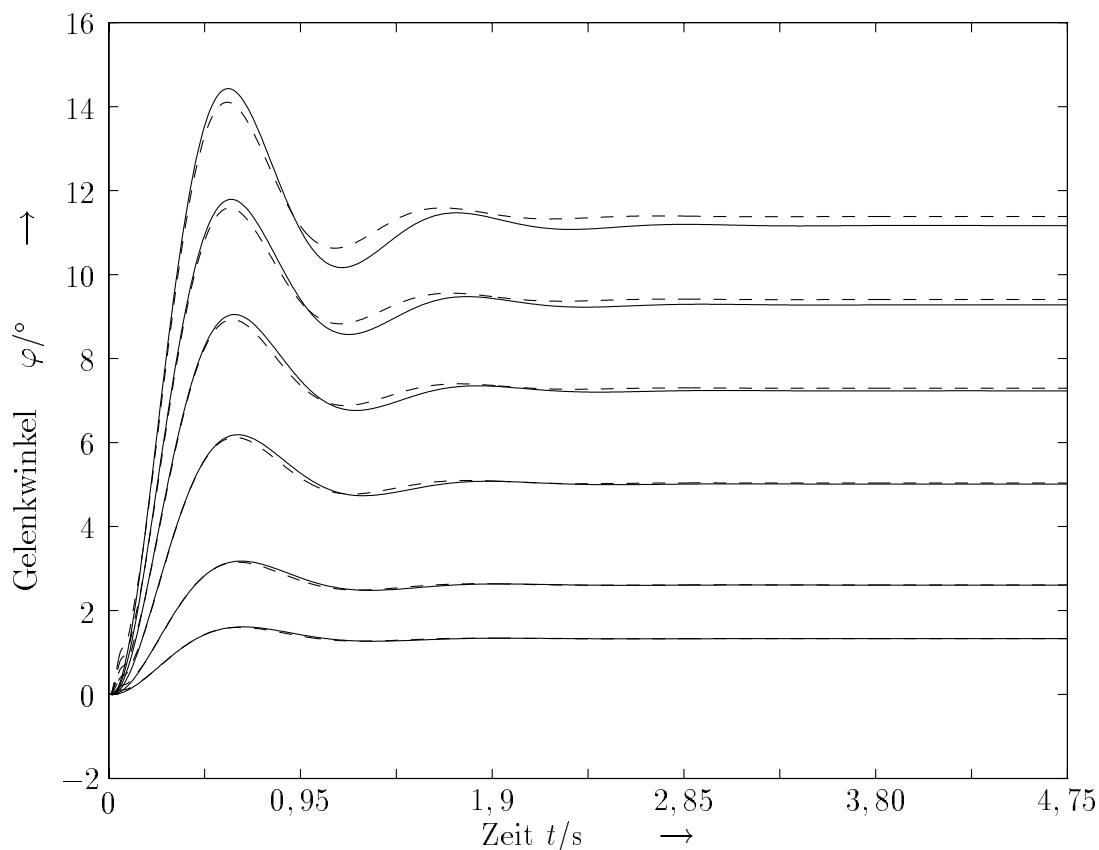


Bild 6.5: Validierungsergebnisse des QLS 2. Ordnung mit linearer Eigendynamik in Keller–Beobachternormalform

Die Ergebnisse des auf diesem Modell beruhenden Beobachters sind Bild 6.6 zu entnehmen und zeigen das gute Verhalten des Rekonstruierers beispielhaft anhand der Sprungantwort für $u = 24\text{N}$.

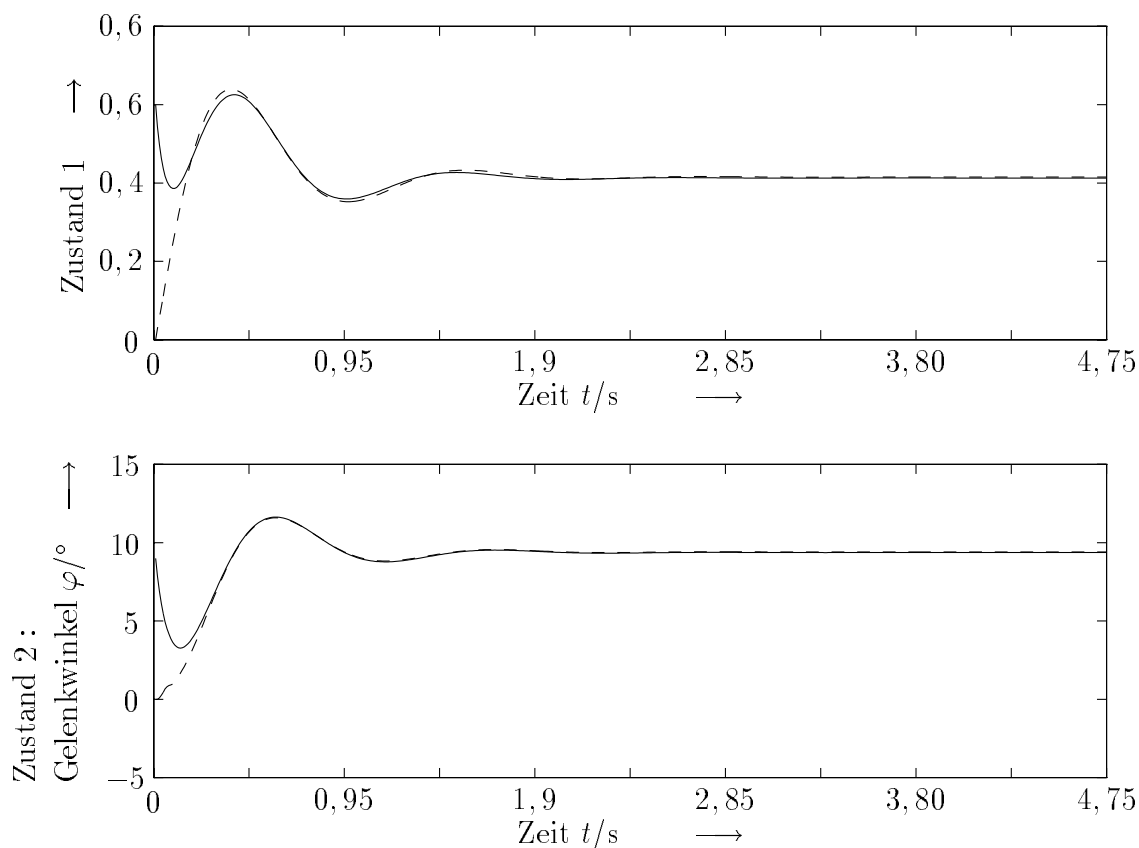


Bild 6.6: Vergleich der beobachteten Zustände mit den Soll-Zuständen. Als Soll-Zustände (gestrichelte Linien) werden für den ersten Zustand simulierte Modelldaten und für den zweiten Zustand die Originaldaten des MOBILE-Modells verwendet.

7 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Bericht wurde die nach den BLS nächst komplexere Unterklasse der ALS, die QLS mit linearer Eigendynamik, näher untersucht. Dabei standen kanonische Strukturen im Vordergrund, die es erlauben, durch Parameterschätzverfahren nichtlineare technische Systeme durch die QLS zu approximieren. Vom Autor wurden entsprechende Messungen und Simulationen initiiert (Schwarz und Senger 1996), die die Tragfähigkeit dieser Vorgehensweise belegen. Dazu wurden linearisierende Regelgesetze diskutiert.

Auf dieser Arbeit aufbauend sollen folgende Fragestellungen diskutiert werden:

- Auslegung von Schätzfiltern für stochastisch gestörte Meßsignale auf der Basis der beobachterkanonischen Form der QLS mit linearer Eigendynamik
- Optimale Regelung stochastisch gestörter QLS
- Mögliche Erweiterungen für allgemeine QLS

Literatur

- Beater, P.** 1987. *Zur Regelung nichtlinearer Systeme mit Hilfe bilinearer Modelle*. Dissertation Universität Duisburg, Fortschrittberichte Reihe 8, Nr. 143. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Bernzen, W.** 1994. *Modellbildung elastischer Handhabungssysteme*. Diplomarbeit MSRT, FB 7, Universität Duisburg. (unveröffentlicht)
- Delepaut, C.** 1991. *Output Feedback Stabilization of Nonlinear Systems using State Observer*. PhD-Thesis Université catholique de Lourain (Belgium) Faculté des Sciences Appliquées.
- Gutmann, P. O.** 1981. Stabilizing Controllers for Bilinear Systems. *IEEE Tr. AC-26*, 917-922.
- Guo, L.** 1991. *Zur Regelung bilinearer Systeme am Beispiel hydraulischer Antriebe*. Dissertation Universität Duisburg, Fortschrittberichte Reihe 8, Nr. 245. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Isidori, A.** 1995. *Nonlinear Control Systems*. Berlin u.a.: Springer.
- Jelali, M.** 1993. *Beobachter und Filter für im Zustand quadratische Systeme mit linearer Steuerung*. Diplomarbeit MSRT, FB 7, Universität Duisburg. (unveröffentlicht)
- Jelali, M.** 1994. *Zur Modellierung nichtlinearer Prozesse durch quadratische Systeme mit linearer Steuerung (QLS)*. Forschungsbericht 5/94, MSRT, FB 7, Universität Duisburg.
- Kailath, Th.** 1980. *Linear Systems*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- Keller, H.** 1986. *Entwurf nichtlinearer Beobachter mittels Normalformen*. Dissertation. Universität Karlsruhe, Fortschrittberichte Reihe 8, Nr. 124. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Luenberger, D. G.** 1964. Observing the State of a Linear System. *IEEE Tr. MIL-8*, 74-80.
- Mohler, R.** 1991. *Nonlinear Systems II*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- Schwarz, H.** 1990. *ALS-Beobachter und Filter*. Forschungsbericht 7/90, MSRT, FB 7, Universität Duisburg.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme*. München, Wien: Oldenbourg.
- Schwarz, H.** 1992a. *BLS-Beobachter in kanonischer Form*. Forschungsbericht 4/92, MSRT, FB 7, Universität Duisburg.

- Schwarz, H.** 1992b. *Zur Stabilität von mittels Beobachtern geregelter BLS*. Forschungsbericht 8/92, MSRT, FB7, Universität Duisburg.
- Schwarz, H.** 1993. *Quadratische Systeme mit linearer Steuerung (QLS)*. Forschungsbericht 12/93, MSRT, FB7, Universität Duisburg.
- Schwarz, H.** 1995. Anwendung nichtlinearer Systemmodelle und Entwurfsverfahren bei hydrostatischen Antrieben. in S. Engell (Hg.) *Entwurf nichtlinearer Regelungen*. München, Wien: Oldenbourg.
- Schwarz, H.** 1997. Output Feedback Stabilisation of Hydraulic Drives based on Bilinear Approximations and Canonical Observers. eingereicht bei *ECC 97, Brüssel*
- Schwarz, H., M. Schneider and R. Ingenbleek.** 1995. Dynamic Models of elastic Robots via Nonlinear Approximation. *Proc. ICRAM, Istanbul, Turkey*.
- Schwarz, H. und M. Senger** 1996. *Nichtlineare Approximation mittels QLS mit linearer Eigendynamik*. Forschungsnotiz September 1996 MSRT, FB 7, Universität Duisburg. (unveröffentlicht)
- Willems, I.L.** 1970. *Stability Theory of Dynamical Systems*. London u.a.: Nelson.
- Zeitz, M.** 1984. Observability canonical (phase-variable) forms for non-linear time variable systems. *Int. J. Systems Science* 15,9,949-958.
- Zeitz, M.** 1985. Canonical forms for nonlinear systems. in Jakubczyk, K. B. und W. Respondek und K. Tchon (Ed.) *Geometric Theory of Nonlinear Control Systems*. Warschau: sc. papers of the Inst. of cybernetics Techn. Univ.
- Zeitz, M.** 1987. The extended Luenberger observer for nonlinear systems. *Systems & Control Letters* 9, 149-156.