

# Zur Regelung elastischer Roboter bei Anwendung nichtlinearer Beobachter

Marco Antonio Arteaga Pérez

Forschungsbericht Nr. 22/96

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

**Übersicht:** Die Regelung elastischer Roboter kann mittels nichtlinearer Regler durchgeführt werden. Voraussetzung dafür ist, daß sowohl die verallgemeinerten Koordinaten als auch deren zeitliche Ableitung zur Verfügung stehen. Letzteres stellt ein Problem dar, da sich die Geschwindigkeit der Koordinaten nicht direkt messen läßt und sie mit Hilfe eines Beobachters geschätzt werden muß. Der vorliegende Bericht behandelt die Regelung elastischer Roboter, wenn nur die verallgemeinerten Koordinaten meßbar sind.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg  
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik  
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

# **Inhaltsverzeichnis**

# Nomenklatur

## Skalare Größen

$d_{ij}$	:	Element der Matrix $\mathbf{D}_\Delta$
$\delta_{ij}$	:	Element des Vektors $\boldsymbol{\delta}$
$\dot{\delta}_{ij}$	:	Element des Vektors $\dot{\boldsymbol{\delta}}$
$k_d$	:	Beobacherverstärkung
$m$	:	Anzahl verallgemeinerter elastischer Koordinaten
$m_i$	:	Anzahl verallgemeinerter elastischer Koordinaten des $i$ -ten Gliedes
$n$	:	Anzahl verallgemeinerter starrer Koordinaten
$q_{ij}$	:	Element des Vektors $\mathbf{q}$
$s_{\delta ij}$	:	Element des Vektors $\mathbf{s}_\delta$
$s_{xij}$	:	Element des Vektors $\mathbf{s}_x$
$\theta_i$	:	Element des Vektors $\boldsymbol{\theta}$
$v_m$	:	Maximaler Normwert der Geschwindigkeit der verallgemeinerten Koordinaten

## Operatoren

$\det(\cdot)$	:	Determinante einer Matrix
$\hat{(\cdot)}$	:	Geschätzter Wert von $(\cdot)$
$\lambda_{\max}(\cdot)$	:	Maximaler Eigenwert einer Matrix
$\lambda_{\min}(\cdot)$	:	Minimaler Eigenwert einer Matrix
$\ \cdot\ $	:	Norm eines Vektors oder einer Matrix

## Abkürzungen

EIG	:	Eigenschaft
ES	:	Exponentiell stabil
GB	:	Gleichmäßig beschränkt
GES	:	Global exponentiell stabil
GSB	:	Gleichmäßig schließlich beschränkt
GGSB	:	Global gleichmäßig schließlich beschränkt

## Vektoren und Matrizen

$D$	:	Matrix der viskosen Gelenkreibung und der Strukturdämpfung der Glieder
$\Delta$	:	Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ , zu der die verallgemeinerten elastischen Koordinaten gehören
$\delta(t)$	:	Vektor verallgemeinerter elastischer Koordinaten
$g(q)$	:	Gravitationsvektor
$h(q, \dot{q})$	:	Coriolis- und Zentrifugalkraftvektor
$H(q)$	:	Trägheitsmatrix
$K$	:	Steifigkeitsmatrix
$K_p, K_q$	:	Matrizen der Reglerverstärkungen
$K_v$	:	Matrix der Beobachterverstärkung
$\Lambda$	:	Positiv definite Matrix
$q(t)$	:	Vektor verallgemeinerter elastischer und starrer Koordinaten
$q_d(t)$	:	Soll-Bahn-Vektor verallgemeinerter elastischer und starrer Koordinaten
$\mathbb{Q}^{n+m}$	:	Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+m}$ , zu der die verallgemeinerten Koordinaten gehören
$\tau(t)$	:	Vektor verallgemeinerter Kräfte für die starren Eingänge
$\theta(t)$	:	Vektor verallgemeinerter starrer Koordinaten
$u(t)$	:	Vektor verallgemeinerter Kräfte
$y$	:	Vektor

# 1 Einleitung

Eine der wichtigsten Teilaufgaben, die ein Roboter durchführen muß, ist, daß dessen End-Effektor einer vorgegebenen Bahn folgt. Das heißt, der Ist-Wert und der Soll-Wert der verallgemeinerten Koordinaten sollen übereinstimmen. Da es für elastische Roboter weniger Eingänge als Ausgänge gibt, bedeutet dies, daß man nicht in der Lage ist, sowohl für die starren als auch für die elastischen Koordinaten eine beliebige Bahn vorzugeben, die genau verfolgt werden kann. Eine Lösung für dieses Problem besteht darin, nur die Soll-Bahn für die starren Koordinaten vorzugeben, während die Bahn für die elastischen so berechnet wird, daß die Soll- und Ist-Bahn der starren Koordinaten übereinstimmen (De Luca und Siciliano 1993a, 1993b, De Luca und Panzieri 1994, Arteaga Pérez 1996c) ????. In Arteaga Pérez (1996c) wird das Dämpfungsproblem betrachtet und eine Lösung dafür vorgeschlagen.

Obwohl die verallgemeinerten Koordinaten des Roboters meßbar sind (?), ergibt sich die Messung deren Geschwindigkeiten als ein zusätzliches Problem. Eine Lösung dafür stellt die Anwendung eines Beobachters dar (Arteaga Pérez 1996a, b)???. Es ist zu erwähnen, daß die Stabilität des Reglers zusammen mit dem Beobachter höchstwahrscheinlich nicht weiter zu garantieren ist, unabhängig davon, ob Regler und Beobachter getrennt stabil sind. Aus diesem Grund wird im vorliegenden Forschungsbericht ein neuer Beobachter vorgestellt, der zusammen mit dem in Arteaga Pérez (1996c) vorgestellten Regler stabil ist. Einziger Nachteil dieses Beobachters im Vergleich mit dem in Arteaga Pérez (1996a, b) vorgestellten ist, daß er alle verallgemeinerten elastischen Koordinaten benötigt. Der große Vorteil liegt jedoch darin, daß sich die Stabilität des geschlossenen Regelkreises mittels einer richtigen Einstellung der Beobachter-Regler-Parameter gewährleisten läßt, was mit dem alten Beobachter nicht möglich war.

Der vorliegende Bericht ist wie folgt organisiert: die mathematischen Voraussetzungen für den Stabilitätsbeweis des Regelkreises werden im Abschnitt 2 vorgestellt. Abschnitt 3 beschreibt den Regler zusammen mit dem Beobachter. Eine Zusammenfassung und ein Ausblick schließen den Forschungsbericht ab.

## 2 Mathematische Voraussetzungen

Eine übliche Teilaufgabe eines Roboters besteht darin, einer Bahn zu folgen. Das heißt, mittels eines Reglers soll der Ist-Wert der verallgemeinerten Koordinaten des Roboters mit einem gewissen Soll-Wert übereinstimmen. Wenn die zeitliche Ableitung der verallgemeinerten Koordinaten nicht zur Verfügung steht, muß ein Beobachter benutzt werden. Um die Stabilität des gesamten Systems (Regler, Beobachter und Roboter) zu beweisen, kann man z. B. die Ljapunov-Theorie (, , ?) oder die Passivitäts-Theorie (?) anwenden. Wegen ihrer Flexibilität wird die Ljapunov-Theorie am häufigsten benutzt. Im vorliegenden Forschungsbericht wird angenommen, daß der Leser deren Grundlagen kennt (?), so daß nur besondere Definitionen bzw. Sätze im Abschnitt 2.1 angegeben sind. Abschnitt 2.2 stellt das Modell eines elastischen Roboters mit einigen seiner wichtigsten Eigenschaften vor.

### 2.1 Zur Stabilität eines Systems

Im vorliegenden Abschnitt werden einige Sätze über die Stabilität eines Systems vorgestellt, das durch die Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.1)$$

beschrieben werden kann, wobei  $\mathbf{f}(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  bekannt ist. Zuerst werden die folgenden Definitionen eingeführt:

**Definition 2.1** (?)

Es sei eine Lösung  $\mathbf{x}(\cdot) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  von Gl. (??). Dann heißt diese Lösung gleichmäßig beschränkt (GB) (*uniformly bounded*), wenn eine von  $t_0$  unabhängige positive Konstante  $d(\mathbf{x}_0) < \infty$  existiert, so daß gilt:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq d(\mathbf{x}_0) \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (2.2)$$

□

**Definition 2.2** (?)

Es sei eine Lösung  $\mathbf{x}(\cdot) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  von Gl. (??). Dann heißt diese Lösung gleichmäßig schließlich beschränkt (GSB) (*uniformly ultimately bounded*) bezüglich der Menge  $S$ , wenn eine von  $t_0$  unabhängige nicht negative Konstante  $T(\mathbf{x}_0, S) < \infty$  existiert, so daß gilt:

$$\mathbf{x}(t) \in S \quad \forall t \geq t_0 + T(\mathbf{x}_0, S). \quad (2.3)$$

□

Anzumerken bleibt, daß ein System als global gleichmäßig schließlich beschränkt (GGSB) gilt, wenn die Definition ?? für jede mögliche Anfangsbedingung gültig ist, d. h. wenn

$T(\mathbf{x}_0, S) = T(S)$  ist.

Wenn man wie üblich über die Stabilität des Ursprungs  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  spricht, dann besagen die Definitionen ?? und ??, daß die Zustände des Systems nicht unbedingt gegen Null konvergieren, sondern daß sie beschränkt bleiben. Die Definition ?? geht weiter und besagt auch, daß die einzelnen Zustandsvariablen gegen eine Menge konvergieren und darin bleiben. Die folgenden Sätze erläutern die Stabilität eines Systems im Sinne der Definition ??.

**Satz 2.1** (?)

Gegeben sei ein kontinuierliches System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.4)$$

wobei  $\mathbf{x}$  ein  $n \times 1$  Vektor ist. Es sei  $V(\mathbf{x}, t)$  eine assoziierte Ljapunov-Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

$$\lambda_1 \|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq V(\mathbf{x}, t) \leq \lambda_2 \|\mathbf{x}(t)\|^2 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad (2.5)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq -\lambda_3 \|\mathbf{x}(t)\|^2 + \epsilon e^{-\beta t} \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (2.6)$$

wobei  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  und  $\epsilon$  positive Konstanten sind und  $\beta \geq 0$  ist. Wenn in Gl. (??)  $\beta = 0$  ist, dann sind die Zustände  $\mathbf{x}$  GGSB in dem Sinne, daß

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \|\mathbf{x}_0\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{\epsilon}{\lambda_1 \lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \right)^{1/2}, \quad (2.7)$$

wobei  $\lambda = \lambda_3/\lambda_2$  ist. Wenn  $\beta > 0$  ist, dann sind die Zustände global exponentiell stabil (GES) in dem Sinne, daß

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \begin{cases} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \|\mathbf{x}_0\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{\epsilon}{\lambda_1} t e^{-\lambda t} \right)^{1/2} & \text{wenn } \beta = \lambda \\ \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \|\mathbf{x}_0\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{\epsilon}{\lambda_1(\lambda - \beta)} (e^{-\beta t} - e^{-\lambda t}) \right)^{1/2} & \text{wenn } \beta \neq \lambda \end{cases}$$

wobei ebenfalls  $\lambda = \lambda_3/\lambda_2$  ist.

□

**Satz 2.2** (?)

Gegeben sei ein kontinuierliches System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.8)$$

wobei  $\mathbf{x}$  ein  $n \times 1$  Vektor ist. Es sei  $V(\mathbf{x}, t)$  eine assoziierte Ljapunov-Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

$$\lambda_1 \|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq V(\mathbf{x}, t) \leq \lambda_2 \|\mathbf{x}(t)\|^2 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad (2.9)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq -\lambda_3 \|\mathbf{x}(t)\|^2 + \|\mathbf{x}(t)\| \sigma e^{-\gamma t} \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (2.10)$$

wobei  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  und  $\sigma$  positive Konstanten sind und  $\gamma \geq 0$  ist. Wenn in Gl. (??)  $\gamma = 0$  ist, dann sind die Zustände  $\mathbf{x}$  GGSB in dem Sinne, daß

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \left( \sqrt{\lambda_2} \|\mathbf{x}_0\| e^{-\lambda t/2} + \frac{\zeta}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t/2}) \right), \quad (2.11)$$

wobei  $\zeta = \sigma/\sqrt{\lambda_1}$  und  $\lambda = \lambda_3/\lambda_2$  ist. Wenn  $\gamma > 0$  ist, dann sind die Zustände GES in dem Sinne, daß

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \left( \sqrt{\lambda_2} \|\mathbf{x}_0\| e^{-\lambda t/2} + \frac{\zeta}{2} t e^{-\lambda t/2} \right) & \text{wenn } \lambda = 2\gamma \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \left( \sqrt{\lambda_2} \|\mathbf{x}_0\| e^{-\lambda t/2} + \frac{\zeta}{\lambda - 2\gamma} (e^{-\gamma t} - e^{-\lambda t/2}) \right) & \text{wenn } \lambda \neq 2\gamma \end{cases}$$

wobei  $\zeta = \sigma/\sqrt{\lambda_1}$  und  $\lambda = \lambda_3/\lambda_2$  ist. □

Die Sätze ?? und ?? werden im Abschnitt 3 benutzt, um die Stabilität des Reglers und des Beobachters für elastische Roboter zu beweisen. Obwohl beide Sätze prinzipiell analysieren, ob ein System GGSB oder GES ist, kann man sie auch benutzen, um zu beweisen, ob ein System GSB oder exponentiell stabil (ES) im gleichen Sinne dieser Sätze ist. Um dies zu zeigen, soll man voraussetzen, daß es eine Kugel  $B_r = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq b_r\}$  gibt, für die die Bedingungen (??)–(??) bzw. (??)–(??) erfüllt werden. Wenn ein Einzugsgebiet  $S = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq b_s\}$  mit  $0 < b_s \leq b_r$  zu finden ist, so daß  $\|\mathbf{x}\|$  die Kugel  $B_r$  nie verläßt, dann können die Sätze ?? und ?? angewendet werden, um zu prüfen, ob ein System GSB oder ES ist.

## 2.2 Modelleigenschaften

Das Modell eines elastischen Roboters mit rotatorischen Gelenken kann durch

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_e \mathbf{q} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \triangleq \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \quad (2.13)$$

beschrieben werden (?), wobei

$$\mathbf{u} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} \end{bmatrix} \quad m = m_1 + \dots + m_n \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &\triangleq [q_{10}(t) \dots q_{n0}(t) \quad q_{11}(t) \dots q_{1m_1}(t) \dots q_{n1}(t) \dots q_{nm_n}(t)]^T \\ &\triangleq [\boldsymbol{\theta}_1(t) \dots \boldsymbol{\theta}_n(t) \quad \boldsymbol{\delta}_{11}(t) \dots \boldsymbol{\delta}_{1m_1}(t) \dots \boldsymbol{\delta}_{n1}(t) \dots \boldsymbol{\delta}_{nm_n}(t)]^T \\ &\triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_{n \times 1} \\ \boldsymbol{\delta}_{m \times 1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{K}_e \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$



gilt.  $q_{10} \cdots q_{n0}$  (bzw.  $\theta_1 \cdots \theta_n$ ) bezeichnen die verallgemeinerten starren Koordinaten und  $q_{11} \cdots q_{nm_n}$  (bzw.  $\delta_{11} \cdots \delta_{nm_n}$ ) die elastischen. Dabei entspricht jeweils der erste Index der Nummer des elastischen Gliedes und der zweite der Eigenschwingform. Weitere Erklärungen sind in Arteaga Pérez (1995b) nachzulesen.

Dieses Modell besitzt eine Vielzahl nützlicher Eigenschaften. Einige entstehen aus physikalischen Gründen und andere durch das Modellbildungsverfahren. In diesem Abschnitt werden diejenigen vorgestellt, die für den Entwurf und den Stabilitätsbeweis der im Abschnitt 3 beschriebenen Regler und Beobachter hilfreich sind. Die übrigen Eigenschaften sowie der Beweis der in diesem Abschnitt vorgestellten, sind in Arteaga Pérez (1995b) zu finden. Zuerst werden die Normen definiert, die im vorliegenden Bericht genutzt werden.

### Definition 2.3

Die euklidische Norm eines Vektor  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n+m}$  ist durch

$$\|\mathbf{q}\| \triangleq \sqrt{\sum_{i=1}^{n+m} q_i^2} \quad (2.17)$$

gegeben. □

### Definition 2.4

Die Norm einer Matrix ist durch

$$\|\mathbf{A}\| \triangleq \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})} \quad (2.18)$$

gegeben. □

Die Definition ?? ist diejenige der aus der euklidischen Norm resultierende Norm. Diese Normen werden im vorliegenden Bericht verwendet, da sie die Stabilitätsbeweise der Regler und Beobachter von Abschnitt 3 vereinfachen. Es gibt keinen Verlust der Allgemeingültigkeit, da alle Normen im  $\mathbb{R}^{n+m}$  äquivalent sind (?); d. h., die in diesem Forschungsbericht vorgestellten Ergebnisse sind für jede Norm im  $\mathbb{R}^{n+m}$  gültig. In diesem Rahmen gelten die folgenden Eigenschaften des Modells (??):

### Eigenschaft 2.1

Die Norm des Vektors  $\boldsymbol{\delta}$  ist durch

$$\|\boldsymbol{\delta}\| \leq \sqrt{\frac{2U_{e,\max}}{\lambda_{\min}(\mathbf{K})}} \triangleq \bar{\delta}$$

begrenzt, wobei  $U_{e,\max}$  die maximale potentielle Energie bezeichnet. Anders ausgedrückt sagt EIG ??, daß  $\delta_{ij} \in \Delta \subset \mathbb{R}^m$  gilt, wobei die Elemente von  $\Delta$  begrenzt sind. □

Zur Vereinfachung der weiteren Vorgehensweise wird

$$\mathbb{Q} \triangleq \mathbb{R}^n \times \Delta \subset \mathbb{R}^{n+m} \quad (2.19)$$

definiert.

**Eigenschaft 2.2**

Die Trägheitsmatrix  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  ist symmetrisch und positiv definit. □

**Eigenschaft 2.3**

Die Matrix  $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \triangleq \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  ist schiefsymmetrisch. □

**Eigenschaft 2.4**

Es gilt

$$\lambda_{\min}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))\|\mathbf{y}\|^2 \leq \mathbf{y}^T \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{y} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))\|\mathbf{y}\|^2 \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^{n+m} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

□

**Eigenschaft 2.5**

Die Matrix  $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})$  existiert, und es gilt

$$\lambda_{\max}^{-1}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))\|\mathbf{y}\|^2 \leq \mathbf{y}^T \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{y} \leq \lambda_{\min}^{-1}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))\|\mathbf{y}\|^2 \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^{n+m} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

□

**Eigenschaft 2.6**

Es gilt

$$0 < \lambda_h \leq \|\mathbf{H}(\mathbf{q})\| \leq \lambda_H < \infty \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^{n+m}.$$

□

**Eigenschaft 2.7**

Es gilt

$$0 < \sigma_h \leq \|\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\| \leq \sigma_H < \infty \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^{n+m}.$$

□

**Eigenschaft 2.8**

Es gilt

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{y})\| \leq k_c \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^{n+m} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

□

**Eigenschaft 2.9**

Es gibt eine Begrenzung für den Vektor  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ , d. h.

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| \leq \sigma_g \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^{n+m} .$$

□

**Eigenschaft 2.10**

Es gilt

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{y})\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad , \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+m} .$$

□

### 3 Regelung elastischer Roboter bei Anwendung nichtlinearer Beobachter

In Arteaga Pérez (1996c) wird ein Regler zur Bahnverfolgung vorgestellt. Eine wichtige Voraussetzung dazu ist, daß sowohl die verallgemeinerten Koordinaten als auch deren zeitliche Ableitung zur Verfügung stehen. Obwohl die Koordinatengeschwindigkeit mittels eines Beobachters zu schätzen ist (Arteaga Pérez 1996a, b), ist es höchstwahrscheinlich, daß das Gesamtsystem nicht stabil ist, bzw. die Bedingungen, die gewährleisten, daß der über den Beobachter geschlossene Regelkreis stabil ist, gelten nicht mehr, wenn die Stabilität der drei Teilsysteme analysiert werden muß. Dafür ist eine neue Stabilitätsanalyse notwendig. Da der in Arteaga Pérez (1996a, b) vorgestellte Beobachter unabhängig von Regelungskonzepten ist, empfiehlt sich die Synthese eines neuen Beobachters, der zusammen mit dem Regler ausgelegt wird.

#### 3.1 Auslegung des nichtlinearen Beobachters

Wie im Abschnitt 2 erwähnt, lauten die Bewegungsgleichungen eines elastischen Roboters wie folgt:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_e\mathbf{q} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}. \quad (3.1)$$

Gegeben sei eine beschränkte Soll-Bahn  $\mathbf{q}_d$ , deren Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{q}}_d$  und Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{q}}_d$  bekannt und beschränkt sind. So ist der Fehler zwischen Ist- und Soll-Bahn als

$$\tilde{\mathbf{q}} \triangleq \mathbf{q} - \mathbf{q}_d \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \\ \tilde{\boldsymbol{\delta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_d \\ \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta}_d \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \triangleq \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d \triangleq \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{\delta}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\boldsymbol{\theta}}_d \\ \dot{\boldsymbol{\delta}} - \dot{\boldsymbol{\delta}}_d \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

zu definieren. In diesem Rahmen kann die Regelungsaufgabe üblicherweise als

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

formuliert werden. Mit den folgenden Definitionen:

$$\boldsymbol{\Lambda} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_\theta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Lambda}_\delta \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_r \triangleq \dot{\mathbf{q}}_d - \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbf{q}} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_r \\ \dot{\boldsymbol{\delta}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_d - \boldsymbol{\Lambda}_\theta\tilde{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\boldsymbol{\delta}}_d - \boldsymbol{\Lambda}_\delta\tilde{\boldsymbol{\delta}} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{s} \triangleq \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d + \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbf{q}} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbf{q}} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}_\theta \\ \mathbf{s}_\delta \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{K}_p \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{p\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{p\delta} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{K}_q \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{q\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{q\delta} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{K}_{qe} \triangleq \mathbf{K}_q + \mathbf{K}_e \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{q\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{q\delta} + \mathbf{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{q\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{qe\delta} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{D} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{D}_\theta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_\delta \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{K}_{pD} \triangleq \mathbf{K}_p + \mathbf{D} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{p\theta} + \mathbf{D}_\theta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{p\delta} + \mathbf{D}_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pD\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{pD\delta} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\theta\theta} & \mathbf{H}_{\theta\delta} \\ \mathbf{H}_{\theta\delta}^T & \mathbf{H}_{\delta\delta} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{y}) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\theta\theta}(\mathbf{q}, \mathbf{y}) & \mathbf{C}_{\theta\delta}(\mathbf{q}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{C}_{\delta\theta}(\mathbf{q}, \mathbf{y}) & \mathbf{C}_{\delta\delta}(\mathbf{q}, \mathbf{y}) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{g}_\theta \\ \mathbf{g}_\delta \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

wobei  $\mathbf{\Lambda}$ ,  $\mathbf{K}_p$  und  $\mathbf{K}_q$  positiv definite diagonale Matrizen sind. In Gl. (??) ist zu erkennen, daß

$$\|\mathbf{C}_{\delta\delta}(\mathbf{q}, \mathbf{y})\| \leq k_{c\delta\delta} \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^{n+m} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+m} \quad (3.17)$$

gilt (siehe EIG ??). Mit den vorherigen Definitionen ergibt sich der Regler zur Bahnverfolgung für den elastischen Roboter zu:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \mathbf{H}_{\theta\theta} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r + \mathbf{H}_{\theta\delta} \ddot{\boldsymbol{\delta}}_r + \mathbf{C}_{\theta\theta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\boldsymbol{\theta}}_r + \mathbf{C}_{\theta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\boldsymbol{\delta}}_r + \mathbf{D}_\theta \dot{\boldsymbol{\theta}}_r + \mathbf{g}_\theta \\ & - \mathbf{K}_{q\theta} \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{K}_{p\theta} \mathbf{s}_\theta. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Es ist anzumerken, daß der Regler (??) nicht der gleiche wie der in Arteaga Pérez (1996c) vorgeschlagene ist. Der Unterschied liegt in der eingefügten Verstärkungsmatrix  $\mathbf{K}_q$ . Die Soll-Bahn für die elastischen Koordinaten ist aus

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\delta}}_d = & \mathbf{\Lambda}_\delta \dot{\boldsymbol{\delta}} - \mathbf{H}_{\delta\delta}^{-1} \left( \mathbf{H}_{\theta\delta}^T \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r + \mathbf{C}_{\delta\theta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\boldsymbol{\theta}}_r + \mathbf{C}_{\delta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\boldsymbol{\delta}}_r + \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}_d + \mathbf{D}_\delta \dot{\boldsymbol{\delta}}_r \right. \\ & \left. + \mathbf{g}_\delta - \mathbf{K}_{q\delta} \tilde{\boldsymbol{\delta}} - \mathbf{K}_{p\delta} \mathbf{s}_\delta + \mathbf{D}_\Delta \dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \mathbf{f} \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\boldsymbol{\delta}_d(0) = \dot{\boldsymbol{\delta}}_d(0) = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

zu berechnen, wobei

$$f_{ij} \triangleq -\dot{\delta}_{dij} \frac{(\dot{\delta}_{dij} s_{\delta ij}) d_{ij}}{\|\dot{\delta}_{dij} s_{\delta ij}\| + \epsilon_{ij} e^{-\beta_{ij} t}}, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m_i \quad (3.21)$$

ist.  $f_{ij}$  ist Element von  $\mathbf{f}$ . Dieser Vektor hilft dabei, die Dämpfung des elastischen Roboters zu erhöhen (?). Da die Ableitung der verallgemeinerten Koordinaten nicht

bekannt ist, sind die folgenden Definitionen einzufügen:

$$\mathbf{z} \triangleq \mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \boldsymbol{\delta} - \hat{\boldsymbol{\delta}} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{z}_\theta \\ \mathbf{z}_\delta \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_r &\triangleq \ddot{\mathbf{q}}_d - \boldsymbol{\Lambda}(\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d) = \ddot{\mathbf{q}}_r + \boldsymbol{\Lambda}\dot{\mathbf{z}} \\ &\triangleq \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r \\ \ddot{\boldsymbol{\delta}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d - \boldsymbol{\Lambda}_\theta(\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} - \dot{\boldsymbol{\theta}}_d) \\ \ddot{\boldsymbol{\delta}}_d - \boldsymbol{\Lambda}_\delta(\dot{\hat{\boldsymbol{\delta}}} - \dot{\boldsymbol{\delta}}_d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r + \boldsymbol{\Lambda}_\theta\dot{\mathbf{z}}_\theta \\ \ddot{\boldsymbol{\delta}}_r + \boldsymbol{\Lambda}_\delta\dot{\mathbf{z}}_\delta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\hat{\mathbf{s}} \triangleq \dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{s} - \dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_\theta - \dot{\mathbf{z}}_\theta \\ \mathbf{s}_\delta - \dot{\mathbf{z}}_\delta \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_\theta \\ \hat{\mathbf{s}}_\delta \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{s}_x \triangleq \dot{\hat{\boldsymbol{\delta}}} - \dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \boldsymbol{\Lambda}_\delta(\hat{\boldsymbol{\delta}} - \boldsymbol{\delta}_d). \quad (3.25)$$

Betrachtet man die Gln. (??) bis (??), läßt sich der Regler wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{H}_{\theta\theta}\ddot{\boldsymbol{\theta}}_r + \mathbf{H}_{\theta\delta}\ddot{\boldsymbol{\delta}}_r + \mathbf{C}_{\theta\theta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\boldsymbol{\theta}}_r + \mathbf{C}_{\theta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\boldsymbol{\delta}}_r + \mathbf{D}_\theta\dot{\boldsymbol{\theta}}_r + \mathbf{g}_\theta \\ &\quad - \mathbf{K}_{q\theta}\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{K}_{p\theta}\hat{\mathbf{s}}_\theta. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Dabei sollen die Gln. (??) bis (??) zu

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\delta}}_d &= \boldsymbol{\Lambda}_\delta(\dot{\hat{\boldsymbol{\delta}}} - \dot{\boldsymbol{\delta}}_d) - \mathbf{H}_{\delta\delta}^{-1} \left( \mathbf{H}_{\theta\delta}^T \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r + \mathbf{C}_{\delta\theta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\boldsymbol{\theta}}_r + \mathbf{C}_{\delta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\boldsymbol{\delta}}_r + \mathbf{K}\boldsymbol{\delta}_d \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{D}_\delta\dot{\boldsymbol{\delta}}_r + \mathbf{g}_\delta - \mathbf{K}_{q\delta}\tilde{\boldsymbol{\delta}} - \mathbf{K}_{p\delta}\hat{\mathbf{s}}_\delta + \mathbf{D}_\Delta\dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \mathbf{f} \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\boldsymbol{\delta}_d(0) = \dot{\boldsymbol{\delta}}_d(0) = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

$$f_{ij} \triangleq -\dot{\delta}_{dij} \frac{(\dot{\delta}_{dij} s_{xij}) d_{ij}}{\|\dot{\delta}_{dij} s_{xij}\| + \epsilon_{ij} e^{-\beta_{ij} t}}, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m_i \quad (3.29)$$

umgeschrieben werden, wobei  $f_{ij}$  Element des neu definierten Vektors  $\mathbf{f}$  ist.

Die Gleichungen (??) und (??) sind äquivalent zu

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_d + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_q \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_p \hat{\mathbf{s}} + \mathbf{f}_1, \quad (3.30)$$

wobei

$$\mathbf{f}_1 \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_\Delta \dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \mathbf{f} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß sich Gl. (??) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_d + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_q \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_p \mathbf{s} \\ &\quad + \mathbf{f}_1 + \mathbf{H}(\mathbf{q})\boldsymbol{\Lambda}\dot{\mathbf{z}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}_p \dot{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (3.32)$$

umschreiben läßt. Wird Gl. (??) in Gl. (??) eingesetzt, läßt sich die Fehlerdynamik als

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} &= -(\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} + \mathbf{K}_{pD}\mathbf{s} + \mathbf{K}_{qe}\tilde{\mathbf{q}}) + \mathbf{f}_1 + \mathbf{H}(\mathbf{q})\boldsymbol{\Lambda}\dot{\mathbf{z}} \\ &\quad - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}})\mathbf{s} + \mathbf{K}_p \dot{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

schreiben.

Um einen Beobachter auszulegen, kann man zunächst die Beobachtersynthese für starre Roboter betrachten (Nicosia und Tomei 1990, Canudas de Wit u. a. 1990, 1992). ??? Der in diesem Forschungsbericht vorgeschlagene Beobachter basiert auf dem nach Nicosia und Tomei (1990), obwohl einige wesentliche Modifikationen eingefügt worden sind, um den Term  $\mathbf{f}_1$  richtig berücksichtigen zu können. Daraus ergibt sich ein großer Unterschied, da die Stabilitätsanalyse des Beobachters nicht mehr unabhängig von der des Reglers wie in Nicosia und Tomei (1990) durchgeführt werden kann. Dies geht nur für den Spezialfall  $\mathbf{D}_\Delta \equiv \mathbf{0}$ .

Um den Beobachter vorzustellen, sind die folgenden Definitionen hilfreich:

$$\dot{\mathbf{q}}_o \triangleq \dot{\hat{\mathbf{q}}} - \Lambda \mathbf{z} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{r} \triangleq \dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_o = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\hat{\mathbf{q}}} + \Lambda \mathbf{z} = \dot{\mathbf{z}} + \Lambda \mathbf{z}. \quad (3.35)$$

Der vorgeschlagene Beobachter lautet:

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}_o + \Lambda \mathbf{z} + k_d \mathbf{z} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_o + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\hat{\mathbf{q}}})\dot{\mathbf{q}}_o + \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_o + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} + \mathbf{K}_v \mathbf{z} + \mathbf{f}_1, \quad (3.37)$$

wobei  $\mathbf{K}_v > \mathbf{0}$  und diagonal und  $k_d > 0$  ist. Da

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}} = \ddot{\mathbf{q}}_o + \Lambda \dot{\mathbf{z}} + k_d \dot{\mathbf{z}} \quad (3.38)$$

ist, lassen sich Gln. (??) und (??) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_o + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_o + \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_o + \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \mathbf{u} + \mathbf{K}_v \mathbf{z} + \mathbf{f}_1 \\ &+ k_d \mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}})\dot{\mathbf{q}}_o \end{aligned} \quad (3.39)$$

umschreiben. Subtrahiert man Gl. (??) von Gl. (??), ergibt sich

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{r} + \mathbf{K}_e \mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{r} = -\mathbf{K}_v \mathbf{z} - \mathbf{f}_1 - k_d \mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{z}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}})\dot{\mathbf{q}}_o. \quad (3.40)$$

Da

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}})\dot{\mathbf{q}}_o = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}})(\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{r}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{z}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}})\mathbf{r} \quad (3.41)$$

ist (siehe EIG ??), kann man Gl. (??) als

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{r}} = -(\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{r} + \mathbf{K}_{ve} \mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{r} + k_d \mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{z}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}})\mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{z}} - \mathbf{f}_1 \quad (3.42)$$

schreiben, wobei  $\mathbf{K}_{ve} \triangleq \mathbf{K}_v + \mathbf{K}_e$  ist.

Die folgende Definition wird eingesetzt:

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Da der Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\mathbf{q}}$  für jedes physikalisches System beschränkt ist, garantiert der folgende Satz, daß das durch Gln. (??) und (??) beschriebene System ES ist.

### Satz 3.1

Gegeben sei eine beliebige Soll-Bahn  $\boldsymbol{\theta}_d$  mit beschränkter Geschwindigkeit und Beschleunigung. Wenn  $\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq v_m$  gilt, wobei  $v_m$  eine positive Konstante ist, dann sind die Zustände  $\mathbf{x}$  der Gln. (??) und (??) ES im Sinne von Satz ??, wenn

$$k_d > \frac{9}{4} \frac{(\lambda_M \lambda_H + k_c v_m + \lambda_P)^2}{\lambda_{pd} \lambda_h} + \frac{k_c v_m - \lambda_d}{\lambda_h} \quad (3.44)$$

$$\lambda_q > \frac{9}{4} \frac{\lambda_M (\lambda_M \lambda_H + k_c v_m + \lambda_P)}{\lambda_m (\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m)} - \lambda_m \lambda_{pd} - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_e) \quad (3.45)$$

$$\lambda_v > \frac{9}{4} \frac{(k_d \lambda_M \lambda_H + \lambda_M k_c v_m)^2}{\lambda_m (\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m)} - \lambda_m \lambda_d - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_e) \quad (3.46)$$

$$\varphi^2 z_m^2 > \frac{\epsilon e^{-1}}{\lambda_1 \lambda} \quad (3.47)$$

$$\varphi^2 z_m^2 > \frac{\epsilon}{\lambda_1 (\lambda - \beta)} \left( e^{-\beta \left( \frac{\ln(\lambda/\beta)}{\lambda - \beta} \right)} - e^{-\lambda \left( \frac{\ln(\lambda/\beta)}{\lambda - \beta} \right)} \right) \quad (3.48)$$

gilt, mit

$$\begin{aligned} \lambda_m &\triangleq \lambda_{\min}(\mathbf{A}) & \lambda_M &\triangleq \lambda_{\max}(\mathbf{A}) & \lambda_{pd} &\triangleq \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{pD}) & \lambda_{PD} &\triangleq \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{pD}) \\ \lambda_d &\triangleq \lambda_{\min}(\mathbf{D}) & \lambda_D &\triangleq \lambda_{\max}(\mathbf{D}) & \lambda_{qe} &\triangleq \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{qe}) & \lambda_{QE} &\triangleq \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{qe}) \\ \lambda_p &\triangleq \lambda_{\min}(\mathbf{K}_p) & \lambda_P &\triangleq \lambda_{\max}(\mathbf{K}_p) & \lambda_{ve} &\triangleq \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{ve}) & \lambda_{VE} &\triangleq \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{ve}). \end{aligned}$$

$\lambda_h$  und  $\lambda_H$  sind in EIG ?? definiert. Ein Einzugsgebiet ist durch

$$S = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{4(n+m)} : \|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \left( \varphi^2 z_m^2 - \frac{\epsilon e^{-1}}{\lambda_1 \lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (3.49)$$

gegeben, wenn  $\beta = \lambda$ , und durch

$$S = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{4(n+m)} : \|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \left( \varphi^2 z_m^2 - \frac{\epsilon}{\lambda_1 (\lambda - \beta)} \left( e^{-\beta \left( \frac{\ln(\lambda/\beta)}{\lambda - \beta} \right)} - e^{-\lambda \left( \frac{\ln(\lambda/\beta)}{\lambda - \beta} \right)} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (3.50)$$



wenn  $\beta \neq \lambda$ , wobei

$$\lambda_1 \triangleq \frac{1}{2} \min_{q \in \mathbb{Q}^{n+m}} (\lambda_{\min}(\mathbf{N})) \quad (3.51)$$

$$\lambda_2 \triangleq \frac{1}{2} \max_{q \in \mathbb{Q}^{n+m}} (\lambda_{\max}(\mathbf{N})) \quad (3.52)$$

$$\lambda_3 \triangleq \min(\lambda_{\min}(\mathbf{Q})) \quad \text{für } 0 \leq \|\dot{\mathbf{z}}\| \leq \varphi z_m \quad 0 < \varphi < 1 \quad (3.53)$$

$$\lambda \triangleq \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \quad (3.54)$$

$$\epsilon \triangleq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} d_{ij} \epsilon_{ij} \quad (3.55)$$

$$\beta \triangleq \min(\beta_{ij}) \quad , \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m_i \quad (3.56)$$

$$z_m \triangleq \min \left( \begin{array}{l} \frac{\lambda_m^2 \lambda_{pd} + \lambda_m \lambda_{qe}}{\lambda_M^2 k_c} , \frac{\lambda_{pd}}{k_c} , \frac{\lambda_m^2 \lambda_d + \lambda_m \lambda_{ve}}{\lambda_M^2 k_c} , \frac{\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m}{k_c} , \\ \frac{(\lambda_m^2 \lambda_{pd} + \lambda_m \lambda_{qe})(\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m) - \frac{9}{4} \lambda_M (\lambda_M \lambda_H + k_c v_m + \lambda_P)}{k_c (\lambda_m^2 \lambda_{pd} + \lambda_m \lambda_{qe} + \lambda_M^2 (\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m))} , \\ \frac{\lambda_{pd} (\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m) - \frac{9}{4} (\lambda_M \lambda_H + k_c v_m + \lambda_P)^2}{k_c (\lambda_{pd} + \lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m)} , \\ \left( \frac{\lambda_m^2 \lambda_{pd}^2 + \lambda_m \lambda_{qe} \lambda_{pd}}{8 \lambda_M^2 k_c^2} + \left( \frac{2 \lambda_M^2 \lambda_{pd} + \lambda_m \lambda_{qe}}{16 \lambda_M^2 k_c} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{2 \lambda_M^2 \lambda_{pd} + \lambda_m \lambda_{qe}}{16 \lambda_M^2 k_c} , \\ \left( \frac{(\lambda_m \lambda_{ve} + \lambda_m^2 \lambda_d)(\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m) - \frac{9}{4} (k_d \lambda_M \lambda_H + \lambda_M k_c v_m)^2}{8 \lambda_M^2 k_c^2} \right. \\ \left. + \left( \frac{\lambda_m \lambda_{ve} + \lambda_m^2 \lambda_d + \lambda_M^2 (\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m) + 9 \lambda_M^2 (k_d \lambda_H + k_c v_m)}{16 k_c \lambda_M^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \left. - \frac{\lambda_m \lambda_{ve} + \lambda_m^2 \lambda_d + \lambda_M^2 (\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m) + 9 \lambda_M^2 (k_d \lambda_H + k_c v_m)}{16 k_c \lambda_M^2} \right) \end{array} \right) \quad (3.57)$$

$$\mathbf{N} \triangleq \begin{bmatrix} 2\Lambda \mathbf{K}_{pD} + \mathbf{K}_{qe} & \Lambda \mathbf{H}(\mathbf{q}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ +\Lambda \mathbf{H}(\mathbf{q})\Lambda & & & \\ \mathbf{H}(\mathbf{q})\Lambda & \mathbf{H}(\mathbf{q}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2\Lambda \mathbf{D} + \mathbf{K}_{ve} & \Lambda \mathbf{H}(\mathbf{q}) \\ & & +\Lambda \mathbf{H}(\mathbf{q})\Lambda & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}(\mathbf{q})\Lambda & \mathbf{H}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$\mathbf{Q} \triangleq \begin{bmatrix}
\Lambda \mathbf{K}_{pD} \Lambda & -\frac{1}{2} \Lambda \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) & \mathbf{0} & -\frac{1}{2} \Lambda \mathbf{H}(\mathbf{q}) \Lambda \\
+\Lambda \mathbf{K}_{qe} & -\frac{1}{2} \Lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) & & -\frac{1}{2} \Lambda \mathbf{K}_p \\
-\frac{1}{2} \Lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \Lambda & & & +\frac{1}{2} \Lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\
-\frac{1}{2} \Lambda \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \Lambda & & & \\
\\
-\frac{1}{2} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \Lambda & \mathbf{K}_{pD} & \mathbf{0} & -\frac{1}{2} \mathbf{H}(\mathbf{q}) \Lambda \\
-\frac{1}{2} \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \Lambda & -\frac{1}{2} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) & & -\frac{1}{2} \mathbf{K}_p \\
& -\frac{1}{2} \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) & & +\frac{1}{2} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\
\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda \mathbf{K}_{ve} & \frac{1}{2} k_d \Lambda \mathbf{H}(\mathbf{q}) \\
& & +\Lambda \mathbf{D} \Lambda & -\frac{1}{2} \Lambda \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \\
& & -\frac{1}{2} \Lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \Lambda & -\frac{1}{2} \Lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \\
& & -\frac{1}{2} \Lambda \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \Lambda & +\frac{1}{2} \Lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\
\\
-\frac{1}{2} \Lambda \mathbf{H}(\mathbf{q}) \Lambda & -\frac{1}{2} \Lambda \mathbf{H}(\mathbf{q}) & \frac{1}{2} k_d \mathbf{H}(\mathbf{q}) \Lambda & \mathbf{D} \\
-\frac{1}{2} \mathbf{K}_p \Lambda & -\frac{1}{2} \mathbf{K}_p & -\frac{1}{2} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \Lambda & +k_d \mathbf{H}(\mathbf{q}) \\
+\frac{1}{2} \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \Lambda & +\frac{1}{2} \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & -\frac{1}{2} \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \Lambda & -\frac{1}{2} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \\
& & +\frac{1}{2} \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \Lambda & -\frac{1}{2} \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \\
& & & +\frac{1}{2} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\
& & & +\frac{1}{2} \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})
\end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

Außerdem bleiben die in den Gln. (??)–(??) angegebenen Soll-Bahnen  $\delta_d$  und  $\dot{\delta}_d$  beschränkt, wenn

$$\hat{\lambda}_3 \triangleq \lambda_{\min}(\mathbf{P}) - (1 + \lambda_{\max}(\Lambda_\delta))(\lambda_{\max}(\mathbf{D}_\Delta) \sqrt{m} + k_{c\delta\delta} \varphi z_m (1 + \lambda_{\max}(\Lambda_\delta))) > 0 \quad (3.60)$$

gilt, mit

$$\mathbf{P} \triangleq \begin{bmatrix} \Lambda_\delta \mathbf{K}_{qe\delta} + \Lambda_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} \Lambda_\delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_\Delta + \mathbf{K}_{pD\delta} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

$$\lambda_{\min}(\mathbf{P}) = \min(\lambda_{\min}(\Lambda_\delta) \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{qe\delta}) + \lambda_{\min}^2(\Lambda_\delta) \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{pD\delta}), \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{pD\delta}) + \lambda_{\min}(\mathbf{D}_\Delta)). \quad (3.62)$$

### Beweis

a) Zuerst wird die Stabilität des Gesamtsystems bewiesen. Dafür wird die folgende Ljapunov-Funktion definiert:

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{x}, t) \triangleq V(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T (2\Lambda \mathbf{K}_{pD} + \mathbf{K}_{qe}) \tilde{\mathbf{q}} \\
&+ \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{r} + \frac{1}{2} \mathbf{z}^T (2\Lambda \mathbf{D} + \mathbf{K}_{ve}) \mathbf{z} \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{N} \mathbf{x},
\end{aligned} \quad (3.63)$$

deren Ableitung lautet:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \tilde{\mathbf{q}}^T (2\Lambda \mathbf{K}_{pD} + \mathbf{K}_{qe}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{r} \\
&+ \mathbf{z}^T (2\Lambda \mathbf{D} + \mathbf{K}_{ve}) \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{r}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{r}}.
\end{aligned} \quad (3.64)$$

Setzt man Gl. (??) und (??) in Gl. (??) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{H}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \tilde{\mathbf{q}}^T (2\Lambda \mathbf{K}_{pD} + \mathbf{K}_{qe}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \dot{H}(\mathbf{q}) \mathbf{r} + \mathbf{z}^T (2\Lambda \mathbf{D} + \mathbf{K}_{ve}) \dot{\mathbf{z}} \quad (3.65) \\ &\quad - \mathbf{s}^T (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s} + \mathbf{K}_{pD} \mathbf{s} + \mathbf{K}_{qe} \tilde{\mathbf{q}}) \\ &\quad + \mathbf{s}^T (\mathbf{f}_1 + \mathbf{H}(\mathbf{q}) \Lambda \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \mathbf{s} + \mathbf{K}_p \dot{\mathbf{z}}) \\ &\quad - \mathbf{r}^T (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{r} + \mathbf{K}_{ve} \mathbf{z} + \mathbf{D} \mathbf{r} + k_d \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{z}}) \\ &\quad + \mathbf{r}^T (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{f}_1). \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_{pD} \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_{qe} \tilde{\mathbf{q}} &= -(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T + \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda) \mathbf{K}_{pD} (\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}) - (\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T + \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda) \mathbf{K}_{qe} \tilde{\mathbf{q}} \quad (3.66) \\ &= -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{K}_{pD} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{K}_{pD} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{K}_{pD} \Lambda \tilde{\mathbf{q}} \\ &\quad - \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{K}_{pD} \Lambda \tilde{\mathbf{q}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{K}_{qe} \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{K}_{qe} \tilde{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -\mathbf{r}^T \mathbf{D} \mathbf{r} - \mathbf{r}^T \mathbf{K}_{ve} \mathbf{z} &= -(\dot{\mathbf{z}}^T + \mathbf{z}^T \Lambda) \mathbf{D} (\dot{\mathbf{z}} + \Lambda \mathbf{z}) - (\dot{\mathbf{z}}^T + \mathbf{z}^T \Lambda) \mathbf{K}_{ve} \mathbf{z} \quad (3.67) \\ &= -\dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{z}^T \Lambda \mathbf{D} \dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{D} \Lambda \mathbf{z} \\ &\quad - \mathbf{z}^T \Lambda \mathbf{D} \Lambda \mathbf{z} - \dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{K}_{ve} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \Lambda \mathbf{K}_{ve} \mathbf{z} \end{aligned}$$

ist, und betrachtet man EIG ??, ergibt sich aus Gl. (??)

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \tilde{\mathbf{q}}^T (2\Lambda \mathbf{K}_{pD} + \mathbf{K}_{qe}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{K}_{pD} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - 2\tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{K}_{pD} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (3.68) \\ &\quad - \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{K}_{pD} \Lambda \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_{qe} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{K}_{qe} \tilde{\mathbf{q}} \\ &\quad + \mathbf{z}^T (2\Lambda \mathbf{D} + \mathbf{K}_{ve}) \dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{z}} - 2\mathbf{z}^T \Lambda \mathbf{D} \dot{\mathbf{z}} \\ &\quad - \mathbf{z}^T \Lambda \mathbf{D} \Lambda \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{K}_{ve} \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{z}^T \Lambda \mathbf{K}_{ve} \mathbf{z} \\ &\quad + \mathbf{s}^T (\mathbf{f}_1 + \mathbf{H}(\mathbf{q}) \Lambda \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \mathbf{s} + \mathbf{K}_p \dot{\mathbf{z}}) \\ &\quad - k_d \mathbf{r}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{r}^T (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{f}_1) \\ &= -\tilde{\mathbf{q}}^T (\Lambda \mathbf{K}_{pD} \Lambda + \Lambda \mathbf{K}_{qe}) \tilde{\mathbf{q}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{K}_{pD} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &\quad - \mathbf{z}^T (\Lambda \mathbf{D} \Lambda + \Lambda \mathbf{K}_{ve}) \mathbf{z} - \dot{\mathbf{z}}^T (\mathbf{D} + k_d \mathbf{H}(\mathbf{q})) \dot{\mathbf{z}} \\ &\quad + \mathbf{s}^T (\mathbf{H}(\mathbf{q}) \Lambda \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \mathbf{s} + \mathbf{K}_p \dot{\mathbf{z}}) \\ &\quad - k_d \mathbf{z}^T \Lambda \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{r}^T (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{z}}) + (\mathbf{s}^T - \mathbf{r}^T) \mathbf{f}_1 \\ &= -\tilde{\mathbf{q}}^T (\Lambda \mathbf{K}_{pD} \Lambda + \Lambda \mathbf{K}_{qe}) \tilde{\mathbf{q}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{K}_{pD} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &\quad - \mathbf{z}^T (\Lambda \mathbf{D} \Lambda + \Lambda \mathbf{K}_{ve}) \mathbf{z} - \dot{\mathbf{z}}^T (\mathbf{D} + k_d \mathbf{H}(\mathbf{q})) \dot{\mathbf{z}} \\ &\quad + (\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T + \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda) (\mathbf{H}(\mathbf{q}) \Lambda \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) (\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_p \dot{\mathbf{z}}) \\ &\quad - k_d \mathbf{z}^T \Lambda \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{z}} + (\dot{\mathbf{z}}^T + \mathbf{z}^T \Lambda) (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) (\dot{\mathbf{z}} + \Lambda \mathbf{z}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{z}}) + (\mathbf{s}^T - \mathbf{r}^T) \mathbf{f}_1 \\ &= -\tilde{\mathbf{q}}^T (\Lambda \mathbf{K}_{pD} \Lambda + \Lambda \mathbf{K}_{qe} - \Lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \Lambda) \tilde{\mathbf{q}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T (\mathbf{K}_{pD} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}})) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &\quad - \mathbf{z}^T (\Lambda \mathbf{D} \Lambda + \Lambda \mathbf{K}_{ve} - \Lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \Lambda) \mathbf{z} \\ &\quad - \dot{\mathbf{z}}^T (\mathbf{D} + k_d \mathbf{H}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \dot{\mathbf{z}} \\ &\quad + \tilde{\mathbf{q}}^T (\Lambda \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) + \Lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}})) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &\quad + \mathbf{z}^T (-k_d \Lambda \mathbf{H}(\mathbf{q}) + \Lambda \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) + \Lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) - \Lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \dot{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{\mathbf{q}}^T (\mathbf{\Lambda} \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{\Lambda} \mathbf{K}_p) \dot{\mathbf{z}} \\
& + \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{\Lambda} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_p) \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{s}_x^T (\mathbf{D}_\Delta \dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \mathbf{f}) \\
& = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{s}_x^T (\mathbf{D}_\Delta \dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \mathbf{f})
\end{aligned}$$

Aus Gl. (??) erhalt man

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}) & = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{s}_x^T (\mathbf{D}_\Delta \dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \mathbf{f}) \tag{3.69} \\
& = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \left( \dot{\delta}_{dij} s_{xij} d_{ij} - d_{ij} \frac{\|\dot{\delta}_{dij} s_{xij}\|^2}{\|\dot{\delta}_{dij} s_{xij}\| + \epsilon_{ij} e^{-\beta_{ij} t}} \right) \\
& \leq -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \left( \|\dot{\delta}_{dij} s_{xij}\| d_{ij} - d_{ij} \frac{\|\dot{\delta}_{dij} s_{xij}\|^2}{\|\dot{\delta}_{dij} s_{xij}\| + \epsilon_{ij} e^{-\beta_{ij} t}} \right) \\
& = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \left( d_{ij} \frac{\|\dot{\delta}_{dij} s_{xij}\|}{\|\dot{\delta}_{dij} s_{xij}\| + \epsilon_{ij} e^{-\beta_{ij} t}} \epsilon_{ij} e^{-\beta_{ij} t} \right) \\
& \leq -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} d_{ij} \epsilon_{ij} e^{-\beta_{ij} t} \\
& \leq -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \epsilon e^{-\beta t}.
\end{aligned}$$

Die Stabilität des Systems soll mittels Satz ?? bewiesen werden. Es kann gezeigt werden (siehe Anhang A), daß die Bedingungen (??) bis (??) zusammen mit der Definition von  $\lambda_3$  (siehe Gl. (??)) garantieren, daß  $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$  ist. Da

$$\|\mathbf{x}\|^2 \leq \varphi^2 z_m^2 \Rightarrow \|\dot{\mathbf{z}}\|^2 \leq \varphi^2 z_m^2 \tag{3.70}$$

gilt, muß ein geeignetes Einzugsgebiet ausgewählt werden, so daß Gl. (??) für  $t \geq 0$  immer gilt. Das heißt, wenn  $\beta = \lambda$  und  $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$ , muß

$$\|\mathbf{x}\|^2 \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \|\mathbf{x}_0\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{\epsilon}{\lambda_1} t e^{-\lambda t} \tag{3.71}$$

gelten (siehe Satz ??). Wegen Gl. (??) und (??) soll

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \|\mathbf{x}_0\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{\epsilon}{\lambda_1} t e^{-\lambda t} \leq \varphi^2 z_m^2 \tag{3.72}$$

erfüllt werden. Obwohl das Maximum der linken Seite von Gl. (??) berechnet werden kann, ist dieses eine Funktion von  $\|\mathbf{x}_0\|$ . Es ist günstiger, obgleich konservativer, die Maxima der beiden Terme getrennt zu berechnen, so daß

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \|\mathbf{x}_0\|^2 + \frac{\epsilon}{\lambda_1 \lambda} e^{-1} \leq \varphi^2 z_m^2 \tag{3.73}$$

gelten soll, wodurch sich das Einzugsgebiet (??) ergibt. Falls  $\beta \neq \lambda$  ist, gilt

$$\|\mathbf{x}\|^2 \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \|\mathbf{x}_0\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{\epsilon}{\lambda_1 (\lambda - \beta)} (e^{-\beta t} - e^{-\lambda t}). \tag{3.74}$$

Aus Gl. (??) bekommt man

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \|\mathbf{x}_0\|^2 e^{-\lambda t} + \frac{\epsilon}{\lambda_1 (\lambda - \beta)} (e^{-\beta t} - e^{-\lambda t}) \leq \varphi^2 z_m^2. \tag{3.75}$$

Berechnet man die Maxima der beide Terme der linken Seite von Gl. (??) wie vorher, ergibt sich das Einzugsgebiet (??).

b) Es bleibt zu beweisen, daß die Gln. (??)–(??) eine beschränkte Soll–Bahn liefern. Im Gegensatz zu dem Fall, daß kein Beobachter notwendig ist, hängt die Beschränktheit davon ab, ob die Schätzfehler beschränkt sind oder nicht. Da letzteres aus a) gewährleistet wird, kann angenommen werden, daß es eine Konstante  $\hat{v}_m$  so existiert, daß  $\dot{\hat{\mathbf{q}}} < \hat{v}_m$  gilt. Werden die Variablen

$$\mathbf{s}_0 \triangleq \dot{\hat{\boldsymbol{\delta}}}_d + \mathbf{\Lambda}_\delta \boldsymbol{\delta}_d \quad , \quad (3.76)$$

$$\mathbf{x}_\delta \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_d \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\delta}}}_d \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

eingesetzt, läßt sich Gl. (??) zu

$$\mathbf{H}_{\delta\delta} \dot{\mathbf{s}}_0 = -(\mathbf{C}_{\delta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s}_0 + \mathbf{K}_{pD\delta} \mathbf{s}_0 + \mathbf{K}_{qe\delta} \boldsymbol{\delta}_d + \mathbf{D}_\Delta \dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \mathbf{f}_r - \mathbf{C}_{\delta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \mathbf{s}_0 + \mathbf{f}) \quad (3.78)$$

umschreiben. Dabei gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_r \triangleq & \mathbf{H}_{\theta\delta}^T \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r + \mathbf{C}_{\delta\theta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\boldsymbol{\theta}}_r + \mathbf{g}_\delta - \mathbf{H}_{\delta\delta} \mathbf{\Lambda}_\delta \dot{\hat{\boldsymbol{\delta}}} - \mathbf{C}_{\delta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{\Lambda}_\delta \boldsymbol{\delta} - \mathbf{D}_\delta \mathbf{\Lambda}_\delta \boldsymbol{\delta} \\ & - \mathbf{K}_{q\delta} \boldsymbol{\delta} - \mathbf{K}_{p\delta} \dot{\hat{\boldsymbol{\delta}}} - \mathbf{K}_{p\delta} \mathbf{\Lambda}_\delta \boldsymbol{\delta} + \mathbf{C}_{\delta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \mathbf{\Lambda}_\delta \boldsymbol{\delta} . \end{aligned} \quad (3.79)$$

Um Gln. (??) und (??) zu berechnen, wurde EIG ?? ausgenutzt, da

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\theta\theta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{C}_{\theta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{C}_{\delta\theta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{C}_{\delta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_r \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\delta}}}_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\theta\theta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{C}_{\theta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{C}_{\delta\theta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{C}_{\delta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_r \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\delta}}}_r \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\theta\theta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) & \mathbf{C}_{\theta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \\ \mathbf{C}_{\delta\theta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) & \mathbf{C}_{\delta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_r \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\delta}}}_r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.80)$$

gilt. Da  $\|\mathbf{q}\| < \infty$  für elastische Roboter mit rotatorischen Gelenken ist und  $\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq v_m$  und  $\|\dot{\hat{\mathbf{q}}}\| \leq \hat{v}_m$  sind, ist  $\mathbf{f}_r$  nur eine Funktion von beschränkten Variablen, was bedeutet, daß eine positive Konstante  $f_{r\max}$  existiert, so daß

$$\|\mathbf{f}_r\| \leq f_{r\max} \quad (3.81)$$

gilt (siehe EIG ?? bis ??). Eine Ljapunov–Funktion für das System (??) ist

$$\begin{aligned} V_\delta(\mathbf{x}_\delta, t) \triangleq V_\delta(\mathbf{x}_\delta) &= \frac{1}{2} \mathbf{s}_0^T \mathbf{H}_{\delta\delta} \mathbf{s}_0 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}_d^T (2\mathbf{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} + \mathbf{K}_{qe\delta} + \mathbf{\Lambda}_\delta \mathbf{D}_\Delta) \boldsymbol{\delta}_d \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_\delta^T \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_\delta \mathbf{H}_{\delta\delta} \mathbf{\Lambda}_\delta + 2\mathbf{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} + \mathbf{K}_{qe\delta} + \mathbf{\Lambda}_\delta \mathbf{D}_\Delta & \mathbf{\Lambda}_\delta \mathbf{H}_{\delta\delta} \\ \mathbf{H}_{\delta\delta} \mathbf{\Lambda}_\delta & \mathbf{H}_{\delta\delta} \end{bmatrix} \mathbf{x}_\delta \\ &\triangleq \frac{1}{2} \mathbf{x}_\delta^T \mathbf{M} \mathbf{x}_\delta . \end{aligned} \quad (3.82)$$

Wegen EIG ?? ergibt sich

$$\hat{\lambda}_1 \|\mathbf{x}_\delta\|^2 \leq V_\delta(\mathbf{x}_\delta) \leq \hat{\lambda}_2 \|\mathbf{x}_\delta\|^2 \quad (3.83)$$

$$\hat{\lambda}_1 \triangleq \frac{1}{2} \min_{\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^{n+m}} (\lambda_{\min}(\mathbf{M})) \quad (3.84)$$

$$\hat{\lambda}_2 \triangleq \frac{1}{2} \max_{\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^{n+m}} (\lambda_{\max}(\mathbf{M})). \quad (3.85)$$

Die Ableitung nach der Zeit von (??) lautet:

$$\dot{V}_\delta(\mathbf{x}_\delta) = \frac{1}{2} \mathbf{s}_0^T \dot{\mathbf{H}}_{\delta\delta} \mathbf{s}_0 + \boldsymbol{\delta}_d^T (2\boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} + \mathbf{K}_{qe\delta} + \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{D}_\Delta) \dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \mathbf{s}_0^T \mathbf{H}_{\delta\delta} \dot{\mathbf{s}}_0. \quad (3.86)$$

Setzt man Gl. (??) in Gl. (??) ein und betrachtet EIG ??, ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{V}_\delta(\mathbf{x}_\delta) &= \frac{1}{2} \mathbf{s}_0^T \dot{\mathbf{H}}_{\delta\delta} \mathbf{s}_0 + \boldsymbol{\delta}_d^T (2\boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} + \mathbf{K}_{qe\delta} + \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{D}_\Delta) \dot{\boldsymbol{\delta}}_d \\ &\quad - \mathbf{s}_0^T (\mathbf{C}_{\delta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s}_0 + \mathbf{K}_{qe\delta} \boldsymbol{\delta}_d + \mathbf{K}_{pD\delta} \mathbf{s}_0 + \mathbf{D}_\Delta \dot{\boldsymbol{\delta}}_d) \\ &\quad - \mathbf{s}_0^T (\mathbf{f}_r + \mathbf{f} - \mathbf{C}_{\delta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \mathbf{s}_0^T) \\ &= -(\dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T + \boldsymbol{\delta}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta) \mathbf{K}_{qe\delta} \boldsymbol{\delta}_d + \dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T \mathbf{K}_{qe\delta} \boldsymbol{\delta}_d - (\dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T + \boldsymbol{\delta}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta) \mathbf{K}_{pD\delta} (\dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \boldsymbol{\Lambda}_\delta \boldsymbol{\delta}_d) \\ &\quad + \dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} \dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T \mathbf{K}_{pD\delta} \boldsymbol{\Lambda}_\delta \boldsymbol{\delta}_d \\ &\quad - (\dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T + \boldsymbol{\delta}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta) \mathbf{D}_\Delta \dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \boldsymbol{\delta}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{D}_\Delta \dot{\boldsymbol{\delta}}_d - \mathbf{s}_0^T (\mathbf{f}_r + \mathbf{f} - \mathbf{C}_{\delta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \mathbf{s}_0) \\ &= -\dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{qe\delta} \boldsymbol{\delta}_d - \dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T \mathbf{D}_\Delta \dot{\boldsymbol{\delta}}_d - \dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T \mathbf{K}_{pD\delta} \dot{\boldsymbol{\delta}}_d \\ &\quad - \dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T \mathbf{K}_{pD\delta} \boldsymbol{\Lambda}_\delta \boldsymbol{\delta}_d - \boldsymbol{\delta}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} \dot{\boldsymbol{\delta}}_d - \boldsymbol{\delta}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} \boldsymbol{\Lambda}_\delta \boldsymbol{\delta}_d \\ &\quad + \dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T \mathbf{K}_{pD\delta} \boldsymbol{\Lambda}_\delta \boldsymbol{\delta}_d + \boldsymbol{\delta}_d^T \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} \dot{\boldsymbol{\delta}}_d - \mathbf{s}_0^T (\mathbf{f}_r + \mathbf{f} - \mathbf{C}_{\delta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \mathbf{s}_0) \\ &= -\dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T (\boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{qe\delta} + \boldsymbol{\Lambda}_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} \boldsymbol{\Lambda}_\delta) \boldsymbol{\delta}_d - \dot{\boldsymbol{\delta}}_d^T (\mathbf{D}_\Delta + \mathbf{K}_{pD\delta}) \dot{\boldsymbol{\delta}}_d \\ &\quad - \mathbf{s}_0^T (\mathbf{f}_r + \mathbf{f} - \mathbf{C}_{\delta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \mathbf{s}_0) \\ &= -\mathbf{x}_\delta^T \mathbf{P} \mathbf{x}_\delta - \mathbf{s}_0^T (\mathbf{f}_r + \mathbf{f} - \mathbf{C}_{\delta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \mathbf{s}_0) \end{aligned} \quad (3.87)$$

wobei  $\mathbf{P}$  durch Gl. (??) gegeben ist. Da

$$\|\mathbf{s}_0\| = \|\dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \boldsymbol{\Lambda}_\delta \boldsymbol{\delta}_d\| \leq \|\dot{\boldsymbol{\delta}}_d\| + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda}_\delta) \|\boldsymbol{\delta}_d\| \leq (1 + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda}_\delta)) \|\mathbf{x}_\delta\| \quad (3.88)$$

gilt, und  $\mathbf{f}$  als

$$\mathbf{f} = -\mathbf{D}_\Delta \text{diag}(\dot{\delta}_{d11}, \dots, \dot{\delta}_{dnm_n}) \begin{bmatrix} \frac{\dot{\delta}_{d11} s_{x11}}{\|\dot{\delta}_{d11} s_{x11}\| + \epsilon_{11} e^{-\beta_{11} t}} \\ \vdots \\ \frac{\dot{\delta}_{dnm_n} s_{xnm_n}}{\|\dot{\delta}_{dnm_n} s_{xnm_n}\| + \epsilon_{nm_n} e^{-\beta_{nm_n} t}} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

geschrieben werden kann, gilt

$$\|\mathbf{f}\| \leq \lambda_{\max}(\mathbf{D}_\Delta) \sqrt{m} \|\dot{\mathbf{x}}_d\|. \quad (3.90)$$

Eine Begrenzung für  $\mathbf{C}_{\delta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}})$  muß gefunden werden. Aus Gl. (??) und Teil a) des Beweises ergibt sich

$$\|\mathbf{C}_{\delta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}})\| \leq k_{c\delta\delta} \varphi z_m. \quad (3.91)$$

Durch Anwendung von Gln. (??) bis (??) läßt sich Gl. (??) als

$$\begin{aligned} \dot{V}_\delta(\mathbf{x}_\delta) &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{P}) \|\mathbf{x}_\delta\|^2 + f_r \max(1 + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda}_\delta)) \|\mathbf{x}_\delta\| \\ &\quad + (1 + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda}_\delta)) (\lambda_{\max}(\mathbf{D}_\Delta) \sqrt{m} + k_{c\delta\delta} \varphi z_m (1 + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Lambda}_\delta))) \|\mathbf{x}_\delta\|^2 \\ &\triangleq -\hat{\lambda}_3 \|\mathbf{x}_\delta\|^2 + \sigma \|\mathbf{x}_\delta\| \end{aligned} \quad (3.92)$$

schreiben. Da  $\hat{\lambda}_3$  größer Null ist (nach Annahme), wird durch Anwenden des Satzes ?? mit  $\gamma = 0$  bewiesen, daß  $\|\mathbf{x}_\delta\|$  beschränkt ist.  $\square$

Will man den Term  $\mathbf{f}$  nicht verwenden, gilt also  $\mathbf{D}_\Delta = \mathbf{0}$ , kann man  $\delta_d$  aus

$$\ddot{\delta}_d = \Lambda_\delta(\dot{\delta} - \dot{\delta}_d) - \mathbf{H}_{\delta\delta}^{-1} \left( \mathbf{H}_{\theta\delta}^T \ddot{\theta}_r + \mathbf{C}_{\delta\theta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\theta}_r + \mathbf{C}_{\delta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\delta}_r + \mathbf{K} \delta_d \right. \\ \left. + \mathbf{D}_\delta \dot{\delta}_r + \mathbf{g}_\delta - \mathbf{K}_{q\delta} \tilde{\delta} - \mathbf{K}_{p\delta} \hat{\mathbf{s}}_\delta \right) \quad (3.93)$$

$$\delta_d(0) = \dot{\delta}_d(0) = \mathbf{0} \quad (3.94)$$

berechnen, wobei sich die Fehlergleichungen (??) und (??) zu

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}} = -(\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s} + \mathbf{K}_{pD} \mathbf{s} + \mathbf{K}_{qe} \tilde{\mathbf{q}}) + \mathbf{H}(\mathbf{q}) \Lambda \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{z}} \\ + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \mathbf{s} + \mathbf{K}_p \dot{\mathbf{z}} \quad (3.95)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{r}} = -(\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{r} + \mathbf{K}_{ve} \mathbf{z} + \mathbf{D} \mathbf{r} + k_d \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{z}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{z}} \quad (3.96)$$

umschreiben lassen. Das nächste Korollar stellt die Stabilität von  $\mathbf{x}$  fest, wenn  $\mathbf{D}_\Delta = \mathbf{0}$  ist.

### Korollar 3.1

Gegeben sei eine beliebige Soll-Bahn  $\theta_d$  mit beschränkter Geschwindigkeit und Beschleunigung. Wenn  $\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq v_m$  ist, wobei  $v_m$  eine positive Konstante ist, dann ist das durch die Gln. (??) und (??) beschriebene System asymptotisch stabil, wenn die Bedingungen (??)–(??) gelten. Ein Einzugsgebiet ist durch

$$S = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{4(n+m)} : \|\mathbf{x}\| < \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \varphi z_m \right\} \quad (3.97)$$

gegeben, wobei  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\varphi$  und  $z_m$  wie im Satz ?? definiert sind. Außerdem bleiben die in den Gln. (??)–(??) angegebenen Soll-Bahnen  $\delta_d$  und  $\dot{\delta}_d$  beschränkt, wenn

$$\hat{\lambda}_3 \triangleq \lambda_{\min}(\mathbf{P}) - k_{c\delta\delta} \varphi z_m (1 + \lambda_{\max}(\Lambda_\delta))^2 > 0 \quad (3.98)$$

gilt, mit

$$\mathbf{P} \triangleq \begin{bmatrix} \Lambda_\delta \mathbf{K}_{qe\delta} + \Lambda_\delta \mathbf{K}_{pD\delta} \Lambda_\delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{pD\delta} \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

$$\lambda_{\min}(\mathbf{P}) = \min(\lambda_{\min}(\Lambda_\delta) \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{qe\delta}) + \lambda_{\min}^2(\Lambda_\delta) \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{pD\delta}), \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{pD\delta})) . \quad (3.100)$$

### Beweis

Der Beweis ist grundsätzlich der gleiche wie für Satz ??.

a) Zuerst wird die Stabilität des Gesamtsystems bewiesen. Dafür wird die Ljapunov-Funktion (??) verwendet, wobei sich aus Gl. (??)

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \quad (3.101)$$

ergibt. Da

$$\lambda_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}, t) \leq \lambda_2 \|\mathbf{x}\|^2, \quad (3.102)$$

und

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\lambda_3 \|\mathbf{x}\|^2 \quad (3.103)$$

gelten (mit  $\lambda_3$  wie in Gl. (??) definiert), ist das System (??)–(??) asymptotisch stabil (?). Wie vorher kann man das Einzugsgebiet (??) aus (??) zusammen mit der Definition von  $\lambda_3$  berechnen.

b) Es bleibt zu beweisen, daß die Gln. (??)–(??) eine beschränkte Soll–Bahn liefern. Da eine Konstante  $\hat{\mathbf{q}} < \hat{v}_m$  existiert, kann man Gln. (??) bis (??) (mit  $\mathbf{D}_\Delta = \mathbf{0}$ ) zusammen mit der Ljapunov–Funktion (??) ausnutzen, so daß sich

$$\dot{V}_\delta(\mathbf{x}_\delta) \leq -\hat{\lambda}_3 \|\mathbf{x}_\delta\|^2 + \sigma \|\mathbf{x}_\delta\| \quad (3.104)$$

ergibt (siehe Gl. (??)). Durch Anwenden des Satzes ?? mit  $\gamma = 0$  wird bewiesen, daß  $\|\mathbf{x}_\delta\|$  beschränkt ist. □

Wie in Arteaga Pérez (1996c) erwähnt, hilft der Term  $\mathbf{f}$  in Gl. (??) dabei, die Dämpfung des Systems zu erhöhen. Um dies zu zeigen, kann man annehmen, daß  $\mathbf{x}$  vernachlässigbar und  $\boldsymbol{\theta}_d$  ein konstanter Vektor ist, so daß Gl. (??) zu

$$\mathbf{H}_{\delta\delta} \ddot{\boldsymbol{\delta}}_d + \mathbf{C}_{\delta\delta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \mathbf{D}_\Delta \dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \mathbf{f} + \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}_d + \mathbf{g}_\delta = \mathbf{0} \quad (3.105)$$

umgeschrieben werden kann, wenn  $\mathbf{D}_\delta = \mathbf{0}$  ist. Der Term  $\mathbf{D}_\Delta \dot{\boldsymbol{\delta}}_d + \mathbf{f}$  stellt die Dämpfung für die Soll–Bahn  $\boldsymbol{\delta}_d$  dar. Da jedes Element dieses Vektors als

$$d_{ij} \dot{\delta}_{ij} \left( 1 - \frac{\dot{\delta}_{dij} s_{xij}}{\|\dot{\delta}_{dij} s_{xij}\| + \epsilon_{ij} e^{-\beta_{ij} t}} \right) \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m_i \quad (3.106)$$

zu schreiben ist und der zweite Term dieses Produktes zu der offenen Menge (0,2) gehört, ist  $\boldsymbol{\delta}_d$  gedämpft und damit gleich  $\boldsymbol{\delta}$ . Sollte  $\mathbf{D}_\Delta = \mathbf{0}$  sein, ist dies nicht mehr möglich.

Sowohl in Satz ?? als auch in Korollar ?? wird angenommen, daß  $\hat{\lambda}_3 > 0$  ist. Wenn  $\varphi$  klein genug ist, ist letzteres immer zu erreichen, so daß sich die Frage stellt, ob das Einzugsgebiet nicht beliebig zu vergrößern ist. Um zu zeigen, daß dies möglich ist, kann man  $\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{p\delta})$  beliebig groß auswählen.  $k_d$ ,  $\mathbf{K}_q$ ,  $\mathbf{K}_v$  müssen die Bedingungen (??)–(??) erfüllen und  $\mathbf{A}$  ist frei wählbar. Aus Gl. (??) ist zu erkennen, daß

$$z_m = \frac{\lambda_{pd}}{k_c} \quad (3.107)$$

angenommen werden kann, wenn  $k_d$ ,  $\lambda_q$ , und  $\lambda_v$  richtig eingestellt werden. Es ist anzumerken, daß diese Terme manchmal sowohl im Zähler als auch im Nenner auftreten, aber im



Zähler als Produkt und im Nenner als eine Summe. Ohne Verlust der Allgemeingültigkeit gilt

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_p) = \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{p\delta}) \quad (3.108)$$

$$z_m = \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{p\delta})}{k_c} . \quad (3.109)$$

Ebenfalls ohne Verlust der Allgemeingültigkeit kann man aus Gl. (??) annehmen, daß

$$\lambda_{\min}(\mathbf{P}) = \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{p\delta}) + \lambda_{\min}(\mathbf{D}_\Delta) \quad (3.110)$$

ist, da  $\lambda_{\min}(K_{q\epsilon\delta})$  beliebig groß zu wählen ist. Betrachtet man Gl. (??) bis (??) zusammen mit Gl. (??), ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_3 &= \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{p\delta}) + \lambda_{\min}(\mathbf{D}_\Delta) \quad (3.111) \\ &\quad - (1 + \lambda_{\max}(\mathbf{A}_\delta))(\lambda_{\max}(\mathbf{D}_\Delta)\sqrt{m} + k_{c\delta\delta}\varphi z_m(1 + \lambda_{\max}(\mathbf{A}_\delta))) \\ &= \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{p\delta}) + \lambda_{\min}(\mathbf{D}_\Delta) \\ &\quad - (1 + \lambda_{\max}(\mathbf{A}_\delta))(\lambda_{\max}(\mathbf{D}_\Delta)\sqrt{m} + \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{p\delta})}{k_c}\varphi k_{c\delta\delta}(1 + \lambda_{\max}(\mathbf{A}_\delta))), \end{aligned}$$

was bedeutet, daß

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{p\delta}) \left(1 - \frac{k_{c\delta\delta}}{k_c}\varphi(1 + \lambda_{\max}(\mathbf{A}_\delta))^2\right) \quad (3.112)$$

$$- \lambda_{\max}(\mathbf{D}_\Delta)\sqrt{m}(1 + \lambda_{\max}(\mathbf{A}_\delta)) + \lambda_{\min}(\mathbf{D}_\Delta) > 0 \quad (3.113)$$

gelten muß, oder

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{p\delta}) > \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{D}_\Delta)\sqrt{m}(1 + \lambda_{\max}(\mathbf{A}_\delta)) - \lambda_{\min}(\mathbf{D}_\Delta)}{\left(1 - \frac{k_{c\delta\delta}}{k_c}\varphi(1 + \lambda_{\max}(\mathbf{A}_\delta))^2\right)} \quad (3.114)$$

$$\frac{k_c}{k_{c\delta\delta}(1 + \lambda_{\max}(\mathbf{A}_\delta))^2} > \varphi . \quad (3.115)$$

Da die Bedingung (??) immer garantiert werden kann, kann man  $\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{p\delta})$  beliebig groß auswählen und damit  $z_m$  und das Einzugsgebiet. Das gleiche gilt, wenn  $\mathbf{D}_\Delta = \mathbf{0}$  ist. Zu erwähnen ist, daß dies gleichzeitig bedeutet, daß die Bedingungen (??) und (??) zu erfüllen sind, wenn  $\epsilon$  klein genug oder  $z_m$  groß genug ist.

## 3.2 Simulationsergebnisse

Um den Regler (??) zu testen, wird ein zweiachsiger Roboter simuliert (Bild ??). Dieser Roboter wurde von De Luca und Siciliano (1991) ? als ein ebener Roboter modelliert und in De Luca und Siciliano (1993b) um einen Gravitationsvektor erweitert. Die Parameter des Roboters sind auch in Arteaga Pérez (1996c) nachzulesen. In der Simulation wird angenommen, daß die Anfangsbedingungen für  $\theta_2$ ,  $\delta_{11}$  und  $\delta_{12}$  gleich Null sind, während

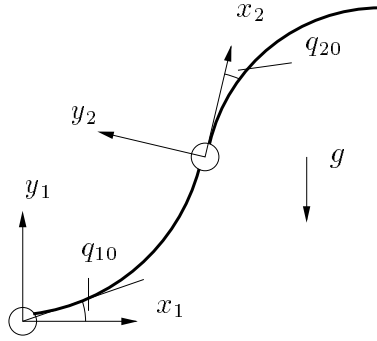


Bild 3.1: Elastischer Roboter mit zwei Gliedern

$\theta_1(0) = -90^\circ$ ,  $\delta_{21}(0) = 0,05$  [m] und  $\delta_{22}(0) = 0,002$  [m] sind.

Zuerst werden Regler und Beobachter ohne den Term  $\mathbf{f}_1$  getestet, wobei deren Parameter lauten:

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,75 \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

$$\mathbf{K}_q = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

$$\mathbf{K}_v = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

$$k_d = 10. \quad (3.120)$$

Der Endwert der starren Koordinaten soll

$$\boldsymbol{\theta}_{\text{tend}} = \begin{bmatrix} -45^\circ \\ 45^\circ \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

betragen. Da der Regler ?? auch für zeitvariante Bahnen verwendet werden kann, wird gewünscht, daß die Endzeit 7,5 s betrage. Damit werden die folgenden Polynome verwendet:

$$\boldsymbol{\theta}_d = \begin{bmatrix} -90^\circ + 1,0667^\circ t^3 - 0,2133^\circ t^4 + 0,0114^\circ t^5 \\ 1,0667^\circ t^3 - 0,2133^\circ t^4 + 0,0114^\circ t^5 \end{bmatrix}. \quad (3.122)$$

Die Ergebnisse sind in den Bildern ?? bis ?? dargestellt. Wie erwartet konvergieren sowohl Verfolgungsfehler als Schätzfehler gegen Null. Die Momente an den Gelenken, also die Ausgänge des Reglers, sind in Bild ?? a) und b) zu sehen. Die Soll-Bahnen der elastischen Koordinaten ergeben sich als beschränkt und deren End-Werte lauten:

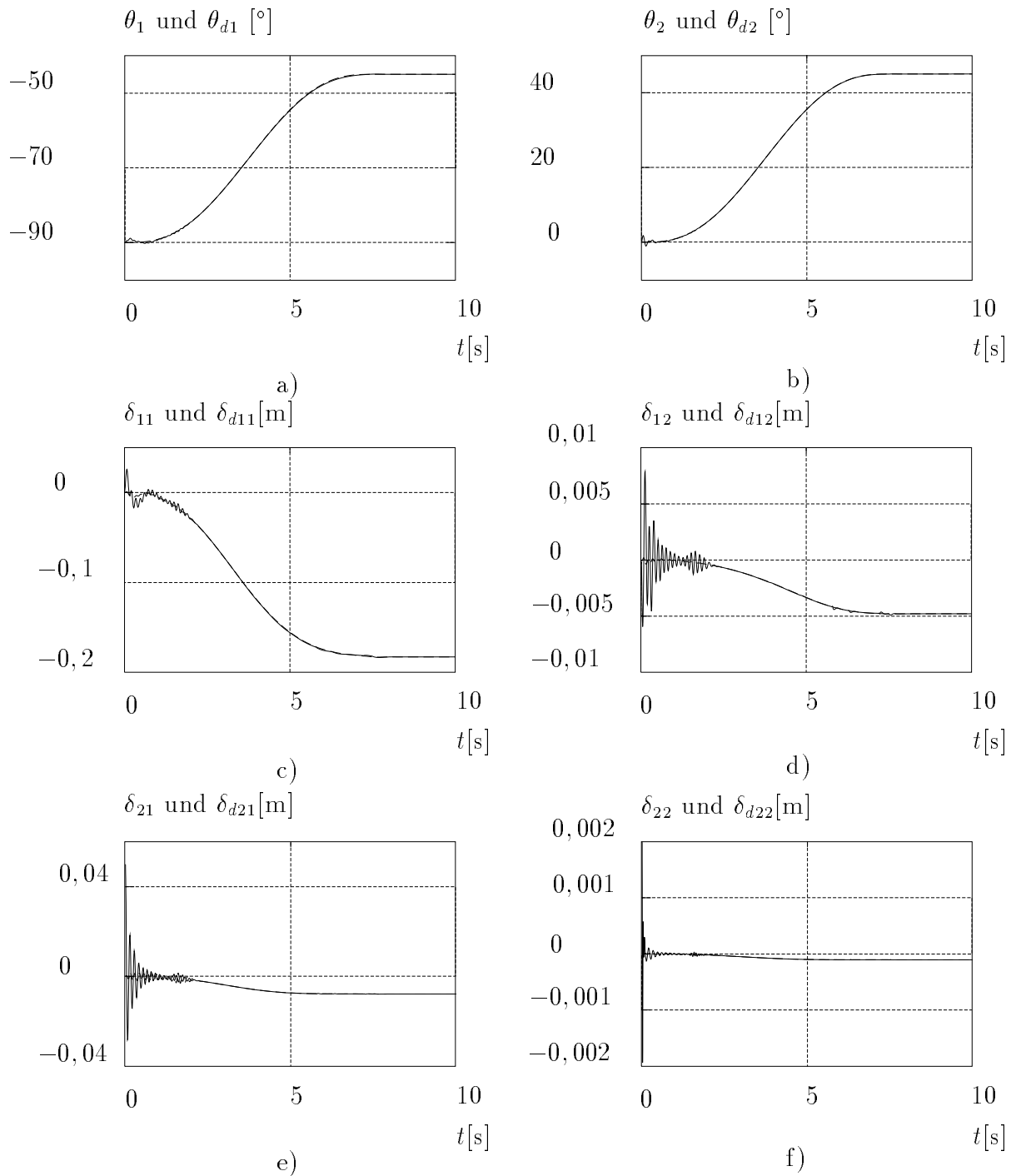
$$\boldsymbol{\delta}_d = \begin{bmatrix} -0,1832[\text{m}] \\ -0,0048[\text{m}] \\ -0,0078[\text{m}] \\ -0,000106[\text{m}] \end{bmatrix}. \quad (3.123)$$

In einer zweiten Simulation wird angenommen, daß  $\mathbf{D}_\delta \equiv \mathbf{0}$  ist, d. h. das System ist nicht gedämpft. Um Regler und Beobachter mit dem Term  $\mathbf{f}_1$  zu testen, nimmt die Matrix  $\mathbf{D}_\Delta$  die Werte von  $\mathbf{D}_\delta$  in der ersten Simulation an. Es gelte

$$\epsilon_{11} = 0,1 \quad \epsilon_{12} = 0,01 \quad \epsilon_{21} = 0,01 \quad \epsilon_{22} = 0,05 \quad (3.124)$$

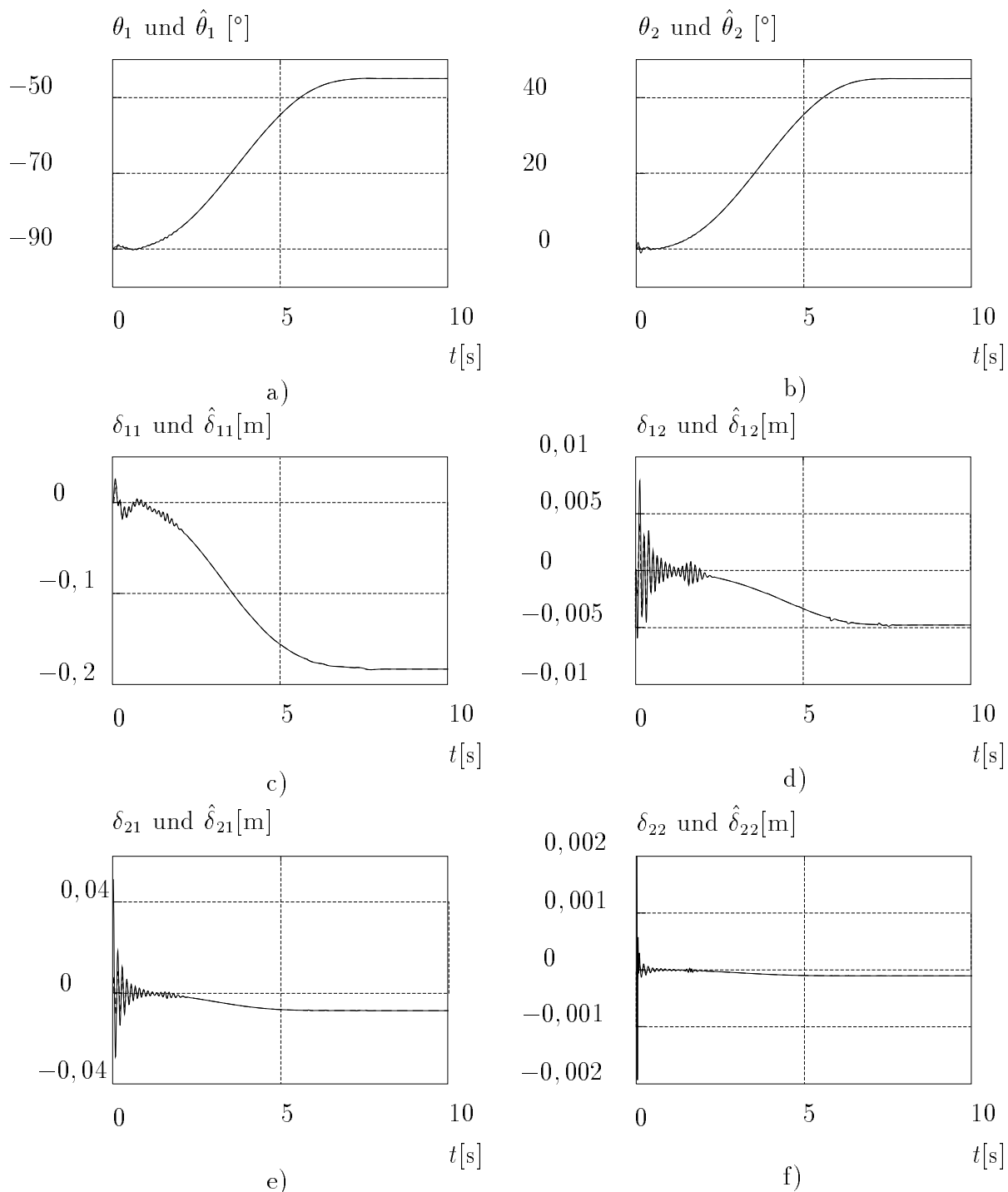
$$\beta_{11} = 0,001 \quad \beta_{12} = 0,001 \quad \beta_{21} = 0,001 \quad \beta_{22} = 0,001. \quad (3.125)$$

Die Ergebnisse dieser Simulation sind in den Bildern ?? bis ?? zu sehen. Auch in diesem Fall konvergieren Verfolgungs- und Schätzfehler gegen Null. Es ist anzumerken, daß die Schwingungen etwas schneller verschwinden, was zeigt, wie das System mittels des Reglers gedämpft wird. Die Ausgänge des Reglers sind im Bild ?? c) und d) zu sehen.



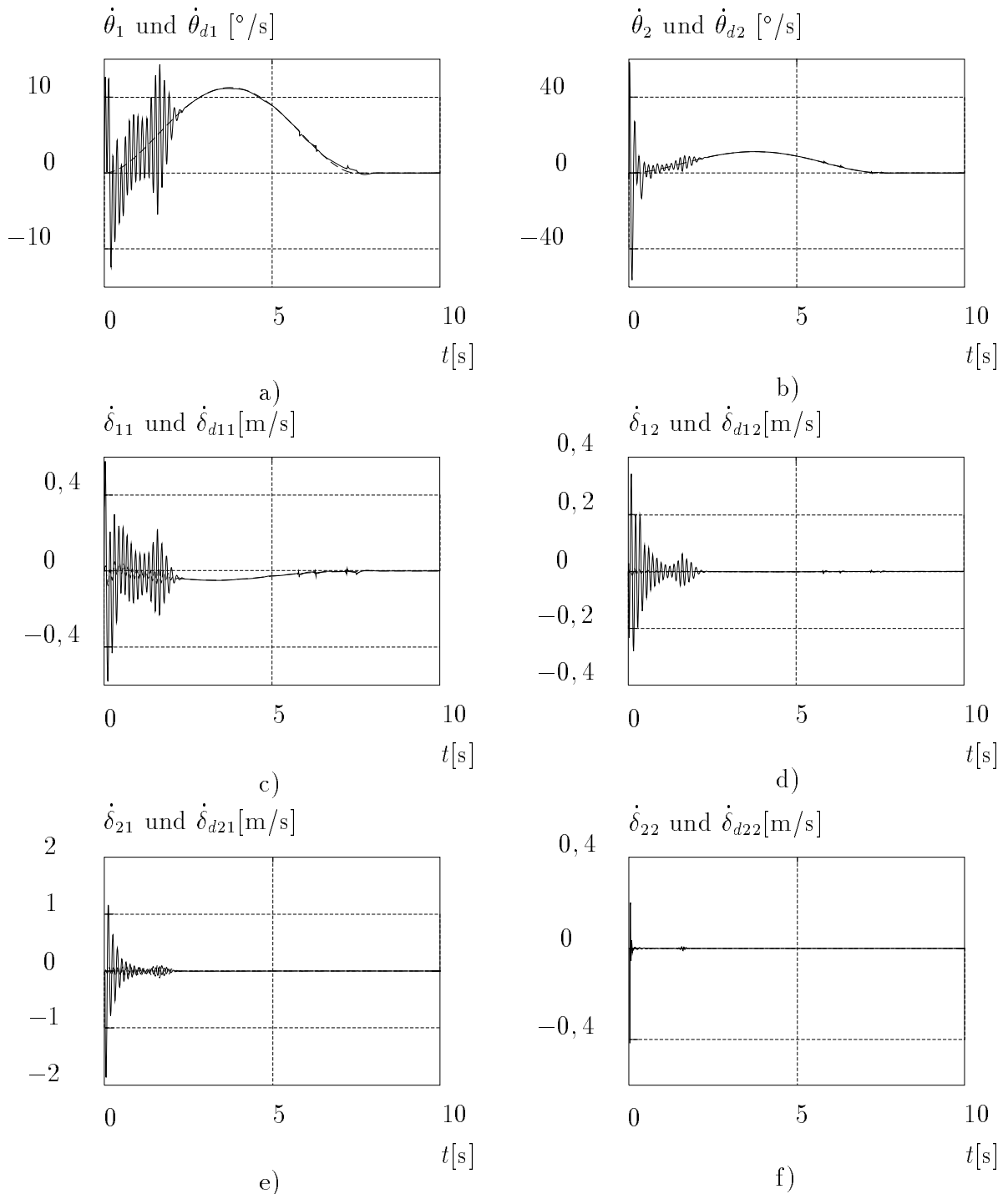
**Bild 3.2:** Simulationsergebnisse des Roboters mit Dämpfung.

- a) Koordinate  $\theta_1$  (—) und deren Soll-Bahn  $\theta_{d1}$  (- - -);
- b) Koordinate  $\theta_2$  (—) und deren Soll-Bahn  $\theta_{d2}$  (- - -);
- c) Koordinate  $\delta_{11}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d11}$  (- - -);
- d) Koordinate  $\delta_{12}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d12}$  (- - -);
- e) Koordinate  $\delta_{21}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d21}$  (- - -);
- f) Koordinate  $\delta_{22}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d22}$  (- - -);



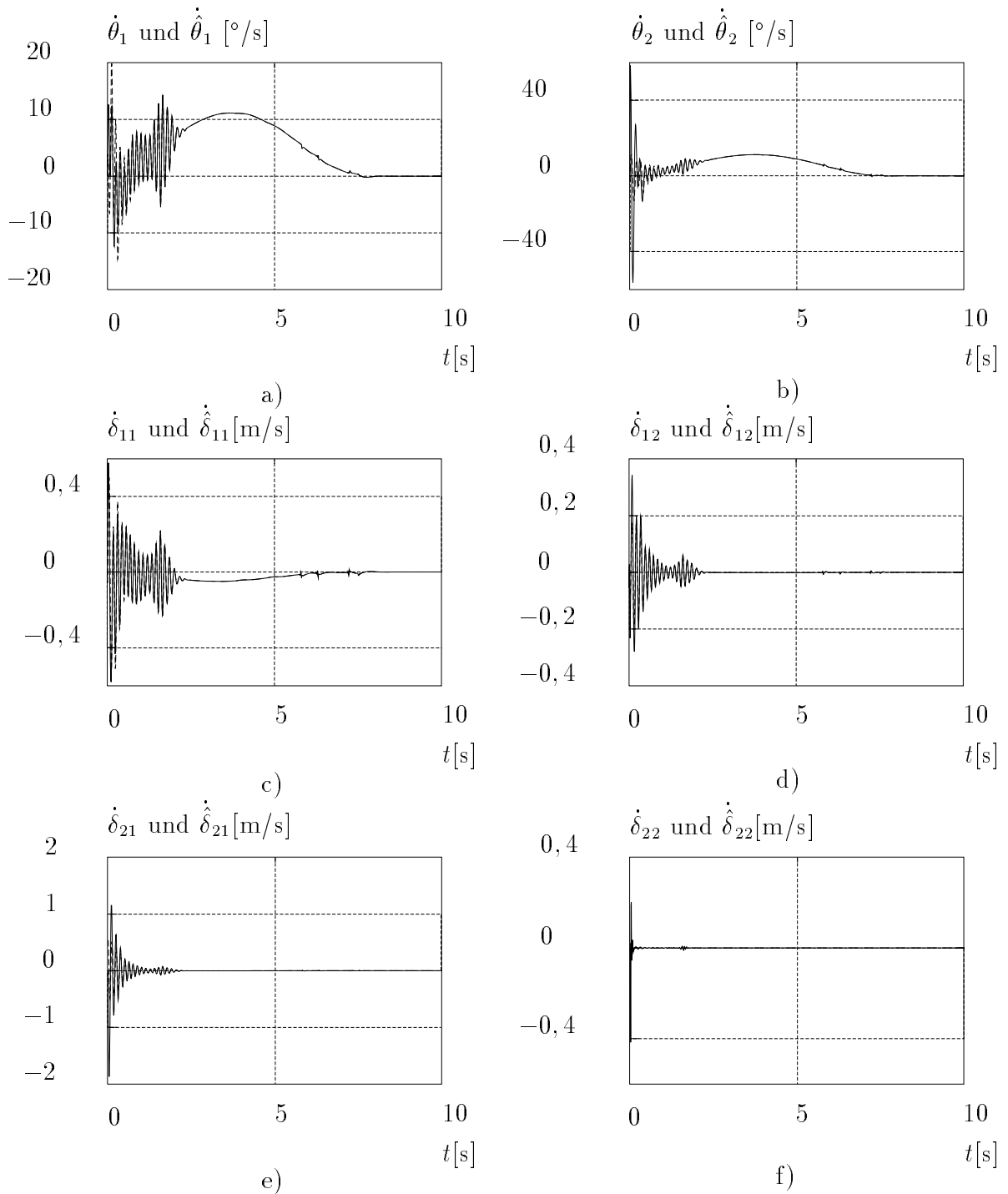
**Bild 3.3:** Simulationsergebnisse des Roboters mit Dämpfung.

- a) Koordinate  $\theta_1$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\theta}_1$  (- - -);
- b) Koordinate  $\theta_2$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\theta}_2$  (- - -);
- c) Koordinate  $\delta_{11}$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\delta}_{11}$  (- - -);
- d) Koordinate  $\delta_{12}$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\delta}_{12}$  (- - -);
- e) Koordinate  $\delta_{21}$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\delta}_{21}$  (- - -);
- f) Koordinate  $\delta_{22}$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\delta}_{22}$  (- - -);



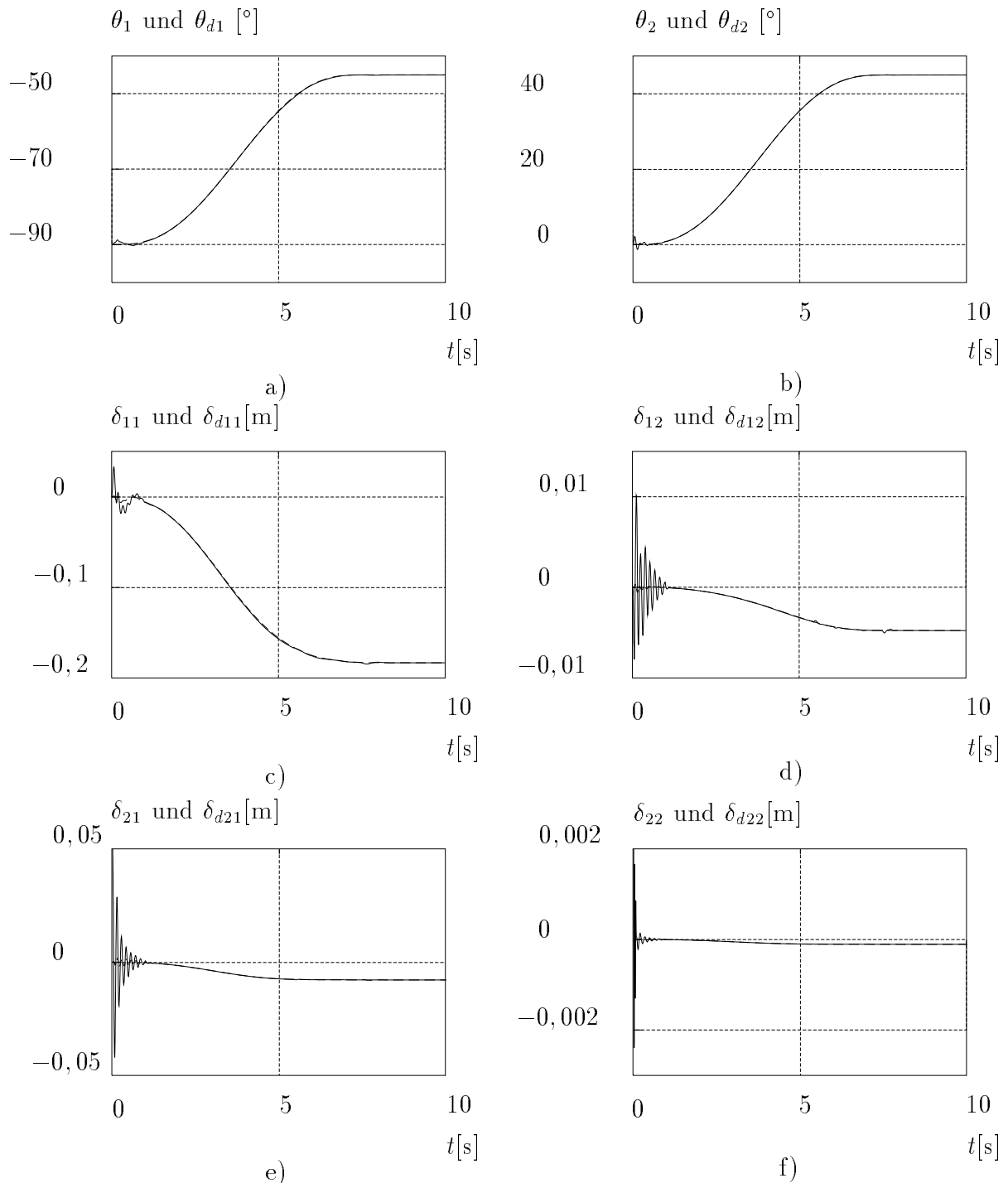
**Bild 3.4:** Simulationsergebnisse des Roboters mit Dämpfung.

- a) Koordinate  $\dot{\theta}_1$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\theta}_{d1}$  (- - -);
- b) Koordinate  $\dot{\theta}_2$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\theta}_{d2}$  (- - -);
- c) Koordinate  $\dot{\delta}_{11}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d11}$  (- - -);
- d) Koordinate  $\dot{\delta}_{12}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d12}$  (- - -);
- e) Koordinate  $\dot{\delta}_{21}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d21}$  (- - -);
- f) Koordinate  $\dot{\delta}_{22}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d22}$  (- - -);



**Bild 3.5:** Simulationsergebnisse des Roboters mit Dämpfung.

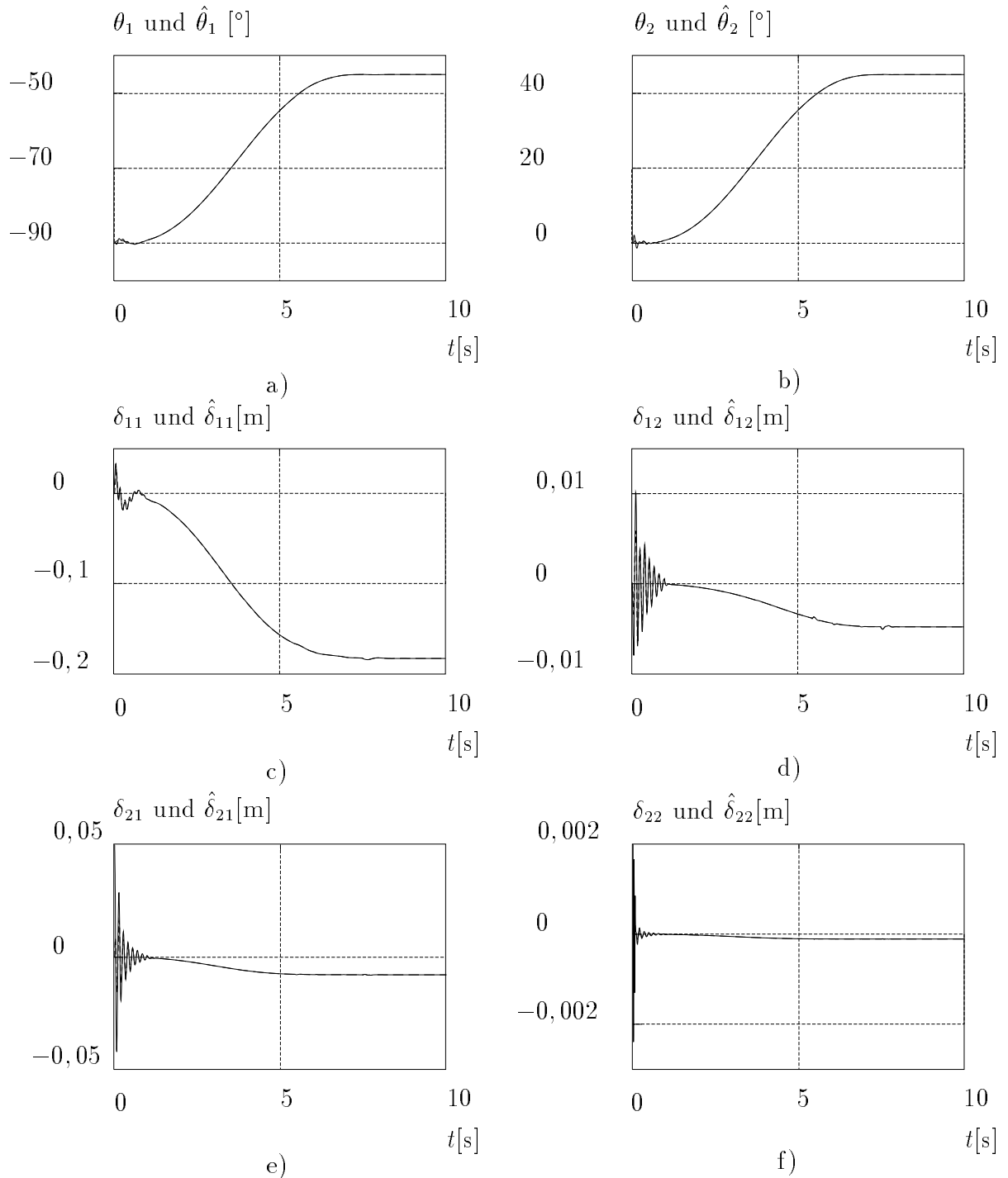
- a) Koordinate  $\dot{\theta}_1$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\dot{\theta}}_1$  (- - -);  
 b) Koordinate  $\dot{\theta}_2$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\dot{\theta}}_2$  (- - -);  
 c) Koordinate  $\dot{\delta}_{11}$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\dot{\delta}}_{11}$  (- - -);  
 d) Koordinate  $\dot{\delta}_{12}$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\dot{\delta}}_{12}$  (- - -);  
 e) Koordinate  $\dot{\delta}_{21}$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\dot{\delta}}_{21}$  (- - -);  
 f) Koordinate  $\dot{\delta}_{22}$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\dot{\delta}}_{22}$  (- - -);



**Bild 3.6:** Simulationsergebnisse des Roboters ohne Dämpfung.

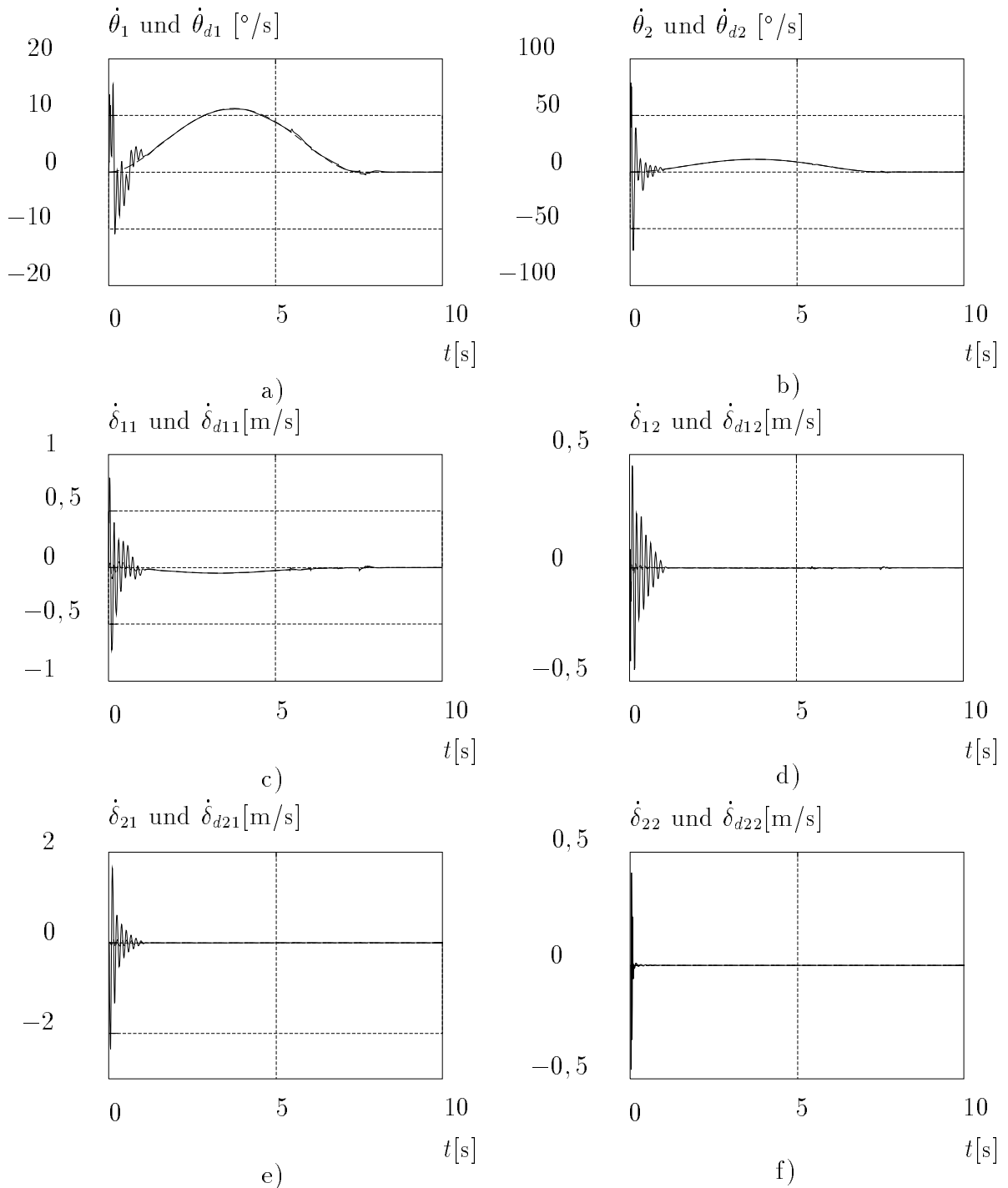
- a) Koordinate  $\theta_1$  (—) und deren Soll-Bahn  $\theta_{d1}$  (- - -);
- b) Koordinate  $\theta_2$  (—) und deren Soll-Bahn  $\theta_{d2}$  (- - -);
- c) Koordinate  $\delta_{11}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d11}$  (- - -);
- d) Koordinate  $\delta_{12}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d12}$  (- - -);
- e) Koordinate  $\delta_{21}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d21}$  (- - -);
- f) Koordinate  $\delta_{22}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\delta_{d22}$  (- - -);





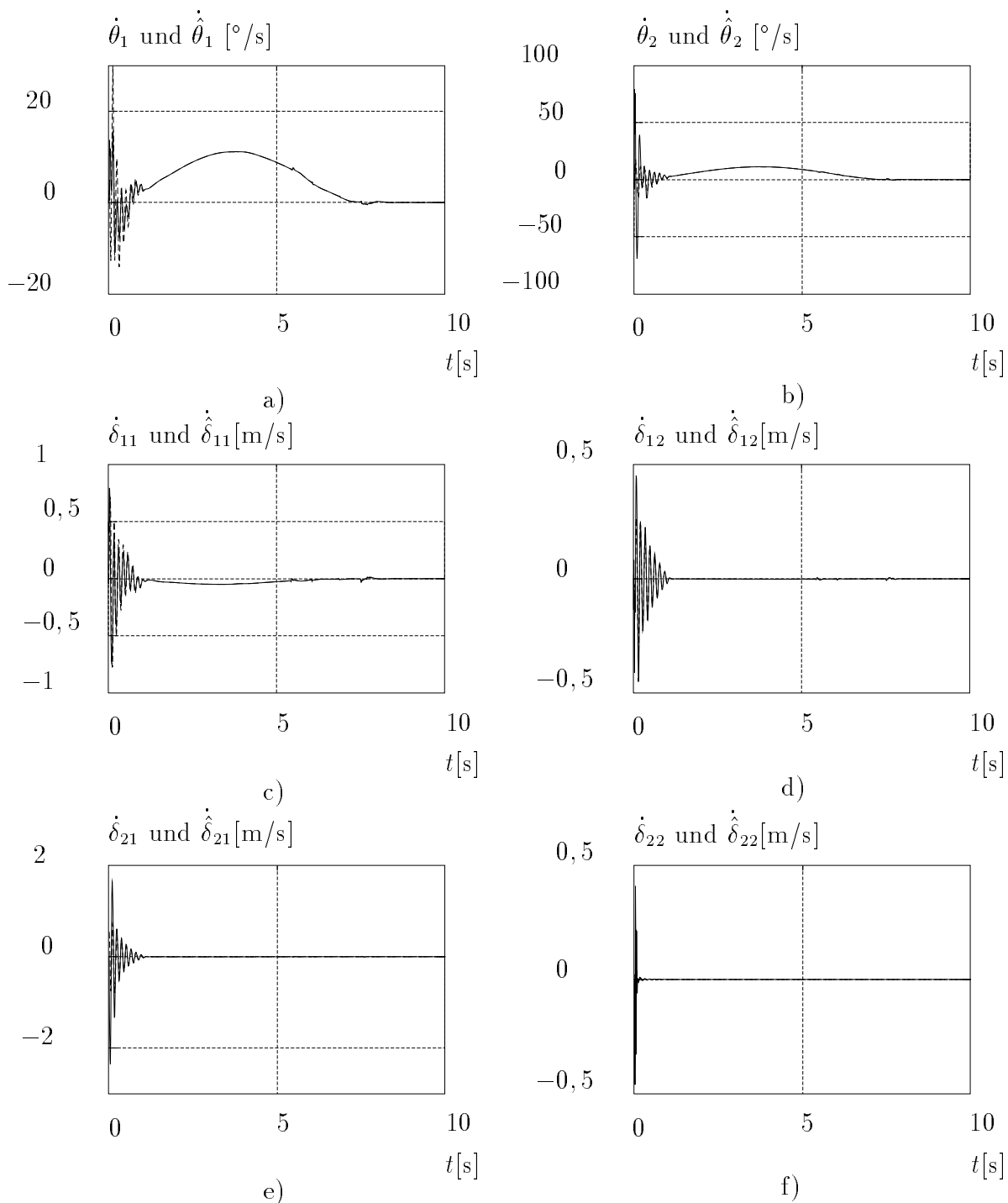
**Bild 3.7:** Simulationsergebnisse des Roboters ohne Dämpfung.

- a) Koordinate  $\theta_1$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\theta}_1$  (- - -);
- b) Koordinate  $\theta_2$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\theta}_2$  (- - -);
- c) Koordinate  $\delta_{11}$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\delta}_{11}$  (- - -);
- d) Koordinate  $\delta_{12}$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\delta}_{12}$  (- - -);
- e) Koordinate  $\delta_{21}$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\delta}_{21}$  (- - -);
- f) Koordinate  $\delta_{22}$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\delta}_{22}$  (- - -);



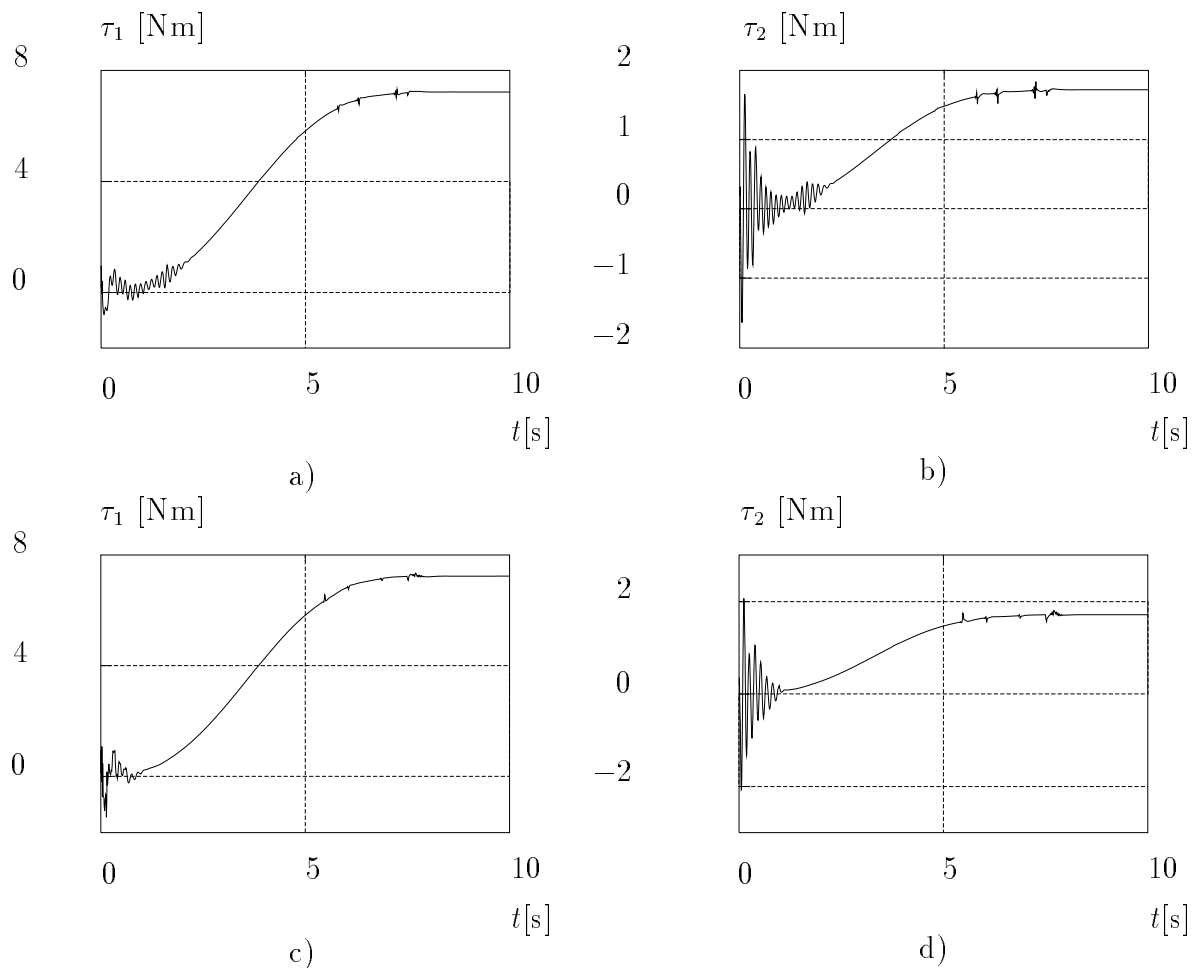
**Bild 3.8:** Simulationsergebnisse des Roboters ohne Dämpfung.

- a) Koordinate  $\dot{\theta}_1$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\theta}_{d1}$  (- - -);
- b) Koordinate  $\dot{\theta}_2$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\theta}_{d2}$  (- - -);
- c) Koordinate  $\dot{\delta}_{11}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d11}$  (- - -);
- d) Koordinate  $\dot{\delta}_{12}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d12}$  (- - -);
- e) Koordinate  $\dot{\delta}_{21}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d21}$  (- - -);
- f) Koordinate  $\dot{\delta}_{22}$  (—) und deren Soll-Bahn  $\dot{\delta}_{d22}$  (- - -);



**Bild 3.9:** Simulationsergebnisse des Roboters ohne Dämpfung:

- a) Koordinate  $\dot{\theta}_1$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\dot{\theta}}_1$  (- - -);
- b) Koordinate  $\dot{\theta}_2$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\dot{\theta}}_2$  (- - -);
- c) Koordinate  $\dot{\delta}_{11}$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\dot{\delta}}_{11}$  (- - -);
- d) Koordinate  $\dot{\delta}_{12}$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\dot{\delta}}_{12}$  (- - -);
- e) Koordinate  $\dot{\delta}_{21}$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\dot{\delta}}_{21}$  (- - -);
- f) Koordinate  $\dot{\delta}_{22}$  (—) und deren geschätzter Wert  $\hat{\dot{\delta}}_{22}$  (- - -);



**Bild 3.10:** Simulationsergebnisse des Roboters.

- a) Eingang  $\tau_1$  (Roboter mit Dämpfung);
- b) Eingang  $\tau_2$  (Roboter mit Dämpfung);
- c) Eingang  $\tau_1$  (Roboter ohne Dämpfung);
- d) Eingang  $\tau_2$  (Roboter ohne Dämpfung).

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

Im vorliegenden Forschungsbericht wird die Auslegung eines nichtlinearen Reglers und eines nichtlinearen Beobachters für elastische Roboter diskutiert. Sowohl der Regler als auch der Beobachter basieren auf bekannten Ergebnissen für starre Roboter, obwohl wesentliche Modifikationen eingefügt werden müssen, um die Elastizität des Handhabungssystems zu berücksichtigen. Die Regelungsaufgabe ist die Bahnverfolgung der starren Koordinaten. Hierbei ist eine Soll-Bahn für die elastischen Koordinaten zu berechnen, da diese nicht beliebig ausgewählt werden können. Die Stabilitätsanalyse nutzt die Ljapunov-Theorie aus. Es ist zu erwähnen, daß physikalischen Eigenschaften des Roboters verwendet werden, um eine Ljapunov-Funktion zu finden und deren Ableitung zu berechnen. Um den Regler und Beobachter zu testen, wird ein räumlicher elastischer Roboter mit zwei Gliedern simuliert.

Da die resultierende Soll-Bahn für die elastischen Koordinaten bei diesem Regler nur von der Dynamik des elastischen Roboters abhängt, ist dieser nicht in der Lage, Schwingungen zu bekämpfen. Um dieses Problem zu lösen, wird die Berechnung der Soll-Bahn für die elastischen Koordinaten modifiziert. Damit kann der Regler das ganze System dämpfen, auch wenn die Dämpfung des Roboters Null wäre. Die Hauptidee ist dabei, die Schwingungen der Soll-Bahn zu unterdrücken, während der Verfolgungsfehler immer noch gegen Null konvergiert. Letzteres wurde mittels eines Satzes der robusten Regelung durchgeführt, da die Dämpfung für die Soll-Bahn der elastischen Koordinaten als eine Störung für das gesamte System betrachtet werden kann. Die Simulationsergebnisse sind als gut zu bezeichnen, da die Schwingungen des Roboters ohne Dämpfung schnell abklingen.

Als zukünftige Arbeit werden Regler und Beobachter an dem elastischen Roboter des Fachgebietes getestet.

Der Verfasser dankt dem DAAD für seine Unterstützung.

## A Zur Analyse der Matrix $\mathbf{Q}$

Im vorliegenden Anhang werden die Bedingungen untersucht, unter denen die im Abschnitt 3 angegebene Matrix  $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$  ist. Eine direkte Analyse durchzuführen wäre zu aufwendig. Da sich aus den Gln. (??) und (??)

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) \leq & -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T (\Lambda \mathbf{K}_{pD} \Lambda + \Lambda \mathbf{K}_{qe} - \Lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \Lambda) \tilde{\mathbf{q}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T (\mathbf{K}_{pD} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}})) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ & - \dot{\mathbf{z}}^T (\Lambda \mathbf{D} \Lambda + \Lambda \mathbf{K}_{ve} - \Lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) \Lambda) \dot{\mathbf{z}} \\ & - \dot{\mathbf{z}}^T (\mathbf{D} + k_d \mathbf{H}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \dot{\mathbf{z}} \\ & + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T (\Lambda \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) + \Lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}})) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ & + \dot{\mathbf{z}}^T (-k_d \Lambda \mathbf{H}(\mathbf{q}) + \Lambda \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) + \Lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{z}}) - \Lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \dot{\mathbf{z}} \\ & + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T (\Lambda \mathbf{H}(\mathbf{q}) \Lambda - \Lambda \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \Lambda \mathbf{K}_p) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ & + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T (\mathbf{H}(\mathbf{q}) \Lambda - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_p) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \epsilon e^{-\beta t} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

ergibt, kann man Normbegrenzungen in Betracht ziehen, wobei sich Gl. (??) zu

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) \leq & -\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 (\lambda_m^2 \lambda_{pd} + \lambda_m \lambda_{qe} - \lambda_M^2 k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) - \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 (\lambda_{pd} - k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) \\ & - \|\dot{\mathbf{z}}\|^2 (\lambda_m \lambda_{ve} + \lambda_m^2 \lambda_d - \lambda_M^2 k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) - \|\dot{\mathbf{z}}\|^2 (\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c \|\dot{\mathbf{z}}\| - k_c v_m) \\ & + 2\lambda_M k_c \|\dot{\mathbf{z}}\| \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \|\dot{\mathbf{z}}\| \|\dot{\mathbf{z}}\| (k_d \lambda_M \lambda_H + \lambda_M k_c v_m + 2\lambda_M k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) \\ & + \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{z}}\| (\lambda_M^2 \lambda_H + \lambda_M k_c v_m + \lambda_M \lambda_P) \\ & + \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\dot{\mathbf{z}}\| (\lambda_M \lambda_H + k_c v_m + \lambda_P) + \epsilon e^{-\beta t} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

umschreiben läßt. Definiert man

$$\hat{\mathbf{x}} \triangleq [\|\tilde{\mathbf{q}}\| \quad \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \quad \|\dot{\mathbf{z}}\| \quad \|\dot{\mathbf{z}}\|]^T \quad (\text{A.3})$$

$$\hat{\mathbf{Q}} \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_m^2 \lambda_{pd} & -\lambda_M k_c \|\dot{\mathbf{z}}\| & 0 & -\frac{1}{2}(\lambda_M^2 \lambda_H \\ + \lambda_m \lambda_{qe} & & & + \lambda_M k_c v_m \\ -\lambda_M^2 k_c \|\dot{\mathbf{z}}\| & & & + \lambda_M \lambda_P) \\ \\ -\lambda_M k_c \|\dot{\mathbf{z}}\| & \lambda_{pd} & 0 & -\frac{1}{2}(\lambda_M \lambda_H \\ & -k_c \|\dot{\mathbf{z}}\| & & + k_c v_m \\ & & & + \lambda_P) \\ \\ 0 & 0 & \lambda_m \lambda_{ve} & -\frac{1}{2}(k_d \lambda_M \lambda_H \\ & & + \lambda_m^2 \lambda_d & + \lambda_M k_c v_m) \\ & & -\lambda_M^2 k_c \|\dot{\mathbf{z}}\| & -\lambda_M k_c \|\dot{\mathbf{z}}\| \\ \\ -\frac{1}{2}(\lambda_M^2 \lambda_H & -\frac{1}{2}(\lambda_M \lambda_H & -\frac{1}{2}(k_d \lambda_M \lambda_H & \lambda_d \\ + \lambda_M k_c v_m & + k_c v_m & + \lambda_M k_c v_m) & + k_d \lambda_h \\ + \lambda_M \lambda_P) & + \lambda_P) & -\lambda_M k_c \|\dot{\mathbf{z}}\| & -k_c v_m \\ & & & -k_c \|\dot{\mathbf{z}}\| \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

ist Gl. (??) als

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{x}} + \epsilon e^{-\beta t} \quad (\text{A.5})$$

zu schreiben. Aus Gl. (??) ist es zu ersehen, daß  $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$  wenn  $\hat{\mathbf{Q}} > \mathbf{0}$  ist. Obwohl  $\hat{\mathbf{Q}}$  leichter als  $\mathbf{Q}$  zu analysieren ist, ist es immer noch schwer, eine Aussage darüber zu treffen, ob  $\hat{\mathbf{Q}} > \mathbf{0}$  gilt. Schreibt man  $\hat{\mathbf{Q}}$  als

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}} = & \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\lambda_m^2 \lambda_{pd} + \lambda_m \lambda_{qe} - \lambda_M^2 k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) & -\lambda_M k_c \|\dot{\mathbf{z}}\| & 0 & 0 \\ -\lambda_M k_c \|\dot{\mathbf{z}}\| & \frac{1}{3}(\lambda_{pd} - k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\lambda_m^2 \lambda_{pd} + \lambda_m \lambda_{qe} - \lambda_M^2 k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(\lambda_m \lambda_{ve} + \lambda_m^2 \lambda_d - \lambda_M^2 k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\lambda_m^2 \lambda_{pd} + \lambda_m \lambda_{qe} - \lambda_M^2 k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) & 0 & 0 & -\frac{1}{2}(\lambda_M^2 \lambda_H + \lambda_M k_c v_m + \lambda_M \lambda_P) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}(\lambda_M^2 \lambda_H + \lambda_M k_c v_m + \lambda_M \lambda_P) & 0 & 0 & \frac{1}{3}(\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m - k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(\lambda_{pd} - k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(\lambda_m \lambda_{ve} + \lambda_m^2 \lambda_d - \lambda_M^2 k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(\lambda_{pd} - k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) & 0 & -\frac{1}{2}(\lambda_M \lambda_H + k_c v_m + \lambda_P) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\lambda_M \lambda_H + k_c v_m + \lambda_P) & 0 & \frac{1}{3}(\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m - k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(\lambda_m \lambda_{ve} + \lambda_m^2 \lambda_d - \lambda_M^2 k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) & -\frac{1}{2}(k_d \lambda_M \lambda_H + \lambda_M k_c v_m) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(k_d \lambda_M \lambda_H + \lambda_M k_c v_m) & -\lambda_M k_c \|\dot{\mathbf{z}}\| \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(k_d \lambda_M \lambda_H + \lambda_M k_c v_m) & \frac{1}{3}(\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m - k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

sind die Matrizen

$$\mathbf{Q}_1 \triangleq \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\lambda_m^2 \lambda_{pd} + \lambda_m \lambda_{qe} - \lambda_M^2 k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) & -\lambda_M k_c \|\dot{\mathbf{z}}\| \\ -\lambda_M k_c \|\dot{\mathbf{z}}\| & \frac{1}{3}(\lambda_{pd} - k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{Q}_2 \triangleq \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\lambda_m^2 \lambda_{pd} + \lambda_m \lambda_{qe} - \lambda_M^2 k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(\lambda_m \lambda_{ve} + \lambda_m^2 \lambda_d - \lambda_M^2 k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$\mathcal{Q}_3 \triangleq \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\lambda_m^2 \lambda_{pd} + \lambda_m \lambda_{qe} - \lambda_M^2 k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) & -\frac{1}{2}(\lambda_M^2 \lambda_H + \lambda_M k_c v_m + \lambda_M \lambda_P) \\ -\frac{1}{2}(\lambda_M^2 \lambda_H + \lambda_M k_c v_m + \lambda_M \lambda_P) & \frac{1}{3}(\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m - k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$\mathcal{Q}_4 \triangleq \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\lambda_{pd} - k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(\lambda_m \lambda_{ve} + \lambda_m^2 \lambda_d - \lambda_M^2 k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$\mathcal{Q}_5 \triangleq \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\lambda_{pd} - k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) & -\frac{1}{2}(\lambda_M \lambda_H + k_c v_m + \lambda_P) \\ -\frac{1}{2}(\lambda_M \lambda_H + k_c v_m + \lambda_P) & \frac{1}{3}(\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m - k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$\mathcal{Q}_6 \triangleq \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\lambda_m \lambda_{ve} + \lambda_m^2 \lambda_d & -\frac{1}{2}(k_d \lambda_M \lambda_H + \lambda_M k_c v_m) \\ -\lambda_M^2 k_c \|\dot{\mathbf{z}}\| & -\lambda_M k_c \|\dot{\mathbf{z}}\| \\ -\frac{1}{2}(k_d \lambda_M \lambda_H + \lambda_M k_c v_m) & \frac{1}{3}(\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m \\ -\lambda_M k_c \|\dot{\mathbf{z}}\| & -k_c \|\dot{\mathbf{z}}\|) \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

zu definieren. Es ist viel leichter, eine Aussage für die Matrizen  $\mathcal{Q}_1$  bis  $\mathcal{Q}_6$  zu treffen. Damit jede dieser Matrizen positiv definit sein kann, müssen  $\mathcal{Q}_{i11}$ ,  $\mathcal{Q}_{i22}$  und  $\det(\mathcal{Q}_i)$  größer Null sein. Aus  $\mathcal{Q}_1$  ergibt sich

$$\frac{\lambda_m^2 \lambda_{pd} + \lambda_m \lambda_{qe}}{\lambda_M^2 k_c} > \|\dot{\mathbf{z}}\| \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\lambda_{pd}}{k_c} > \|\dot{\mathbf{z}}\| \quad (\text{A.14})$$

$$\left( \frac{\lambda_m^2 \lambda_{pd}^2 + \lambda_m \lambda_{qe} \lambda_{pd}}{8 \lambda_M^2 k_c^2} + \left( \frac{2 \lambda_M^2 \lambda_{pd} + \lambda_m \lambda_{qe}}{16 \lambda_M^2 k_c} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{2 \lambda_M^2 \lambda_{pd} + \lambda_m \lambda_{qe}}{16 \lambda_M^2 k_c} > \|\dot{\mathbf{z}}\|. \quad (\text{A.15})$$

Aus  $\mathcal{Q}_2$  ergeben sich Bedingung (??) und

$$\frac{\lambda_m^2 \lambda_d + \lambda_m \lambda_{ve}}{\lambda_M^2 k_c} > \|\dot{\mathbf{z}}\|. \quad (\text{A.16})$$

Aus  $\mathcal{Q}_3$  ergeben sich Bedingung (??) und

$$\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m > 0 \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m}{k_c} > \|\dot{\mathbf{z}}\| \quad (\text{A.18})$$

$$(\lambda_m^2 \lambda_{pd} + \lambda_m \lambda_{qe})(\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m) - \frac{9}{4}(\lambda_M^2 \lambda_H + \lambda_M k_c v_m + \lambda_M \lambda_P) > 0 \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{(\lambda_m^2 \lambda_{pd} + \lambda_m \lambda_{qe})(\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m) - \frac{9}{4} \lambda_M (\lambda_M \lambda_H + k_c v_m + \lambda_P)}{k_c (\lambda_m^2 \lambda_{pd} + \lambda_m \lambda_{qe} + \lambda_M^2 (\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m))} > \|\dot{\mathbf{z}}\|. \quad (\text{A.20})$$

Aus  $\mathcal{Q}_4$  ergeben sich die Bedingungen (??) und (??), und aus  $\mathcal{Q}_5$  (??), (??), (??) zusammen mit

$$\lambda_{pd}(\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m) - \frac{9}{4}(\lambda_M \lambda_H + k_c v_m + \lambda_P)^2 > 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{\lambda_{pd}(\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m) - \frac{9}{4}(\lambda_M \lambda_H + k_c v_m + \lambda_P)^2}{k_c (\lambda_{pd} + \lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m)} > \|\dot{\mathbf{z}}\|. \quad (\text{A.22})$$



Aus  $\mathbf{Q}_6$  ergeben sich die Bedingungen (??) bis (??) zusammen mit

$$(\lambda_m \lambda_{ve} + \lambda_m^2 \lambda_d)(\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m) - \frac{9}{4}(k_d \lambda_M \lambda_H + \lambda_M k_c v_m)^2 > 0 \quad (\text{A.23})$$

$$\left( \frac{(\lambda_m \lambda_{ve} + \lambda_m^2 \lambda_d)(\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m) - \frac{9}{4}(k_d \lambda_M \lambda_H + \lambda_M k_c v_m)^2}{8 \lambda_M^2 k_c^2} \right) \quad (\text{A.24})$$

$$+ \left( \frac{\lambda_m \lambda_{ve} + \lambda_m^2 \lambda_d + \lambda_M^2 (\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m) + 9 \lambda_M^2 (k_d \lambda_H + k_c v_m)}{16 k_c \lambda_M^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{\lambda_m \lambda_{ve} + \lambda_m^2 \lambda_d + \lambda_M^2 (\lambda_d + k_d \lambda_h - k_c v_m) + 9 \lambda_M^2 (k_d \lambda_H + k_c v_m)}{16 k_c \lambda_M^2} > \|\dot{\mathbf{z}}\|.$$

Sortiert man die Gln. (??) bis (??), bekommt man die Bedingungen (??) bis (??) und Gl. (??).