Gröbner-Basen — Ein algebraisches Werkzeug zur Auswertung differential-algebraischer Kriterien bei der Synthese nichtlinearer Regelungsgesetze

Markus Senger

Forschungsbericht Nr. 6/97

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Der vorliegende Bericht befaßt sich mit Gröbner-Basen und deren Nutzung als Eliminationsalgorithmus für Systeme von nichtlinearen Gleichungen. Die Anwendbarkeit zur Bestimmung der Basis eines Systems nichtlinearer Differentialgleichungen wird aufgezeigt und anhand eines differentialalgebraischen Inversionsalgorithmus für nichtlineare Mehrgrößensysteme erklärt. Durch diesen algebraischen Algorithmus wird es möglich, mittels sukzessiver Substitution eine Transzendenzbasis einer differentialalgebraischen Körpererweiterung, welche das dynamische Verhalten eines Systems beschreibt, zu bestimmen und somit differentialalgebraische Kriterien zu überprüfen und auszuwerten.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur

Skalare Größen:

a, b, c	:	Elemente eines kommutativen Ringes
f, h, p	:	Polynome
g_i	:	Element der Gröbner-Basis
m	:	Monom
r	:	Rest der Polynomdivision
ρ	:	Rang einer Matrix
ρ^*	:	differentialalgebraischer Rang
σ	:	Mächtigkeit der Menge $\{\rho_l \vert \rho_l < \infty\}$

Matrizen, Vektoren, Mengen:

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$	:	Vektorfelder
$\boldsymbol{D}, \boldsymbol{G}$	:	mehrdimensionale Vektorfelder
$D/k\langle \boldsymbol{u} \rangle$	:	Dynamik
$\mathcal{E}$	:	Vektorraum
$G(I)$	:	Gröbner-Basis des Ideals I
$GB(I)$	:	reduzierte Gröbner-Basis des Ideals I
$\boldsymbol{h}$	:	Vektorfeld
I	:	Ideal
$\boldsymbol{J}$	:	Jacobi-Matrix
k	:	Grundkörper
$k[x_1, \ldots, x_n]$	:	Körper der in $x_1, \ldots, x_n$ meromorphen Funktionen mit Koeffizienten aus k
K	:	Körpererweiterung
$k\langle \boldsymbol{x} \rangle$	:	differentialalgebraischer Körper der in $x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i, \ldots$ meromorphen Funktionen
$k\langle \boldsymbol{y} \rangle / k$	:	differentialalgebraische Körpererweiterung um die meromorphen Funktionen in y_i und den Ableitungen von y_i
$\mathfrak{R}$	:	Menge der Ringelemente
$\mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n]$	:	Menge der Elemente eines Polynomrings in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$
$\mathfrak{R}\{x_1, \ldots, x_n\}$	:	Menge der Elemente eines differentialalgebraischen Polynomrings in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und deren Ableitungen
$\boldsymbol{u}$	:	Vektor der Eingangsgrößen
$\boldsymbol{x}$	:	Vektor der Zustandsvariablen
$\boldsymbol{y}$	:	Vektor der Ausgangsgrößen
$\boldsymbol{z}$	:	Vektorfeld
${}_i\alpha$	:	Monom-Multigrade

$\boldsymbol{\psi}$	:	Vektorfeld
$\boldsymbol{\Upsilon}$	:	Vektorfeld der u-linksunabhängigen Ausgangssignalableitungen

Operatoren:

d	:	totales Differential
$\mathrm{lc}(f)$	:	führender Koeffizient des Polynoms f
$\mathrm{lm}(f)$	:	führendes Monom des Polynoms f
$\mathrm{lt}(f)$	:	führender Term des Polynoms f
$\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$	:	Lie-Ableitung des Vektorfeldes $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ entlang des Vektorfeldes $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$: $\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = [\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}b_1(\boldsymbol{x})\ \mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}b_2(\boldsymbol{x})\ \ldots]^{\mathrm{T}}$
$\mathrm{rem}(f, \{f_1, f_2, \ldots\})$	:	Rest einer mehrdimensionalen Polynomdivision
$\mathrm{S}(f_1, f_2)$	:	S-Polynom-Operator
trg	:	Transzendenzgrad
diff. trg	:	differentialalgebraischer Transzendenzgrad
$\oplus$	:	Kompositionsoperator
$[\,\cdot\,]^{\mathrm{T}}$	:	Transponierte der Matrix $[\,\cdot\,]$
∂	:	Differentiationsoperator

Logische Verknüpfungen:

$\wedge$	:	Konjunktion „und“

Zahlenmengen und Mengenoperatoren:

$\mathrm{card}\{\,\cdot\,\}$	:	Mächtigkeit der Menge $\{\,\cdot\,\}$
L_u	:	Menge der u-linksunabhängigen Ausgangssignalableitungen
$\mathrm{span}\{\,\cdot\,\}$	:	von den in $\{\,\cdot\,\}$ enthaltenen Vektoren aufgespannter Vektorraum
$\mathbb{C}$	:	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{N}$	:	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	:	um das Element 0 erweiterte Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Q}$	:	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	:	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{Z}$	:	Menge der ganzen Zahlen
$\subset$	:	Untermenge
$\in$	:	Element von

Sonstige Formelzeichen:

$x_2 < x_1$	:	Monomordnung, bei der x_1 vor x_2 angeordnet wird
$a \prec b$	:	Ordnungsfunktion, bei der b höher gewertet wird als a

1 Einleitung

In der Systemtheorie nichtlinearer Systeme spielen Inversions- oder Strukturalgorithmen eine bedeutende Rolle. Die meisten Inversionsalgorithmen gehen im wesentlichen auf die Arbeiten von Silverman (1969), Hirschorn (1979) sowie Singh (1981) zurück und stellen die Basis für zahlreiche regelungstechnische Anwendungen dar. Aufgrund der Bedeutung der Inversionsalgorithmen ist es wünschenswert, den Inversionsvorgang für nichtlineare, nicht notwendigerweise quadratische Mehrgrößensysteme zu automatisieren. Unter quadratischen Systemen werden dabei Systeme verstanden, für die die Anzahl der Eingänge mit der Anzahl der Ausgänge übereinstimmt.

Zwar sind vereinzelt Versionen der Strukturalgorithmen für die automatisierte Berechnung programmiert worden, jedoch sind diese nicht einem breiten Publikum in Form von professioneller Software zugänglich. Ein Grund hierfür liegt in den Restriktionen bezüglich der Systemklassen, welche betrachtet werden können. Geht man nämlich von einem analytischen System (AS) aus, so besteht bei der Inversion des Systems kein geringeres Problem als das Umkehren eines Systems nichtlinearer Differentialgleichungen. Zwar kann dieses Problem lösbar gestaltet werden, indem ein AS durch Einführung zusätzlicher Zustandsvariablen in ein analytisches System mit linear eingehender Steuerung (ALS) überführt wird (Schwarz 1991), wodurch im Falle der Inversion nur noch ein System von Differentialgleichungen zu behandeln ist, welches linear in den Eingangsgrößen $\boldsymbol{u}$ ist. Jedoch kann sich diese Vorgehensweise wegen der höheren Systemordnung als problematisch erweisen (Levine 1996), da auch moderne Computer-Algebra-Systeme hier schnell an ihre Grenzen stoßen.

Daher wird mit dem in diesem Bericht vorgestellten Ansatz versucht, analytische Systeme in allgemeiner Form zu behandeln. Dabei sollen Standardfunktionen aus Computer-Algebra-Systemen genutzt werden, die dem Anwender mit Vorkenntnissen über Strukturalgorithmen eine Hilfe zum automatisierten Abarbeiten der entsprechenden Algorithmen an die Hand geben. In diesem Bericht wird vorgeschlagen, von den sog. Gröbner-Basen Gebrauch zu machen. Diese können als Eliminationsalgorithmus zur Lösung von Systemen nichtlinearer Gleichungen genutzt werden, wobei es einiger Modifikationen bedarf, um Systeme von Differentialgleichungen invertieren zu können. Der Algorithmus zur Bestimmung der Gröbner-Basen ist in neueren kommerziell erhältlichen Computer-Algebra-Systemen implementiert und steht damit dem Anwender zur Verfügung. Dieses ist in sofern erwähnenswert, als zwar der Ritt-Algorithmus (Ritt 1950) zur Bestimmung sog. charakteristischer Mengen und damit zur Umkehrung eines Systems von nichtlinearen Differentialgleichungen bekannt ist, jedoch dieser praktisch nicht als progammierte Lösung erhältlich ist. Da es sich bei den Gröbner-Basen um ein algebraisches Werkzeug handelt, ist es naheliegend, auch eine algebraische Betrachtungsweise der Inversion vorzunehmen.

Der vorliegende Bericht ist wie folgt gegliedert: zunächst werden in dem zweiten Abschnitt die notwendigen Grundlagen der Algebra zusammengestellt, um die Gröbner-Basen zu beschreiben. Zudem wird der Algorithmus zur Bestimmung der Gröbner-Basen dargestellt. In dem darauffolgenden dritten Abschnitt wird der Inversionsalgorithmus in seiner ursprünglichen differentialgeometrischen Form nach Singh (1981) angegeben sowie ein algebraisches Derivat. Weiterhin ist in dem 4. Abschnitt die Vorgehensweise zur Nutzung der Gröbner-Basen dargestellt. Der fünfte Abschnitt enthält einige Beispiele sowie Hinweise zur Anwendung der Gröbner-Basen. Die Zusammenfassung und ein Ausblick beenden den Bericht.

2 Algebra

Um eine Beschreibung der Gröbner-Basen zu ermöglichen, ist es notwendig, einige Begriffe aus der Mathematik zu berücksichtigen. Im wesentlichen handelt es sich dabei um Begriffe aus der kommutativen Algebra. Des weiteren ist zudem vor dem Hintergrund einer späteren Anwendung auf differentialalgebraische Problemstellungen die kurze Darstellung einiger differentialalgebraischer Begriffe als Erweiterung der kommutativen Algebra ratsam. Die hier zusammengestellten Begriffe und Definitionen sind im wesentlichen den Quellen (Atiyah und Macdonald 1969, Kolchin 1973, Kunz 1979, Sharp 1990, Eisenbud 1995) sowie Arbeiten von Forsman (1992a), Fortell (1995) und Jirstrand (1996) entnommen. Der Grund für die Zusammenstellung der Begriffe liegt darin, daß, soweit bekannt, keine deutschsprachige Literatur mit Zusammenstellungen von Grundbegriffen der kommutativen Algebra existiert, die dem Ingenieur ohne weitergehende mathematische Kenntnisse unmittelbar verständlich ist. Die deutschsprachigen Werke, die sich mit kommutativer Algebra befassen, sind fast ausschließlich für Mathematiker geschrieben und daher für Ingenieurbelange nur wenig geeignet. Da für die Systemtheorie einzelne Werkzeuge der kommutativen Algebra von außerordentlichem Interesse sind, ist eine hinreichende Beschreibung der zugrundeliegenden Theorie unabdingbar.

In den nächsten beiden Abschnitten sind Definitionen und Sätze zusammengestellt, die für das Verständnis der algebraischen Betrachtungsweise von Systemen von Bedeutung sind. Dies zieht zwangsläufig eine gewisse Beeinträchtigung des Leseflusses nach sich, die aber wegen der notwendigerweise komprimierten Darstellung unumgänglich ist.

2.1 Kommutative Algebra

In der kommutativen Algebra sind zwei algebraische Strukturen von wesentlicher Bedeutung: kommutative Ringe und Körper.

Definition 2.1: *Kommutativer Ring*
Ein *kommutativer Ring* ist ein Tripel, bestehend aus einer Menge $\mathfrak{R}$ der Ringelemente sowie den darauf definierten Operatoren „+“ (Addition) und „·“ (Multiplikation) derart, daß folgende Gesetze gelten:

i) $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in \mathfrak{R}$ (Assoziativgesetz der Addition) .

ii) $a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathfrak{R}$ (Kommutativgesetz der Addition) .

iii) Es existiert ein neutrales Element 0 der Addition:

$$0 + a = a \quad \forall a \in \mathfrak{R} \quad .$$

iv) Es existiert zu jedem $a \in \mathfrak{R}$ ein inverses Element $-a$ bezüglich der Addition:

$$(-a) + a = 0 \quad .$$

v) $a(bc) = (ab)c \quad \forall a, b, c \in \mathfrak{R}$ (Assoziativgesetz der Multiplikation) .

vi) $ab = ba \quad \forall a, b \in \mathfrak{R}$ (Kommutativgesetz der Multiplikation) .

vii) Es existiert ein neutrales Element 1 der Multiplikation:

$$1a = a \quad \forall a \in \mathfrak{R} \quad .$$

vii) Die Multiplikation ist distributiv über der Addition:

$$a(b + c) = ab + ac \quad \forall a, b, c \in \mathfrak{R} \quad .$$

❑

Die Gesetze i) bis iv) stellen die Gruppenaxiome für eine Abelsche Gruppe (Gellert u. a. 1985) dar. Somit ist ein kommutativer Ring bezüglich der Addition eine Abelsche Gruppe, nicht jedoch bezüglich der Multiplikation, da nicht notwendigerweise ein multiplikativ inverses Element in $\mathfrak{R}$ enthalten sein muß. Als Beispiele für kommutative Ringe, in denen wir selbstverständlich die oben genannten Rechengesetze anwenden, sind die bekannten Zahlenmengen der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ in Verbindung mit Addition und Multiplikation als Ringoperatoren zu nennen. Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen dagegen bildet in Verbindung mit Addition und Multiplikation als Ringoperatoren keinen kommutativen Ring, da für kein Element aus $\mathbb{N}$ ein additiv inverses Element existiert. Ein kommutativer Ring stellt also eine Verallgemeinerung der Rechenregeln für bekannte Mengen dar. Im folgenden wird im übrigen auf den Zusatz *kommutativ* verzichtet, da in diesem Bericht ausschließlich kommutative Ringe behandelt werden. Wenn also von einem Ring die Rede ist, so ist stets ein kommutativer Ring gemeint.

Definition 2.2: *Monom*
Ein *Monom* m in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist ein Produkt

$$m = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \quad , \tag{2.1}$$

mit $\alpha_i \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ und der Bedingung $\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\} | \alpha_i \neq 0$. ❑

Definition 2.3: *Polynom*
Ein *Polynom* p in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist eine endliche Linearkombination von Monomen m_i:

$$p = \sum_i a_i m_i \quad , \tag{2.2}$$

mit den Koeffizienten $a_i \in \mathfrak{R}$. ❑

Es ist leicht zu erkennen, daß auch für Polynome die in Definition 2.1 angegebenen Gesetze Gültigkeit besitzen. Damit folgt:

Definition 2.4: *Polynomring*
Ein (kommutativer) *Polynomring* in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ wird durch die Menge der Polynome in $x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus einem Ring $\mathfrak{R}$ gebildet. Dieser Polynomring trägt die Bezeichnung $\mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n]$. ❑

Definition 2.5: *Körper*
Ein *Körper* k ist ein kommutativer Ring $\mathfrak{R}$, in dem für jedes von 0 verschiedene Element eine multiplikative Inverse enthalten ist, d. h.:

$$\exists b \in \mathfrak{R} | ab = ba = 1 \quad \forall a \in \mathfrak{R} \quad . \tag{2.3}$$

❑

Das bedeutet, daß in einem Körper alle von null verschiedenen Elemente bezüglich der Addition und der Multiplikation eine Abelsche Gruppe bilden (Gellert u. a. 1985). Die Zahlenmengen $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind Beispiele für Körper. Für systemtheoretische Beschreibungen wird in der Regel die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als Grundkörper k angenommen.

Definition 2.6: *Teilkörper/Unterkörper*
Eine Menge k wird *Teilkörper* oder *Unterkörper* eines Körpers K genannt, wenn k selbst ein Körper ist und weiterhin gilt: $k \subseteq K$. ❑

Definition 2.7: *Körpererweiterung*
Ist k ein Teilkörper oder Unterkörper von K, so wird K *Körpererweiterung* oder Erweiterungskörper genannt. Dieser Sachverhalt wird durch die Notation K/k gekennzeichnet. ❑

Eine Körpererweiterung kann z. B. durch Hinzufügen einer Variablen a (und der Inversen dieser Variablen, um die Körpereigenschaften zu erfüllen) gebildet werden, was durch $k(a, \frac{1}{a})/k$ notiert wird. Aus den obigen Definitionen geht aber auch hervor, daß der Polynomring $\mathbb{R}[x]$ keinen Körper darstellt, weil in diesem Ring kein Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ enthalten ist, so daß $fx = 1$ gilt. Jedoch ist es möglich, einen Körper zu definieren, der aus allen rationalen Funktionen in den Variablen besteht, welche einem Grundkörper hinzugefügt wurden, wobei diese Funktionen Koeffizienten aus dem Grundkörper besitzen. Dies ist von Interesse, weil die Körpertheorie im folgenden genutzt werden soll. In diesem Zusammenhang ist der Begriff der meromorphen Funktion von Bedeutung:

Definition 2.8: *Meromorphe Funktion* (Korn und Korn 1968)
Eine Funktion heißt dann und nur dann *meromorph*, wenn die einzigen Singularitäten Pole sind und die Anzahl der Singularitäten endlich ist. Wenn eine Funktion meromorph ist, dann handelt es sich um eine rational algebraische Funktion, die als Quotient zweier Polynome dargestellt werden kann. ❑

Um die Körpertheorie zu nutzen, wird man also einen Körper nicht als Menge von Polynomen definieren können, sondern muß vielmehr die Verallgemeinerung der Polynome, die meromorphen Funktionen, als die Gesamtheit der Elemente des Körpers wählen. Dies ist für die weiter unten behandelten dynamischen Systeme wichtig.

Definition 2.9: *Algebraische Abhängigkeit, Transzendenz*
Es sei K/k eine Körpererweiterung und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \nu \in K$. Es heißt ν *algebraisch abhängig* von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ über k, wenn ν algebraisch über $k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ist, d. h. wenn eine algebraische Gleichung $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \nu)=0$ existiert, wobei P ein Polynom in $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \nu$ mit Koeffizienten aus k darstellt (Bronstein und Semendjajew 1991). Existiert ein solches Polynom nicht, so heißt ν *algebraisch unabhängig* oder *transzendent.* ❑

Satz 2.1 (Sharp 1990)
Es sei K/k eine Körpererweiterung und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Dann sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algebraisch unabhängig über dem Körper k dann und nur dann, wenn keines der α_i, $i = 1, \ldots, n$, algebraisch abhängig von $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$ über k ist, d. h. wenn jedes α_i, $i = 1, \ldots, n$, transzendent über $k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ ist. ❑

Satz 2.2 (Sharp 1990)
Es sei K/k eine Körpererweiterung und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m, \gamma \in K$. Wenn jedes β_j, $j = 1, \ldots, m$ algebraisch abhängig von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ über k ist und γ algebraisch abhängig von $\beta_1, \ldots, \beta_m$ über k ist, dann ist γ auch algebraisch abhängig von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ über k. ❑

Satz 2.3 (Sharp 1990)
Es sei K/k eine Körpererweiterung und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta \in K$. Wenn β algebraisch abhängig von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ über k ist aber nicht algebraisch abhängig von $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ über k, dann ist α_n algebraisch abhängig von $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta$ über k. ❑

Dieser Satz ist von großer Bedeutung, denn übertragen auf differentialalgebraische Körper (die weiter unten eingeführt werden), bildet dieser Satz zusammen mit Satz 2.1 die Grundlage der von Fliess (1986) angegebenen Rangbedingungen für die Invertierbarkeit von Systemen.

Definition 2.10: *Transzendenzbasis*
Eine *Transzendenzbasis* einer Körpererweiterung K/k ist eine möglicherweise leere Menge von Elementen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, die algebraisch unabhängig über k ist, so daß alle Elemente aus K algebraisch abhängig über $k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sind. Die Anzahl der Elemente der Transzendenzbasis heißt *Transzendenzgrad* der Körpererweiterung und wird durch trg K/k notiert. ❑

Es folgt aus dem sog. *Austauschsatz der Algebra* (Sharp 1990), daß jede Transzendenzbasis einer Körpererweiterung die gleiche Anzahl von Elementen besitzt, d. h. der Transzendenzgrad eine charakteristische Größe der Körpererweiterung darstellt. Der entsprechende Nachweis ist ebenfalls bei Sharp (1990) erbracht. Ein weiterer Satz ist für verschiedene

Beweisführungen von wesentlicher Bedeutung und erlaubt eine ähnliche Argumentation, wie sie aus der Verwendung des limes inferior und des limes superior für Folgen bekannt ist:

Satz 2.4 (Kolchin 1973, Sharp 1990, Lang 1993)
Es sei $K/L/M$ eine Kaskade von Körpererweiterungen K/L und L/M. Weiterhin seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine Menge von Elementen aus L, die algebraisch unabhängig über M sei, und $\beta_1, \ldots, \beta_m$ eine Menge von Elementen aus K, die algebraisch unabhängig über L sei. Dann gilt, daß diejenigen $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+m}$ aus K mit:

$$\gamma_r = \begin{cases} \alpha_r & , \quad 1 \leq r \leq n \\ \beta_{r-n} & , \quad n < r \leq n+m \end{cases} ,$$

algebraisch unabhängig über M sind und für den Transzendenzgrad der Körpererweiterung K/M folgt:

$$\operatorname{trg} K/M = \operatorname{trg} K/L + \operatorname{trg} L/M \quad .$$

❑

Satz 2.5
Es seien $f_1, \ldots, f_m$ Polynome aus dem Körper der meromorphen Funktionen in $x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus dem Grundkörper k (dieser Sachverhalt wird im folgenden als $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ notiert). Dann sind die Polynome $f_1, \ldots, f_m$ algebraisch abhängig über $k[x_1, \ldots, x_n]$, wenn $m > n$ erfüllt ist. Dies stellt einen Sonderfall der Aussage dar, daß die Polynome $f_1, \ldots, f_m$ algebraisch abhängig sind, wenn für den Rang der Jacobi-Matrix

$$\operatorname{rang}(\boldsymbol{J}(f)) = \operatorname{rang}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} \leq m \tag{2.4}$$

gilt. ❑

Der Beweis ist in Gröbner (1949) erbracht und geht auf die Arbeit von Jacobi (1841) zurück.

Diese Aussage gilt, streng genommen, nur unter zusätzlichen Bedingungen an den Grundkörper k, die aber hier nicht näher erläutert werden, da für unsere Zwecke nur die Zahlenkörper $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ als Grundkörper Verwendung finden, die diese Anforderungen stets erfüllen. Die Aussage in Satz 2.5 liefert allerdings nur eine Ja/Nein-Entscheidung über die algebraische Abhängigkeit der Polynome, nicht aber die Abhängigkeitsbeziehung selbst. Um diese zu erhalten, kann man sich der Eliminationstheorie bedienen, die uns im folgenden interessiert und einige weitere Vereinbarungen benötigt:

Definition 2.11: *Ideal*
Ein *Ideal* I eines Ringes wird durch eine Untermenge eines Ringes, für die folgende Rechenregeln gelten, gebildet:

i) $a, b \in I \Rightarrow a + b \in I$,

ii) $r \in \mathfrak{R}, a \in I \Rightarrow ar \in I$.

❑

Im folgenden wird die Notation $\langle P \rangle$ für das kleinste Ideal des Ringes $\mathfrak{R}$ verwendet, das $P \subseteq \mathfrak{R}$ enthält, und P heißt Basis des Ideals $\langle P \rangle$. $\langle P \rangle$ ergibt sich anschaulich als die Schnittmenge aller Ideale in $\mathfrak{R}$, die P enthalten. Ideale sind z. B. bei der Bestimmung der Nullstellen eines Systems von Polynomen von Bedeutung. Deshalb interessiert das von einer Menge $f_1, \ldots, f_n$ von Polynomen erzeugte Ideal des Polynomringes $\mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n]$ in besonderem Maße. Es ergibt sich auf einfache Weise, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 2.6 (Sharp 1990)
Es seien $f_1, \ldots, f_m$ Polynome in dem Ring $k[x_1, \ldots, x_n]$. Das durch die Polynome $f_1, \ldots, f_m$ erzeugte Ideal ist dann gegeben durch

$$\langle f_1, \ldots, f_m \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{m} g_i f_i \,\middle|\, g_i \in k[x_1, \ldots, x_n] \right\} . \tag{2.5}$$

❑

Weiterhin kann eine Brücke zwischen Idealen und Polynomen geschlagen werden:

Satz 2.7
Die Menge der gemeinsamen Nullstellen der Polynome $f_1, \ldots, f_n$ ist identisch mit der Menge der Nullstellen aller Polynome in dem Ideal $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle$. ❑

Beweis: Die Folgerung ergibt sich unmittelbar aus Satz 2.6. ❑

Ideale werden mitunter durch spezielle Eigenschaften gekennzeichnet. Diese Eigenschaften wie *prim* oder *radikal* spielen für unsere Zwecke im folgenden nicht unmittelbar eine Rolle und werden daher nicht weiter behandelt. Für weiter reichende Informationen wird auf die oben genannte Literatur verwiesen.

Gröbner-Basen:
Mit den angegebenen Definitionen und Sätzen kann man nun zu den sog. Gröbner-Basen übergehen. Gröbner-Basen tragen ihren Namen nach dem Algebraiker W. Gröbner, dessen Schüler B. Buchberger (1970) einen Algorithmus zur Bestimmung der Gröbner-Basen vorstellte. Bei Buchberger (1985) und Pauer und Pfeifhofer (1988) sind die mathematischen Grundlagen der Gröbner-Basen umfassend dargestellt, und so können diese Literaturstellen für weitere Untersuchungen von Gröbner-Basen und deren Eigenschaften herangezogen werden.

Eine Gröbner-Basis ist eine spezielle Basis eines Ideals, die verschiedene Eigenschaften hat und die Lösung einiger Probleme ermöglicht. Neben idealtheoretischen Fragestellungen sind vor allem die Möglichkeiten von Interesse, gemeinsame Nullstellen eines Systems von Polynomen zu bestimmen sowie die Elimination von Variablen in einem Polynom-Gleichungssystem. Elimination bedeutet dabei, daß für ein Ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ eine Basis $I \cap k[x_r, \ldots, x_n]$, mit $1 \leq r \leq n$, bestimmt wird. Da der benötigte Algorithmus zur Polynomdivision eine Ordnung der Terme der Polymome voraussetzt, wird eine Monomordnung an dieser Stelle eingeführt. Es seien ${}_i\alpha = \{{}_i\alpha_1, \ldots, {}_i\alpha_n\} \in \mathbb{N}^n$ die geordneten Listen der Exponenten der Monome $m_i = x_1^{{}_i\alpha_1} x_2^{{}_i\alpha_2} \ldots x_n^{{}_i\alpha_n} = x^{{}_i\alpha}$, wobei hier $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ die geordnete Liste der Variablen darstellt. Die ${}_i\alpha$ werden in einigen Literaturstellen auch *Multigrade* genannt.

Definition 2.12: *Monomordnung*
Eine *Monomordnung* $<$ ist eine Anordnung, die folgender Bedingung genügt:

$$\left.\begin{array}{rcl} 0 & < & {}_i\alpha \\ {}_1\alpha & < & {}_2\alpha \quad \Rightarrow \quad {}_1\alpha + {}_i\alpha \; < \; {}_2\alpha + {}_i\alpha \end{array}\right\} \quad \forall i \in \mathbb{N} \qquad .$$

❑

Diese Definition hat zur Folge, daß bei einer Polynomdivision die Reihenfolge der Terme erhalten bleibt. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Monomordnungen zu definieren, z. B. strikt lexikographisch, gestuft lexikographisch, invers gestuft lexikographisch und gewichtet (Pauer und Pfeifhofer 1988, Eisenbud 1995), von denen hier nur die erste zur Anwendung kommt.

Definition 2.13: *Strikt lexikographische Monomordnung* (Pauer und Pfeifhofer 1988)
Eine *strikt lexikographische Monomordnung* ${}_1\alpha < {}_2\alpha$ und damit $m_1 < m_2$ ist eine Anordnung, die folgender Bedingung genügt:

$$ {}_1\alpha \; < \; {}_2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \exists j \in \{1, \ldots, n\} \mid ({}_1\alpha_k = {}_2\alpha_k \; \forall k < j) \; \wedge \; {}_1\alpha_j < {}_2\alpha_j \quad . \tag{2.6}$$

❑

Bei einer strikt lexikographischen Monomordnung geht man also die Faktoren der Monome von links nach rechts durch, und das erste verschiedene Paar entscheidet darüber, welches der Monome höher einzuordnen ist. Diese Vorgehensweise entspricht derjenigen bei der alphabetischen Ordnung, wie sie in Nachschlagewerken verwendet wird, woher auch der Name abgeleitet ist. Im folgenden ist mit lexikographischer Monomordnung immer eine strikt lexikographische Monomordnung gemeint.

Beispiel 2.1
Für die Monome $m_1 = x_1^2 x_2^5$, $m_2 = x_1 x_2^2 x_3$, $m_3 = x_1 x_2^2 x_3^7$ gilt bei lexikographischer Monomordnung $x_1 > x_2 > x_3$:

$$m_1 \; > \; m_3 \; > \; m_2 \quad .$$

❑

Polynome werden von dem am höchsten zu dem am niedrigsten eingeordneten Monom geschrieben. Damit können wir weiterhin definieren:

Definition 2.14: *führendes Monom, führender Koeffizient, führender Term*

- In einem Polynom $f = \sum_i a_i x^{i^\alpha}$ wird das am höchsten einzuordnende Monom *führendes Monom von* f, $\mathrm{lm}(f)$, (nach dem englischen leading monomial) genannt.
- Der Koeffizient a_i des führenden Monoms von f wird *führender Koeffizient von* f, $\mathrm{lc}(f)$, (nach dem englischen leading coefficient) genannt.
- Das Produkt $a_i m_i = a_i x^{i^\alpha}$ aus führendem Koeffizient und führendem Monom eines Polynoms f wird *führender Term von* f, $\mathrm{lt}(f)$, (nach dem englischen leading term) genannt.

❑

Eng mit den Gröbner-Basen verbunden ist die Frage, ob ein gegebenes Polynom $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ in einem Ideal $I = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ enthalten ist. Für den Fall $n = m = 1$ läßt sich diese Frage leicht durch die Polynomdivision f/f_1 klären. Ergibt sich der Rest der Polynomdivision zu Null, so gilt $f \in I = \langle f_1 \rangle$. Für den mehrdimensionalen Fall ist eine Verallgemeinerung der Polynomdivision einzuführen. Bei der mehrdimensionalen Polynomdivision wird ein Polynom $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ durch $f = h_1 f_1 + \ldots + h_m f_m + r$ mit $h_i f_i \in I$ dargestellt, wobei r den Rest bildet. Die Division in $k[x_1, \ldots, x_n]$ geschieht insofern analog zu dem eindimensionalen Fall, als sukzessive versucht wird, den führenden Term $\mathrm{lt}(f)$ von f durch Subtraktion des Produktes eines Vielfachen eines führenden Termes $\mathrm{lt}(f_i)$ von $f_1, \ldots, f_m$ und einem Monom $m_i \in \mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n]$ zu eliminieren. Ist der führende Term des Ergebnisses der Subtraktion durch keinen der führenden Terme teilbar, so wird dieser führende Term dem Rest hinzugefügt. Das folgende Beispiel verdeutlicht die Vorgehensweise.

Beispiel 2.2 (Jirstrand 1996)
Es sei $f = x_1^2 x_2 + x_2^2$ und $f_1 = x_1 x_2 - 1$ sowie $f_2 = x_2 - 1$. Zudem werde die lexikographische Monomordnung $x_1 > x_2$ verwendet. Dann folgt:

$$\begin{array}{rcll}
f & / & \{f_1, f_2\} & = \{h_1, h_2, r\} \\
(x_1^2 x_2 + x_2^2) & / & \{(x_1 x_2 - 1), (x_2 - 1)\} & = \{(x_1), (x_2 + 1), (x_1 + 1)\} \\
\underline{-(x_1^2 x_2 - x_1)} & & & \\
x_1 + x_2^2 & & \rightarrow r_1 = x_1 & \\
\underline{-(x_2^2 - x_2 + r_1)} & & & \\
x_2 & & & \\
\underline{-(x_2 - 1)} & & & \\
1 & & \rightarrow r_2 = 1 & \\
\underline{-(r_2)} & & & \\
0 & & & .
\end{array}$$

Im ersten Schritt wird von f der Term $x_1 \cdot f_1$ subtrahiert und x_1 dem Polynom h_1 zugeschlagen. Da der führende Term x_1 des Ergebnisses der Subtraktion nicht durch die führenden Terme x_1x_2 und x_2 von f_1 und f_2 teilbar ist, wird x_1 dem Rest in Form von r_1 zugeschlagen ($r = \sum r_i$). Im zweiten Schritt wird $x_2 \cdot f_2 + r_1$ abgezogen und x_2 dem Polynom h_2 hinzugefügt, wonach x_2 übrig bleibt. x_2 ist wiederum durch den führenden Term von f_2 teilbar. Deshalb wird im dritten Schritt $1 \cdot f_2$ von x_2 subtrahiert, was bedeutet, daß 1 dem Polynom h_2 hinzuzufügen ist. Als Ergebnis der Subtraktion dieses dritten Schrittes ergibt sich die Konstante 1, die nicht mehr durch einen führenden Term von f_1 oder f_2 teilbar ist, und somit dem Rest r in Form des Partialrestes r_2 zugeschlagen wird. Damit ist die Polynomdivision beendet. ❑

Es gilt also $f = h_1f_1 + h_2f_2 + r = x_1(x_1x_2 - 1) + (x_2 + 1)(x_2 - 1) + x_1 + 1$. In Beispiel 2.2 fällt auf, daß im ersten Schritt anstelle von f_1 auch f_2 zur Division herangezogen werden könnte. In diesem Fall hätte sich das Ergebnis zu $f = (x_1^2 + x_2 + 1)(x_2 - 1) + x_1^2 + 1$ ergeben. Das Ergebnis stimmt also nicht mehr überein. Insbesondere stimmt auch der Rest r nicht mehr überein. Es ergeben sich nun zwei Fragen:

i) Wird, wie im eindimensionalen Fall, der Rest r der Polynomdivision zu Null, wenn gilt: $f \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$?

ii) Wird der Rest r für alle möglichen Wege in der Polynomdivision zu Null, wenn r für einen Weg zu Null wird?

Gemäß Satz 2.6 gehört $f = h_1f_1 + \ldots + h_mf_m$ zu dem Ideal $I = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. Die Frage ist allerdings, ob die Polynomdivision in diesem Fall das Ergebnis $r = 0$ impliziert. Die Antwort ist *Nein*, denn es kann durch ein einfaches Beispiel gezeigt werden, daß der Rest der Polynomdivision nicht notwendigerweise zu Null wird, wenn $f \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ gilt:

Beispiel 2.3
Es sei $f = x_1^2x_2 - x_1x_2^2$ und $f_1 = x_2^2 - 1$ sowie $f_2 = x_1x_2 - 1$. Zudem werde die lexikographische Monomordnung $x_1 > x_2$ verwendet. Dann folgt:

a)

$$\begin{array}{rclcl}
f & / & \{f_1, f_2\} & = & \{h_1, h_2, r\} \\
(x_1^2x_2 - x_1x_2^2) & / & \{(x_2^2 - 1), (x_1x_2 - 1)\} & = & \{(-x_1), (x_1), (0)\} \\
\underline{-(x_1^2x_2 - x_1)} & & & & \\
-x_1x_2^2 + x_1 & & & & \\
\underline{-(-x_1x_2^2 + x_1)} & & & & \\
0 & & & & .
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rclcl}
f & / & \{f_1, f_2\} & = & \{h_1, h_2, r\} \\
(x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2) & / & \{(x_2^2 - 1), (x_1 x_2 - 1)\} & = & \{(0), (x_1 - x_2), (x_1 - x_2)\} \\
\underline{-(x_1^2 x_2 - x_1)} & & & & \\
-x_1 x_2^2 + x_1 & & & & \\
\underline{-(-x_1 x_2^2 + x_2)} & & & & \\
x_1 - x_2 & & \rightarrow r = x_1 - x_2 & & \\
\underline{-r} & & & & \\
0 & & & & .
\end{array}$$

❑

Der Fall a) des Beispiels verdeutlicht, daß gilt: $f \in I$. Der Fall b) zeigt aber, daß sich nicht für alle Wege der Polynomdivision der Rest zu $r = 0$ ergibt. Folglich sind die getroffenen Annahmen noch nicht hinreichend, um die Zugehörigkeit von f zu I zu überprüfen. Nun kann man sich vorstellen, daß eine Basis von unabhängigen erzeugenden Polynomen des Ideals gefunden werden muß, ähnlich den linear unabhängigen Basisvektoren eines Lösungsraumes. Dazu definieren wir:

Definition 2.15: *Gröbner-Basis*
Eine endliche Untermenge $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ eines Ideals I heißt *Gröbner-Basis*, wenn

$$\langle \mathrm{lt}(g_1), \dots, \mathrm{lt}(g_n) \rangle \;=\; \langle \{\mathrm{lt}(f) | f \in I\} \rangle, \tag{2.7}$$

d. h. wenn jeder führende Term $\mathrm{lt}(f) | f \in I$ einen Teiler aus der Menge $\{\mathrm{lt}(g_j)\}$, $j = 1, \dots, n$, hat. ❑

Eine weitere Definition führt auf eine Lösung des oben vorgestellten Problems der Mehrdeutigkeit bei der Polynomdivision:

Definition 2.16: *Reduzierte Gröbner-Basis*
Die Gröbner-Basis GB eines Ideals $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ heißt *reduzierte Gröbner-Basis*, wenn gilt:

i) $\mathrm{lc}(g) = 1 \quad \forall g_i \in GB$, worin 1 das Einselement der Ringmultiplikation darstellt.

ii) Kein Monom aus $g_j \in GB$ kommt unter den führenden Termen in GB mehrmals vor, d. h. $\nexists m_i \mid m_i \in \{g_j\} \wedge m_i \in \langle \mathrm{lt}(g_k \setminus m_i) \rangle$. ❑

Es werden im weiteren, wenn nicht anders erwähnt, ausschließlich reduzierte Gröbner-Basen betrachtet, die der Einfachheit halber nur Gröbner-Basen genannt werden. Mit Definition 2.16 wird deutlich, daß bei einer mehrdimensionalen Polynomdivision die oben aufgezeigte Mehrdeutigkeit nicht mehr auftreten kann, wenn das Ideal $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ durch die zugehörige Gröbner-Basis $GB = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ ersetzt wird. Da dies die einzige Mehrdeutigkeit bei der mehrdimensionalen Polynomdivision ist, kann mit den folgenden Sätzen die Zugehörigkeit eines Polynoms zu einem Ideal bestimmt werden.

Satz 2.8 (Buchberger 1985, Cox u. a. 1992)
Für eine gegebene Monomordnung hat jedes von Polynomen erzeugte Ideal eine eindeutige (reduzierte) Gröbner-Basis GB. ❑

Satz 2.9
Es sei $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ ein von Polynomen erzeugtes Ideal, $GB(I) = \{g_1, \ldots, g_m\}$ und $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Dann existiert ein eindeutiges $r \in k[x_1, \ldots, x_n]$, für das gilt:

i) Kein Monom in r ist durch einen führenden Term $\mathrm{lt}(g_i)$ aus GB teilbar.

ii) Es existiert ein $h \in I$ derart, daß $f = h + r$. ❑

Beweis: Der Satz folgt unmittelbar aus Definition 2.16, da die einzige Mehrdeutigkeit bei der mehrdimensionalen Polynomdivision dadurch verschwindet. ❑

Definition 2.17: *Rest einer mehrdimensionalen Polynomdivision*
Es wird mit $\mathrm{rem}(f, F)$ (nach dem englischen remainder) der *Rest einer mehrdimensionalen Polynomdivision* eines Polynomes f durch das n-Tupel $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ bei lexikographischer Monomordnung genannt. ❑

Somit kann der folgende Satz angegeben werden:

Satz 2.10 (Cox u. a. 1992)
Es sei $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ ein von Polynomen erzeugtes Ideal, $GB(I) = \{g_1, \ldots, g_m\}$ und $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Dann gilt:

$$f \in I \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rem}(f, GB(I)) = 0 \quad . \tag{2.8}$$

❑

Damit ist die Zugehörigkeit eines Polynoms zu einem Ideal eindeutig bestimmbar, sofern $GB(I)$ bekannt ist.

Bis zu diesem Punkt sind einige definierende Eigenschaften von Gröbner-Basen beschrieben. Unklar ist aber noch die Berechnung der Gröbner-Basis eines von Polynomen erzeugten Ideals. Diese geschieht mit dem Buchberger-Algorithmus.

Buchberger-Algorithmus:
Der Buchberger-Algorithmus bedient sich eines weiteren Hilfsmittels. Die Idee dabei ist, die Menge der das Ideal erzeugenden Polynome so zu erweitern, daß eine (nicht reduzierte) Gröbner-Basis entsteht. Diese Erweiterung geschieht durch Hinzufügen von Resten der Division von sog. S-Polynomen durch die erzeugenden Polynome eines Ideals. Die S-Polyonome werden folgendermaßen gebildet:

Definition 2.18: S-*Polynom* (Buchberger 1970, Buchberger 1985)
Es seien $f_1, f_2 \in k[x_1, \ldots, x_n]$ zwei Polynome. Das S-*Polynom* $\mathrm{S}(f_1, f_2)$ von f_1, f_2 wird durch die Vorschrift

$$\mathrm{S}(f_1, f_2) = \frac{\mathrm{lcm}(\mathrm{lm}(f_1), \mathrm{lm}(f_2))}{\mathrm{lt}(f_1)} \cdot f_1 - \frac{\mathrm{lcm}(\mathrm{lm}(f_1), \mathrm{lm}(f_2))}{\mathrm{lt}(f_2)} \cdot f_2$$

gebildet. Der Operator lcm bedeutet darin das kleinste gemeinsame Vielfache (nach dem englischen <u>l</u>east <u>c</u>ommon <u>m</u>ultiple) der in Klammern nachgestellten Operanden. ❑

Weiterhin gilt folgender Satz:

Satz 2.11 (Cox u. a. 1992)
Es sei $I = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle = \langle F \rangle$ ein von den Polynomen $\{f_1, \ldots, f_n\} = F$ erzeugtes Ideal. Dann gilt:

$$F = GB(I) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rem}(\mathrm{S}(f_i, f_j), F) = 0 \quad \forall\, i \neq j \quad . \tag{2.9}$$

❑

Damit ist überprüfbar, ob $\{f_1, \ldots, f_n\}$ eine Gröbner-Basis des Ideals $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ ist:

Beispiel 2.4
Es seien die Polynome einer Idealbasis F wie in Beipiel 2.3 zu $f_1 = x_2^2 - 1$ und $f_2 = x_1 x_2 - 1$ gegeben und eine lexikographische Monomordnung $x_1 > x_2$ zur Berechnung der Gröbner-Basis vorausgesetzt. Das einzig mögliche S-Polynom ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}(f_1, f_2) &= \frac{\mathrm{lcm}(\mathrm{lm}(x_2^2 - 1), \mathrm{lm}(x_1 x_2 - 1))}{\mathrm{lt}(x_2^2 - 1)} \cdot (x_2^2 - 1) \\
&\quad - \frac{\mathrm{lcm}(\mathrm{lm}(x_2^2 - 1), \mathrm{lm}(x_1 x_2 - 1))}{\mathrm{lt}(x_1 x_2 - 1)} \cdot (x_1 x_2 - 1) \\
&= x_1 x_2^2 - x_1 - (x_1 x_2^2 - x_2) \\
&= -x_1 + x_2 \qquad .
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Für die Polynomdivision folgt:

$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{S}(f_1, f_2) & / & (f_1, f_2) & = \; h_1, h_2, r \\
-x_1 + x_2 & / & ((x_2^2 - 1), (x_1 x_2 - 1)) & = \; (0), (0), (-x_1 + x_2) \\
\underline{-(-x_1 + x_2)} & & \to r = -x_1 + x_2 & \\
0 & & & .
\end{array}$$

Es gilt also $\mathrm{rem}(\mathrm{S}(f_1, f_1), F) \neq 0$, und somit folgt, daß F keine Gröbner-Basis darstellt. ❑

Neben der Möglichkeit zur Überprüfung der Idealbasis führt Satz 2.11 auf den Kern von Buchbergers Algorithmus. Weil nämlich ein S-Polynom stets in dem von der zugehörigen Gröbner-Basis erzeugten Ideal enthalten sein muß und damit auch $\mathrm{rem}(\mathrm{S}(f_i, f_j), F)$ für den Fall $\mathrm{rem}(\mathrm{S}(f_i, f_j), F) \neq 0$, liegt es nahe, diesen Rest der Idealbasis hinzuzufügen, um eine (nicht reduzierte) Gröbner-Basis zu bilden. Tatsächlich werden in Buchbergers Algorithmus die S-Polynome $\mathrm{S}(f_i, f_j)$ und ihre Reste $\mathrm{rem}(\mathrm{S}(f_i, f_j), F)$ für alle i, j berechnet, bis ein Rest ungleich Null wird. Dieser Rest wird der Idealbasis F hinzugefügt und es werden erneut alle $\mathrm{S}(f_i, f_j)$ und $\mathrm{rem}(\mathrm{S}(f_i, f_j), F)$ bestimmt, bis ein $\mathrm{rem}(\mathrm{S}(f_i, f_j), F) \neq 0$ auftritt usw. Der Vorgang wird so lange wiederholt, bis keine $\mathrm{rem}(\mathrm{S}(f_i, f_j), F) \neq 0$ mehr auftreten. Daß der Algorithmus tatsächlich seine Abbruchbedingung erreicht, ist in verschiedenen Literaturstellen z. B. mit der sog. Bedingung für aufsteigende Ketten nachgewiesen. Der Algorithmus zur Bestimmung von Gröbner-Basen ist in einigen Computer-Algebra-Paketen enthalten und ist daher für den interessierten Anwender verfügbar. Stellvertretend für die Computer-Algebra-Pakete seien hier das Programm MAPLE genannt, das stets reduzierte Gröbner-Basen berechnet, sowie das Programmpaket Macaulay. Das letztere deshalb, weil es kostenlos vom Server der Harvard-Universität kopierbar ist (`ftp math.harvard.edu` , login: `ftp` , password: beliebig , `cd Macaulay`). Wie weiter oben erwähnt, interessiert in diesem Bericht vor allem die Eigenschaft der Gröbner-Basen, daß sie als Eliminationsalgorithmus dienen können. Der folgende Satz liefert die dazu benötigte Aussage:

Satz 2.12 (Buchberger 1985)
Es sei $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal aus dem Polynomring $\mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n]$ und $GB(I)$ eine Gröbner-Basis von I bezüglich der lexikographischen Monomordung $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Dann gilt für alle $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$I \cap k[x_1, \ldots, x_r] \quad = \quad \langle GB(I) \cap k[x_1, \ldots, x_r] \rangle \quad . \tag{2.11}$$

❑

Das bedeutet, daß das „i-te Eliminationsideal“ (Buchberger 1985) durch diejenigen Polynome in GB erzeugt wird, die nur von den Variablen $x_1, \ldots, x_i$ abhängen. Ein Beispiel verdeutlicht die Aussage:

Beispiel 2.5
Es seien die Polynome einer Idealbasis F gegeben zu

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 x_2 + 1 \quad , \\ f_2 &= 3x_1 x_2 x_3 - x_2 x_3 + x_3 \quad \text{und} \\ f_3 &= x_1 + 4x_2 x_3 + 4 \quad , \end{aligned}$$

und eine lexikographische Monomordnung $x_1 < x_2 < x_3$ zur Berechnung der Gröbner-Basis vorausgesetzt. Die Gröbner-Basis des von F erzeugten Ideals berechnet sich z. B. mit der Funktion *gbasis* des Programms MAPLE zu:

$$GB \;=\; \{-x_1 + 8x_3 - 4,\; 2x_1 + 4x_2 + 7,\; 2x_1^2 + 7x_1 - 4\} = \{g_1, g_2, g_3\} \quad . \tag{2.12}$$

Die Aussage von Satz 2.12 bedeutet nun, daß alle Polynome aus GB, die nur von x_1 abhängen, also $\{2x_1^2 + 7x_1 - 4\}$, das 1. Eliminationsideal erzeugen, weiterhin alle Polynome aus GB, die nur von x_1 und x_2 abhängen, also $\{2x_1^2 + 7x_1 - 4, 2x_1 + 4x_2 + 7\}$, das 2. Eliminationsideal erzeugen usw. Man sieht an dem Beispiel deutlich, daß es sich bei der Darstellung der Eliminationsidealbasen um die bekannte Dreiecksform handelt, die durch Rückwärtssubstitution in bewährter Manier zur Lösung von Gleichungssystemen genutzt werden kann. Wie man leicht überprüfen kann, erfüllt die Lösung von $g_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ auch die ursprünglichen Gleichungen $f_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, die Nullstellen sind also identisch. ❑

Es kann gezeigt werden (Buchberger 1970), daß der Eliminationsalgorithmus für lineare Gleichungen in den Gaußschen Eliminationsalgorithmus übergeht. Es steht uns daher mit den Gröbner-Basen ein Werkzeug zur Verfügung, mit dem Variablen aus Systemen nichtlinearer (Polynom-)Gleichungen eliminiert werden können, wobei mit Hilfe der Monomordnung die Eliminationsreihenfolge festgelegt werden kann. Der letzte Teilsatz ist für die spätere Anwendung von essentieller Bedeutung.

2.2 Differentialalgebra

Um dynamische Systeme beschreiben zu können, sind einige differentialalgebraische Begriffe einzuführen. Die meisten sind bereits in verschiedenen Literaturstellen (Kolchin 1973, Fliess 1986, Fliess 1987, Fliess 1990, Wey und Svaricek 1995) zu finden; es macht aber gerade vor dem Hintergrund der oben dargestellten Begriffe der kommutativen Algebra Sinn, einige Begriffe als Erweiterung der nicht-differentialalgebraischen Entsprechung darzustellen, um ein Verständnis für die differentialalgebraische Sichtweise zu erlangen. Zunächst definieren wir:

Definition 2.19: *Differentiation*
Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring. Eine *Differentiation* wird durch die Abbildung $\partial : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, für die gilt:

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial(x+y) & = & \partial x + \partial y \\ \partial(xy) & = & (\partial x)y + x(\partial y) \end{array}\right\} \quad \forall x, y \in \mathfrak{R}$$

gekennzeichnet. ❑

Üblicherweise behandeln wir Polynome, also z. B. $\mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n]$, worin die Variablen x_i zeitvariant sind. Man kann für diesen Fall $\partial = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ definieren. Damit sind die Rechenregeln aus Definition 2.19 zwar erfüllt, aber $\partial x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$ ist nicht Element des Ringes $\mathfrak{R}[x]$. Daher definiert man:

Definition 2.20: *Differentialalgebraischer (Polynom-)Ring*
Ein Ring $\mathfrak{R}$ heißt *differentialalgebraischer Ring*, wenn eine Differentiation ∂ in $\mathfrak{R}$ definiert ist und das Ergebnis Element aus $\mathfrak{R}$ ist. Weiterhin bezeichnet $\mathfrak{R}\{x_1, \ldots, x_n\}$ die Menge der den *differentialalgebraischen Polynomring* in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ bildenden Elemente. ❑

Definition 2.21: *Konstante*
Diejenigen Elemente a aus einem Ring $\mathfrak{R}$, für die $\partial a = 0$ gilt, heißen *Konstanten.* ❑

Definition 2.22: *Differentialalgebraischer Körper*
Ein Körper k heißt *differentialalgebraischer Körper*, wenn eine Differentiation ∂ in k definiert ist und das Ergebnis Element aus k ist. Weiterhin wird ein differentialalgebraischer Körper, der durch die meromorphen Funktionen in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ erzeugt wird, als $k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ notiert. ❑

Mit Definition 2.21 wird klar, daß die Körper $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ differentialalgebraische Körper sind, deren Elemente sämtlich Konstanten sind. Aus der Definition 2.22 wird ferner deutlich, daß aus der Sicht der kommutativen Algebra, die alle Ableitungen der Variablen als neue Variablen auffaßt, ein Ideal eines differentialalgebraischen Polynomrings $\langle x, \dot{x}, \ddot{x}, x^{(3)}, \ldots\rangle$ keine endliche Basis haben kann. Damit sind die Ergebnisse der Gröbner-Basen nicht ohne weiteres übertragbar. Wie dieses Problem umgangen werden kann, wird weiter unten deutlich.

Zunächst werden hier einige Sätze angegeben, die für die Behandlung dynamischer Systeme von Nutzen sind.

Definition 2.23: *Körpererweiterung*
Ist k ein Teilkörper oder Unterkörper eines differentialalgebraischen Körpers K, so wird K analog zu Definition 2.7 *Körpererweiterung* oder Erweiterungskörper genannt. Der Sachverhalt, daß K Körpererweiterung von k ist, wird durch die Notation K/k gekennzeichnet. ❑

Analog zu Definition 2.9 gilt auch:

Definition 2.24: *Differentialalgebraische Abhängigkeit, Transzendenz*
Es sei K/k eine Körpererweiterung und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \nu \in K$. Es heißt ν *differentialalgebraisch abhängig* von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ über k, wenn ν differentialalgebraisch über $k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ist, d. h. wenn eine differentialalgebraische Gleichung $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \nu)=0$ existiert, wobei P ein Polynom in $\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(j)}, \nu^{(k)}$, $i, j, k \in \mathbb{N}_0$, mit Koeffizienten aus k darstellt (Bronstein und Semendjajew 1991). Existiert ein solches Polynom nicht, so heißt ν *transzendent*. ❑

Weiterhin gilt:

Definition 2.25: *Differentialalgebraischer Transzendenzgrad*
Es sei K/k eine Körpererweiterung und L eine Untermenge von K derart, daß alle Elemente aus L voneinander differentialalgebraisch unabhängig über k sind. Die maximal mögliche Anzahl von Elementen in L heißt *differentialalgebraischer Transzendenzgrad* diff. trg K/k. L wird dann *differentialalgebraische Transzendenzbasis* von K/k genannt. ❑

Insbesondere gilt der folgende Satz in Analogie zu Satz 2.4:

Satz 2.13 (Fliess 1986)
Es sei $K/L/M$ eine Kaskade von differentialalgebraischen Körpererweiterungen K/L und

L/M. Dann gilt für den differentialalgebraischen Transzendenzgrad der differentialalgebraischen Körpererweiterung K/M:

$$\text{diff. trg}\, K/M \quad = \quad \text{diff. trg}\, K/L + \text{diff. trg}\, L/M \quad .$$

❑

Die Verbindung zwischen der Differentialalgebra und der klassischen Systemdarstellung in Form einer Differentialgleichung, die das Ein-/Ausgangsverhalten beschreibt, stellen die folgenden beiden Definitionen her.

Definition 2.26: *System* (Fliess und Glad 1993)
Es sei k ein Grundkörper. Dann ist aus differentialalgebraischer Sicht ein *System* definiert als eine endlich erzeugte Körpererweiterung $k\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}\rangle / k\langle \boldsymbol{u}\rangle$ über dem Grundkörper k. ❑

Die Systemausgänge $\boldsymbol{y}$ sind über Differentialgleichungen mit den Eingängen $\boldsymbol{u}$ verknüpft, so daß diff. trg $k\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}\rangle / k\langle \boldsymbol{u}\rangle = 0$ gilt. Des weiteren werden die Eingänge $\boldsymbol{u} = [u_1, \ldots, u_m]$ als voneinander unabhängig angenommen, so daß gilt: diff. trg $k\langle \boldsymbol{u}\rangle / k = m$.

Definition 2.27: *Dynamik*
Es sei $\boldsymbol{u} = [u_1, \ldots, u_m]$ ein Systemeingang. Dann ist eine *Dynamik* eine endlich generierte differentialalgebraische Körpererweiterung $D/k\langle \boldsymbol{u}\rangle$. Die *Ordnung n der Dynamik* ist durch $n = \text{trg}\, D/k\langle \boldsymbol{u}\rangle$ gegeben und eine (nicht-differentialalgebraische) Transzendenzbasis der Dynamik $D/k\langle \boldsymbol{u}\rangle$ heißt *Zustand*. ❑

Da in der vorstehenden Definition die Ordnung der Dynamik durch den nicht-differentialalgebraischen Transzendenzgrad festgelegt ist, bedeutet dies, daß jedes Element aus D von den Zustandsvariablen algebraisch abhängig ist. Werden die Zustandsvariablen durch x_i, $i = 1, \ldots, n$, gekennzeichnet, so ist insbesondere $\dot{x}_i$ von den Zustandsvariablen nicht-differentialalgebraisch abhängig.

Ordnungsfunktion:
Wie schon oben für die kommutative Algebra in Form der Monomordnung eingeführt, ist für differentialalgebraische Betrachtungen eine Anordnung der auftretenden Terme von Nutzen. Dies geschieht durch eine *Ordnungsfunktion* für die Variablen. Eine Ordnungsfunktion „$\prec$" erfüllt die folgenden Eigenschaften (Kolchin 1973):

i) $x \prec x^{(i)}$,

ii) $x_1 \prec x_2 \Rightarrow x_1^{(i)} \prec x_2^{(i)}$.

Diese Bedingungen ermöglichen bei Verwendung mehrerer Variablen verschiedene Anordnungen der Variablen, wie z. B.:

$$x_1 \prec \dot{x}_1 \prec \ddot{x}_1 \prec \ldots \prec x_2 \prec \dot{x}_2 \prec \ddot{x}_2 \prec \ldots \prec x_3 \prec \dot{x}_3 \prec \ddot{x}_3 \prec \ldots \quad , \tag{2.13}$$

$$x_1 \prec \dot{x}_1 \prec \ddot{x}_1 \prec \ldots \prec x_2 \prec x_3 \prec \ldots \prec \dot{x}_2 \prec \dot{x}_3 \prec \ldots \prec \ddot{x}_2 \prec \ddot{x}_3 \prec \ldots \quad . \tag{2.14}$$

Für die Betrachtungen in diesem Bericht kommt jedoch nur die folgende Ordnungsfunktion zur Anwendung:

$$x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec \ldots \prec \dot{x}_1 \prec \dot{x}_2 \prec \dot{x}_3 \prec \ldots \prec \ddot{x}_1 \prec \ddot{x}_2 \prec \ddot{x}_3 \ldots \qquad . \tag{2.15}$$

Diese Ordnungsfunktion für die Variablen bedeutet eine Anordnung, so daß $x_{l_1}^{(k_1)}$ dann und nur dann links von $x_{l_2}^{(k_2)}$ steht, d. h. einen niedrigeren Rang hat, wenn $k_1 < k_2$ oder $l_1 < l_2 \wedge k_1 = k_2$. Für die Betrachtungen in dem nächsten Abschnitt ist eine solche Ordnungsfunktion der Ausgangssignalableitungen bzw. der Differentiale der Ausgänge von Bedeutung.

3 Inversionsalgorithmen

In diesem Abschnitt wird ein klassischer Inversionsalgorithmus dargestellt und diesem ein algebraischer Inversionsalgorithmus gegenübergestellt. Der klassische Inversionsalgorithmus für nichtlineare Mehrgrößensysteme geht auf Singh (1981) zurück und dient an dieser Stelle dazu, die Parallelen zu dem algebraischen Inversionsalgorithmus aufzuzeigen. Für die Betrachtungen in diesem Abschnitt soll ein zustandsaffines System der folgenden Form betrachtet werden:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(t)) + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{x}(t))u_i(t) \quad ; \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m \quad , \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}(t)) \quad ; \quad \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^p \quad , \tag{3.2}$$

wobei das Zeitargument im folgenden nicht immer explizit angegeben wird. Unter der Invertierbarkeit wird folgendes verstanden:

Definition 3.1: *Invertierbarkeit* (Hirschorn 1979)
Es sei $\boldsymbol{x}_0$ ein Zustand des Systems (Gl. (3.1)–(3.2)) zum Zeitpunkt $t = t_0$. Dann stellt $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_0)$ eine Lösung der Vektordifferentialgleichung (3.1) dar und der Ausgang ist gegeben als $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}(t, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_0)$.
Ein affines System (Gl. (3.1–3.2)) heißt dann *invertierbar* an einem Punkt $\boldsymbol{x}_0$, wenn für zwei beliebige unterschiedliche Stellgrößen $\boldsymbol{u}$ und $\hat{\boldsymbol{u}}$ gilt: $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}) \neq \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}_0, \hat{\boldsymbol{u}})$.
Das System heißt *streng invertierbar in* $\boldsymbol{x}_0$, wenn es invertierbar für jedes $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{U}$ ist, wobei $\mathcal{U}$ eine offene Umgebung von $\boldsymbol{x}_0$ darstellt.
Das System heißt *streng invertierbar*, wenn eine offene, dichte Untermannigfaltigkeit M_0 der Zustandsraummannigfaltigkeit derart existiert, daß das System für alle $\boldsymbol{x}_0 \in M_0$ streng invertierbar an dem Punkt $\boldsymbol{x}_0$ ist. ❑

3.1 Der klassische Strukturalgorithmus

Der klassische Inversionsalgorithmus bildet die Linksinverse des Systems in einem iterativen Ablauf. Der Name Linksinverse kommt von der Tatsache, daß die Eingangsgrößen durch linksseitige Multiplikation des Systems mit dem inversen Modell gebildet werden. Läßt sich die Linksinverse bestimmen, so heißt das System *linksinvertierbar*. Der Ablauf des eigentlichen Inversionsalgorithmus ist wie folgt (Singh 1981): In einem ersten Schritt werden die Ausgänge des Systems (Gl. (3.1–3.2)) nach der Zeit abgeleitet, woraus das folgende System entsteht:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{x})u_i \quad , \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{z}_1(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{c}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \quad , \tag{3.4}$$

mit

$$\boldsymbol{z}_1(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{R}_0(\boldsymbol{x})\dot{\boldsymbol{y}} \quad , \tag{3.5}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{c}_1(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{R}_0(\boldsymbol{x})\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) \qquad , && (3.6)\\
\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{R}_0(\boldsymbol{x})(\mathrm{L}_{\boldsymbol{b}_1}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) + \mathrm{L}_{\boldsymbol{b}_2}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) + \ldots + \mathrm{L}_{\boldsymbol{b}_m}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{1,1}(\boldsymbol{x}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad . && (3.7)
\end{aligned}
$$

Die Matrix $\boldsymbol{R}_0$ hat die Funktion, die Ausgangssignalableitungen so umzuformen, daß die ersten ρ_1 Zeilen von $\boldsymbol{z}_1$ linear unabhängig in $\boldsymbol{u}$ sind und alle weiteren Zeilen nicht mehr von $\boldsymbol{u}$ abhängen, d. h. $\boldsymbol{D}_{1,1}$ besitzt die Dimension $\rho_1 \times m$. Es kann also $\boldsymbol{z}_1$ geschrieben werden als:

$$
\boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{z}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{z}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{c}}_1(\boldsymbol{x}) \\ \hat{\boldsymbol{c}}_1(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{1,1}(\boldsymbol{x}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \qquad . \tag{3.8}
$$

Sofern $\rho_1 < \min\{m, p\}$ ist, fährt man fort mit der zeitlichen Ableitung von $\hat{\boldsymbol{z}}_1(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{y}}) = \hat{\boldsymbol{c}}_1(\boldsymbol{x})$ und erhält

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\left[\frac{\partial \hat{\boldsymbol{z}}_1}{\partial \dot{y}_1}, \ldots, \frac{\partial \hat{\boldsymbol{z}}_1}{\partial \dot{y}_p}\right] \ddot{\boldsymbol{y}}}_{\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{y}},\ddot{\boldsymbol{y}})} + \underbrace{\left[\frac{\partial \hat{\boldsymbol{z}}_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \hat{\boldsymbol{z}}_1}{\partial x_n}\right] \left[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{x}) u_i\right]}_{\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{u}} = \mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}\hat{\boldsymbol{c}}_1(\boldsymbol{x}) + \\
&\qquad + \underbrace{\left[\mathrm{L}_{\boldsymbol{b}_1}\hat{\boldsymbol{c}}_1(\boldsymbol{x}) + \ldots + \mathrm{L}_{\boldsymbol{b}_m}\hat{\boldsymbol{c}}_1(\boldsymbol{x})\right]}_{\hat{\boldsymbol{D}}_1(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{u} \qquad .
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

Damit ergibt sich in Vektorschreibweise:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{z}}_1(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{y}}) \\ \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{y}}, \ddot{\boldsymbol{y}}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{c}}_1(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}\hat{\boldsymbol{c}}_1(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{1,1}(\boldsymbol{x}) \\ \hat{\boldsymbol{D}}_1(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{y}}) \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \\
&= \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{c}}_1(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}\hat{\boldsymbol{c}}_1(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} + \bar{\boldsymbol{D}}_1(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{u} \qquad .
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Es besitze nun $\bar{\boldsymbol{D}}_1(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{y}})$ den Rang ρ_2 und die Matrix $\boldsymbol{R}_1$ werde analog zu der Matrix $\boldsymbol{R}_0$ so gebildet, daß

i) die letzten $m - \rho_1$ Zeilen in Gl. (3.10) in der Art umgeformt werden, daß die ersten ρ_2 Zeilen in Gl. (3.10) linear unabhängig sind und

ii) die letzten $m - \rho_2$ Zeilen von $\bar{\boldsymbol{D}}_1(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{y}})$ zu null werden.

Damit kann dann das System für den zweiten Schritt des Algorithmus geschrieben werden als:

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{x}) u_i \qquad , && (3.11)\\
\boldsymbol{z}_2(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{y}}, \ddot{\boldsymbol{y}}) &= \boldsymbol{c}_2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{D}_2(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{u} \qquad , && (3.12)
\end{aligned}
$$

mit

$$\boldsymbol{z}_2(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{y}},\ddot{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{x})\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{z}}_1(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{y}})\\ \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{y}},\ddot{\boldsymbol{y}})\end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

$$\boldsymbol{c}_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{x})\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{c}}_1(\boldsymbol{x})\\ \mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}\hat{\boldsymbol{c}}_1(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}, \tag{3.14}$$

$$\boldsymbol{D}_2(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{x})\bar{\boldsymbol{D}}_1(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{y}}) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{2,1}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{y}})\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Darin stellt $\boldsymbol{D}_{2,1}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{y}})$ eine $\rho_2\times m$-Matrix mit dem Rang ρ_2 dar. Man kann nun fortfahren und $\boldsymbol{z}_2$ wieder wie im ersten Schritt aufspalten und die zeitliche Ableitung von $\hat{\boldsymbol{z}}_2$ bilden usw. Es ergibt sich so eine Folge $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\ldots \le m$ von Zahlen, die nach spätestens n Schritten konvergiert. Di Benedetto u. a. (1989) zeigen, daß die Folge $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\ldots$ gegen den von Fliess (1986) definierten differentialalgebraischen Rang ρ^* läuft. Wenn $\rho^* = \mathrm{rang}\boldsymbol{D}_{i,1}(\boldsymbol{x}) = m$, $i<n$, gilt, ergibt sich das inverse System zu

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{D}_{i,1}^{-1}[\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{c}_i]. \tag{3.16}$$

Das folgende Beispiel, das sich auch bei Singh (1981) findet und ursprünglich von Rebhuhn (1980) stammt, verdeutlicht die Vorgehensweise des Strukturalgorithmus.

Beispiel 3.1
Es sei ein System gegeben durch

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}x_1+x_3\\ x_2+x_4\\ x_3\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2x_3 & 0\\ 3 & 0\\ 1+2x_3 & 2x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

$$\boldsymbol{y} = [x_1\ x_2\ x_3]^{\mathrm{T}}. \tag{3.18}$$

Die zeitliche Ableitung der Ausgangsgrößen ergibt:

$$\boldsymbol{z}_1(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{c}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{3.19}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ -2x_3\dot{y}_1+\dot{y}_2\\ -3\dot{y}_1+\dot{y}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1+x_3\\ -2x_1x_3+x_2+x_4-2x_3^2\\ -3x_1-2x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix} \tag{3.20}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{z}}_1\\ \hat{\boldsymbol{z}}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{c}}_1(\boldsymbol{x})\\ \hat{\boldsymbol{c}}_1(\boldsymbol{x})\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{1,1}(\boldsymbol{x})\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{u}. \tag{3.21}$$

$\boldsymbol{D}_{1,1}(\boldsymbol{x})$ hat den Rang eins und die n-te Ableitung ist noch nicht erreicht. Daher wird $\hat{\boldsymbol{z}}_1 = \hat{\boldsymbol{c}}_1(\boldsymbol{x})$ weiter abgeleitet und es folgt:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2x_3\dot{y}_1 - 2x_3\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 \\ -3\ddot{y}_1 - \ddot{y}_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{y}},\ddot{\boldsymbol{y}})} + \underbrace{\begin{bmatrix} -6\dot{y}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{y}})} \boldsymbol{u} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -4x_1x_3 + 2x_2 - 6x_3^2 + x_4 \\ -3x_1 - 5x_3 \end{bmatrix}}_{\mathrm{L}_{\boldsymbol{a}}\hat{\boldsymbol{c}}_1(\boldsymbol{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - 6x_1 - 10x_3 & 2x_4 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{D}}_1(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{u} \tag{3.22}$$

und

$$\boldsymbol{z}_2(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{y}}, \ddot{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{c}_2(\boldsymbol{x}) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{2,1}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{y}}) \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \tag{3.23}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ -2x_3\dot{y}_1 - 2x_3\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 \\ 9\dot{y}_1 - 3\ddot{y}_1 - \ddot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ -4x_1x_3 + 2x_2 - 6x_3^2 + x_4 \\ 6x_1 + 4x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - 6x_1 - 10x_3 + 6\dot{y}_1 & 2x_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad . \tag{3.24}$$

Da der Rang der Matrix $\boldsymbol{D}_2(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{y}})$ gleich zwei und damit gleich m ist, endet der Algorithmus an dieser Stelle und das inverse System ergibt sich zu

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{D}_{2,1}^{-1}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{y}})[\boldsymbol{z}_2(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{y}}, \ddot{\boldsymbol{y}}) - \boldsymbol{c}_2(\boldsymbol{x})] \quad . \tag{3.25}$$

❑

3.2 Der algebraische Inversionsalgorithmus

Der hier beschriebene algebraische Inversionsalgorithmus ist bereits in Senger (1997) sowie Senger und Spielmann (1997) dargestellt und wird deshalb an dieser Stelle sehr komprimiert wiedergegeben. Der Algorithmus beruht wesentlich auf der Verwendung der Ordnungsfunktion, wie sie z. B. bei Cao und Zheng (1992) eingesetzt ist. Diese Ordnungsfunktion ermöglicht eine kompakte algebraische Darstellung des Strukturalgorithmus. Wie schon in Abschnitt 2 angedeutet, kommt die Ordnungsfunktion $y_{l_1}^{(k_1)} \prec y_{l_2}^{(k_2)}$ zur Anwendung, welche die Ausgangssignalableitungen bzw. deren totale Differentiale in folgender Weise ordnet:

$$\mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2, \ldots, \mathrm{d}y_p, \mathrm{d}\dot{y}_1, \mathrm{d}\dot{y}_2, \ldots, \mathrm{d}\dot{y}_p, \ldots, \mathrm{d}y_1^{(k)}, \mathrm{d}y_2^{(k)}, \ldots, \mathrm{d}y_p^{(k)}, \ldots \quad , \tag{3.26}$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_p, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ldots, \dot{y}_p, \ldots, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_p^{(k)}, \ldots \quad . \tag{3.27}$$

Das Differential der k-ten Ausgangssignalableitung des Ausgangs $\mathrm{d}y_l^{(k)}$ stellt einen Vektor in dem Vektorraum $\mathcal{E}$ dar, der von $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ und $\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{(\nu)}$, $0 \leq \nu \leq n-1$ aufgespannt wird (Senger 1996). Mit der Zerlegung

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_x \oplus \mathcal{E}_u \tag{3.28}$$

in die Unterräume

$$\mathcal{E}_x = \text{span}_{\mathcal{K}}\{\mathrm{d}x_i | 1 \le i \le n\} \quad \text{und} \tag{3.29}$$

$$\mathcal{E}_u = \text{span}_{\mathcal{K}}\{\mathrm{d}u_j^{(\nu)} | 1 \le j \le n \ \wedge \ 0 \le \nu \le n-1\} \tag{3.30}$$

kann folgende Definition, der eine zentrale Rolle zukommt, angegeben werden:

Definition 3.2: *u-Linksabhängigkeit* (Cao und Zheng 1992)
$\mathrm{d}y_l^{(k)}$ wird als u-linksabhängig bezeichnet, wenn

$$\mathrm{d}y_l^{(k)} \in \mathcal{E}_x + \text{span}_{\mathcal{K}}\{\mathrm{d}y_\alpha^{(\beta)} | y_\alpha^{(\beta)} \prec y_l^{(k)}\} \quad . \tag{3.31}$$

Andernfalls wird $\mathrm{d}y_l^{(k)}$ als u-linksunabhängiger Vektor in (3.26) bezeichnet. Entsprechend wird ein Element $y_l^{(k)}$ aus (3.27) u-linksabhängig (bzw. u-linksunabhängig) genannt. ❑

Wenn die Menge L_u gegeben ist durch

$$L_u = \{y_l^{(k)} | y_l^{(k)} \text{ ist } u\text{−linksunabhängig}\} \tag{3.32}$$

und die Systeminvarianten

$$\rho_l = \begin{cases} \infty & \text{, wenn } y_l^{(k)} \notin L_u \ , \quad \forall k \ge 0 \\ \min\{k | y_l^{(k)} \in L_u\} & \text{, sonst} \end{cases} \quad , \quad l = 1, \ldots, p \ . \tag{3.33}$$

berücksichtigt werden, dann knüpft das folgende Lemma die Verbindung zu der weiteren Vorgehensweise.

Lemma 3.1
Wenn $\rho_l < \infty$ ist, dann existiert eine eindeutige Funktion $\psi_{l,j}$, $j = 0, \ldots, m$, so daß

$$\begin{aligned} y_l^{(\rho_l)} = \ & \psi_{l,0}(\boldsymbol{x}, y_\alpha^{(\beta)} | y_\alpha^{(\beta)} \prec y_l^{(\rho_l)} \wedge y_\alpha^{(\beta)} \in L_u) \\ & + \sum_{j=1}^{m} \psi_{l,j}(\boldsymbol{x}, y_\alpha^{(\beta)} | y_\alpha^{(\beta)} \prec y_l^{(\rho_l)} \wedge y_\alpha^{(\beta)} \in L_u) \cdot u_j \quad . \end{aligned} \tag{3.34}$$

❑

Durch eine Permutation der Ausgangssignalindizes kann erreicht werden, daß gilt:

$$\begin{aligned} & y_{l_1} \prec y_{l_2} \prec \ldots \prec y_{l_p} \\ \wedge \ & \rho_{l_1} \le \rho_{l_2} \le \ldots \le \rho_{l_p} \le \infty \end{aligned} \quad . \tag{3.35}$$

Es sei

$$\sigma = \text{card}\{\rho_l | \rho_l < \infty, l = 1, \ldots, p\} \quad , \tag{3.36}$$

womit σ im übrigen dem differentialalgebraischen Rang des Systems entspricht und weiterhin gilt: $\sigma \le \min\{m, p\}$. Es kann Gl. (3.34) in Matrixform als

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \boldsymbol{\psi}_0 + \boldsymbol{\psi}_1 \boldsymbol{u} \quad , \tag{3.37}$$

mit $\boldsymbol{\Upsilon} = [y_1^{(\rho_1)}, \ldots, y_\sigma^{(\rho_\sigma)}]^{\mathrm{T}}$ geschrieben werden, und es gilt aufgrund der Bildungsvorschrift von ρ_l (Gl. (3.33)): rang $\boldsymbol{\psi}_1 = \sigma$. Daß Gl. (3.37) für $\sigma = m$ nach $\boldsymbol{u}$ umgestellt werden kann, ist evident.

Es folgt aus diesen Ausführungen ein ähnlicher Ablauf der Inversion wie bei dem oben dargestellten klassischen Strukturalgorithmus. Es werden sukzessive die Ausgangssignalableitungen gebildet. An die Stelle der Rangbestimmung beim klassischen Strukturalgorithmus tritt aber beim algebraisch formulierten Inversionsalgorithmus die Überprüfung der u-Linksunabhängigkeit in der Form, daß geprüft wird, ob eine unabhängige Ausgangsignalableitung in u_i auftritt. In (Senger 1996, Senger 1997) sind einige Beispiele angegeben, in denen dieser Algorithmus zur Bestimmung der exakten Linearisierung, Störsignalentkopplung oder Modellfolgeregelung von Mehrgrößensystemen genutzt wird.

4 Anwendung der Gröbner-Basen zur Inversion

Wie in Abschnitt 2 angedeutet, wird die Basis eines differentialalgebraischen Ideals aus der Sicht der kommutativen Algebra nicht mit endlich vielen Elementen erzeugt. Dementsprechend scheint es zunächst nicht angebracht, Werkzeuge der kommutativen Algebra zu nutzen, um eine solche Basis zu bestimmen. Einige Überlegungen geben allerdings dazu Anlaß, die in Abschnitt 2 vorgestellten Gröbner-Basen zu nutzen, da unter bestimmten Bedingungen die gesuchte Idealbasis endlich ist. Die zentrale Idee entstand aus der Arbeit von Di Benedetto u. a. (1989), die die Bestimmung des differentialalgebraischen Ranges unter Verwendung von Kähler-Differentialen auf eine Dimensionsbestimmung nichtdifferentieller Vektorräume zurückführte, die dann wiederum durch eine Rangbestimmung von Jacobi-Matrizen erfolgen kann (Wey 1996). Wenn es gelingt, nicht nur die Dimension der Kaskade von Vektorräumen zu bestimmen, sondern jeweils eine Basis der Vektorräume, dann werden damit die einzelnen Schritte des algebraischen Inversionsalgorithmus aus Abschnitt 3 abgearbeitet. Zudem ist von Di Benedetto u. a. (1989) gezeigt, daß die Dimension der Kette von Vektorräumen gegen den differentialalgebraischen Rang eines Systems konvergiert. Somit wird nur eine endliche Anzahl von Ausgangssignalableitungen benötigt, weshalb die Idealbasis ebenfalls endlich generiert wird. Damit liegt der folgende Schluß nahe: Substituiert man die Ableitungen der Ausgangssignale sowie der Eingangssignale durch andere Variablen, so können mit geeigneter Monomordnung Gröbner-Basen des durch diese Polynome erzeugten Ideals bestimmt werden. Wertet man anschließend die Anzahl derjenigen Elemente der Gröbner-Basen aus, die substituierte Variablen verschiedener Eingangssignale enthalten, so ergeben sich die Eingangssignale des Systems bzw. das inverse System, vorausgesetzt, das System ist linksinvertierbar.

Für den Inversionsalgorithmus bedeutet dies eine sukzessive Bestimmung der Gröbner-Basen für die Ableitungsstufen der Ausgangssignale. Die erzeugenden Polynome, also hier die einzelnen Ausgangssignalableitungen, müssen dafür in Normalform vorliegen, d. h. die rechte Seite der Gleichung muß gleich null sein. Ist beispielsweise $\dot{y}_1 = x_2$, so geht das erzeugende Polynom $\dot{y}_1 - x_2$ in die Berechnung der Gröbner-Basis ein. Die Substitution der zeitlichen Ableitungen der Ein- und Ausgangsgrößen kann einfach durch eine Doppelindizierung vorgenommen werden, bei der der zweite Index die Ableitungsstufe kennzeichnet. Damit gilt dann z. B. $y_1 \to y_{1,0}$, $y_1^{(3)} \to y_{1,3}$ oder entsprechend $\dot{u}_2 \to u_{2,1}$ und $u_1^{(4)} \to u_{1,4}$. Da hier nur die Eliminationsideale in $u_{i,j}$ interessieren, läßt sich auf besonders einfache Weise eine geeignete Monomordnung festlegen. Es wird die Monomordnung

$$u_{1,0} < u_{2,0} < u_{3,0} < \ldots < u_{1,1} < u_{2,1} < u_{3,1} < \ldots < u_{1,2} < u_{2,2} < u_{3,2} < \ldots \qquad (4.1)$$

verwendet, die endlich ist, da sowohl die Anzahl der Eingangsgrößen als auch die maximale Ableitungsstufe der Eingangsgrößen begrenzt ist. Die maximale Ableitungsstufe der Eingangsgrößen ist begrenzt, weil maximal n zeitliche Ableitungen der Ausgangssignale im Verlauf des Inversionsalgorithmus gebildet werden. Zur einfacheren Notation definieren wir als Verallgemeinerung der Erläuterung von Satz 2.12 in Anlehnung an Buchberger (1985):

Definition 4.1: *Verallgemeinertes Eliminationsideal*
Das *i-te verallgemeinerte Eliminationsideal* wird durch diejenigen Polynome in GB erzeugt, die nur von den Variablen $u_{1,0}, u_{1,1}, u_{1,2}, \ldots, u_{2,0}, u_{2,1}, u_{2,2}, \ldots, u_{i,0}, u_{i,1}, u_{i,2}, \ldots$ abhängen. ❑

Mit der obigen Monomordnung (Gl. (4.1)) werden sukzessive mit jeder Stufe der Ausgangssignalableitungen die Gröbner-Basen $GB = \{g_1, g_2, \ldots, g_i, \ldots\}$ berechnet, bis entweder m verallgemeinerte Eliminationsideale gebildet werden können oder die n-te Ableitungsstufe erreicht ist. Ergibt sich dabei ein neues Eliminationsideal, so wird nach der neu aufgetretenen Eingangsgröße aufgelöst und dieser Ausdruck für die weitere Berechnung eingesetzt. Ist der differentialalgebraische Rang ρ^* des Systems aus anderen, z. B. graphentheoretischen, Berechnungen bereits bekannt, so kann der Vorgang abgebrochen werden, wenn ρ^* verallgemeinerte Eliminationsideale gebildet werden können, da die maximal mögliche Anzahl der verallgemeinerten Eliminationsideale natürlich, wie in dem algebraischen Inversionalgorithmus beschrieben, gegen σ und damit gegen ρ^* (vgl. Gl. (3.36)) konvergiert. Geht man von dem häufig auftretenden (aber für die differentialalgebraische Betrachtung nicht notwendigen) Fall aus, daß in der Systemdarstellung keine Eingangssignalableitungen auftreten, so braucht die Kaskade der Gröbner-Basen nur auf Polynome durchsucht werden, die $u_{i,0}$ enthalten. Diese Polynome erzeugen dann alle möglichen verallgemeinerten Eliminationsideale.

Der hier zunächst wenig anschaulich, weil weitgehend verbal, dargestellte Weg wird anhand einiger illustrativer Beispiele in dem nächsten Abschnitt verdeutlicht.

5 Beispielanwendungen unter MAPLE

Dieser Abschnitt behandelt einige Beispielsysteme, anhand derer die Anwendung der Gröbner-Basen deutlich wird. Begonnen wird mit den verwendeten Befehlen des Programmpaketes MAPLE, mit dessen Hilfe die Berechnungen durchgeführt wurden.

Unter MAPLE wird das Paket *grobner* benötigt, das einige Zusatzfunktionen bereitstellt. Die Hauptfunktion ist *gbasis*, die Funktion zur Bestimmung der Gröbner-Basen. Aber auch weitere Funktionen wie *spoly* zur Bestimmung der in Abschnitt 2 erwähnten S-Polynome, *leadmon* zur Bestimmung des führenden Monoms eines Polynoms oder die Funktion *normalf*, die benötigt wird, um reduzierte Gröbner-Basen zu berechnen, sind explizit aufrufbar. Für diese Befehle stehen Erläuterungen z. B. über Art und Funktion der möglichen Operanden zur Verfügung. Umfangreichere Erklärungen der Syntax finden sich bei Char u. a. (1991). Eine besondere Bedeutung kommt der Funktion *finduni* zu, die eine Bestimmung des ersten Eliminationsideals in einer vorgegebenen Variablen auch dann ermöglicht, wenn die Berechnungen zur Bestimmung der kompletten Gröbner-Basis zu komplex werden (Forsman 1992a). Der Grund dafür liegt in einer nicht streng lexikographischen Monomordnung, die den Algorithmus der Funktion *finduni* effizienter macht. Zu der Anwendung der MAPLE-Funktion *gbasis* sind bei Forsman (1992b) einige Beispiele sowie Hinweise angegeben. So ist beispielsweise eine kritische Betrachtung der Ergebnisse u. a. deshalb notwendig, weil bei der Auswertung der Eliminationsideale auch komplexe Werte auftreten können.

Die praktische Anwendung der Gröbner-Basen läßt sich einfach anhand eines sog. MAPLE-Worksheets, in dem eine Abfolge von Befehlen angegeben ist, nachvollziehen. In dem nachstehenden Beispiel wird dieses bilineare System betrachtet:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ 0 \\ x_5 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_4 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad , \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{y} = [x_1 \; x_2]^{\mathrm{T}} \quad . \tag{5.2}$$

Das in Bild 5.1 dargestellte Worksheet zeigt die Aufruf und Ergebnisse der ersten drei Ableitungsstufen, wobei zwei Besonderheiten zu erwähnen sind, erstens die Eigenschaft der Gröbner-Basis für den Fall, daß nur eine Eingangsgröße in den erzeugenden Polynomen auftritt und zweitens die dargestellte dritte Ableitungsstufe, die lediglich die Konvergenz des Algorithmus verdeutlichen soll. Zunächst war weiter oben erwähnt, daß sich die verallgemeinerten Eliminationsideale ergeben, indem in den fortlaufenden Ableitungsstufen diejenigen Polynome der Gröbner-Basen als erzeugende Polynome ausgewählt werden, die

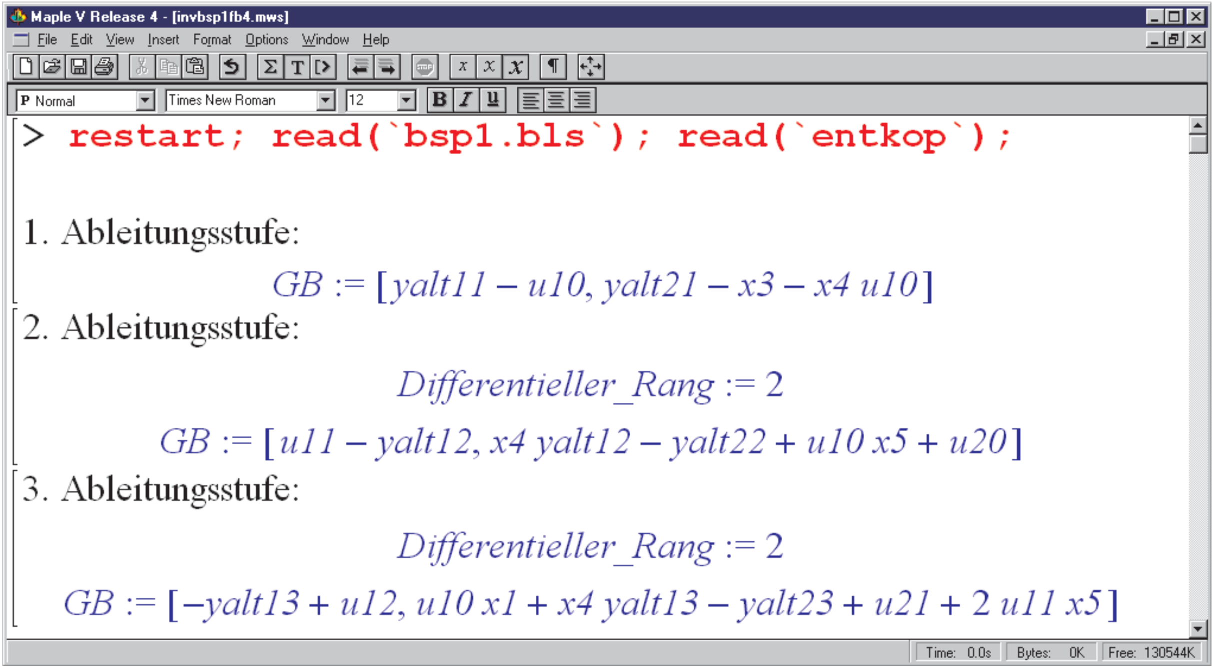

Bild 5.1: Maple-Worksheet zur Inversion des Systems (Gl. (5.1)–(5.2))

eine neue Eingangsgröße $u_{i,0}$ aufweisen. In dem dargestellten Fall ist die Gröbner-Basis für die erste Ableitungsstufe mit $\{y_{1,1} - u_{1,0}, y_{2,1} - x_3 - x_4 u_{1,0}\}$ angegeben, was genau genommen nicht korrekt ist. Die Berechnung ergibt $GB = \{1\}$, wenn nur eine Variable der Monomordnung in den erzeugenden Polynomen auftritt, was an dem Algorithmus zur Berechnung der Gröbner-Basen liegt, der selbstverständlich für mehr als eine Variable ausgelegt ist. Deshalb wird in dem erstellten Programm für diesen Fall die Liste der erzeugenden Polynome angegeben, aus der dann das Polynom des ersten Eliminationsideals auszuwählen ist. Eine Betrachtung der Gröbner-Basis $GB = \{g_1, g_2\}$ der zweiten Ableitungsstufe zeigt, daß g_1 die Ableitung des ersten Elementes der Gröbner-Basis der ersten Ableitungsstufe ist. Man wählt deshalb aus:

i) Erzeugendes Polynom des ersten Eliminationsideals:

$$y_{1,1} - u_{1,0} \qquad \text{bzw.} \qquad \dot{y}_1 - u_1 \qquad ,$$

ii) Erzeugende Polynome des zweiten Eliminationsideals:

$$\{y_{1,1} - u_{1,0}\ ,\ x_4 y_{1,2} - y_{2,2} + u_{1,0} x_5 + u_{2,0}\} \qquad \text{bzw.}$$
$$\{\dot{y}_1 - u_1\ ,\ x_4 \ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 + u_1 x_5 + u_2\} \qquad ,$$

wodurch u_1 und u_2 in Abhängigkeit der Zustandsvariablen und der Ausgangsgrößen bzw. deren zeitlicher Ableitungen bestimmbar sind. Nach der zweiten Ableitungsstufe ist die Abbruchbedingung erreicht, da die Gröbner-Basis das Maximum von $m = 2$ Elementen aufweist. Diese Anzahl entspricht, wie bereits weiter oben dargestellt, dem differentialalgebraischen Rang des Systems. Der dritte Aufruf in dem Worksheet ist lediglich aufgeführt, um zu zeigen, daß in der dritten Ableitungsstufe die Anzahl der Elemente der Gröbner-Basis tatsächlich nicht ansteigt, sondern die Gröbner-Basis nur die zeitlichen Ableitungen der Elemente der Gröbner-Basis der zweiten Ableitungsstufe enthält.

Die in diesem Bericht vorgeschlagene Methode ist besonders dann von Interesse, wenn nichtlineare Gleichungen in u_i bei den Ausgangssignalableitungen auftreten. Ein weiteres System soll die Wirksamkeit verdeutlichen. Das Sytem lautet:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 u_2 + x_1 u_2 \\ u_1 x_2 + x_3^2 u_1 u_2 \end{bmatrix} \quad , \tag{5.3}$$

$$\boldsymbol{y} = [x_1 \; x_2]^{\mathrm{T}} \quad . \tag{5.4}$$

In den zweiten Ableitungen der Ausgangssignale treten die Eingangssignale nichtlinear auf. Wie man leicht ermitteln kann, lauten diese Ableitungen:

$$\ddot{y}_1 = u_1 u_2 + x_1 u_2 \quad , \tag{5.5}$$

$$\ddot{y}_2 = x_1 + x_2 u_1 + x_3^2 u_1 u_2 \quad . \tag{5.6}$$

Unter MAPLE wird wieder automatisiert die Inversion vorgenommen und das Ergebnis für die Gröbner-Basis ist Bild 5.2 zu entnehmen. Damit gilt für die Eliminationsideale wiederum:

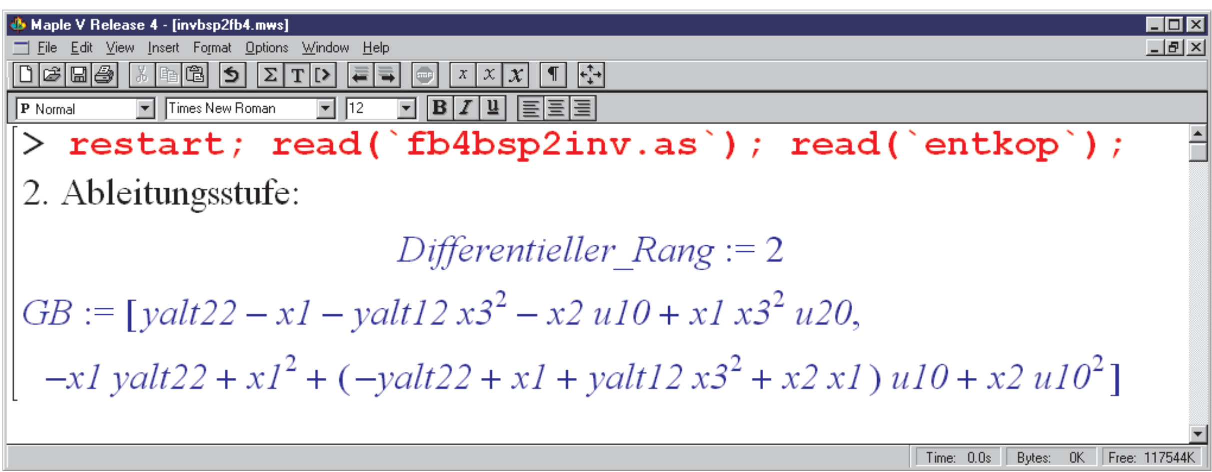

Bild 5.2: MAPLE-Worksheet zur Inversion des Systems (Gl. (5.3)–(5.4))

i) Erzeugendes Polynom des ersten Eliminationsideals:

$$-x_1 y_{2,2} + x_1^2 + (-y_{2,2} + x_1 + y_{1,2} x_3^2 + x_1 x_2) u_{1,0} + x_2 u_{1,0}^2 \qquad \text{bzw.}$$

$$x_1 \ddot{y}_2 - x_1^2 + (-\ddot{y}_2 + x_1 + \ddot{y}_1 x_3^2 + x_1 x_2) u_1 + x_2 u_1^2 \qquad ,$$

ii) Erzeugende Polynome des zweiten Eliminationsideals:

$$
\begin{aligned}
&\{-x_1 y_{2,2} + x_1^2 + (-y_{2,2} + x_1 + y_{1,2} x_3^2 + x_1 x_2) u_{1,0} + x_2 u_{1,0}^2 \ , \\
&\quad y_{2,2} - x_1 - y_{1,2} x_3^2 - x_2 u_{1,0} + x_1 x_3^2 u_{2,0}\} \qquad \text{bzw.} \\
&\{x_1 \ddot{y}_2 - x_1^2 + (-\ddot{y}_2 + x_1 + \ddot{y}_1 x_3^2 + x_1 x_2) u_1 + x_2 u_1^2 \ , \\
&\quad \ddot{y}_2 - x_1 - \ddot{y}_1 x_3^2 - x_2 u_1 + x_1 x_3^2 u_2\} \qquad .
\end{aligned}
$$

Setzt man nun die Elemente der zweiten Eliminationsbasis $E = \{E_1, E_2\}$ zu null ($E_1 = 0$ und $E_2 = 0$), dann kann man diese Gleichungen nach den Eingangsgrößen auflösen und erhält das inverse System.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dem vorliegenden Bericht wird das algebraische Hilfsmittel *Gröbner-Basis* mit den notwendigen Grundlagen der Algebra vorgestellt. Vor dem Hintergrund der großen Bedeutung der Inversionsalgorithmen bei Syntheseaufgaben zur Regelung nichtlinearer analytischer Systeme ist es ein Ziel, diese Algorithmen automatisiert abzuarbeiten, um Systeme höherer Ordnung und stark vermaschte Systeme behandeln zu können. Hierzu bieten sich mathematische Methoden an, die zuverlässig einzelne Schritte der Algorithmen abarbeiten können. In diesem Bericht wird die Idee präsentiert, das algebraische Werkzeug *Gröbner-Basis* zu nutzen, um ein Gleichungssystem aus nichtlinearen Differentialgleichungen zu invertieren und damit differentialalgebraische Bedingungen bei der Reglersynthese zu überprüfen sowie die Synthese selbst durchzuführen. Neben der Tatsache, daß Gröbner-Basen als Eliminationsalgorithmus für nichtlineare (algebraische) Gleichungssysteme genutzt werden können, ist die Hauptidee, die für die Gröbner-Basen benötigte Monomordnung in Verbindung mit einer sukzessiven Substitution der zeitlichen Ableitungen zu nutzen, um eine differentialalgebraische Transzendenzbasis für $k\langle \boldsymbol{y} \rangle / k$ in Form einer differentialalgebraischen Idealbasis der Systemgleichungen zu bestimmen. Einzige Restriktion ist dabei, daß die Nichtlinearitäten des Systems in Form von Polynomen vorliegen, sofern ein Standard-Computer-Algebra-System verwendet werden soll. Ähnlich der Vorgehensweise bei Zustandsmodellen, Differentialgleichungen höherer Ordnung in ein lösbares System von Differentialgleichungen erster Ordnung zu überführen, wird hier mit Hilfe von substituierten Variablen die Inversion eines Systems nichtlinearer Differentialgleichungen mit (nicht-differential-)algebraischen Mitteln erreicht, indem sukzessive die einzelnen Ableitungsstufen der Ausgangssignale untersucht werden. Die so erhaltene Basis des differentialalgebraischen Gleichungssystems stellt gleichzeitig eine Basis derjenigen Körpererweiterung dar, die das System charakterisiert, und damit entspricht die Anzahl der die Basis aufspannenden differentialalgebraischen Polynome dem differentialalgebraischen Rang des Systems. Die Vorgehensweise ist anhand des Strukturalgorithmus in einer ursprünglichen Form und einer differentialalgebraischen Form in den Abschnitten 3 und 4 sowie den Beispielen in Abschnitt 5 vorgestellt. Damit ist die Basis für die Anwendbarkeit bei der Synthese von Regelungsgesetzen zur Störsignalentkopplung, Modellfolgeregelung sowie der exakten Linearisierung nichtlinearer Mehrgrößensysteme gelegt.

Die beschriebenen Eigenschaften von Gröbner-Basen eröffnen weitere Anwendungsfelder. So ist beispielsweise eine auffallende Ähnlichkeit des von Isidori (1995) angegeben Algorithmus zur Bestimmung der Nulldynamik eines Systems mit dem in diesem Bericht angegebenen Strukturalgorithmus feststellbar. Nun liegt es nahe, den Nulldynamikalgorithmus ebenfalls algebraisch zu formulieren und anschließend Gröbner-Basen zur Berechnung der Nulldynamik einzusetzen. Erste Ergebnisse hierzu liegen bereits vor und werden in einem nachfolgenden Bericht dokumentiert.

7 Literatur

Atiyah, M. F. und **I. G. Macdonald**. 1969. *Introduction to commutative algebra*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.

Bronstein, I. N. und **K. A. Semendjajew**. 1991. *Taschenbuch der Mathematik*. Stuttgart: Teubner.

Buchberger, B. 1970. Ein algorithmisches Kriterium für die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems. *aequationes mathematicae* 4. 374–383.

Buchberger, B. 1985. Gröbner Bases: an algorithmic method in polynomial ideal theory. *Multidimensional System Theory: Progress, Directions and Open Problems in Multidimensional Systems*, hg. von N. K. Bose. 184–229. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Cao, L. und **Y.-F. Zheng**. 1992. Disturbance decoupling via dynamic feedback. *International Journal of Systems Science* 23(5). 683–694.

Char, B. W., **K. O. Geddes**, **G. H. Gonnet**, **B. L. Leong**, **M. B. Monagan** und **S. M. Watt**. 1991. *Maple V: Library reference manual*. New York: Springer.

Cox, D., **J. Little** und **D. O'Shea**. 1992. *Ideals, varieties, and algorithms: An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. New York: Springer.

Di Benedetto, M. D., **J. W. Grizzle** und **C. H. Moog**. 1989. Rank invariants of nonlinear systems. *Society for industrial and applied mathematics SIAM Journal on Control and Optimization* 27. 658–672.

Eisenbud, D. 1995. *Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry*. New York: Springer.

Fliess, M. 1986. Nonlinear control theory and differential algebra. *Modelling and Adaptive Control: Lecture Notes in Control and Information Science*, hg. von S. Engell. Berlin: Springer.

Fliess, M. 1987. Nonlinear control theory and differential algebra: Some illustrative examples. *Proc. 10th IFAC World Congress*. München, Deutschland. 114–118.

Fliess, M. 1990. Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* ***AC*** 35(9). 994–1001.

Fliess, M. und **T. Glad**. 1993. An algebraic approach to linear and nonlinear systems. *Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications*, hg. von J. W. H. L. Trentelman. 223–267. Boston: Birkhäuser.

Forsman, K. 1992a. *Elementary aspects of constructive commutative algebra*. Technical Report. Dept. Electrical Engineering. Linköping University. Linköping, Sweden.

Forsman, K. 1992b. *The hitch hiker's guide to Gröbner Bases: commutative algebra for amateurs*. Technical Report. Dept. Electrical Engineering. Linköping University. Linköping, Sweden.

Fortell, H. 1995. *Algebraic approaches to normal forms and zero dynamics*. Dissertation. Linköping University. Linköping, Sweden.

Gellert, W., **H. Kästner** und **S. Neuber** (Hgg.). 1985. *Lexikon der Mathematik*. Leipzig: VEB Bibliographisches Institut.

Gröbner, W. 1949. *Moderne algebraische Geometrie*. Wien: Springer.

Hirschorn, R. M. 1979. Invertibility of multivariable nonlinear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* ***AC*** 24(6). 855–865.

Isidori, A. 1995. *Nonlinear control systems*. Berlin: Springer.

Jacobi, C. G. J. 1841. De Determinantibus functionalibus. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 22(4). 319–359.

Jirstrand, M. 1996. *Algebraic methods for modeling and design in control*. Dissertation. Linköping University. Linköping, Sweden.

Kolchin, E. R. 1973. *Differential algebra and algebraic groups*. New York: Academic Press.

Korn, G. A. und **T. M. Korn**. 1968. *Mathematical handbook for scientists and engineers*. New York: McGraw-Hill.

Kunz, E. 1979. *Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie*. Braunschweig: Vieweg.

Lang, S. 1993. *Algebra*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.

Levine, J. 1996. A graph-theoretic approach to input-output decoupling and linearization. *Nonlinear Systems, Vol. 3*, hg. von A. J. Fossard und D. Normand-Cyrot. London: Chapman & Hall.

Pauer, F. und **M. Pfeifhofer**. 1988. The theory of Gröbner Bases. *L'Enseignement Mathematique* 34. 215–232.

Rebhuhn, D. 1980. Invertibility of C^∞ multivariable input-output systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* ***AC*** 25. 207–212.

Ritt, J. F. 1950. *Differential Algebra*. New York: Dover.

Schwarz, H. 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme: Systemtheoretische Grundlagen.* München: Oldenbourg.

Senger, M. 1996. *Zur Störgrößenentkopplung nichtlinearer Mehrgrößensysteme.* Forschungsbericht 16/96. Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik, Fachbereich Maschinenbau. Universität Duisburg.

Senger, M. 1997. *Zur Modellfolgeregelung nichtlinearer Mehrgrößensysteme.* Forschungsbericht 1/97. Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik, Fachbereich Maschinenbau. Universität Duisburg.

Senger, M. und **M. Spielmann**. 1997. Synthesis of a disturbance decoupling feedback via graph-theoretical methods. *European Control Conference ECC '97.* Brüssel, Belgien.

Sharp, R. Y. 1990. *Steps in commutative algebra.* Cambridge: Cambridge University Press.

Silverman, L. M. 1969. Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* ***AC*** 14(3). 270–276.

Singh, S. N. 1981. A modified algorithm for invertibility in nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* ***AC*** 26(2). 595–598.

Wey, T. 1996. *Ein graphentheoretischer Ansatz zur strukturellen Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme.* Fortschritt-Berichte VDI Reihe 8 Nr. 556. Düsseldorf: VDI Verlag.

Wey, T. und **F. Svaricek**. 1995. Analyse und Synthese nichtlinearer Regelungssysteme mittels Differentialalgebra. *Automatisierungstechnik* ***at*** 43(4). 163–173.