

# Flachheitsbasierte Regelung – Folgeregelung eines hydraulischen Differentialzylinders

Torsten Wey und Markus Lemmen

Forschungsbericht Nr. 11/97

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

**Übersicht:** Bei der Regelung von Robotern ist man mit der Aufgabe der Folgeregelung bzw. Bahnverfolgung konfrontiert. Der Endeffektor soll eine vorgegebene Bahn abfahren, während dieses Bewegungsvorgangs ändert sich das Systemverhalten kontinuierlich. Infolge des großen Arbeitsbereichs ist die Annahme eines linearisierten Modells nicht ausreichend, deshalb ist eine nichtlineare Modellbildung erforderlich. Für nichtlineare Modelle, die als *flach* charakterisiert werden können, vereinfacht sich die Trajektorienregelung wesentlich. Denn bei diesem Verfahren wird durch eine Rückführung die Dynamik des Folgefehlers linearisiert, der Dynamik des geregelten Systems wird dagegen kein lineares Verhalten aufgeprägt. Daraus resultiert ein geringer Aufwand bei der Auslegung leistungsfähiger Regler, außerdem können eine Vielzahl technischer Anlagen als flache Systeme modelliert werden.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg  
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik  
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

## Inhaltsverzeichnis

<b>Formelzeichen und Bezeichnungen</b>	<b>II</b>
<b>1 Einleitende Übersicht</b>	<b>1</b>
<b>2 Mathematische Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1 Begriffe . . . . .	4
2.2 Systembegriff . . . . .	6
2.3 Dynamische Rückführungen . . . . .	8
<b>3 Der Begriff des flachen Systems</b>	<b>9</b>
<b>4 Rechnerunterstützte Bestimmung von Systemeigenschaften</b>	<b>12</b>
4.1 Flachheit und Erreichbarkeit . . . . .	12
4.2 Rechnerunterstützte Untersuchung . . . . .	14
4.3 Auslegung von Regelungen . . . . .	17
<b>5 Anwendung am Laborversuch „Differentialzylinder“</b>	<b>22</b>
5.1 Simulationsergebnisse . . . . .	22
5.2 Erprobung am Versuchsträger . . . . .	23
<b>6 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>26</b>
<b>7 Literatur</b>	<b>27</b>
<b>Anhang</b>	<b>28</b>
<b>A Begriffe und Operatoren der Differentialalgebra</b>	<b>29</b>
<b>B Simulationsmodell des Laborversuchs „Differentialzylinder“</b>	<b>31</b>

## Formelzeichen und Bezeichnungen

### Abkürzungen

ALS	analytisches System mit linear eingehender Steuerung
AS	analytisches System
BLS	bilineares System
CAS	Computer-Algebra-System
LS	lineares System
QLS	quadratisches System mit linear eingehender Steuerung
$\Sigma$	System

### Algebraische Größen<sup>1</sup>

$A$	Systemmatrix
$B$	Eingangsmatrix
$C$	Ausgangsmatrix
$c$	konstantes Element eines Körpers
$c_i^T$	$i$ -te Zeile der Matrix $C$
$e_y$	Regelfehler
$F$	differentieller Körper
$F_C$	Coulombsche Reibung
$F_H$	Haftreibung
$F_R$	Reibkraft
$F_S$	Störkraft
$F_V$	viskose Reibung
$f(x)$	Systemvektor
$G(x)$	Eingangsmatrix
$H(x)$	Ausgangsmatrix
$h(x)$	Ausgangsvektor
$K$	differentieller Körper
$L$	differentieller Körper
$M$	differentieller Körper
$m$	Dimension des Eingangsvektors $u(t)$
$n$	Dimension des Zustandsvektors $x(t)$ , Systemordnung
$p$	Dimension des Ausgangsvektors $y(t)$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathcal{U}_0$	Umgebung um einen Arbeitspunkt
$u_j(t)$	Elemente des Eingangsvektors
$u(t)$	Eingangsvektor
$\bar{u}$	abkürzende Schreibweise für $\{u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), \dots\}$
$x_k(t)$	Elemente des Zustandsvektors
$x(t)$	Zustandsvektor
$y_i(t)$	Elemente des Ausgangsvektors
$y(t)$	Ausgangsvektor
$\bar{y}$	abkürzende Schreibweise für $\{y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots\}$
$\delta$	Defekt

<sup>1</sup> Im Sinne einer möglichst übersichtlichen Notation wird die Zeitabhängigkeit von Größen nicht an allen Stellen innerhalb des Berichts explizit vermerkt.

**Indizes**

0	Arbeitspunkt, Gleichgewichtslage
fl	flach
$i, j, k$	Laufindizes
lin	linear, linearisierend
Soll	Sollgröße, Solltrajektorie

**Operatoren**

$K[x]$	Polynome in $x$ mit Koeffizienten aus $K$
$K(x)$	Körper der rationalen Funktionen in $x$ mit Koeffizienten aus $K$
$K\{x\}$	Polynome in $x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots$ mit Koeffizienten aus $K$
$K\langle x \rangle$	Körper der rationalen Funktionen in $x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots$ mit Koeffizienten aus $K$
/	Körpererweiterung
\	Differenzmenge
$\cup$	Vereinigung von Mengen
$\cap$	Durchschnitt von Mengen
$\subset$	echte Teilmenge von
$\subseteq$	Teilmenge von
$\in$	Element von
$\notin$	nicht Element von
$\exists$	Existentialquantor
$\forall$	Allquantor
$:=$	Zuweisungsoperator
$\rightarrow, \mapsto$	Abbildung auf
$\wedge$	Konjunktion
$\vee$	Disjunktion
$(\cdot)^{(k)}$	$k$ -te zeitliche Ableitung
$(\cdot)^T$	transponierte Größe
$(\cdot)_i$	Element in der $i$ -ten Zeile eines Vektors
$(\cdot)_{ij}$	Element in der $i$ -ten Zeile und $j$ -ten Spalte einer Matrix
$f(\cdot)$	allgemeine Funktion der Operanden
det	Determinante
diff. trg	differentieller Transzendenzgrad
rang	Rang einer Matrix
trg	Transzendenzgrad

## 1 Einleitende Übersicht

Der vorliegende Bericht befaßt sich mit einer speziellen Klasse von nichtlinearen, zeitinvarianten Mehrgrößensystemen, den sogenannten *differentiell flachen* Systemen (engl.: differential flat systems) oder auch einfach *flachen* Systemen  $\Sigma_f$ . Die Bezeichnung *flach* weist jedoch weder auf die räumliche Ausdehnung noch auf den geistigen Gehalt eines Systems hin. Sie impliziert vielmehr bestimmte systemtheoretische Eigenschaften, die für die (nichtlineare) Regelung, insbesondere die Folgeregelung und das Problem der inversen Dynamik, von großem Interesse sind.

Anschaulich steht hinter der Eigenschaft „flach“ die Existenz eines Systemausgangs derart, daß *alle* Zustands- und *alle* Eingangsgrößen des Systems *ohne* Integration in Abhängigkeit gerade dieses Ausgangs berechnet werden können. Mathematisch präziser formuliert ist ein System dann flach, wenn ein Ausgang  $\mathbf{y}_{\text{lin}} \in \mathbb{R}^m$  der Form

$$\mathbf{y}_{\text{lin}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(\alpha)})$$

existiert, so daß

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{f}_1(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(\beta)}) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{f}_2(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(\beta)}) \end{aligned}$$

gilt. Obwohl die Verknüpfungen der *Flachheit* mit besser bekannten Kriterien der Differentialgeometrie noch nicht endgültig geklärt sind, stehen folgende Resultate fest:

1. Systeme, welche mittels statischer Zustandsrückführung (und ggf. einer Zustandstransformation) exakt linearisiert werden können (Schwarz 1991:373), sind immer flach,
2. Systeme, für die der (Vektor-)Differenzegrad der Systemordnung  $n$  entspricht, sind flach,
3. jedes flache System kann mit einer dynamischen Zustandsrückführung linearisiert werden,
4. jedes flache System ist steuer-/erreichbar (für lineare Systeme gilt auch der Umkehrschluß).

Die Eigenschaft „flach“ kann damit u. a. als eine Erweiterung der von Kalman definierten Steuerbarkeit interpretiert werden, für lineare Systeme sind beide Eigenschaften synonym. Die Verknüpfung 3 sollte zudem keine Verwechslung der Eigenschaften flach und dynamisch zustandslinearisierbar aufkommen lassen, vielmehr ist flach eine Beschreibung, die systemimmanent und damit unabhängig von der Wahl einer Zustandsdarstellung ist.

Die Charakterisierung von flachen Systemen hängt eng mit der von Fliess (1986) eingeführten Theorie der *Differentialalgebra* zusammen. In den letzten Jahren hat das Feld der Differentialalgebra und besonders die Betrachtung von flachen Systemen für ein großes Forschungsinteresse gesorgt. Dies besonders deshalb, weil eine Vielzahl von technisch relevanten Systemkonfigurationen und Fragestellungen die Eigenschaft „flach“ aufweist. Eine Reihe solcher Beispiele waren Thema von Plenarveranstaltungen auf kürzlich stattfindenden Konferenzen, beispielsweise auf der letzten MTNS'96 (Fliess u. a. 1997).

Wie oben angesprochen, bezieht sich die zentrale Eigenschaft flacher Systeme aus systemtheoretischer Sicht auf die Existenz eines sogenannten *linearisierenden* Systemausgangs  $y_{lin}$ . Dieser Ausgang muß nicht zwangsläufig mit den physikalisch verfügbaren Ausgangssignalen übereinstimmen. Er weist einige spezifische und gerade für die Regelung interessante Eigenschaften auf:

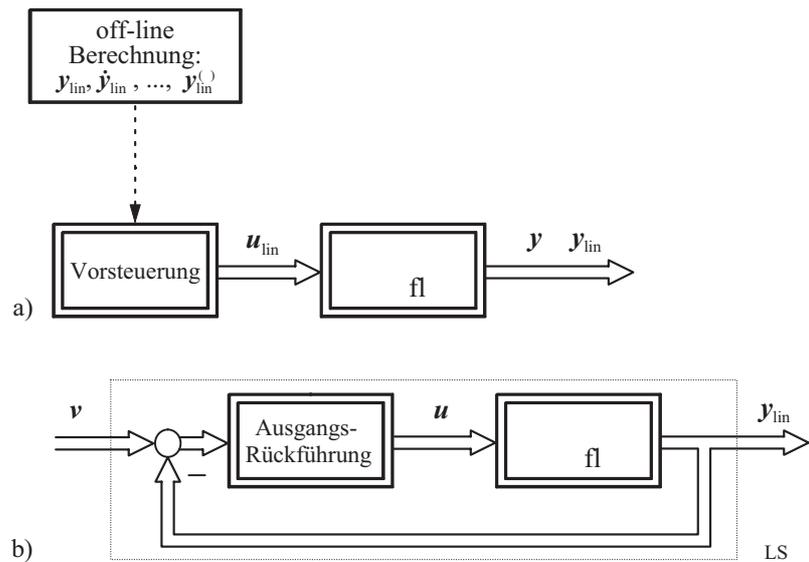
- gibt man eine Solltrajektorie  $y_{lin} = y_{Soll}$  vor, dann kann  $u_{lin}$  ohne jegliche Integration oder Lösung von Differentialgleichungen direkt bestimmt werden. Im Falle idealer Modellbildung entspricht der Systemausgang der Solltrajektorie (vgl. Bild 1.1a),
- die (dynamische) Rückführung von  $y_{lin}$  kann das nichtlineare System in ein System mit linearem Verhalten – in der Regel Integratorketten – überführen. Damit besteht ein direkter Bezug zur *exakten Linearisierung* wie sie von (Schwarz 1991, Isidori 1995) in differentialgeometrischer Form vorgeschlagen wird. Die Rückführung ist *keine* Funktion der Zustandsgrößen, sondern wird nur in Abhängigkeit von  $y_{lin}$  und dessen zeitlichen Ableitungen bestimmt (vgl. Bild 1.1b),
- für eine Vielzahl von technischen Systemen stimmt die physikalisch vorgegebene Ausgangsgröße gerade mit dem linearisierenden Ausgang  $y_{lin}$  überein.

Der Begriff eines linearisierenden Ausgangs wurde bereits im Rahmen der Differentialgeometrie geprägt (Isidori 1995:156), dort allerdings für rein statische Rückführgesetze. Im Gegensatz hierzu erlaubt der Ansatz der Differentialalgebra auch die einfache Betrachtung allgemeiner dynamischer Regelgesetze

$$\begin{aligned} \dot{z} &= a(x, z, v) \\ u &= b(x, z, v) \end{aligned} \quad (1.1)$$

die neben der neuen Eingangsgröße  $v$  und der Zustandsgröße  $x$  auch auf zusätzliche Integratoren, charakterisiert durch die Zustandsgröße  $z$ , zurückgreifen. Für den Spezialfall der flachen Systeme ist diese Rückführung  $u = \bar{b}(y, \dot{y}, \dots, y^{(\alpha)})$  ebenfalls dynamisch, kann aber allein in Abhängigkeit des Systemausgangs berechnet werden. Man spricht in diesem Fall von einer *endogenen* (lat.: von innen kommenden) Rückführung, die das nichtlineare System in ein System mit linearem Verhalten überführt. Solche endogenen Rückführgesetze sind eine Unterklasse der dynamischen Rückführungen in Gl. (1.1).

Nach dieser (mathematisch noch nicht exakten) Definition von flachen Systemen, die aber im folgenden Abschnitt präzisiert wird, soll auf die Vorteile näher eingegangen werden. Im beson-



**Bild 1.1.** Eigenschaften flacher Systeme

deren ist der Ansatz der flachen Systeme von Interesse und Vorteil, wenn auf eine Bahnverfolgung bzw. Trajektorienregelung Wert gelegt wird. Gerade das Umschalten zwischen verschiedenen Arbeitsbereichen auf einer vorgegebenen Trajektorie kann in einfacher Weise realisiert werden. Auch kann für eine Bahnverfolgung bereits off-line die Referenztrajektorie in eine geeignete Vorsteuerung konvertiert werden, die ausschließlich in Abhängigkeit von dem linearisierenden Ausgang  $y_{lin}$  berechnet wird. Das impliziert, daß die Rückführung ohne jegliche Integration/Lösung von Differentialgleichungen auskommt. Verwendet man Beobachter oder werden Teile des Zustandsvektors durch Messung ermittelt, kann zudem das Konzept der *flatness control* auf nicht (vollständig) flache Systeme erfolgreich angewendet werden. Die flachheitsbasierte Lösung einer Regelungsaufgabe wird in der Regel in zwei Stufen eingeteilt: in einem ersten Schritt wird die Solltrajektorie entworfen und off-line berechnet, anschließend eine Regelung zur Stabilisierung der Folgebewegung entlang dieser Solltrajektorie ausgelegt.

In diesem Bericht wird zur Verdeutlichung der Vorgehensweise ein Differentialzylinder untersucht, der zur Ansteuerung eines elastischen Handhabungssystems verwendet wird. Ziel ist das Abfahren einer Endeffektor-Bahn mit vorgegebener Geschwindigkeit. Die mathematische Realisierung dieses Zylinders ist nicht vollständig steuerbar und damit auch nicht flach. Dennoch kann das Konzept der genannten Regelung erfolgreich angewendet werden, wenn die (gemessenen) Kammerdrücke mit einbezogen werden. Vergleiche mit bestehenden Regelungskonzepten dokumentieren die Vorteile des gewählten Ansatzes.

Die Notation der flachen Systeme ist eng mit der Differentialalgebra und deren Methoden verbunden. Allerdings soll hier keine ausführliche Einführung in die Differentialalgebra erfolgen, lediglich die direkt mit dem Thema des Forschungsberichts zusammenhängenden Begriffe werden in Abschnitt 2 erläutert. Für umfassendere Informationen zur Differentialalgebra und deren Anwendung sei u. a. auf (Ritt 1950, Kaplansky 1976, Fliess 1986, Wey und Svaricek 1995) verwiesen. Anschließend werden in Abschnitt 3 nähere Angaben zum Begriff des flachen Systems aufgeführt und anhand von Beispielen verdeutlicht. Beide Abschnitte 2 und 3 orientieren sich von der mathematischen Seite nahe an Fliess u. a. (1995), sind jedoch um die Thematik der Steuerbarkeit und deren Verbindung zur Flachheit (engl.: flatness) erweitert. Die Eigenschaft der Steuer-/Erreichbarkeit wird in Abschnitt 4 weiterverwendet, um ein Verfahren zur rechnergestützten Überprüfung der Flachheit zu entwickeln. Außerdem befaßt sich Abschnitt 4 mit der Auslegung von Regelungen auf der Basis von flachen Systemen und dokumentiert die Vorgehensweise am Beispiel eines hydrostatischen Antriebs. Anschließend werden die Ergebnisse der Reglerauslegung in Abschnitt 5 in der Simulation und am Laborversuch überprüft. Eine Zusammenfassung und ein Ausblick schließen den Bericht.

## 2 Mathematische Grundlagen

Die Differentialalgebra wurde, wie andere mathematische Ansätze auch, bereits recht frühzeitig „erfunden“ (Ritt 1950). Ihr Einsatz speziell im Bereich der Systemtheorie wird allerdings erst seit ca. 10 Jahren betrieben (Fliess 1986). Die Intention des Ansatzes ist es, die Vorteile der klassischen Algebra auf die Bearbeitung von Differentialgleichungen zu übertragen. Hierfür wird angenommen, daß die Differentialgleichungen ausschließlich algebraische Funktionen – und keine transzendenten wie  $\sin$ ,  $\tan$  oder  $\exp$  – enthalten. Diese auf den ersten Blick strenge Auflage, die insbesondere von Modellen technischer Systeme kaum erfüllt werden kann, ist deshalb nicht gravierend, weil zahlreiche Funktionen auf algebraische Differentialgleichungen zurückgeführt werden können. Beispielsweise ist  $\sin x$  aufgrund der Additionstheoreme eine Lösung der Differentialgleichung  $z^2 + \dot{z}^2 = 1$ . Im weiteren werden kurz die wichtigsten Begriffe aus der Differentialalgebra angesprochen, der eilige Leser kann diesen Abschnitt überspringen und bei Verständnisschwierigkeiten auf die Zusammenfassung der Begriffe in Anhang A zurückgreifen.

### 2.1 Begriffe

Grundlegend für den Ansatz der Differentialalgebra ist der Begriff des *differentiellen Körpers*  $K$  (die klassische Algebra verwendet ebenfalls den Begriff des Körpers, z. B. den Körper der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ ). Da differentielle Körper eine Verallgemeinerung der klassischen (nichtdifferentiellen) Körper darstellen, sind die Axiome der Körpertheorie nach wie vor gültig:

**Definition 2.1** (Meyberg 1976)

Ein Körper ist ein Tripel  $(K, +, \cdot)$ , bestehend aus einer Menge  $K$  und zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + : K \times K &\rightarrow K \\ (a, b) &\mapsto a + b \quad (\text{„Addition“}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cdot : K \times K &\rightarrow K \\ (a, b) &\mapsto ab \quad (\text{„Multiplikation“}) \end{aligned}$$

so daß die folgenden Axiome erfüllt sind:

- Gesetze der Addition
  1. *Assoziativität*: Für alle  $a, b, c \in K$  gilt:  $a + (b + c) = (a + b) + c$ .
  2. *Kommutativität*: Für alle  $a, b \in K$  gilt:  $a + b = b + a$ .
  3. *Neutrales Element*: Für alle  $a \in K$  gibt es ein Element  $0 \in K$ , so daß gilt:  $a + 0 = a$ .
  4. *Inverses Element*: Zu jedem  $a \in K$  gibt es ein Element  $-a \in K$  mit  $a + (-a) = 0$ .
- Gesetze der Multiplikation
  5. *Assoziativität*: Für alle  $a, b, c \in K$  gilt:  $(ab)c = a(bc)$ .
  6. *Kommutativität*: Für alle  $a, b \in K$  gilt:  $ab = ba$ .
  7. *Neutrales Element*: Für alle  $a \in K$  gilt:  $1a = a$ .
  8. *Inverses Element*: Zu jedem  $a \in K \setminus \{0\}$  gibt es ein  $a^{-1} \in K$  mit  $a^{-1}a = 1$ .
- Distributivgesetz
  9. Für alle  $a, b, c \in K$  gilt:  $a(b + c) = ab + ac$ . □

Zusätzlich neben Addition und Multiplikation wird für die Elemente eines differentiellen Körpers  $K$  eine Differentiation  $d/dt$  definiert, die den bekannten Regeln

$$\begin{aligned} \forall a(t) \in K & : & \frac{d}{dt}a(t) = \dot{a}(t) \in K \\ \forall a(t), b(t) \in K & : & \frac{d}{dt}(a(t) + b(t)) = \dot{a}(t) + \dot{b}(t) \\ & & \frac{d}{dt}(a(t)b(t)) = \dot{a}(t)b(t) + a(t)\dot{b}(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

entspricht. Gilt für ein Element  $c \in K$  der Zusammenhang  $\dot{c} = 0$  ( $0 \equiv$  neutrales Element der Addition), so heißt dieses Element *Konstante*; nur aus Konstanten bestehende Körper sind z. B.  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Im Hinblick auf eine Beschreibung dynamischer Systeme werden nun zeitabhängige Variablen mit in die Körperbildung einbezogen. Dazu wird für nichtdifferentielle sowie differentielle Körper die Notation gemäß Tabelle 2.1 vereinbart. Die Bildung einer *diff-*

**Tabelle 2.1.** Bezeichnungen für Körper

Bezeichnung	Erläuterung
$K(a(t))$	Polynome in der Variablen $a(t)$ mit Koeffizienten aus dem Körper $K$
$K[a(t)]$	Körper, deren Elemente rationalen Funktionen in $a(t)$ mit Koeffizienten aus $K$ entsprechen
$K\{a(t)\}$	Differentielle Polynome in $a(t)$ mit Koeffizienten aus $K$
$K\langle a(t) \rangle$	Differentielle Körper, deren Elemente differentiell rationalen Funktionen in $a(t)$ mit Koeffizienten aus $K$ entsprechen

ferentiellen Körpererweiterung  $L/K$  verläuft analog zur (konventionellen) Körpererweiterung bzw. schließt diese mit ein. Die Elemente differentieller Körper  $L$  können zwei grundsätzlichen Klassen, entweder den  $K$ -differentiell algebraischen oder den  $K$ -differentiell transzendenten Elementen, zugeordnet werden. Im Gegensatz zu der (nichtdifferentiellen) Körpererweiterung  $E/F$  ist die Existenz bzw. Nichtexistenz eines Differentialgleichungs-Polynoms anstatt eines einfachen Polynoms für die Einteilung in diese Klassen kennzeichnend. Da das eine das andere bedingt, muß ein  $K$ -differentiell algebraisches Element auch  $K$ -algebraisch sein. Weitere Charakterisierungen für die Elemente einer differentiellen Körpererweiterung sind ausführlich in Anhang A zusammengestellt. Von besonderer Bedeutung für die Analyse dynamischer Systeme ist die Bestimmung des *differentiellen Transzendenzgrades* (Kaplansky 1976), im weiteren abgekürzt durch

$$\text{diff. trg } L/K \quad \text{mit} \quad K \subseteq L \quad . \quad (2.2)$$

Dieser erklärt sich anhand der differentiellen Transzendenzbasis zu einer Körpererweiterung, welche der bezüglich der Elementanzahl maximalen,  $K$ -differentiell algebraisch unabhängigen Teilmenge von  $L$  entspricht. Die darin enthaltenen Elemente  $\{l_1, \dots, l_k\}$  müssen die Bedingungen

- $l_1, \dots, l_k$  sind differentiell transzendent über  $K$ ,
- Für jedes  $l \in K$  ist die Menge  $\{l, l_1, \dots, l_k\}$   $K$ -differentiell algebraisch abhängig

erfüllen. Die Anzahl der Elemente der Transzendenzbasis gibt den differentiellen Transzendenzgrad von  $L/K$  an. Folglich ist  $L/K$  dann und nur dann differentiell algebraisch, wenn für den differentiellen Transzendenzgrad  $\text{diff. trg } L/K = 0$  gilt. Zwei für die spätere Anwendung wesentliche Eigenschaften von endlich generierten differentiellen Körpererweiterungen sind:

**Satz 2.1** (Fliess und Glad 1993)

- Eine endlich generierte differentielle Körpererweiterung ist dann und nur dann differentiell algebraisch, wenn der zugehörige (nichtdifferentielle) Transzendenzgrad endlich ist.
- Der (nichtdifferentielle) Transzendenzgrad einer differentiellen Körpererweiterung entspricht der Anzahl von Anfangswerten, deren Kenntnis für eine Lösung der korrespondierenden Differentialgleichungen notwendig ist.  $\square$

Für Körpererweiterungen, ob konventionelle oder differentielle, ist grundsätzlich die Gradformel gültig. Diese verbindet für drei Körper  $L$ ,  $M$  und  $K$  mit der Eigenschaft  $K \subseteq M \subseteq L$  die (differentiellen) Transzendenzgrade der einzelnen Erweiterungen:

$$\text{trg } L/K = \text{trg } L/M + \text{trg } M/K \quad \text{bzw.} \quad (2.3)$$

$$\text{diff. trg } L/K = \text{diff. trg } L/M + \text{diff. trg } M/K \quad . \quad (2.4)$$

**2.2 Systembegriff**

Aufbauend auf den Grundlagen wird nun der Begriff des Systems in differentialalgebraischer Schreibweise eingeführt:

**Definition 2.2** (Fliess u. a. 1995)

Es sei  $K$  ein differentieller Grundkörper. Ein *System* ist eine endlich generierte differentielle Körpererweiterung  $L/K$ .  $\square$

Diese Definition unterscheidet (zunächst) nicht zwischen Eingangs-, Zustands- und Ausgangsgrößen. Vielmehr wird die Existenz einer endlichen Anzahl von Variablen angenommen, die durch eine endliche Anzahl von algebraischen Differentialgleichungen miteinander verknüpft sind. Die *differentielle Ordnung* eines Systems  $L/K$  wird durch den differentiellen Transzendenzgrad der Erweiterung  $L/K$  bestimmt.

**Beispiel 2.1**

Es wird  $K = \mathbb{R}$  angenommen.  $L/K$  entspricht der differentiellen Körpererweiterung, die durch vier *Variablen*  $x_1, x_2, x_3$  und  $x_4$  generiert wird:

$$L = \mathbb{R}\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \quad . \quad (2.5)$$

Die Variablen sind durch zwei Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + \ddot{x}_3 \dot{x}_4 &= 0 \\ \dot{x}_2 + (x_1 + \ddot{x}_3 x_4) x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

miteinander verknüpft. Damit gilt für den differentiellen Transzendenzgrad

$$\text{diff. trg } L/K = 2 \quad , \quad (2.7)$$

diese Zahl entspricht der Anzahl der Unbekannten minus der Anzahl der Gleichungen.  $\square$

Gemäß Tabelle 2.1 wird mit  $K\langle \mathbf{u} \rangle$  ein differentieller Körper bezeichnet, dessen Elemente differentiell rationalen Funktionen in den  $m$  Unbekannten  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_m]^T$  entsprechen. Interpretiert man  $\mathbf{u}$  als Eingangsgröße eines Systems, dann ist die Annahme von untereinander ( $K$ -algebraisch sowie folglich  $K$ -differentiell algebraisch) unabhängigen Eingangssignalen  $u_j$  zulässig (und sinnvoll), so daß  $\text{diff. trg } K\langle \mathbf{u} \rangle / K = m$  gilt. Ein System mit der Eingangsgröße

$\mathbf{u}$  ist charakterisiert durch eine (endlich generierte) differentiell algebraische Körpererweiterung  $L/K\langle\mathbf{u}\rangle^2$ , demzufolge erfüllt der differentielle Transzendenzgrad

$$\text{diff. trg } L/K\langle\mathbf{u}\rangle = 0 \quad . \quad (2.8)$$

Die Ausgangsgröße  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_p]^T$  entspricht hierbei einer endlichen Menge von Elementen in  $L$ . Entsprechend Satz 2.1 existiert für  $L/K\langle\mathbf{u}\rangle$  außerdem eine endliche (nicht differentielle) Transzendenzbasis  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ , die die Rolle eines verallgemeinerten Zustands übernimmt. Jede Komponente von  $\dot{\mathbf{x}}$  und von  $\mathbf{y}$  ist wegen Gl. (2.8)  $K\langle\mathbf{u}\rangle$ -algebraisch abhängig von  $\mathbf{x}$ , so daß durch den differentialalgebraischen Systembegriff allgemeine Zustandsbeschreibungen wie

$$\begin{aligned} A_1(\dot{x}_1, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(\alpha_1)}) &= 0 \\ &\vdots \\ A_n(\dot{x}_n, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(\alpha_n)}) &= 0 \\ B_1(y_1, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(\beta_1)}) &= 0 \\ &\vdots \\ B_p(y_p, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(\beta_p)}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

erfaßt werden. Die  $A_i$  und  $B_i$  sind polynomisch über  $K$ , die natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gibt die Dimension des Systems  $L/K\langle\mathbf{u}\rangle$  wieder.

**Beispiel 2.2** (Fortsetzung zu Beispiel 2.1)

Es werden die Eingangsrößen  $u_1 = x_3$  und  $u_2 = \dot{x}_4$  gewählt. Die Körpererweiterung  $L/K\langle\mathbf{u}\rangle$  ist dann differentiell algebraisch und durch die Repräsentation

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\ddot{u}_1 u_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_4 + x_4^2 \ddot{u}_1 \\ \dot{x}_4 &= u_2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

darstellbar. Die Dimension des Systems entspricht  $n = \text{trg } L/K\langle\mathbf{u}\rangle = 3$  und  $[x_1, x_2, x_4]^T$  ist ein verallgemeinerter Zustand des Systems. Falls die Eingangsrößen zu  $\tilde{u}_1 = \ddot{x}_3$  und  $\tilde{u}_2 = \dot{x}_4$  gesetzt würden, hätte das System stattdessen die Dimension  $n = 5$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\tilde{u}_1 \tilde{u}_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_4 + x_4^2 \tilde{u}_1 \\ \dot{x}_3 &= x_5 \\ \dot{x}_4 &= \tilde{u}_2 \\ \dot{x}_5 &= \tilde{u}_1 \quad . \end{aligned} \quad (2.11)$$

□

Wird ein System  $L/K\langle\mathbf{u}\rangle$  und eine endlich generierte algebraische Erweiterung  $\bar{L}/L$  vorausgesetzt, so sind die beiden Systeme  $L/K\langle\mathbf{u}\rangle$  und  $\bar{L}/K\langle\mathbf{u}\rangle$  äquivalent und besitzen demzufolge auch die gleiche Dimension  $n$ . Ferner können beide Systeme durch dieselbe Zustandsdarstellung repräsentiert werden, so daß im weiteren ein System  $L/K\langle\mathbf{u}\rangle$  ungeachtet einer (gegebenfalls vorhandenen) endlich generierten algebraischen Erweiterung von  $L$  definiert wird.

<sup>2</sup> Die differentiell algebraische Körpererweiterung  $L/K\langle\mathbf{u}\rangle$  wird von Fliess und Glad (1993) auch als *Dynamik* bezeichnet. Im weiteren soll eine Differenzierung zwischen *Systemen* und *Dynamiken* aber nicht vorgenommen werden.

### 2.3 Dynamische Rückführungen

Der Begriff der Äquivalenz läßt sich auch im Zusammenhang mit dynamischen Rückführgesetzen definieren, die bis jetzt nur wenig untersucht worden sind. Es gilt:

**Definition 2.3** (Fliess u. a. 1995)

Zwei Systeme  $L/K$  und  $\tilde{L}/K$  werden als äquivalent durch *endogene* Rückführung oder kurz als äquivalent bezeichnet dann, und nur dann, wenn jedes Element von  $L$  (bzw.  $\tilde{L}$ ) algebraisch über  $\tilde{L}$  (bzw.  $L$ ) ist. Zwei Körpererweiterungen  $L/K\langle\mathbf{u}\rangle$  und  $\tilde{L}/K\langle\mathbf{u}\rangle$  sind dann, und nur dann äquivalent, wenn die korrespondierenden Systeme  $L/K$  und  $\tilde{L}/K$  es auch sind.  $\square$

Bei der endogenen Rückführung, die schon in der einleitenden Übersicht angesprochen wurde, handelt es sich um eine spezielle Variante einer *regulären* dynamischen Rückführung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) ; \quad \mathbf{a}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} ; \quad \mathbf{b}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) ; \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^q ; \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \quad , \end{aligned} \quad (2.12)$$

die das nichtlineare System<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) \\ \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{H}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.13)$$

linearisiert. Die Regularität der Rückführung impliziert die *Invertierbarkeit* von Gl. (2.12) mit Eingang  $\mathbf{v}$  und Ausgang  $\mathbf{u}$ . Es existiert also ein Diffeomorphismus  $\xi = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ , der Gl. (2.13) in ein System

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \mathbf{A}\xi + \mathbf{B}\mathbf{v} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\xi \end{aligned} \quad (2.14)$$

transformiert. Die Komponenten von  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{u}$  können als reellwertige analytische Funktionen der Ausgangsgröße dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{f}_1(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(\alpha)}) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{f}_2(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(\alpha)}) ; \quad \alpha = \text{const.} < \infty \quad . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Die dynamische Rückführung (2.12) wird nun als *endogen* bezeichnet, wenn der umgekehrte Sachverhalt ebenfalls zutrifft:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(\gamma)}) \quad . \quad (2.16)$$

Wenn nun zwei Körper  $L$  und  $\tilde{L}$  gegeben sind, für die die Elemente von  $L$  (bzw.  $\tilde{L}$ ) algebraisch über  $\tilde{L}$  (bzw.  $L$ ) sind, so können die beiden Systeme  $L/K$  und  $\tilde{L}/K$  durch eine endogene Rückführung in das jeweils andere System überführt werden. Jedes System, das mit einer endogenen Rückführung linearisiert werden kann, wird als *flach* bezeichnet. Diese Eigenschaft wird im nun folgenden Abschnitt eingehender untersucht.

<sup>3</sup> Eine nichtlineare Ausgangsgleichung  $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$  ist immer durch eine Erweiterung des Zustandsraums in eine lineare Ausgangsgleichung  $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}$  zu überführen (Schwarz 1991).

### 3 Der Begriff des flachen Systems

In der Einleitung wurde bereits angesprochen, daß ein System dann als flach bezeichnet wird, wenn ein linearisierender Ausgang  $\mathbf{y}_{\text{lin}}$  existiert. Dieser Ausgang ist direkt mit der eigentlichen Definition eines flachen Systems gekoppelt:

**Definition 3.1** (Fliess u. a. 1995)

Ein System  $L/K$  wird dann und nur dann als (differentiell) flach bezeichnet, wenn es äquivalent zu einem rein differentiell transzendenten System  $F/K$  ist. Eine differentielle Transzendenzbasis  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_p]^T$  von  $F/K$  mit der Eigenschaft  $F = K\langle \mathbf{y} \rangle$  wird als *linearisierender* oder auch *flacher* Ausgang  $\mathbf{y}_{\text{lin}}$  des Systems  $L/K$  bezeichnet.  $\square$

Dieser Ausgang  $\mathbf{y}_{\text{lin}}$  besitzt die folgenden wichtigen Eigenschaften:

**Satz 3.1** (Rothfuß u. a. 1996)

Für den linearisierenden Ausgang eines flachen Systems gilt:

1. Alle Komponenten von  $\mathbf{y}_{\text{lin}}$  können in Form von Polynomen  $y_{i,\text{lin}} = p_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(\alpha)})$ ,  $i = 1, \dots, p$  dargestellt werden,
2. Alle Komponenten von  $\mathbf{y}_{\text{lin}}$  sind  $K$ -differentiell algebraisch unabhängig, d. h. sie sind durch keinerlei Differentialgleichung mit Koeffizienten in  $K$  miteinander verknüpft,
3. Jeder Systemzustand  $\mathbf{x}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  und jeder Systemeingang  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  kann direkt in Abhängigkeit des linearisierenden Ausgangs  $\mathbf{y}_{\text{lin}}$  und dessen zeitlichen Ableitungen berechnet werden.  $\square$

Für das im letzten Abschnitt enthaltene Beispiel existiert solch eine Ausgangsgröße:

**Beispiel 3.1** (Fortsetzung zu Beispiel 2.2)

Folgende Ausgangssignale werden für das System gemäß Gl. (2.10) vorgegeben (die Bestimmung eines solchen linearisierenden Ausgangs ist nicht ohne weiteres möglich, dies wird im Verlauf des Abschnitts noch näher untersucht):

$$\begin{aligned} y_1 &= x_2 + \frac{(x_1 + \ddot{x}_3 x_4)^2}{2x_3^{(3)}} \\ y_2 &= x_3 \quad . \end{aligned} \quad (3.1)$$

Diese bilden einen linearisierenden Ausgang zu dem System (2.6), denn durch Differentiation folgt mit der Abkürzung  $a = x_1 + \ddot{x}_3 x_4$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_2 + \frac{4y_2^{(3)} a (\dot{x}_1 + y_2^{(3)} x_4 + \ddot{x}_3 \dot{x}_4) - 2y_2^{(4)} a^2}{4(y_2^{(3)})^2} \\ &\stackrel{=0, \text{ Gl. (2.6)}}{=} \frac{4(y_2^{(3)})^2 \dot{x}_2 + 4y_2^{(3)} a (\overbrace{\dot{x}_1 + \ddot{x}_3 \dot{x}_4}^{=0, \text{ Gl. (2.6)}}) + 4(y_2^{(3)})^2 a x_4 - 2y_2^{(4)} a^2}{4(y_2^{(3)})^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{=0, \text{ Gl. (2.6)}}{=} \frac{2(y_2^{(3)})^2 (\overbrace{\dot{x}_2 + (x_1 + \ddot{x}_3 x_4) x_4}^{=0, \text{ Gl. (2.6)}}) - y_2^{(4)} a^2}{2(y_2^{(3)})^2} \\ \Rightarrow a^2 &= \frac{-2(y_2^{(3)})^2 \dot{y}_1}{y_2^{(4)}} = f(y_1, y_2^{(3)}, y_2^{(4)}) \in \mathbb{R}\langle \mathbf{y} \rangle \quad , \end{aligned} \quad (3.3)$$

so daß alle Variablen  $x_1, \dots, x_4$  des Systems allein in Abhängigkeit von  $y_1, y_2$  und deren zeitlichen Ableitungen formuliert werden können:

$$x_3 = y_2 \equiv f_1(\bar{y}) \quad (3.4)$$

$$x_2 = y_1 - \frac{a^2}{2y_2^{(3)}} = y_1 + \frac{\dot{y}_1 y_2^{(3)}}{y_2^{(4)}} \equiv f_2(\bar{y}) \quad (3.5)$$

$$x_4 = -\frac{\dot{x}_2}{a} = \frac{\dot{f}_2(\bar{y})}{a} \equiv f_3(\bar{y}) \quad (3.6)$$

$$x_1 = a - \ddot{y}_2 x_4 = a + \ddot{y}_2 f_3(\bar{y}) \equiv f_4(\bar{y}) \quad (3.7)$$

Für dieses Beispielsystem existieren eine ganze Reihe von linearisierenden Ausgangsgrößen  $\mathbf{y}_{\text{lin}}$ , die durch Transformationen miteinander verknüpft sind, z. B.  $\tilde{\mathbf{y}}_{\text{lin}}$  mit

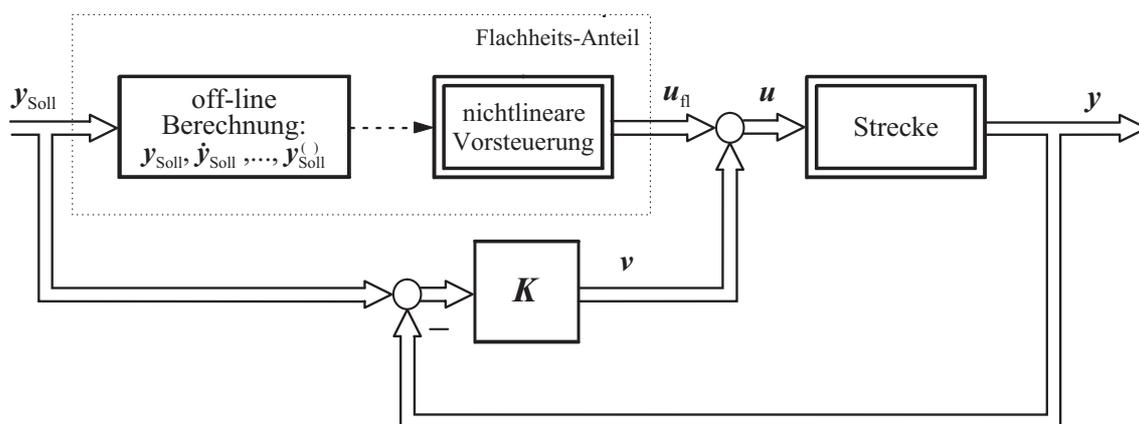
$$\tilde{\mathbf{y}}_{\text{lin}} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_1 y_2^{(3)} \\ y_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{y}_{\text{lin}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 / 2\tilde{y}_2^{(3)} \\ \tilde{y}_2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

□

Der dritte Zusammenhang in Satz 3.1 ist von grundlegender Bedeutung für die Idee einer Regelung auf Basis der Flachheit, denn für ein gewünschtes Verhalten der Ausgangsgröße ist sofort der zugehörige Verlauf der Eingangsgröße zu bestimmen. Es kann folglich für eine gewünschte Trajektorie  $\mathbf{y}_{\text{Soll}}$  direkt die Sollvorgabe  $\mathbf{u}_{\text{Soll}}$  durch inverse Dynamik off-line berechnet werden (Flachheits-Anteil in Bild 3.1):

$$u_{j,\text{Soll}} = q_j(\mathbf{y}_{\text{Soll}}, \dot{\mathbf{y}}_{\text{Soll}}, \dots, \mathbf{y}_{\text{Soll}}^{(\beta)}) ; \quad j = 1, \dots, m \quad (3.9)$$

Eine zusätzliche zunächst proportionale Regelung, wie in Bild 3.1 dargestellt, sorgt dann dafür, daß ein System möglichst schnell von seinen Startwerten auf die gewünschte Trajektorie geführt wird. Anschließend sind lediglich die Abweichungen  $\mathbf{y}_{\text{Soll}} - \mathbf{y}$  auszugleichen, die aus Ungenauigkeiten bei der Modellbildung resultieren.



**Bild 3.1.** Schema einer Regelung nach dem Konzept der flachen Systeme

Derzeitiges Problem ist, daß keine direkt anwendbare Methode zur Bestimmung des linearisierenden Ausgangs  $\mathbf{y}_{\text{lin}}$  existiert. Damit besteht auch kein direktes Verfahren zur Überprüfung

der Flachheit einer Systembeschreibung, weil die Existenz von  $y_{\text{lin}}$  gerade diese Eigenschaft ausmacht (vgl. Definition 3.1). Jedoch besitzen technische Systeme bzw. deren mathematische Realisierungen oftmals (physikalisch sinnvolle) Ausgangsgrößen, die gleichzeitig einem linearisierenden Ausgang entsprechen oder aber durch einfache algebraische Gleichungen mit diesem verknüpft sind (Fliess u. a. 1995, Rothfuß u. a. 1996). Die Vorgehensweise zum Nachweis der Flachheit, indem ein vorgegebener/bekannter Ausgang auf die Eigenschaft flach hin untersucht wird, ist entsprechend dem Beispiel in Gln. (3.4-3.7) recht einfach. Allerdings ist das Verfahren nicht derart systematisch, daß eine unmittelbare Implementierung beispielsweise in MAPLE möglich erscheint. Aus diesem Grund wird im folgenden Abschnitt eine Variante zur Überprüfung der Flachheit vorgestellt, die über den „Umweg“ der Steuerbarkeit vorgeht. Hierzu ist die folgende Verbindung zwischen Flachheit und Steuer-/Erreichbarkeit von Interesse:

**Satz 3.2** (Fliess u. a. 1995)

Ein lineares System ist flach genau dann, wenn es erreichbar ist. □

Diese Äquivalenzbeziehung ist für allgemeine nichtlineare Systeme nicht mehr aufrecht zu erhalten. Jedoch ist immerhin noch eine Implikationsrichtung zulässig:

**Satz 3.3** (Fliess u. a. 1995)

Jedes flache System ist erreichbar. □

Der Umkehrschluß „erreichbar  $\Rightarrow$  flach“ ist bei nichtlinearen Systemen also nicht gültig, wohl aber die Negation der Aussage:

**Satz 3.4**

Jedes nicht erreichbare System ist nicht flach. □

**Beweis 3.1**

Der Beweis des Satzes erfolgt indirekt: Angenommen, es gäbe ein nicht erreichbares, dafür aber flaches System  $L/K$ . Jedes flache System ist aber gemäß Satz 3.3 erreichbar, was im Widerspruch zur Annahme steht. □

Steuer-/Erreichbarkeit sind also Grundvoraussetzungen für die Flachheit eines Systems. Die Erreichbarkeit ist zwar für allgemeine Systeme nicht einfach nachzuweisen, wohl aber das Fehlen der Erreichbarkeitsvoraussetzungen, was für die Verwendung von Satz 3.4 ausreichend ist. Dafür werden im folgenden Abschnitt differentialgeometrische, rechnerunterstützte Methoden eingesetzt.

## 4 Rechnerunterstützte Bestimmung von Systemeigenschaften

Die seit geraumer Zeit im Fachgebiet verfügbare Toolbox *NSAS*<sup>4</sup> (Lemmen u. a. 1995) zur Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme soll im folgenden zur Beurteilung der Flachheit von Systemen verwendet werden. Andere Programmpakete, die Methoden der Differentialgeometrie zur Verfügung stellen, beispielsweise von (Rothfuß und Zeitz 1996, de Jager 1996), sind für diese Berechnungen natürlich ebenso geeignet. Die im folgenden dargestellte exemplarische Überprüfung der Flachheit für ein technisches System ist mit allen bekannteren Programmpaketen in ähnlicher Weise durchführbar.

### 4.1 Flachheit und Erreichbarkeit

Die Überprüfung der Flachheit wird in diesem Abschnitt nicht direkt, sondern anhand der Negation dieser Systemeigenschaft durchgeführt. Die schwache Erreichbarkeit ist eine notwendige Voraussetzung für die Flachheit eines Systems. Es wird folglich nicht die Flachheit selber überprüft, sondern das Fehlen der schwachen Erreichbarkeit. Dazu sind, nach einigen Einführungen in die noch nicht besprochene differentialgeometrische Nomenklatur, die folgenden aufgeführten Sätze von Bedeutung.

Betrachtet wird im folgenden ein ALS (Nijmeijer und van der Schaft 1990, Schwarz 1991, Isidori 1995) der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{G}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)), \quad (4.2)$$

mit  $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  und den analytischen Abbildungen  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{G}$ . Für derartige Systeme und die analytischen Systeme AS ist die Erreichbarkeit wie folgt definiert:

**Definition 4.1** Erreichbarkeit (Sussman und Jurdjevic 1972, Hermann und Krener 1977)

Es sei eine Untermannigfaltigkeit  $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$  und zwei Zustände  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in \mathcal{M}$  gegeben. Dann heißt  $\mathbf{x}_1$  *M-erreichbar von  $\mathbf{x}_0$* , in Operator-/Relationenschreibweise kurz:  $\mathbf{x}_0 \mathfrak{r}_{\mathcal{M}} \mathbf{x}_1$ , wenn eine begrenzte meßbare Steuerfunktion  $\mathbf{u}(t)$  mit  $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \forall t \in [t_0, t_1]$  in der Art existiert, daß für den Fluß  $\Phi$  des Systems gilt  $\mathbf{x}_0 = \Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t), t_0) \wedge \mathbf{x}_1 = \Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t), t_1)$ .

Die Menge aller von  $\mathbf{x}_0$  aus zur Zeit  $t$  erreichbaren Punkte wird durch  $\mathcal{R}(\mathbf{x}_0, t)$  oder allgemeiner durch  $\mathcal{R}(\mathbf{x}_0) := \bigcup_{t \in [t_0, \infty)} \mathcal{R}(\mathbf{x}_0, t)$  beschrieben.

Ein System heißt erreichbar von  $\mathbf{x}_0$  genau dann, wenn gilt  $\mathcal{R}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{X}$ .

Erreichbar heißt ein System genau dann, wenn gilt  $\mathcal{R}(\mathbf{x}) = \mathcal{X} \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$ . □

Wie bereits angedeutet, soll auf Grundlage der schwachen Erreichbarkeit ein Kriterium für die (nicht vorhandene) Flachheit eines Systems entwickelt werden. Dazu wird noch die folgende Definition benötigt:

<sup>4</sup> *NSAS* steht per Internet unter der Adresse [www.msrt.uni-duisburg.de/software/nsas](http://www.msrt.uni-duisburg.de/software/nsas) sowie per anonymous-ftp auf dem Server [ftp.msrt.uni-duisburg.de/pub/NSAS](http://ftp.msrt.uni-duisburg.de/pub/NSAS) zur Verfügung.

**Definition 4.2** (Hermann und Krener 1977, Schwarz 1991)

Es seien eine offene Teilmannigfaltigkeit  $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$  und zwei Punkte  $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \mathcal{M}$  gegeben. Diese Punkte heißen *schwach  $\mathcal{M}$ -erreichbar*, abkürzend als  $\mathbf{x}' \rightsquigarrow_{\mathcal{M}} \mathbf{x}''$  notiert, genau dann, wenn Zustände  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathcal{M}$  mit  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}'$  und  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}''$  in der Art existieren, daß für alle  $i = 1, \dots, k$  entweder  $\mathbf{x}_{k-1} \rightsquigarrow_{\mathcal{M}} \mathbf{x}_k$  oder  $\mathbf{x}_k \rightsquigarrow_{\mathcal{M}} \mathbf{x}_{k-1}$  oder erfüllt ist.

Die Menge der vom Zustand  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$  aus schwach erreichbaren Punkte wird durch  $\mathcal{WR}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_0)$  bezeichnet; ist  $\mathcal{M} = \mathcal{X}$ , so schreiben wir auch  $\mathcal{WR}(\mathbf{x}_0) := \mathcal{WR}_{\mathcal{X}}(\mathbf{x}_0)$ .

Ein System heißt *schwach erreichbar bei  $\mathbf{x}_0$*  genau dann, wenn gilt  $\mathcal{WR}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{X}$ . Dann ist auch  $\mathcal{WR}(\mathbf{x}) = \mathcal{X} \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$  erfüllt und das System ist *schwach erreichbar*.  $\square$

Für diese schwache Erreichbarkeitseigenschaft existieren nun auch gut überprüfbare Rangkriterien. Die hierfür benötigten Lie-Klammern  $[\mathbf{f}, \mathbf{g}] := (L_{\mathbf{f}}L_{\mathbf{g}}) - (L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}})$  können dabei sehr anschaulich mittels lokaler Koordinaten durch

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (4.3)$$

bestimmt werden. Mit den Systemvektorfeldern  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2, \dots \ \mathbf{g}_m]$  ergibt sich damit das Kriterium:

**Satz 4.1** Schwaches Erreichbarkeitsrangkriterium (Schwarz 1991, Isidori 1995)

Es seien  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{G}$  des Systems (4.1) gegeben. Dann gibt  $r = \text{rang } \mathbf{P}(\mathbf{x})$  der Rekursionsformel

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0(\mathbf{x}) &:= \mathbf{G}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{P}_k(\mathbf{x}) &:= [\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{P}_{k-1}(\mathbf{x})] \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) := [\mathbf{P}_0(\mathbf{x}) \ \mathbf{P}_1(\mathbf{x}) \ \dots \ \mathbf{P}_k(\mathbf{x})]$$

die Dimension der schwach erreichbaren Teilmannigfaltigkeit an.

Ist  $r < n$ , so ist das System nicht schwach erreichbar.  $\square$

Zwischen der schwachen Erreichbarkeit und der Erreichbarkeit eines Systems existiert nun der folgende Zusammenhang:

**Satz 4.2**

Ein nicht schwach erreichbares System ist nicht erreichbar.  $\square$

**Beweis 4.1**

Der Beweis des Satzes erfolgt indirekt. Angenommen, es gäbe ein nicht schwach erreichbares, dafür aber erreichbares System. Dann wäre  $\mathcal{R}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{X}$  gemäß Definition 4.1 für alle  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$  erfüllt. Demnach ist  $\mathbf{x}_0 \rightsquigarrow_{\mathcal{X}} \mathbf{x}$  für alle  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in \mathcal{X}$  gewährleistet. Damit ist aber auch die Existenz von  $\mathbf{x}_0 \rightsquigarrow_{\mathcal{X}} \mathbf{x}$  für alle  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in \mathcal{X}$  gesichert, was die schwache Erreichbarkeit des Systems zur Folge hat und damit einen Widerspruch zur Annahme bewirkt.  $\square$

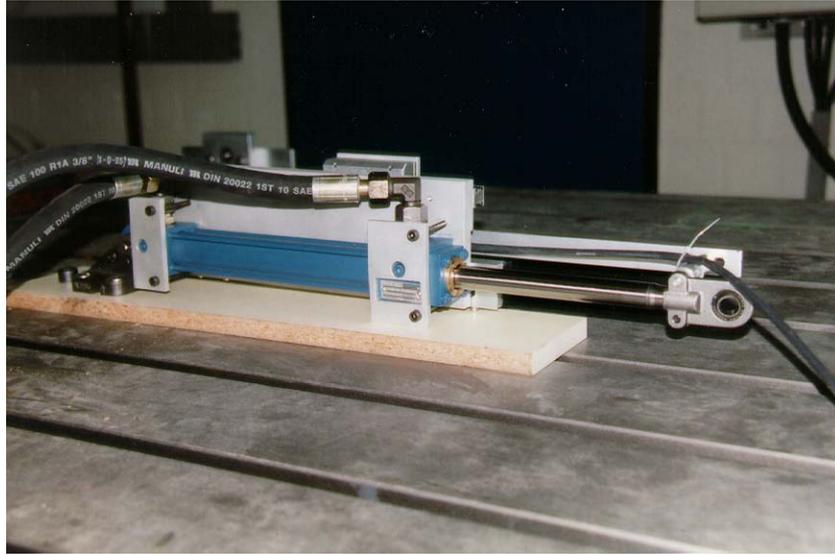
Mit diesem Satz und Satz 3.4 folgt damit das gesuchte Kriterium:

**Satz 4.3**

Jedes nicht schwach erreichbare System ist nicht flach.  $\square$

Erfüllt also ein System das schwache Erreichbarkeitskriterium nicht, so kann es sich dabei nicht um ein flaches System handeln. Für diesen Test aber sind bereits mehrere rechnerunterstützte Analysemethoden verfügbar, wie z. B. auch durch das Softwarepaket NSAS (Lemmen u. a. 1995). Dieses Paket soll nun im weiteren zur rechnerunterstützten Analyse genutzt werden.

## 4.2 Rechnerunterstützte Untersuchung



**Bild 4.1.** Hydraulisch betriebener Differentialzylinder

Als Beispielsystem wird der in Bild 4.1 dargestellte Differentialzylinder untersucht, der als Aktuator für einen elastischen Roboter genutzt wird. Seine grundsätzliche Funktionsweise zeigt das Schema in Bild 4.2; als mathematisches Modell hierfür kommt beispielsweise das ALS (Spielmann 1996)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{\left(x_3 - \frac{x_4}{\varphi}\right) A_K - F_R(x_2) - F_S}{m_G} \\ -\frac{E_{\ddot{O}1}(x_3) A_K x_2}{V_A(x_1)} \\ \frac{E_{\ddot{O}1}(x_4) A_K x_2}{V_B(x_1) \varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{E_{\ddot{O}1}(x_3) B_V \operatorname{sgn}(p_0 - x_3) \sqrt{|p_0 - x_3|}}{V_A(x_1)} \\ -\frac{E_{\ddot{O}1}(x_4) B_V \operatorname{sgn}(x_4) \sqrt{|x_4|}}{V_B(x_1)} \end{bmatrix} u, \quad (4.8)$$

mit  $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$  und  $u \in \mathbb{R}^1$ ,  $u \geq 0$  in Frage. Die Eingangs-, Ausgangs- und Zustandsvariablen haben folgende physikalische Bedeutungen (vgl. Bild 4.2):

- $x_1 \equiv$  Kolbenstangen-Position,
  - $x_2 \equiv$  Kolbenstangen-Geschwindigkeit,
  - $x_3 \equiv$  Druck in Kammer A,
  - $x_4 \equiv$  Druck in Kammer B,
  - $u \equiv$  Ansteuerspannung Servoventil sowie
  - $y \equiv$  Kolbenstangen-Position,
- (4.9)

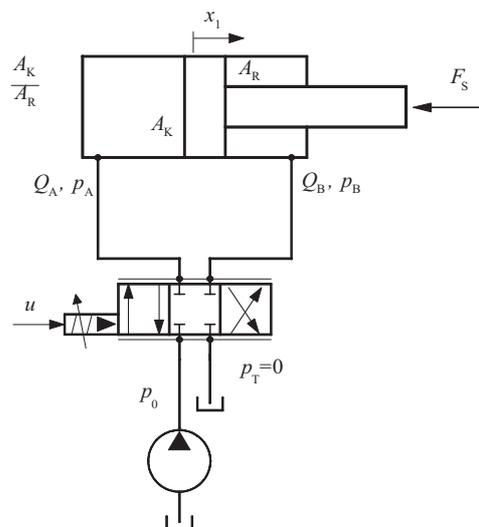
in differentialalgebraischer Schreibweise ist damit der Differentialzylinder abstrakt durch die Körpererweiterung  $\mathbb{R}\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle / \mathbb{R}$  charakterisiert. Nimmt man die Eingangsgröße hinzu,

so ergibt sich die differentiell algebraische Erweiterung  $\mathbb{R}\langle x_1, x_2, x_3, x_4, u \rangle / \mathbb{R}\langle u \rangle$ . Natürlich müssen die Verknüpfungen zwischen den einzelnen Zustands- und Ausgangsvariablen algebraisch sein, so daß die unstetigen Funktionen wie  $\text{sgn}$  durch algebraische Ausdrücke zu ersetzen sind.

Das Servoventil ist in der Gleichung (4.8) in Form eines Proportional-Systems berücksichtigt worden. Diese Näherung kann ohne allzu hohe Verluste an Modellgüte akzeptiert werden. Das bedingt jedoch eine Fallunterscheidung: Wenn  $u < 0$  zutrifft, dann ändert sich der Eingangsvektor in (4.8) zu

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{E_{\ddot{O}_1}(x_3) B_V \text{sgn}(x_3) \sqrt{|x_3|}}{V_A(x_1)} \\ -\frac{E_{\ddot{O}_1}(x_4) B_V \text{sgn}(p_0 - x_4) \sqrt{|p_0 - x_4|}}{V_B(x_1)} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Umfassende Angaben zu dem Modell des Differentialzylinders sind in Anhang B und (Bernzen



**Bild 4.2.** Schema eines hydraulisch betriebenen Differentialzylinders mit Servoventil-Ansteuerung

u. a. 1996, Spielmann 1996) enthalten. Wie anhand Bild 4.3 zu sehen ist, erfolgt die rechnerunterstützte Modellbildung unter MAPLE mit verhältnismäßig geringem Aufwand. Die Überprüfung der schwachen Erreichbarkeit kann danach bequem mit Hilfe der NSAS-Funktion `reachable` erfolgen. Der Rückgabewert `false` zeigt an, daß es sich hier um ein nicht schwach erreichbares System handelt. Im Rahmen dieser Überprüfung kann auch die schwache Erreichbarkeitsmatrix  $\mathbf{P}$  durch den NSAS-Befehl `reach_matrix` bestimmt werden. Diese besitzt den Rang 2 (berechenbar mit Hilfe der Funktion `extrank`), was damit auch der Dimension der schwach erreichbaren Teilmannigfaltigkeit – die Dimension der Zustandsmannigfaltigkeit ist bei dem in diesem Abschnitt benutzten Modell gerade 4 – entspricht. Das so analysierte Hydrauliksystem kann demnach nicht flach sein.

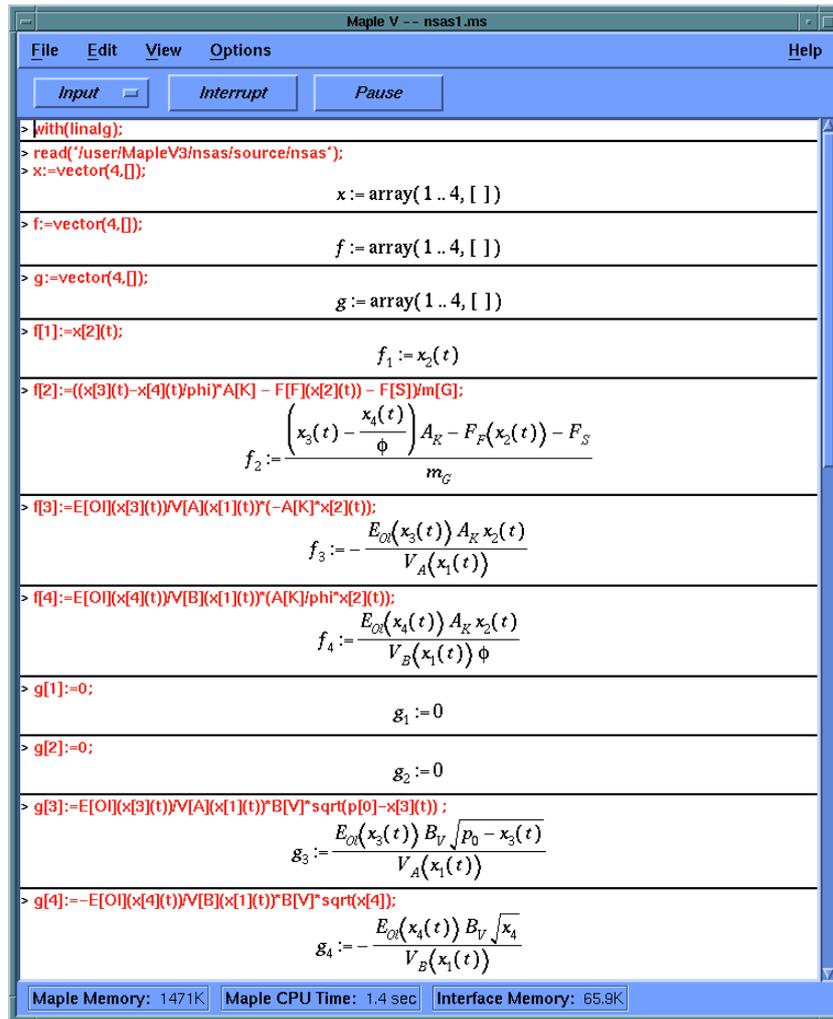


Bild 4.3. Modellbildung des hydraulischen Differentialzylinders unter MAPLE

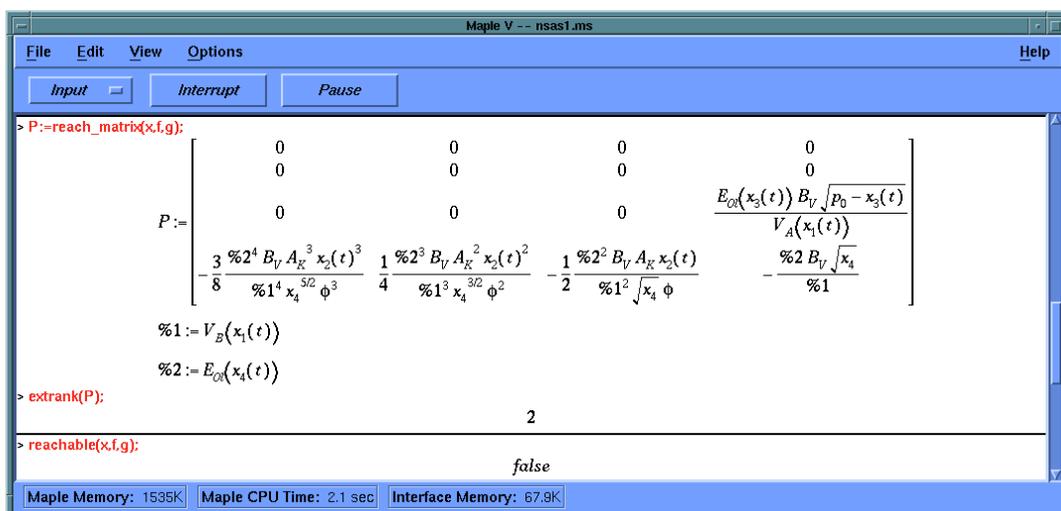
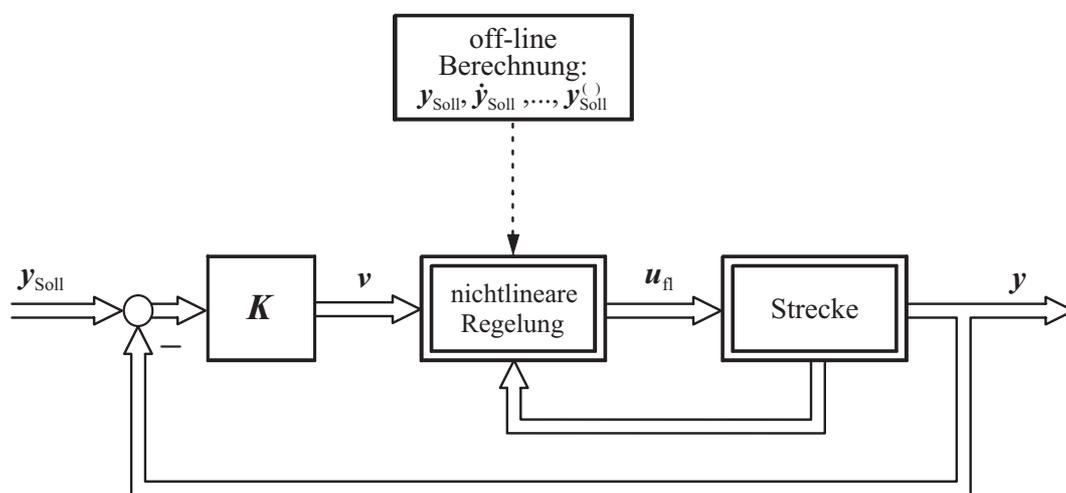


Bild 4.4. Analyse der schwachen Erreichbarkeit des Differentialzylinders

### 4.3 Auslegung von Regelungen

Für den im vorigen Abschnitt angesprochenen Differentialzylinder soll im weiteren eine Bahnverfolgungs-Regelung für die Kolben-Position ausgelegt werden. Dies ist eine essentielle Voraussetzung für eine spätere Endeffektor-Regelung des durch die Zylinder angetriebenen elastischen Roboters (Bernzen 1995). Obwohl der Differentialzylinder, wie zuvor gezeigt, nicht die Eigenschaft *flach* aufweist, ist die Idee der Flachheits-Regelung für dieses System nach wie vor tragfähig. Denn es kann gezeigt werden, daß für die Auslegung der Regelung das Konzept der flachen Systeme solange eingesetzt werden kann, wie zusätzliche Meßgrößen zur Verfügung stehen. Und zwar muß die Gesamtheit aller meßbaren Systemvariablen einen flachen Ausgang beinhalten.

Die dritte Eigenschaft von flachen Systemen gemäß Satz 3.1 besagt, daß der Eingangsgrößenverlauf



**Bild 4.5.** Regelung des Differentialzylinders nach dem Konzept der flachen Systeme

allein in (rein algebraischer) Abhängigkeit von  $y_{\text{lin}}$  und dessen zeitlichen Ableitungen berechnet werden kann. Gibt man nun eine gewünschte Trajektorie  $y_{\text{Soll}}$  für diesen Ausgang vor und bestimmt daraus off-line den zugehörigen Eingangsgrößenverlauf  $u_{\text{fl}}$ , so führt dies vom Prinzip her auf die in Bild 3.1 dargestellte Vorschaltung einer geeigneten Vorsteuerung. Für nicht flache Systeme ist es nicht möglich, die Eingangsgröße ausschließlich in Abhängigkeit von  $y_{\text{Soll}}$  zu bestimmen. Vielmehr werden zusätzliche Kenntnisse über interne Zustände der Strecke benötigt, um das nicht flache Verhalten des Systems auszugleichen.

Für den hier diskutierten Prüfstand entsprechend Gln. (4.8,4.10) handelt es sich dabei um die Systemzustände  $p_A$  und  $p_B$ , die beide meßtechnisch erfaßt werden. Damit ändert sich das Regelungsschema aus Bild 3.1 auf die in Bild 4.5 vorgeschlagene Struktur, bei der zusätzlich eine Rückführung von  $p_A$  und  $p_B$  vorgesehen ist. Dadurch kann das Regelgesetz  $u_{\text{fl}} = f(p_A, p_B, y_{\text{Soll}}, \dot{y}_{\text{Soll}}, \ddot{y}_{\text{Soll}}, \dots)$  allerdings nicht mehr off-line bestimmt werden. Es handelt sich dennoch nicht um eine Regelung im gewöhnlichen Sinne, da bei diesem inneren Regelkreis ein Soll/Ist-Vergleich unterbleibt. Hierfür wird der äußere Regelkreis verwendet, der eine Abweichung zwischen Soll- und Ist-Trajektorie aufgrund von Störungen, Parameteränderungen und nicht bekannten Startwerten vermeiden soll.

Entsprechend der physikalischen Gegebenheiten entspricht die Eingangsgröße  $u$  der Steuerungsspannung am Ventil und die Ausgangsgröße  $y$  der Kolben-Position (vgl. Gl. (4.9)). Unabhängig von der Vorgehensweise in Abschnitt 4.2 kann gezeigt werden, daß dieser spezielle Ausgang nicht flach ist. Für die ersten beiden Zustandsgrößen trifft Bedingung 3 in Satz 3.1 zu, denn mit

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 = \dot{x}_1 &= \dot{y} \end{aligned} \quad (4.11)$$

können beide als Funktion in  $\bar{y}$  angegeben werden. Demgegenüber sind die weiteren Zustände durch die Abhängigkeiten

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= f(x_1, x_2, x_3, u) \\ &= f(y, \dot{y}, x_3, u) \\ \dot{x}_4 &= f(x_1, x_2, x_4, u) \\ &= f(y, \dot{y}, x_4, u) \end{aligned} \quad (4.12)$$

gekennzeichnet. Mit der zweiten Zustandsgleichung gemäß Gln. (4.8,4.10)

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_G} \left( \left( x_3 - \frac{x_4}{\varphi} \right) A_K - F_R(x_2) - F_S \right) \quad (4.13)$$

und deren zeitlicher Ableitung

$$\ddot{x}_2 = \frac{1}{m_G} \left( \left( \dot{x}_3 - \frac{\dot{x}_4}{\varphi} \right) A_K - \frac{dF_R(x_2)}{dx_2} \dot{x}_2 \right) \quad (4.14)$$

ist es nicht möglich, ohne eine Integration explizite Funktionen  $x_3 = f(y, \dots, y^{(\alpha)})$ ,  $x_4 = f(y, \dots, y^{(\alpha)})$  und  $u = f(y, \dots, y^{(\alpha)})$  zu finden. Dies steht im Widerspruch zu der Bedingung 3 in Satz 3.1, daß für flache Systeme alle Zustände – und vor allem alle Eingangsgrößen – als Funktionen in  $\bar{y}$  darstellbar sind.

Ein generelles Konzept zur Flachheits-Regelung von nicht flachen Systemen kann nun so aussehen, daß die Systemzustände dahingehend überprüft werden, ob ihre Meßbarkeit bzw. damit auch gleichzeitig die Verfügbarkeit als Ausgangsgröße zu einem flachen System führt. Für den Differentialzylinder stellt sich dementsprechend die Frage, ob  $\langle y, p_A, p_B \rangle$  eine differentielle Transzendenzbasis und damit ein linearisierender Ausgang  $\mathbf{y}_{\text{lin}} \stackrel{?}{=} [y \ p_A \ p_B]^T$  ist (vgl. Definition 3.1). Die Überprüfung von Satz 3.1 Nr. 2 zeigt, daß dies so nicht zutrifft. Denn die Größen  $y$ ,  $p_A$  und  $p_B$  sind durch die Differentialgleichung (4.13) mit Koeffizienten aus dem Grundkörper  $\mathbb{R}$  miteinander verknüpft. Demzufolge kann eine dieser Ausgangsgrößen aus den beiden anderen bestimmt werden. Daraus kann geschlossen werden, daß nur ein Druck, beispielsweise  $p_A$ , für eine Flachheits-Regelung erfaßt werden muß und deshalb  $\mathbf{y}_{\text{lin}} = [y \ p_A]^T$  genügt. Satz 3.1 bestätigt diese Annahme:

1. Mit  $y = x_1$  und  $p_A = x_3$  können alle Komponenten von  $\mathbf{y}_{\text{lin}}$  unmittelbar als Polynome  $y_{i,\text{lin}} = p_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(\alpha)})$ ,  $i = 1, \dots, p$  dargestellt werden,
2. Aus physikalischer Sicht kann keine der beiden Größen  $y$  und  $p_A$  allein aus Kenntnis der jeweils anderen berechnet werden. Denn es existiert keine algebraische Differentialgleichung mit Koeffizienten nur in  $\mathbb{R}$ , die  $y$  und  $p_A$  miteinander verknüpft. Vielmehr ist zur Verknüpfung entsprechend Gl. (4.12) die Kenntnis der Eingangsgröße  $u$  Voraussetzung,

3. Gemäß Gl. (4.11) können  $x_1$  und  $x_2$  in Abhängigkeit von  $\mathbf{y}_{\text{lin}}$  bestimmt werden. Mit  $x_3 = p_A$  und Gl. (4.13) umgestellt nach  $x_4$  sind derartige Zuordnungen auch für  $x_3$  und  $x_4$  verfügbar, so daß alle Zustände als Funktionen von  $\mathbf{y}_{\text{lin}}$  darstellbar sind.

Folglich kann die Flachheits-Regelung bei meßtechnischer Erfassung von  $p_A$  ohne weiteres angewendet werden. Anders verhält es sich, wenn die Störkraft  $F_S$  nicht als konstant angenommen wird, sondern als eine Funktion der Zeit und damit ein (Stör-)Eingang interpretiert wird. Der Wegfall der  $\mathbb{R}$ -algebraisch differentiellen Abhängigkeit gemäß Gl. (4.13) führt in dem Fall zum linearisierenden Ausgang  $\mathbf{y}_{\text{lin}} = [y \ p_A \ p_B]^T$ . Da in Zukunft die Störkraft durch den Einbau eines Kraftsensors (Bernzen und Riege 1996:6) an der Kolbenstange berücksichtigt werden soll, wird bereits hier trotz  $F_S = \text{const.}$  die Rückführung beider Drücke  $p_A$  und  $p_B$  vorgesehen.

Mittels Kombination der Gln. (4.8,4.14) ist es möglich, eine explizite Rückführung  $u_{\text{fl}}$  zu finden, die *nur* eine Funktion der gewünschten Solltrajektorie und dieser beiden Drucksignale ist:

$$\begin{aligned}
 u_{\text{fl}} &= \frac{V_A}{E_{\ddot{O}1}(x_3)B_V \operatorname{sgn}(p_0 - x_3) \sqrt{|p_0 - x_3|}} \left( \dot{x}_3 + \frac{E_{\ddot{O}1}(x_3)A_K x_2}{V_A} \right) \\
 &= \frac{V_A}{E_{\ddot{O}1}(x_3)B_V \operatorname{sgn}(p_0 - x_3) \sqrt{|p_0 - x_3|}} \left( \frac{m_G \ddot{x}_2 + \dot{F}_R(x_2)}{A_K} + \frac{\dot{x}_4}{\varphi} + \frac{E_{\ddot{O}1}(x_3)A_K x_2}{V_A} \right) \\
 &= \frac{V_A}{E_{\ddot{O}1}(x_3)B_V \operatorname{sgn}(p_0 - x_3) \sqrt{|p_0 - x_3|}} \left( \frac{m_G \ddot{x}_2 + \dot{F}_R(x_2)}{A_K} + \frac{E_{\ddot{O}1}(x_4)A_K x_2}{V_B \varphi^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{E_{\ddot{O}1}(x_4)B_V \operatorname{sgn}(x_4) \sqrt{|x_4|}}{V_B \varphi} u_{\text{fl}} + \frac{E_{\ddot{O}1}(x_3)A_K x_2}{V_A} \right) .
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Ersetzt man hierin die verbliebenen Zustände gemäß Gl. (4.11) durch  $x_1 \equiv y_{\text{Soll}}$  bzw.  $x_2 \equiv \dot{y}_{\text{Soll}}$ , so führt das zu dem Regelgesetz ( $k = A_K \varphi B_V$ )

$$\begin{aligned}
 u_{\text{fl}} &= \frac{y_{\text{Soll}}^{(3)} V_A V_B \varphi^2 m_G + E_{\ddot{O}1}(x_3) V_B \varphi^2 A_K^2 \dot{y}_{\text{Soll}}}{k \left( E_{\ddot{O}1}(x_3) V_B \varphi \operatorname{sgn}(p_0 - x_3) \sqrt{|p_0 - x_3|} + E_{\ddot{O}1}(x_4) V_A \operatorname{sgn}(x_4) \sqrt{|x_4|} \right)} \\
 &\quad + \frac{E_{\ddot{O}1}(x_4) V_A A_K^2 \dot{y}_{\text{Soll}} + \dot{F}_R(\dot{y}_{\text{Soll}}) V_A V_B \varphi^2}{k \left( E_{\ddot{O}1}(x_3) V_B \varphi \operatorname{sgn}(p_0 - x_3) \sqrt{|p_0 - x_3|} + E_{\ddot{O}1}(x_4) V_A \operatorname{sgn}(x_4) \sqrt{|x_4|} \right)} .
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Die Volumina der Zuleitungen samt Kammern  $V_{A/B}$  sind als konstant angenommen, was in Anbetracht des Gesamtvolumens durchaus zulässig erscheint. Denn das von den Schlauchleitungen umfaßte (konstante) Ölvolumen ist im Verhältnis zum (variablen) Kammervolumen groß, so daß diese Näherung zutrifft und auch mit den Erfahrungen am realen Versuchsträger übereinstimmt. Für andere Versuchsträger, die beispielsweise über direkt am Zylinder montierte Ventile verfügen, wäre diese Annahme natürlich nicht richtig.

Die obige Gl. (4.16) ist im Fall  $u_{fl} > 0$  gültig, für die Fallunterscheidung  $u_{fl} < 0$  ergibt sich infolge des geänderten Systemmodells (4.10) das Regelgesetz

$$u_{fl} = \frac{y_{Soll}^{(3)} V_A V_B \varphi^2 m_G + E_{\ddot{O}1}(x_3) V_B \varphi^2 A_K^2 \dot{y}_{Soll}}{k \left( E_{\ddot{O}1}(x_4) V_A \operatorname{sgn}(p_0 - x_4) \sqrt{|p_0 - x_4|} + E_{\ddot{O}1}(x_3) V_B \varphi \operatorname{sgn}(x_3) \sqrt{|x_3|} \right)} + \frac{E_{\ddot{O}1}(x_4) V_A A_K^2 \dot{y}_{Soll} + \dot{F}_R(\dot{y}_{Soll}) V_A V_B \varphi^2}{k \left( E_{\ddot{O}1}(x_4) V_A \operatorname{sgn}(p_0 - x_4) \sqrt{|p_0 - x_4|} + E_{\ddot{O}1}(x_3) V_B \varphi \operatorname{sgn}(x_3) \sqrt{|x_3|} \right)} \quad (4.17)$$

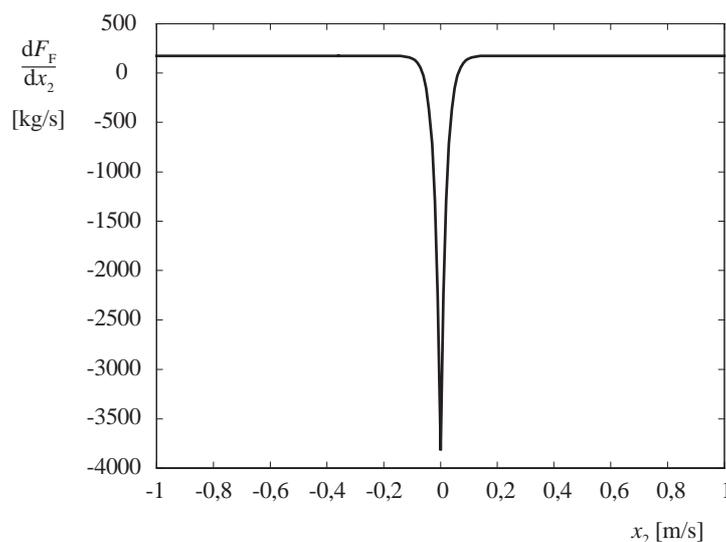
Im Regelgesetz ist die zeitliche Änderung der Reibkraft enthalten. Die Reibkraft selbst ergibt sich als Kombination der viskosen Reibung  $F_V$ , der Haftreibung  $F_H$  und der Coulombschen Reibung  $F_C$ :

$$F_R(x_2) = F_V x_2 + \operatorname{sgn}(x_2) \left( F_C + F_H \exp\left(-\frac{|x_2|}{c_H}\right) \right) \quad , \quad (4.18)$$

die zeitliche Ableitung läßt sich durch

$$\begin{aligned} \dot{F}_R(x_2) &= \frac{d}{dt} F_R(x_2) \\ &= \frac{d}{dx_2} F_R(x_2) \dot{x}_2 \\ &= \left( F_V - \frac{F_H}{c_H} \exp\left(-\frac{|x_2|}{c_H}\right) \right) \dot{x}_2 \quad , \end{aligned} \quad (4.19)$$

approximieren. Die Funktion  $dF_R(x_2)/dx_2$  gibt Bild 4.6 wieder, ihr Funktionswert ist für  $x_2 = 0$  nicht definiert.



**Bild 4.6.** Anteil der zeitlichen Ableitung der Reibkraft

Die Anwendung der Rückführung (4.16,4.17) führt zu dem folgenden Verhalten der Dynamik des Regelfehlers  $e_y = y_{\text{Soll}} - y$ :

$$0 = m_G V_A V_B \varphi^2 e_y^{(3)} - \frac{F_H}{c_H} \left( \exp\left(-\frac{|\dot{y}_{\text{Soll}}|}{c_H}\right) \ddot{y}_{\text{Soll}} - \exp\left(-\frac{|\dot{y}|}{c_H}\right) \ddot{y} \right) + (E_{\ddot{O}1}(x_3) V_B \varphi^2 A_K^2 + E_{\ddot{O}1}(x_4) V_A A_K^2) \dot{e}_y \quad (4.20)$$

Wenn  $e_y$  sich – wie es hier der Fall ist – nicht durch eine lineare Dynamik beschreiben läßt, so kann dieses Verhalten dadurch erzwungen werden, daß in den Regelungsvorschriften (4.16,4.17) die Variable  $y_{\text{Soll}}^{(3)}$  durch eine neue Eingangsgröße  $v$  mit

$$v = y_{\text{Soll}}^{(3)} - K_2(\ddot{y}_{\text{Soll}} - \ddot{y}) - K_1(\dot{y}_{\text{Soll}} - \dot{y}) - K_0(y_{\text{Soll}} - y) \quad (4.21)$$

ersetzt wird. Die Verstärkungen  $K_0$  bis  $K_2$  dienen hierin zur Einstellung der Fehlerdynamik. Werden die Ableitungen der Ausgangsgröße durch die Gln. (4.11,4.13) ersetzt, dann ist zudem keinerlei Differentiation der gemessenen Ausgangsgröße notwendig (Rothfuß u. a. 1996). Da die Fehlerdynamik aber für den hier verfolgten Zweck bereits hinreichend ist, wird aus Gründen der Komplexität der Rückführung auf die zusätzliche Komponente (4.21) verzichtet.

Der Regler (4.16,4.17) ist in der Anwendung insofern problematisch, als die Annahme  $u_{\text{fl}} \leq 0$  erst durch die darauffolgende Berechnung bestätigt/widerlegt wird. Wenn keine Überstimmung vorliegt, müssen eigentlich beide Regelgesetze berechnet werden. Das kann wegen der angestrebten Abtastzeit von  $1\text{ms}^5$  jedoch zu Ansteuerungs-Problemen am Versuchsträger führen. Allerdings weisen beide Teile (4.16,4.17) des Regelungsgesetzes dasselbe Zählerpolynom auf. Zudem sind beide Nennerpolynome aufgrund von physikalischen sowie mathematischen Randbedingungen (vgl. Anhang B)

$$\sqrt{|\cdot|} > 0; \quad E_{\ddot{O}1}(\cdot) > 0; \quad V_{A/B} > 0; \quad B_V > 0; \quad A_K > 0; \quad \varphi > 0 \quad (4.22)$$

immer größer als null. Folglich kann sukzessive zunächst der Zähler bestimmt und, je nach dessen Vorzeichen, der entsprechende Nenner ermittelt werden.

Mit dem vorgeschlagenen Regelgesetz folgt die Kolben-Position einer gewünschten Trajektorie, solange diese hinreichend glatt ist. Abweichungen zu Beginn der Regelung infolge inkorrektur Startwerte und Ungenauigkeiten bei der Systemmodellierung können durch eine zusätzliche überlagerte Regelung sichergestellt werden, z. B. durch einfache additive Rückführung des Positions- oder Geschwindigkeitsfehlers

$$u = u_{\text{fl}} + K_1(y_{\text{Soll}} - y) + K_2(\dot{y}_{\text{Soll}} - \dot{y}) \quad (4.23)$$

oder durch eine *adaptive* Positionsregelung

$$u = u_{\text{fl}} + K_3 |y_{\text{Soll}} - y| (y_{\text{Soll}} - y) \quad (4.24)$$

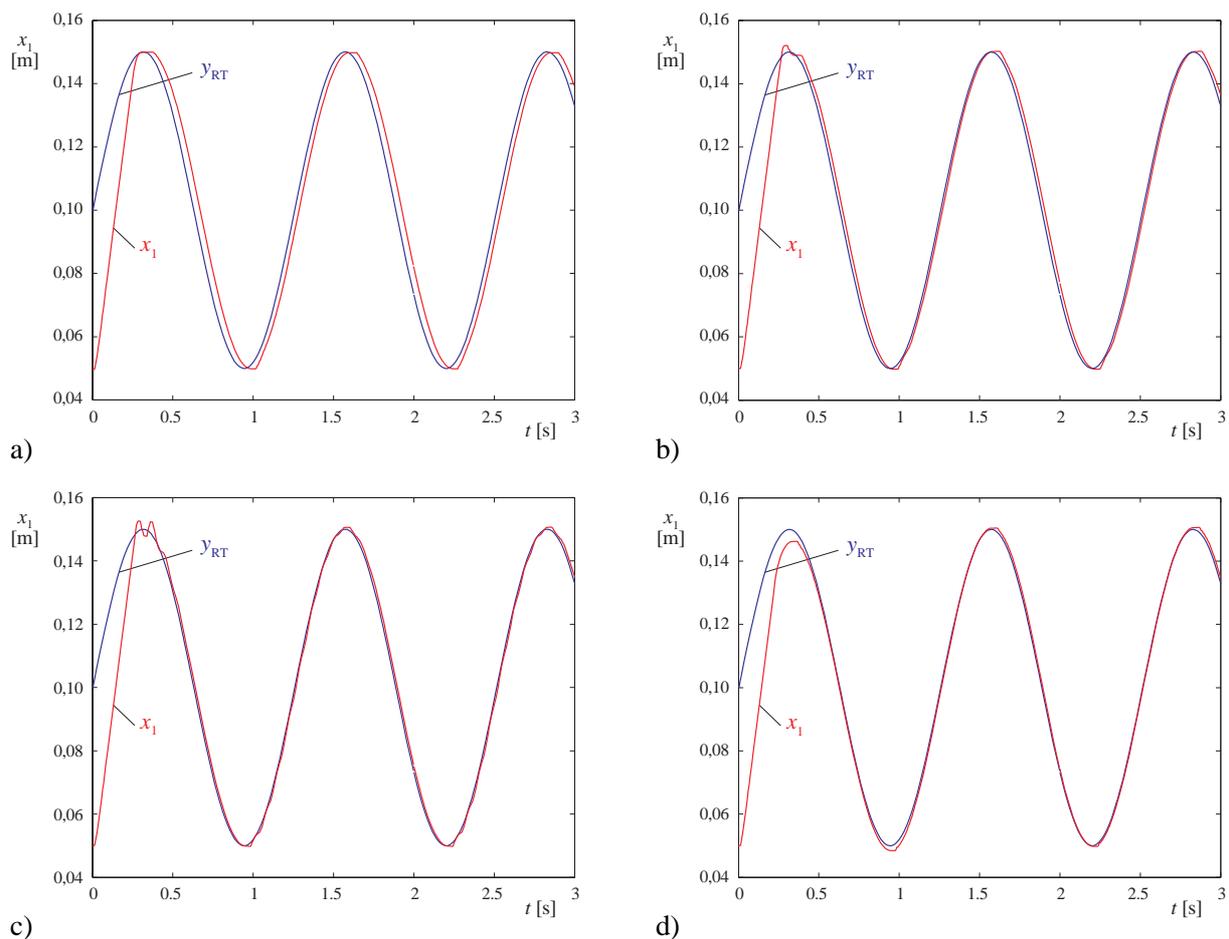
Der Begriff „adaptiv“ soll hier die adaptive Abhängigkeit der Verstärkung von der Differenz  $y_{\text{Soll}} - y$  charakterisieren (=parameteradaptiv). Alternativ kann  $u_{\text{fl}}$  derart ergänzt werden, daß gezielt die Dynamik des Regelfehlers (4.20) beeinflußt wird. Die Untersuchungen hierzu sind jedoch noch nicht endgültig abgeschlossen und sollen erst zu einem späteren Zeitpunkt vorgestellt werden. Tendenziell erreicht die Berücksichtigung des Regelfehlers eine ähnliche Güte wie die adaptive Positionsregelung (4.24), die im nächsten Abschnitt ausführlich erläutert wird.

<sup>5</sup> Die Ansteuerung erfolgt mit einem Pentium 90MHz und einer RTI-835 Analog/Digital-Umsetzertarte.

## 5 Anwendung am Laborversuch „Differentialzylinder“

Im weiteren wird die Anwendung des im vorherigen Abschnitt entwickelten Regelgesetzes vorgestellt. In einem ersten Schritt wird hierzu eine Simulation in MATLAB<sup>6</sup> durchgeführt und anschließend die Regelung an dem Versuchsträger in Bild 4.1 implementiert.

### 5.1 Simulationsergebnisse



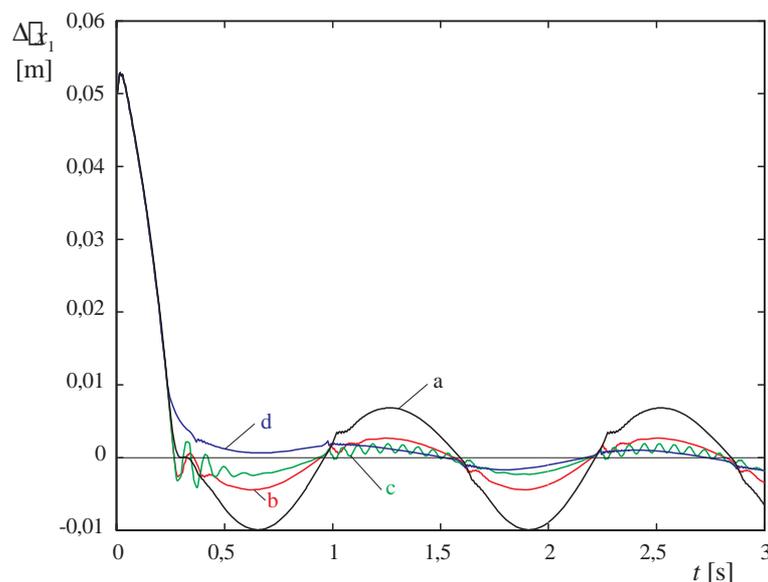
**Bild 5.1.** Bahnverfolgung für verschiedene Regelgesetze: a)  $P$ -Regler mit  $K = 90$ ; b)  $P$ -Regler mit  $K = 200$ ; c)  $P$ -Regler mit  $K = 350$ ; d) Flachheits-Regelung mit adaptiver Positions- und Geschwindigkeits-Rückführung

Wie oben beschrieben, wurde für die Auslegung des Regelgesetzes (4.16,4.17) ein vereinfachtes Streckenmodell 4. Ordnung zugrunde gelegt. Um möglichst realistische Ergebnisse in der Simulation zu erzielen, wird dieses Regelgesetz nun auf ein erweitertes Modell des Differentialzylinders angewendet. Dieses umfaßt zusätzlich ein  $PT_2$ -Verhalten für das Servoventil, so daß das Gesamtsystem die Ordnung 6 aufweist (vgl. Anhang B). Hierbei werden auch innere Leckölvolumenströme berücksichtigt. Die Parameter wurden mit dem Versuchsträger abgeglichen, ihre physikalische Herleitung und Bedeutung wird in Spielmann (1996) ausführlich erläutert. Die Simulationsumgebung bildet darüber hinaus die zeitdiskrete Ansteuerung des Ver-

<sup>6</sup> ©The Mathworks

suchsträgers nach, so daß Auswirkungen von unterschiedlichen Tastzeiten untersucht werden können (Spielmann 1996).

Die Resultate der Flachheits-Regelung werden im folgenden mit Proportional-Reglern unterschiedlicher Verstärkungen verglichen, die Ergebnisse zeigt Bild 5.1. Andere nichtlineare Regelungskonzepte wie beispielsweise die exakte Ein-/Ausgangs-Linearisierung sind zwar bereits am Versuchsträger implementiert (Bernzen und Riege 1996), bisher wurde mit diesen Verfahren jedoch noch keine vorgegebene Trajektorie nachgefahren, so daß sie nicht als Referenz für einen Vergleich herangezogen werden können. Als Solltrajektorie wird eine Sinuskurve abgefahren, so daß die Geschwindigkeit der Kolbenstange den zur Verfügung stehenden Bereich ausnutzt. Der Startwert des Zylinders weicht in allen Simulationen um 0,05m von dieser Trajektorie ab. Der erste  $P$ -Regler (a) ist so eingestellt, daß gerade kein Überschwingen auftritt. In Fall c) ist der Regelfehler vergleichbar mit dem des Flachheits-Reglers (d), Fall b) stellt einen Kompromiß zwischen Minimierung des Regelfehlers und Vermeidung von Überschwingen dar. Eine bessere Interpretation der Ergebnisse ist anhand der Gegenüberstellung der Regelfehler in Bild (5.2) möglich. Deutlich ist zu erkennen, daß der nichtlineare Regler den Fehler schnell minimiert und

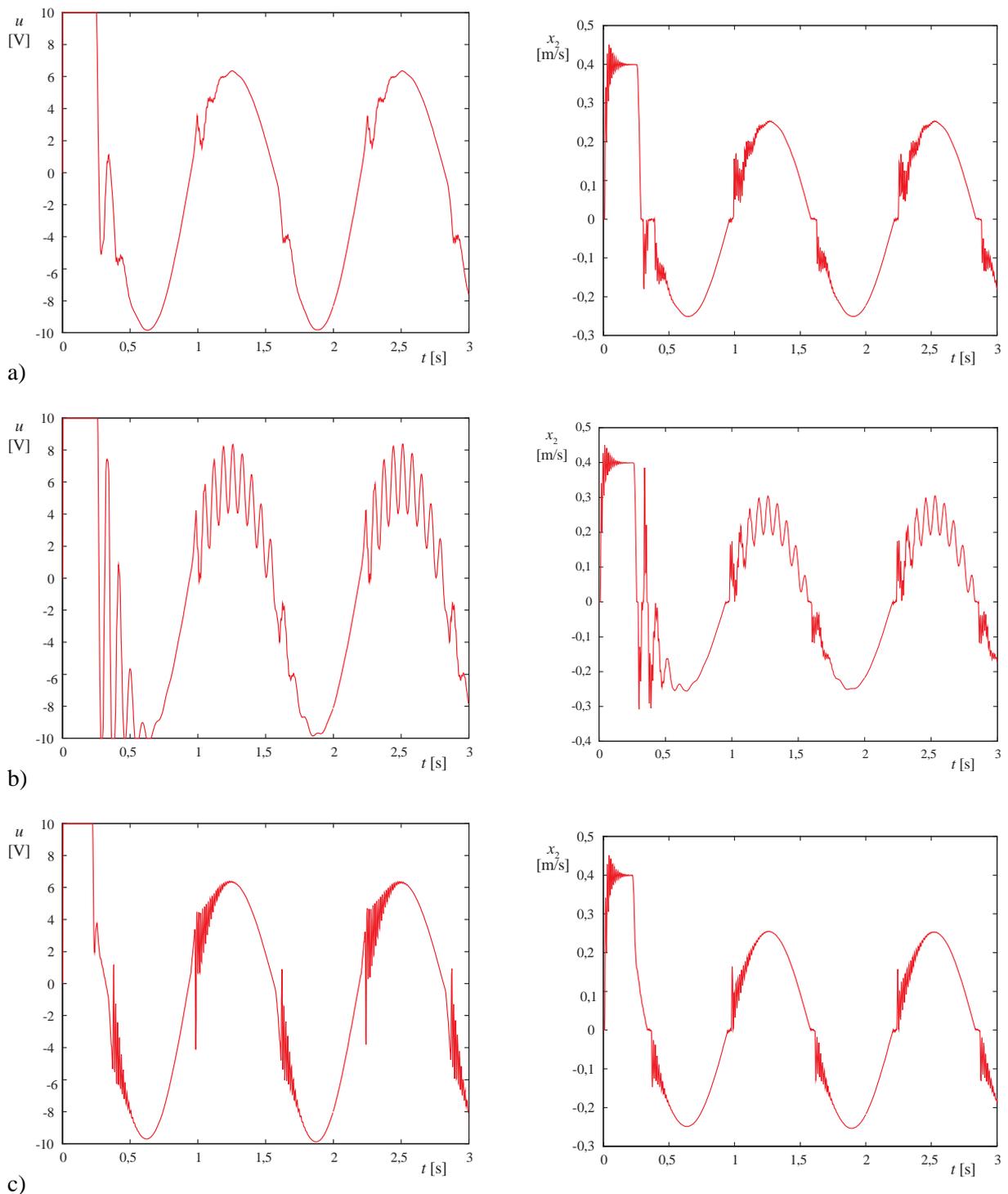


**Bild 5.2.** Regelfehler für verschiedene Regelungskonzepte: a)  $P$ -Regler mit  $K = 90$ ; b)  $P$ -Regler mit  $K = 200$ ; c)  $P$ -Regler mit  $K = 350$ ; d) Flachheits-Regelung mit adaptiver Positions- und Geschwindigkeits-Rückführung

die geringste Varianz aufweist. Der Vergleich der zugehörigen Eingangsspannungen sowie der (durch Differenzenquotient bestimmten) Kolben-Geschwindigkeiten in Bild 5.3 zeigt, daß das nichtlineare Konzept bei ähnlichem Regelfehler (Bild 5.3b und c) weniger Stellenergie benötigt. Sind die Stellenergien vergleichbar (Bild 5.3a und c), ist der Regelfehler des proportionalen Reglers wesentlich größer.

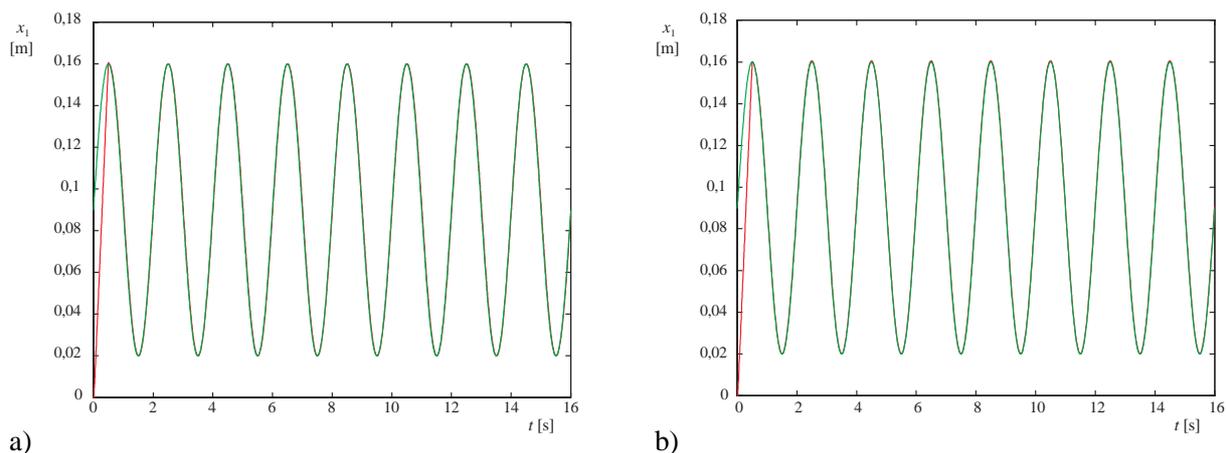
## 5.2 Erprobung am Versuchsträger

Die Untersuchungen am realen System (vgl. Bild 4.1) bestätigen die in der Simulation erzielten Ergebnisse. Um die maximale Verfahrensgeschwindigkeit des Differentialzylinders und die



**Bild 5.3.** Steuerspannung  $u$  und Kolben-Geschwindigkeit  $x_2$  für verschiedene Regelungskonzepte: a)  $P$ -Regler mit  $K = 200$ ; b)  $P$ -Regler mit  $K = 350$ ; c) Flachheits-Regelung mit adaptiver Positions- und Geschwindigkeits-Rückführung

zulässige Eingangssteuerspannung von  $\pm 8\text{V}$  nicht zu überschreiten, wird die Periodendauer der Solltrajektorie auf 2s erhöht. Der  $P$ -Regler wird auf eine möglichst genaue Bahnverfolgung abgestimmt mit dem Nachteil eines ungünstigen Einschwingvorgangs. Der nichtlinea-



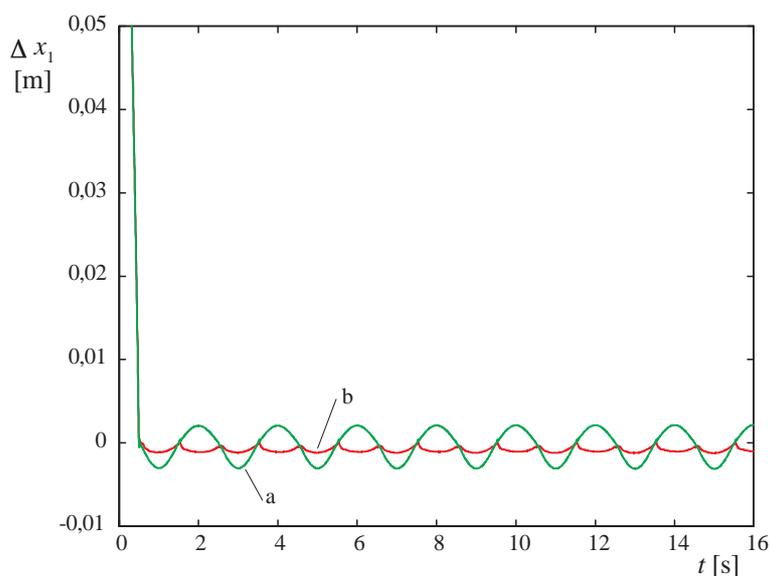
**Bild 5.4.** Bahnverfolgung für verschiedene Regelgesetze: a)  $P$ -Regler; b) Flachheits-Regelung mit adaptiver Positions- und Geschwindigkeits-Rückführung

re Regler besteht aus der Flachheits-Regelung in Kombination mit adaptiver Positions- sowie Geschwindigkeits-Rückführung entsprechend Gln. (4.23,4.24). Die Bahnregelung mit einer Gegenüberstellung der beiden Verfahren ist in Bild 5.4 dargestellt. Die unterschiedliche Güte ist anhand dieser Diagramme nicht nachzuvollziehen. Vergleicht man allerdings den Regelfehler in Bild 5.5, so ist der Vorteil der nichtlinearen Regelung deutlich. Die Streuungen der Regelfehler um die Nullgerade ergeben sich für den eingeschwungenen Zustand ( $t > 2$ s) zu

$$\sigma_p = 1,820 \text{ mm} \quad (5.1)$$

$$\sigma_{fl} = 0,286 \text{ mm} \quad , \quad (5.2)$$

die Streuung der Flachheits-Regelung beträgt damit 15% der Streuung der Proportional-Regelung.



**Bild 5.5.** Regelfehler für verschiedene Regelungskonzepte: a)  $P$ -Regler; b) Flachheits-Regelung mit adaptiver Positions- und Geschwindigkeits-Rückführung

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Gegenstand dieses Berichts sind die in der letzten Zeit stark diskutierten sog. *flachen Systeme*. Dieser im Rahmen des differentialalgebraischen Ansatzes geprägte Begriff weist eine Vielzahl aus systemtheoretischer Sicht äußerst interessanter Eigenschaften auf. Darunter sind zum Beispiel die vollständige Steuer- und Erreichbarkeit sowie die Existenz eines linearisierenden Systemausgangs zu zählen. Dieser wiederum stellt ein geeignetes Konzept für die Auslegung von Bahnverfolgungen dar. Ist der bzw. sind die linearisierenden Systemausgänge gefunden, so ist es mit ihrer Hilfe möglich, bereits off-line für einen gewünschten Trajektorienverlauf den notwendigen Stellgrößenverlauf zu bestimmen und entsprechende Stell- und Zustandsgrößenbeschränkungen frühzeitig zu berücksichtigen. Durch Anwendung eines mehrschleifigen Regelungskonzeptes können dann Ungenauigkeiten bei der Modellierung oder Störeinflüsse kompensiert werden. Das in dem Zusammenhang berechnete Regelungsgesetz besitzt damit die Eigenschaft, durch ein enthaltenes inverses Systemmodell die Strecke in die Nähe der gewünschten Ausgangstrajektorie zu zwingen. Für viele technische Systeme entspricht ein derartiger linearisierender Ausgang auch dem aus technischer Sicht interessanten bzw. dem physikalisch vorgegebenen. Aber auch, wenn der physikalische nicht mit dem linearisierenden Ausgang übereinstimmt oder wenn das betrachtete System gar nicht flach ist, kann die Grundidee der Flachheits-Regelung nach wie vor weiterverwendet werden, um einen entsprechende Stellgrößenverlauf vorzunehmen.

In dem vorliegenden Bericht wurde nach einer allgemeinen Einführung in die Differentialalgebra und der Beschreibung der flachen Systemeigenschaften ein Verfahren entwickelt, welches eine automatisierte Untersuchung hinsichtlich der (Nicht-)Existenz der Flachheit erlaubt: die Erreichbarkeit und damit auch die schwache Erreichbarkeit eines Systems ist eine notwendige Bedingung für die Flachheit, was leicht mit Hilfe von Computer-Algebra-Systemen überprüft werden kann. Aber auch bei einem Fehlen dieser Eigenschaft kann das effektive Konzept zur Trajektorienregelung mit Hilfe eines flachen Regelungsgesetzes genutzt werden, sofern gewisse kritische Zustände/Systemgrößen meßtechnisch erfaßt werden können. Sind die nicht flachen Systemgrößen meßbar, so kann das ausgelegte Rückführgesetz zur Trajektorienregelung genutzt werden. Eine reine off-line Berechnung der Regelung kann in diesem Fall jedoch nicht mehr gewährleistet werden.

Ausblickend für weitere Untersuchungen verbleibt weiterhin, eine rechnerunterstützte Untersuchungsmethode zur Überprüfung der Flachheit eines Systems zu finden, die nicht indirekt vorgeht. Denn mit der hier vorgestellten Methode kann nur das Fehlen dieser Eigenschaft automatisiert nachgewiesen werden. Der Forschungsbedarf nach weiteren Analysekr Kriterien bleibt also erhalten. Ferner sind auch weitergehende Untersuchungen hinsichtlich des hier neu eingeführten Konzeptes zum Nutzen des flachen Regelungsgesetzes für nicht flache Systeme zu nennen. Das Konzept ist in diesem Bericht zwar vorgestellt, formal aber noch nicht vollständig beschrieben und auch Kriterien für die Durchführbarkeit dieses Vorgehens fehlen noch.

## 7 Literatur

- Bernzen, W.** 1995. *Der Versuchsträger „hydraulisch angetriebener elastischer Roboter“*. Forschungsbericht 21/95. MSRT. Universität Duisburg.
- Bernzen, W.** und **B. Riege**. 1996. *Nichtlineare Modellbildung und Regelung eines hydraulischen Differentialzylinders*. Forschungsbericht 12/96. MSRT. Universität Duisburg.
- Bernzen, W., T. Wey** und **B. Riege**. 1996. Modeling of hydraulic differential cylinders driven by servovalves actuating a flexible robot. *Proceedings of the 3rd International Symposium on Methods and Models in Automation and Robotics*. Miedzyzdroje/Polen. 1047–1051.
- de Jager, B.** 1996. Symbolic analysis and design for (nonaffine) nonlinear control systems. *Proc. 13th IFAC World Congress*. IFAC. San Francisco/USA. 289–294.
- Eisenreich, G.** und **R. Sube**. 1982. *Wörterbuch Mathematik*. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch.
- Fliess, M.** 1986. Nonlinear control theory and differential algebra. *Modelling and Adaptive Control*, hg. von C. I. Byrnes und A. Kurszanski. *Lecture Notes in Control and Information Science*. 105. Berlin: Springer.
- Fliess, M.** und **S. T. Glad**. 1993. An algebraic approach to linear and nonlinear control. *Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications*, hg. von H. L. Trentelmann und J. C. Willems. *Progress in Systems and Control Theory*. 14. 223–267. Boston/USA: Birkhäuser.
- Fliess, M., J. Lévine, P. Martin, F. Ollivier** und **P. Rouchon**. 1997. Controlling nonlinear systems by flatness. *Systems and Control in the Twenty-First Century*, hg. von C. I. Byrnes, B. N. Datta, D. S. Gilliam und C. F. Martin. *Progress in Systems and Control Theory*. Progress in Systems and Control Theory. 137–154. Boston/USA: Birkhäuser.
- Fliess, M., J. Lévine, P. Martin** und **P. Rouchon**. 1995. Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples. *Int. J. Control* 61(6). 1327 – 1361.
- Hermann, R.** und **A. J. Krener**. 1977. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Trans. Automat. Control* 22. 728–740.
- Isidori, A.** 1995. *Nonlinear Control Systems*. 3. Auflage. Berlin: Springer.
- Kaplansky, I.** 1976. *An Introduction to Differential Algebra*. Paris/Frankreich: Hermann.
- Lemmen, M., T. Wey** und **M. Jelali**. 1995. *NSAS – ein Computer-Algebra-Paket zur Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme*. Forschungsbericht 20/95. MSRT. Universität Duisburg.
- Meyberg, K.** 1976. *Algebra*. München: Carl Hanser.
- Nijmeijer, H.** und **A. J. van der Schaft**. 1990. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. New York/USA: Springer.
- Ritt, J. F.** 1950. *Differential Algebra*. New York/USA: Amer. Math. Soc.
- Rothfuß, R., J. Rudolph** und **M. Zeitz**. 1996. Controlling a chemical reactor model using its flatness. *Proc. 13th IFAC World Congress*. Proc. 13th Triennial World Congress. IFAC. San Francisco/USA. 383 – 388.
- Rothfuß, R.** und **M. Zeitz**. 1996. A toolbox for symbolic nonlinear feedback design. *Proc. 13th IFAC World Congress*. San Francisco/USA. 283–288.

- 
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme – Systemtheoretische Grundlagen*. München: Oldenbourg.
- Spielmann, M.** 1996. *Zustandsmodelle hydraulischer Antriebselemente*. Forschungsbericht 15/96. MSRT. Universität Duisburg.
- Sussman, H. J.** und **V. Jurdjevic.** 1972. Controllability of Nonlinear Systems. *JOURNAL OF DIFFERENTIAL EQUATIONS* 12(42). 95 – 116.
- Wey, T.** und **F. Svaricek.** 1995. Analyse und Synthese nichtlinearer Regelungssysteme mittels Differentialalgebra. *Automatisierungstechnik - at* 43(4). 163–173.

## A Begriffe und Operatoren der Differentialalgebra

Besonders im Hinblick auf eine Anwendung im Bereich der Theorie nichtlinearer Systeme sind die Begriffe *differentielle Körper* und *differentielle Körpererweiterungen* (vgl. Abschnitt 2) von zentraler Bedeutung in der Differentialalgebra.

In Anlehnung an Fliess und Glad (1993) werden folgende Begriffe und Schreibweisen in diesem Bericht verwendet:

$K$	<i>Grundkörper</i> , der mindestens alle Koeffizienten der zu beschreibenden System-Differentialgleichungen umfaßt. Im allgemeinen genügen die Mengen $\mathbb{Q}$ der rationalen bzw. $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen,
$K(\mathbf{u}) = K(u_1, \dots, u_m)$	Polynome in den Variablen $u_i$ mit Koeffizienten in $K$ ,
$K[\mathbf{u}]$	Körper, dessen Elemente rationalen Funktionen in den Variablen $u_i$ mit Koeffizienten in $K$ entsprechen,
$K\{\mathbf{u}\}$	Polynome in den Variablen $u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i, \dots$ mit Koeffizienten in $K$ ,
$K\langle\mathbf{u}\rangle$	Körper, dessen Elemente rationalen Funktionen in den Variablen $u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i, \dots$ mit Koeffizienten in $K$ entsprechen.

Eine Körpererweiterung wird durch den Operator „/“ beschrieben. Der rechts von / stehende Körper muß immer eine Teilmenge des linken Operanden sein, für die Erweiterung  $L/K$  gilt demzufolge  $K \subseteq L$ .

Im Zusammenhang mit Körpern und deren Erweiterungen sind folgende Begriffe von besonderer Bedeutung:

### *K-differentiell algebraisch*

Ein Element  $a \in L$  ist *K-differentiell algebraisch* (bzw. *differentiell algebraisch über K*), wenn eine Differentialgleichung  $P(a, \dot{a}, \ddot{a}, \dots, a^{(\alpha)}) = 0$  existiert.  $P(\cdot)$  entspricht einem Polynom beliebigen Grades mit Koeffizienten aus dem Körper  $K$ .

### *Differentiell algebraisch*

Die Körpererweiterung  $L/K$  heißt *differentiell algebraisch*, wenn alle Elemente aus  $L$  *differentiell algebraisch über K* sind.

### *K-differentiell transzendent*

Ein Element  $a \in L$  ist *K-differentiell transzendent*, wenn es nicht *K-differentiell algebraisch* ist.

### *Differentiell transzendent*

Existiert wenigstens ein Element aus  $L$ , das *K-differentiell transzendent* ist, so wird auch die Körpererweiterung  $L/K$  als *differentiell transzendent* bezeichnet.

### *K-differentiell algebraisch abhängig*

Eine Teilmenge  $T \subseteq L$  heißt *K-differentiell algebraisch abhängig*, wenn beliebige Elemente aus  $T$  durch eine algebraische Differentialgleichung mit Koeffizienten in  $K$  miteinander verknüpfbar sind.

*K-differentiell algebraisch unabhängig*

Eine Teilmenge  $T \subseteq L$  heißt  $K$ -differentiell algebraisch unabhängig, wenn sie nicht  $K$ -differentiell algebraisch abhängig ist.

*K-differentiell linear abhängig*

Eine Teilmenge  $T \subseteq L$  heißt  $K$ -differentiell linear abhängig, wenn beliebige Elemente aus  $T$  durch eine lineare Differentialgleichung mit Koeffizienten in  $K$  miteinander verknüpfbar sind.

*K-differentiell linear unabhängig*

Eine Teilmenge  $T \subseteq L$  heißt  $K$ -differentiell linear unabhängig, wenn sie nicht  $K$ -differentiell linear abhängig ist.

*Differentielle Transzendenzbasis*

Eine  $K$ -differentiell algebraisch unabhängige Teilmenge  $T_{\max} \subseteq L$  mit einer maximalen Anzahl von Elementen wird auch als differentielle Transzendenzbasis einer Körpererweiterung  $L/K$  bezeichnet.

*Differentieller Transzendenzgrad*

Die Mächtigkeit einer differentiellen Transzendenzbasis zu  $L/K$ , d. h. die Anzahl der Elemente dieser differentiellen Transzendenzbasis, wird der differentielle Transzendenzgrad der korrespondierenden Körpererweiterung genannt. Die Kurzschreibweise lautet

$$\text{diff. trg } L/K \quad . \quad (\text{A.1})$$

*Differentielle Gradformel*

Für 3 differentielle Körper  $L$ ,  $M$  und  $K$  mit der Eigenschaft  $K \subseteq M \subseteq L$  kann aus Kenntnis der differentiellen Transzendenzgrade von  $L/M$  und  $M/K$  der Transzendenzgrad der Erweiterung  $L/K$  abgeleitet werden:

$$\text{diff. trg } L/K = \text{diff. trg } L/M + \text{diff. trg } M/K \quad . \quad (\text{A.2})$$

## B Simulationsmodell des Laborversuchs „Differentialzylinder“

Das Streckenmodell des Laborversuchs „Differentialzylinder“ ist in analytischer Form als Modell 6. Ordnung verfügbar. Die axiomatische Modellbildung beruht auf der Auswertung physikalischer Gesetzmäßigkeiten, u. a. wird hierbei auch die Reibung berücksichtigt. Zur Vereinfachung wird angenommen, daß keine Gravitationseinflüsse vorhanden sind, keine Störkräfte auf das System wirken und auch kein äußerer Leckölvolumenstrom auftritt. Damit ergibt sich das folgende Simulationsmodell, das als MATLAB-Eingabedatei abgedruckt ist:

```
dx1 = x(2);
dx2 = 1/mges*(x(3)*Aa-x(4)*Ab-Fr-Fs);
dx3 = EoelA/Va*(-Aa*x(2)+Qa+Klip*(x(4)-x(3)));
dx4 = EoelB/Vb*(Ab*x(2)+Qb-Klip*(x(4)-x(3)));
dx5 = x(6);
dx6 = w0^2*yamax/umax*u-2*Dv*w0*x(6)-x(5)*w0^2;
```

Die Systemparameter des Modells wurden mit dem realen System abgeglichen und nehmen diese Werte an (Spielmann 1996):

```
% Systemparameter
mk      = 1.4;           % Kolbenmasse           [kg]
RhoOel  = 880;          % Öldichte           [kg/m^2]
Va0     = 0.3*2.7e-3;   % Restvolumen Kammer A [m^3]
Vb0     = 0.3*2.7e-3;   % Restvolumen Kammer B [m^3]
H       = 0.2;          % Kolbenhub           [m]
dk      = 25e-3;        % Kolbendurchmesser   [m]
dsa     = 0;            % Kolbenstangendurchmesser A [m]
dsb     = 18e-3;        % Kolbenstangendurchmesser B [m]
Emax    = 18e8;         % Maximales E-Modul des Öls [N/m^2]
pmax    = 280e5;        % Druck bei Emax      [N/m^2]
p0      = 60e5;         % Betriebsdruck       [N/m^2]
pt      = 0;            % Tankdruck           [N/m^2]
ymax    = 1.6e-3;       % maximale Steuerkolbenauslenkung [m]
umax    = 10;           % maximale Steuerspannung [V]
Qn      = 1e-2/60;      % Nenndurchfluss      [m^3/s]
dPn     = 70e5;         % Nenndruckdifferenz  [N/m^2]
Klip    = 3.969762e-13; % Leckölvolumenstrombeiwert [sm^4/kg]
w0      = 100.0;        % Eigenfrequenz des Ventils [1/s]
Dv      = 0.9;          % Dämpfung des Ventils

% resultierende Größen
Aa      = pi/4*(dk^2-dsa^2);
Ab      = pi/4*(dk^2-dsb^2);
Va      = x(1)*Aa+Va0;
Vb      = (H-x(1))*Ab+Vb0;
Bva     = Qn/(ymax*sqrt(1/2*dPn));
Bvb     = Bva;
EoelA   = Emax;
EoelB   = Emax;
```

```
mges = mk+RhoOel*(Va0+Va0+H/2*(Aa+Ab));
Qa   = Bva*(sgn(x(5))*sign(p0-x(3))*sqrt(abs(p0-x(3)))
      -sgn(-x(5))*sign(x(3)-pt)*sqrt(abs(x(3)-pt)));
Qb   = Bvb*(-sgn(x(5))*sign(x(4)-pt)*sqrt(abs(x(4)-pt))
      +sgn(-x(5))*sign(p0-x(4))*sqrt(abs(p0-x(4))));
```