

Strukturmaße für dynamische Systeme

Britta Riege

Forschungsbericht Nr. 01/98

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: In diesem Bericht werden aus der Literatur bekannte Maße zur Quantifizierung bestimmter Struktureigenschaften wie Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit dynamischer Systeme zusammengestellt und auf ihre Anwendbarkeit überprüft. Dies geschieht speziell für das Anwendungsbeispiel eines zweiachsigen elastischen Roboters, dessen Modell mit verschiedenen Ansätzen auf Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit und die Dominanz der einzelnen Systemteile untersucht wird.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	II
1 Einführung	1
2 Allgemeine Überlegungen zu Strukturmaßen	3
3 Definition von Strukturmaßen	5
3.1 Dominanzmaß nach Litz	7
3.2 Steuer- und Beobachtbarkeitsmaß nach Lückel und Müller	8
3.3 Steuerbarkeitsmaß nach Benninger und Rivoir	9
3.4 Eigenschaften der Strukturmaße im Vergleich	11
4 Anwendungsbeispiel	14
4.1 Modellbildung und Modellapproximation	14
4.2 Untersuchung für verschiedene Sensorpositionen	17
4.3 Untersuchung für unterschiedliche Armkonfigurationen	21
5 Zusammenfassung und Ausblick	27
6 Literaturverzeichnis	29
Anhang	30
A Transformationsmatrizen zur Ermittlung der Absolutposition eines Punktes	31

Nomenklatur

Vektoren und Matrizen

A	:	Systemmatrix eines linearen Systems
A_i	:	Homogene Transformationsmatrix für das i -te Drehgelenk eines elastischen Roboters
\hat{b}_i^T	:	i -ter Zeilenvektor der Matrix \hat{B}
B	:	Eingangsmatrix eines linearen Systems
\hat{c}_i	:	i -ter Spaltenvektor der Matrix \hat{C}
C	:	Ausgangsmatrix eines linearen Systems
E_i	:	Homogene Transformationsmatrix für das i -te Glied eines elastischen Roboters
D	:	Matrix der viskosen Gelenkreibung und der Strukturdämpfung der Glieder
$h_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$:	Coriolis- und Zentrifugalkraftvektor
$H(\mathbf{q})$:	Trägheitsmatrix
J	:	Trägheitsmatrix in Bezug auf die Antriebsdynamik
K	:	Steifigkeitsmatrix
K_e	:	Modellmatrix
K_m	:	Verstärkungsmatrix zur Umrechnung der Eingangsspannungen in verallgemeinerte Eingangsmomente
Q_S	:	Gramsche Steuerbarkeitsmatrix, Steuerbarkeitsmatrix 1. Art
$\mathbf{q}(t)$:	Vektor der verallgemeinerten elastischen und starren Koordinaten
${}^j r_i$:	Ortsvektor eines Punktes im i -ten Koordinatensystem hinsichtlich des j -ten Koordinatensystems
$\mathbf{u}(t)$:	Eingangsvektor
U	:	Vektor der Eingangsspannungen beider Elektromotoren
\mathbf{v}_i	:	Rechtseigenvektor einer Matrix
V, W	:	Transformationsmatrizen
\mathbf{w}_i^T	:	Linkseigenvektor einer Matrix
$\mathbf{x}(t)$:	Zustandsvektor
$\mathbf{y}(t)$:	Ausgangsvektor
$\mathbf{z}(t)$:	Modaltransformierter Zustandsvektor
$\delta(t)$:	Vektor der verallgemeinerten elastischen Koordinaten
$\theta(t)$:	Vektor der verallgemeinerten starren Koordinaten

Skalare Größen

i, j, k	:	Laufindizes
l_i	:	Länge des i -ten elastischen Gliedes ohne Deformation
M	:	Strukturmaß

m_{Bk}	:	Steuerbarkeitsmaß nach Benninger
M_k	:	Maximalmaß nach Litz
m	:	Dimension des Eingangsvektors
n	:	Systemordnung, Dimension des Zustandsvektors
p	:	Dimension des Ausgangsvektors
q_{ikj}	:	Dominanzfaktor nach Litz
S_k	:	Summenmaß nach Litz
T	:	Zeit bis zum Erreichen eines Zustandes x_0 , $T = t_1 - t_0$
t_i	:	Zeitpunkt, zu dem ein Systemzustand x_i erreicht ist
U_i	:	Eingangsspannung des i -ten Motors
v	:	Vielfachheit eines Eigenwertes
W	:	Steuerenergie
$x_{S,P}$:	Abstand eines Punktes P vom Motor für das unverformte Glied
β_i	:	Winkelkoordinaten für die Modellbildung
δ_{i1}	:	Erste elastische Koordinate des i -ten Gliedes
κ_{Bk}	:	Steuerbarkeitsmaß nach Lückel/Müller
κ_{Ck}	:	Beobachtbarkeitsmaß nach Lückel/Müller
λ_i	:	i -ter Eigenwert eines linearen Systems
ϕ_{ij}	:	j -te Eigenfunktion des i -ten elastischen Gliedes
θ_1, θ_2	:	Winkelkoordinaten

Operatoren

$\hat{(\cdot)}$:	Modaltransformierte zu (\cdot)
$\overline{(\cdot)}$:	Konjugiert komplexer Wert zu (\cdot)
$ \cdot $:	Absolutbetrag
$(\cdot)^T$:	Transposition zu (\cdot)
$\max(\cdot)$:	Maximumoperator
$(\cdot)^+$:	Moore–Penrose–Pseudoinverse zu (\cdot)
$:=$:	Definition

Abkürzungen

ALS	:	Analytisches System mit linear eingehender Steuerung
BLS	:	Bilineares System
QLS	:	Quadratisches System mit linear eingehender Steuerung
Σ	:	System

1 Einführung

Die Untersuchung von Struktureigenschaften dynamischer Systeme hat in der Regelungstheorie eine lange Tradition. Insbesondere zur Untersuchung der beiden Strukturmerkmale Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit existieren seit vielen Jahren, vor allem in der Theorie linearer Systeme, einfach anzuwendende Kriterien (Kalman u. a. 1969). Aber auch für nichtlineare Systeme gibt es verschiedene Ansätze zur Ermittlung von Strukturinvarianten (Birk 1992). Für bestimmte Unterklassen der nichtlinearen Systeme sind diese Untersuchungen schon weit fortgeschritten (Schwarz 1991, Lemmen und Jelali 1996, Jelali 1997). Hier lassen sich teilweise die aus der linearen Theorie bekannten Ergebnisse verallgemeinern und übertragen. Ein Überblick über die in den Systemklassen ALS, QLS und BLS anwendbaren differentialgeometrischen Kriterien findet sich in (Riege 1996).

Die Steuer- und Beobachtbarkeitsuntersuchungen anhand von Rangbestimmungen von Matrizen liefern im allgemeinen nur binäre Aussagen. Ein System bzw. ein Eigenwert ist steuerbar oder nicht steuerbar infolge eines bestimmten Kriteriums. Es ist wünschenswert, diese Struktureigenschaft weiter zu quantifizieren. Gesucht wird also ein Maß, das zusätzlich zu einer globalen Aussage über das Vorhandensein von Struktureigenschaften auch Angaben darüber macht, ob ein Systemteil besser oder schlechter beeinflussbar, steuerbar oder beobachtbar ist als ein anderer. Vor allem in der deutschsprachigen Literatur gibt es seit Beginn der siebziger Jahre mehrere Arbeiten zu diesem Thema (Lückel und Müller 1975, Lückel und Kasper 1981, Litz 1983, Benninger 1987). Das ursprüngliche Ziel dieser Arbeiten lag darin, die Dominanz einzelner Teilsysteme in Bezug auf das dynamische Verhalten des Gesamtsystems zu beurteilen. So sollte es ermöglicht werden, die Ordnung eines komplexen Systems durch Vernachlässigung der das Gesamtverhalten am wenigsten beeinflussenden Teile zu reduzieren (Litz 1979). Eine weitere Anwendung ist das Gebiet der sogenannten „Balanced Control“, die Informationen über den Grad der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von Systemzuständen im Reglerentwurf berücksichtigt (Gawronski 1996).

Ein technisches Anwendungsgebiet, das von solchen Strukturmaßen profitieren kann, ist die Schwerlasthandhabungstechnik. Es handelt sich hierbei um Systeme mit verteilten Parametern, die durch unendlich viele Eigenfrequenzen gekennzeichnet sind. Neben der möglichst exakten Modellbildung ergibt sich als wichtiges Forschungsziel die Frage, an welchen Orten Sensoren und Aktoren günstig angebracht werden, um möglichst alle dominanten Eigenbewegungen des Systems zu detektieren bzw. zu beeinflussen. Hier ergibt sich ein erster Ansatz durch die oben erwähnten Strukturmaße. Sie geben an, welche Teilsysteme des Gesamtsystems besser oder schlechter steuer- oder beobachtbar sind als andere. Zu diesem Thema gibt es bereits einige Untersuchungen in der Literatur (Konno u. a. 1994, Liu u. a. 1994). Die dort vorgestellten Konzepte lassen viele Gemeinsamkeiten untereinander erkennen.

Der vorliegende Bericht stellt die unterschiedlichen Ansätze zur Ermittlung von Strukturmaßen vor. Wichtige, aus der Literatur bekannte Modalmaße werden vergleichend untersucht. Anschließend wird ihre Tauglichkeit in Bezug auf das konkrete technische Problem elastischer Roboter genauer beleuchtet.

Der Bericht gliedert sich wie folgt: Im zweiten Abschnitt werden zunächst einige allgemeine Überlegungen zu Strukturmaßen angestellt. Daraus resultiert ein Katalog mit Anforderungen, die von einem in der Praxis einsatzfähigen Strukturmaß erfüllt werden müssen. Der dritte Abschnitt stellt die wichtigen und bekannten Strukturmaße vergleichend vor. Im vierten Abschnitt erfolgt die Anwendung auf das Modell eines zweiachsigen elastischen Roboters. Der Bericht schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

2 Allgemeine Überlegungen zu Strukturmaßen

Die Notwendigkeit der Einführung von Maßzahlen zur Quantifizierung von Struktureigenschaften hat drei wichtige Ursprünge: Zum einen ist man in der Regelungstechnik bemüht, die Ordnung von Modellen so gering wie möglich zu halten, um einen geschlossenen Reglerentwurf zu ermöglichen. Als Hilfsmittel dazu dienen modale Verfahren zur Modellreduktion. Diese Verfahren müssen zuerst eine globale Aussage darüber treffen, welche Teilsysteme dominant am Übertragungsverhalten eines Systems beteiligt sind, und bei welchen Teilen sich eine Vernachlässigung nicht wesentlich auf die Modellgüte auswirkt. Ein zweiter Ansatzpunkt resultiert direkt aus der Reglerauslegung. Beim Entwurf einer Zustandsrückführung ist es wichtig zu wissen, welche Systemteile gut und welche weniger gut durch eine geeignete Steuerung beeinflussbar sind. Ein dritter wichtiger Aspekt zur Motivation der Einführung von Strukturmaßen ist die Ermittlung der Störempfindlichkeit verschiedener Teile eines komplexen Systems, wenn der Reglerentwurf bereits stattgefunden hat. Diese Ansätze münden alle in unterschiedlichen, aber durch die folgende Definition global erfaßbaren strukturellen Maßen:

Definition 2.1

Ein Strukturmaß M dient dazu, einzelne Teilstrukturen eines dynamischen Systems Σ durch quantitative Bewertung einer bestimmten Eigenschaft gegeneinander abzuwägen. Der Begriff „modale Maße“ bezieht sich stets auf lineare, zeitinvariante dynamische Systeme und trifft Aussagen über die Eigenwerte dieser Systeme. \square

Es wird also immer die Dominanz einzelner Systemteile gegenüber anderen untersucht, wobei Dominanz hier definiert ist als die stärkere Beeinflussung einer bestimmten Systemeigenschaft seitens eines Systemteils im Vergleich zu anderen Systemteilen. Zu diesen Systemeigenschaften gehören zum Beispiel:

- Steuerbarkeit oder Erreichbarkeit,
- Beobachtbarkeit oder Unterscheidbarkeit,
- Verlauf des Ausgangssignals bei Sprunganregung,
- Änderung des Übertragungsverhaltens des gesamten Systems bei Entfernung eines bestimmten Systemteils sowie
- Entkoppelbarkeit.

Die jeweils in den Vordergrund gestellte Systemeigenschaft bestimmt auch die physikalische Erwägung, die der Definition eines Strukturmaßes vorausgeht. Soll zum Beispiel wie in (Litz 1983) die Eigenschaft untersucht werden, inwieweit sich das Übertragungsverhalten bei Vernachlässigung eines Eigenwertes ändert, so dient als Grundlage für das definierte Dominanzmaß die Betrachtung von einzelnen, eigenwertbezogenen Übergangsfunktionen als Antwort auf das gleiche Eingangssignal. Soll hingegen die Struktureigenschaft Steuerbarkeit quantifiziert werden, so werden Strukturmaße auf der Grundlage der Steuerenergie beurteilt, die nötig ist, um

einen Zustand in einen anderen zu überführen.

Es ergeben sich zunächst folgende Forderungen an ein Strukturmaß, die auch schon in der Literatur diskutiert wurden (Juen 1982, Litz 1983):

- Unabhängigkeit von einer linearen Koordinatentransformation,
- Unabhängigkeit von der Mehrdeutigkeit der Eigenvektoren sowie
- Konsistenz mit dem Kalmanschen Steuer- bzw. Beobachtbarkeitsbegriff.

Besonders die Konsistenzfrage hat zu vielfältigen Diskussionen geführt. Die Konsistenz einer Maßzahl ist dabei wie folgt definiert:

Definition 2.2 (Benninger 1987)

Eine Maßzahl zur Beurteilung einer bestimmten Systemeigenschaft ist genau dann konsistent mit dieser Eigenschaft, wenn sie in Abhängigkeit aller Systemparameter stetig ist und beim Verlust der Systemeigenschaft den Wert 0 annimmt. \square

Alle aus der Literatur bekannten Ansätze bestimmen die Strukturmaße auf der Basis linearer Modelle. Da in der Realität meist stark nichtlineare Modelle untersucht werden, muß bei der Anwendung vorhandener Maße versucht werden, Aussagen über das Gesamtsystem zu erhalten. Dies kann beispielsweise, wie in diesem Bericht, durch mehrere lineare Approximationsmodelle des Systems, die für verschiedene Arbeitspunkte hergeleitet werden, geschehen. Diese Arbeitspunkte sollten über den Arbeitsbereich gleichmäßig verteilt gewählt werden. So ist man in der Lage, Aussagen über den gesamten Gültigkeitsbereich des nichtlinearen Modells zu treffen. Daraus ergibt sich direkt eine weitere Forderung an ein Strukturmaß: Es sollte stetiges Verhalten aufweisen, d. h. die Maßzahlen, die sich für die Eigenschaften der linearen Teilmodelle ergeben, sollten bei Approximationsmodellen, deren Arbeitspunkte dicht beieinander liegen, auch ähnlich sein.

Eine letzte wichtige Eigenschaft, die ein für die Praxis geeignetes Strukturmaß besitzen sollte, ist die der physikalischen Interpretierbarkeit. Es sollte also möglich sein, bei einem analytischen Modell direkt auf die Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit oder Dominanz der realen Zustandsgrößen zu schließen.

Diese hier vorgestellten Forderungen werden im folgenden für einige Maße überprüft.

3 Definition von Strukturmaßen

In der Literatur finden sich derzeit nur Ansätze, die von linearen Systemen ausgehen. Dazu werden meist modale Maße bestimmt, die sich auf das modaltransformierte System beziehen. Durch diese kanonische Form ist die direkte Quantifizierung bestimmter Struktureigenschaften, bezogen auf die einzelnen Eigenwerte, möglich. Fast alle Autoren verwenden die Eingangsmatrix bzw. die Ausgangsmatrix des modaltransformierten Systems, um Strukturmaße zu definieren, denn die Zeilen bzw. Spalten dieser Matrizen lassen direkte Rückschlüsse auf die Beeinflussbarkeit eines definierten Eigenwertes zu. Zum besseren Verständnis dieser Vorgehensweise sind zunächst einige Begriffsbildungen notwendig, die im folgenden vorgestellt werden.

Die Ausführungen in den folgenden Unterabschnitten gehen von einem linearen zeitinvarianten Systemmodell der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t),\end{aligned}\quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \quad (3.1)$$

aus. Dieses System wird in einem ersten Schritt auf Modalform transformiert. Die dazu notwendige Transformationsmatrix \mathbf{V} ergibt sich als Matrix der (Rechts-) Eigenvektoren von \mathbf{A} :

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n] \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n, \quad (3.2)$$

wobei λ_i den i -ten Eigenwert des Systems bezeichnet. Mit der Transformation

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{V} \mathbf{z}(t) \quad (3.3)$$

resultiert die Jordan-Normalform des Systems aus Gl. (3.1):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}(t) &= \hat{\mathbf{A}} \mathbf{z}(t) + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \hat{\mathbf{C}} \mathbf{z}(t)\end{aligned} \quad (3.4)$$

Für Systeme mit durchweg verschiedenen Eigenwerten gilt:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1^T \\ \hat{\mathbf{b}}_2^T \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{b}}_n^T \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{C} \mathbf{V} = [\hat{\mathbf{c}}_1; \hat{\mathbf{c}}_2; \dots; \hat{\mathbf{c}}_n].\end{aligned} \quad (3.5)$$

Dies führt zu dem in Bild 3.1 verdeutlichten System. Es ist leicht zu erkennen, daß nur durch die k -te Zeile der Eingangsmatrix $\hat{\mathbf{B}}$ Einfluß auf den Zustand z_k genommen werden kann. Entsprechend hat der k -te Eigenwert nur Auswirkung auf den Ausgang über die k -te Spalte der Ausgangsmatrix $\hat{\mathbf{C}}$. Hier ist zu sehen, wie die Transformation auf Jordan-Normalform eigenwertbezogene Aussagen erleichtert.

Aus der Konfiguration nach Bild 3.1 läßt sich auch direkt das Steuerbarkeitskriterium nach Gilbert (1963) ablesen:

Satz 3.1 (Gilbert 1963)

Ein System nach Gl. (3.1) ist bei einfachen Eigenwerten $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ genau dann steuerbar, wenn die Eingangsmatrix \hat{B} des transformierten Systems nach Gl. (3.4) keine Nullzeilen besitzt. \square

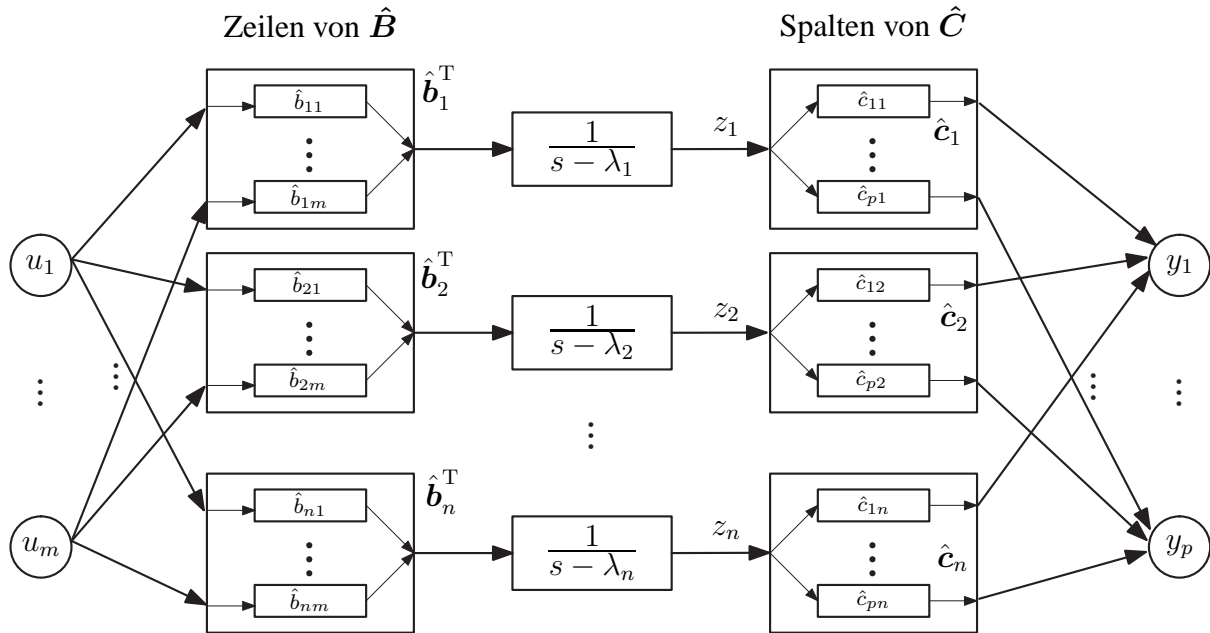


Bild 3.1: Auf Modalform transformiertes lineares System $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$

Eine Verallgemeinerung dieses Satzes für mehrfache Eigenwerte lautet:

Satz 3.2 (Porter und Crossley 1972)

Ein System nach Gl. (3.1) ist genau dann steuerbar, falls zu jedem Eigenwert λ_k der Vielfachheit v genau v linear unabhängige Zeilen in der Eingangsmatrix \hat{B} des transformierten Systems nach Gl. (3.4) gehören. \square

Analog zu den Rechtseigenvektoren v_i lassen sich sogenannte Linkseigenvektoren w_i^T definieren, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$w_i^T A = w_i^T \lambda_i \quad . \quad (3.6)$$

Dabei handelt es sich um Zeilenvektoren, die in der Matrix W zusammengefaßt werden. Zwischen W und V besteht der Zusammenhang

$$W = \begin{bmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix} = V^{-1} \quad . \quad (3.7)$$

Im folgenden werden drei aus der Literatur bekannte und in verschiedenen Anwendungen erprobte Strukturmaße vorgestellt und anhand eines einfachen Beispiels miteinander verglichen.

Im Anschluß daran soll überprüft werden, ob die Strukturmaße den in Abschnitt 2 bestimmten Anforderungen genügen. Zur Illustration der im einzelnen vorzunehmenden Berechnungen wird ein lineares Beispielsystem 2. Ordnung vorgegeben, das bereits in Modalform vorliegt:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad .\end{aligned}\tag{3.8}$$

3.1 Dominanzmaß nach Litz

Die Motivation für die gegen Ende der siebziger Jahre von Litz (1979) entwickelten Dominanzmaße war der Wunsch, die Ordnung eines Systems für einen Reglerentwurf zu reduzieren. Bei einer solchen Modellreduktion muß gewährleistet sein, daß nur die Systemteile vernachlässigt werden, die einen relativ kleinen Anteil an der Dynamik des gesamten Systems besitzen. Aus diesen Überlegungen entwickelte sich der Begriff der dominanten Eigenwerte eines Systems, der von Litz so interpretiert wird, daß ein Eigenwert als dominant im Vergleich zu einem anderen Eigenwert bezeichnet wird, wenn er einen größeren Beitrag zum Übertragungsverhalten des Systems liefert als der andere Eigenwert. Konkret hat der Eigenwert das höchste Dominanzmaß in einem Übertragungskanal, wenn er den größten Beitrag bei der Übertragung von einem Eingang u_i zu einem Ausgang y_j liefert. Die hier vorgenommene Definition der Dominanz unterscheidet sich also von der in Abschnitt 2 vorgestellten. Daher werden die Litzschen Maße auch als Maximalwertdominanzmaße bezeichnet. Quantifiziert wird dieser Beitrag anhand von den einzelnen Eigenwerten zugeordneten Übergangsfunktionen. Es wird ein Faktor q_{ikj} definiert, der genau das Übertragungsverhalten eines Eigenwertes λ_k vom j -ten Eingang zum i -ten Ausgang des modaltransformierten Systems nach Gl. (3.4) beschreibt (vergleiche auch Bild 3.1). Daraus werden für jeden einzelnen Eigenwert λ_k zwei alternative Dominanzmaße definiert.

Definition 3.1 (Litz 1979)

Falls das System nach Gl. (3.4) nur gleichartige Sensoren und Stellglieder besitzt, existiert für jeden Eigenwert λ_k ein Summenmaß S_k und ein Maximalmaß M_k für seine Dominanz wie folgt:

$$\begin{aligned}S_k &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m |q_{ikj}|, \\ M_k &= \max_{i=1, \dots, p} \left(\max_{j=1, \dots, m} |q_{ikj}| \right),\end{aligned}\tag{3.9}$$

mit

$$q_{ikj} = \frac{\hat{c}_{ik} \hat{b}_{kj}}{\lambda_k} \quad \text{für } \lambda_k \neq 0 \quad .\tag{3.10}$$

□

Für jeden Eigenwert müssen beide Maße berechnet werden. Das Maximalmaß macht eine generelle Aussage über die Dominanz des Eigenwertes, während durch die Bestimmung des Summenmaßes erkannt wird, ob ein Eigenwert mit einem sehr hohen Beitrag in einem einzigen Übertragungskanal eventuell trotz eines hohen Maximalmaßes insgesamt nur einen geringen Beitrag zum Systemverhalten leistet. Für das Beispielsystem 2. Ordnung (Gl. (3.8)) berechnen sich Summen- und Maximaldominanzmaß für den k -ten Eigenwert wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} S_k &= \left| \frac{c_{1k} b_{k1}}{\lambda_k} \right| + \left| \frac{c_{2k} b_{k1}}{\lambda_k} \right| \\ M_k &= \max \left(\left| \frac{c_{1k} b_{k1}}{\lambda_k} \right|, \left| \frac{c_{2k} b_{k1}}{\lambda_k} \right| \right) \end{aligned} \right\} \text{ für } k = 1, 2. \quad (3.11)$$

3.2 Steuer- und Beobachtbarkeitsmaß nach Lückel und Müller

Von Lückel und Müller (1975) wurden zuvor schon Maße eingeführt, die direkt Aussagen über die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von Teilsystemen, in diesem Falle Eigenwerten, machen. Als Grundlage dienen modaltransformierte Ein- und Ausgangsmatrizen. Sie definieren diese Maße wie folgt:

Definition 3.2 (Lückel und Müller 1975)

Zu dem linearen, modaltransformierten System nach Gl. (3.4) wird für den k -ten Eigenwert ein modales Steuerbarkeitsmaß κ'_{Bk} sowie ein modales Beobachtbarkeitsmaß κ'_{Ck} definiert zu:

$$\begin{aligned} \kappa'_{Bk} &= \frac{\mathbf{w}_k^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \overline{\mathbf{w}}_k}{\mathbf{w}_k^T \overline{\mathbf{w}}_k} e^{-2 \operatorname{Re}(\lambda_k)}, \\ \kappa'_{Ck} &= \frac{\overline{\mathbf{v}}_k^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k^T \overline{\mathbf{v}}_k} e^{-2 \operatorname{Re}(\lambda_k)}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

In diesen Gleichungen bezeichnet der Querstrich die konjugiert komplexe Größe. \square

Die Faktoren $e^{-2 \operatorname{Re}(\lambda_k)}$ bewirken eine Kopplung des einzelnen Maßes mit der Stabilität des betrachteten Eigenwertes, die in manchen Fällen eine unnötige Verzerrung der Steuer- und Beobachtbarkeitsmaße bewirken kann. In Anlehnung an (Litz 1983) werden im folgenden die von der Kopplung mit der Stabilität bereinigten Maße

$$\kappa_{Bk} = \frac{\mathbf{w}_k^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \overline{\mathbf{w}}_k}{\mathbf{w}_k^T \overline{\mathbf{w}}_k} = \frac{\sum_{j=1}^m |\hat{b}_{kj}|^2}{\mathbf{w}_k^T \overline{\mathbf{w}}_k}, \quad (3.13)$$

$$\kappa_{Ck} = \frac{\overline{\mathbf{v}}_k^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k^T \overline{\mathbf{v}}_k} = \frac{\sum_{i=1}^p |\hat{c}_{ik}|^2}{\mathbf{v}_k^T \overline{\mathbf{v}}_k} \quad (3.14)$$

verwendet. Für das Beispielsystem nach Gl. (3.8) berechnen sich die Steuer- und Beobachtbarkeitsmaße für die beiden Eigenwerte zu:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{Bk} &= \frac{|b_{k1}|^2}{w_{k1}\overline{w}_{k1} + w_{k2}\overline{w}_{k2}} \\ \kappa_{Ck} &= \frac{|c_{1k}|^2 + |c_{2k}|^2}{v_{1k}\overline{v}_{1k} + v_{2k}\overline{v}_{2k}} \end{aligned} \right\} \text{für } k = 1, 2. \quad (3.15)$$

Konno u. a. (1994) verwenden denselben Ansatz, die Berechnung eines modalen Steuerbarkeitsmaßes aus den Zeilen der modaltransformierten Eingangsmatrix, das nach der Vorschrift

$$a_{mi} = \sqrt{\hat{\mathbf{b}}_i \hat{\mathbf{b}}_i^T} \quad (3.16)$$

berechnet wird. Dieses Maß findet bei der konfigurationsabhängigen Steuerbarkeitsanalyse elastischer Roboter in (Konno u. a. 1994, Uchiyama und Konno 1995) Anwendung.

3.3 Steuerbarkeitsmaß nach Benninger und Rivoir

Die Diskussion über die Konsistenz von Strukturmaßen, die im Rahmen verschiedener Veröffentlichungen geführt wurde (Juen 1982, Litz 1983), führte zu der intensiven Suche nach mit dem klassischen Steuerbarkeitsbegriff konsistenten Maßzahlen. Einen Ansatz stellen die von Benninger und Rivoir (1986) eingeführten Maßzahlen dar.

Die Autoren wählen als Ausgangspunkt ihrer Überlegungen die minimale Steuerenergie, die benötigt wird, um einen Zustand \mathbf{x}_0 in den Ursprung zu überführen. Dabei soll sich das System zum Zeitpunkt t_0 im Zustand \mathbf{x}_0 und zum Zeitpunkt t_1 im Ursprung befinden. Diese Energie berechnet sich zu

$$W(t_1, t_0, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{u}^T(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad , \quad (3.17)$$

unter der Voraussetzung, daß es sich bei \mathbf{u} schon um die minimale Steuerfunktion handelt. Diese Steuerung kann auch berechnet werden. Dazu muß eine Hamilton-Funktion aufgestellt (Föllinger 1988) sowie die vollständige Lösung des Zustandsmodells Gl. (3.1) berechnet werden. Die gesuchte Steuerung ergibt sich dann zu

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T(t-t_0)} \mathbf{Q}_S^{-1}(t_1, t_0) \mathbf{x}_0 \quad (3.18)$$

mit der sogenannten Gramschen Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_S , auch Steuerbarkeitsmatrix erster Art genannt. Diese Matrix ergibt sich für das zugrunde liegende lineare System zu:

$$\mathbf{Q}_S = \int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t_0-\tau)} d\tau \quad . \quad (3.19)$$

Daraus läßt sich die minimale Steuerenergie berechnen:

$$W_S = \mathbf{x}_0^T \mathbf{Q}_S^{-1} \mathbf{x}_0 \quad . \quad (3.20)$$

Nun kann das Strukturmaß bestimmt werden. Es ergibt sich, indem man eine bestimmte minimale Steuerenergie vorgibt und die dazugehörige Auslenkung einer Zustandsvariablen betrachtet. Die Menge aller Zustände, die mit dem gegebenen Wert der minimalen Steuerenergie in den Ursprung überführt werden können, bildet ein Hyperellipsoid im Zustandsraum. Das Steuerbarkeitsmaß für einen Zustand x_i ergibt sich dann für eine festgelegte Steuerenergie $W_S = 1$ aus der Größe der Schnittmenge dieses Ellipsoids mit der dazugehörigen positiven Zustandsachse. Dies führt mit Gleichung (3.20) auf die folgende Definition (für weitere Erläuterungen siehe (Benninger 1987)):

Definition 3.3 (Benninger 1987)

Ein konsistentes Steuerbarkeitsmaß für den Zustand x_k des dynamischen Systems nach Gl. (3.1) ergibt sich mit Hilfe der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix zu

$$m_{Bk} = \{(\mathbf{Q}_S^{-1})_{kk}\}^{-\frac{1}{2}} \quad . \quad (3.21)$$

Hier wird mit $(\mathbf{Q}_S^{-1})_{kk}$ das Element aus der k -ten Spalte und der k -ten Zeile der Inversen der Gramschen Matrix nach Gl. (3.19) bezeichnet. \square

Zur Berechnung der Steuerbarkeitsmatrix müssen zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem, ob das System vollständig steuerbar ist:

- a) Ist das System vollständig steuerbar nach Kalman, so kann die Matrix \mathbf{Q}_S und deren Inverse direkt berechnet werden. Benninger (1987) nutzt zur Berechnung ebenfalls die Modaltransformation. Das ermöglicht eine analytische Berechnung der Matrix, und es ergibt sich für das Element \hat{q}_{ij} der modaltransformierten Gramschen Steuerbarkeitsmatrix

$$\hat{q}_{ij} = \begin{cases} \frac{f_{ij}}{\lambda_i + \lambda_j} [1 - e^{-(\lambda_i + \lambda_j)T}] & \text{für } (\lambda_i + \lambda_j) \neq 0 \\ f_{ij}T & \text{für } (\lambda_i + \lambda_j) = 0 \end{cases} \quad , \quad (3.22)$$

wobei mit f_{ij} ein Element der Matrix

$$\mathbf{F} := \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{B}}^T \quad (3.23)$$

bezeichnet wird. Nach einer Rücktransformation folgt schließlich die Gramsche Steuerbarkeitsmatrix:

$$\mathbf{Q}_S = \mathbf{V}\hat{\mathbf{Q}}_S\mathbf{V}^T \quad . \quad (3.24)$$

Als frei wählbarer Faktor bleibt die Zeitkonstante T mit

$$T = t_1 - t_0 \quad . \quad (3.25)$$

Nach in (Benninger 1987) durchgeführten Untersuchungen ist die Wahl von T in der Größenordnung der dominierenden Zeitkonstanten des Systems günstig.

- b) Die in den Gleichungen (3.22) und (3.23) durchgeführte Berechnung der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix ist nur für die Fälle gültig, in denen das Gesamtsystem steuerbar nach Kalman ist. Für den Fall eines nicht vollständig steuerbaren Systems ist diese Matrix singulär und es kann nicht die Inverse zur Berechnung benutzt werden. In diesem Fall wird auf die Moore-Penrose-Pseudoinverse Q_S^+ anstelle von Q_S^{-1} zurückgegriffen. Einzelheiten hierzu können in (Benninger 1987) nachgelesen werden.

Eine alternative Berechnung der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix anstelle der hier notwendigen Modaltransformation wird in (Svaricek 1995) vorgestellt, wo das Steuerbarkeitsmaß numerisch über eine Singulärwert-Zerlegung der Steuerbarkeitsmatrix des zeitdiskreten Ersatzsystems ermittelt wird. Für das Beispielsystem 2. Ordnung nach Gl. (3.8) ergibt sich das Steuerbarkeitsmaß nach Benninger für den ersten Zustand wie folgt:

$$m_{B1} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \left/ \left[(-1 + e^{(-2\lambda_2 T)}) \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \left/ \left(b_{11}^2 \left[-\lambda_1^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2^2 \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. \left. + e^{(-2\lambda_2 T)} \lambda_1^2 + 2e^{(-2\lambda_2 T)} \lambda_1 \lambda_2 + e^{(-2\lambda_2 T)} \lambda_2^2 + e^{(-2\lambda_1 T)} \lambda_1^2 + 2e^{(-2\lambda_1 T)} \lambda_1 \lambda_2 \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. \left. + e^{(-2\lambda_1 T)} \lambda_2^2 - e^{(-2\lambda_1 T)} e^{(-2\lambda_2 T)} \lambda_1^2 - 2e^{(-2\lambda_1 T)} e^{(-2\lambda_2 T)} \lambda_1 \lambda_2 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. \left. - e^{(-2\lambda_1 T)} e^{(-2\lambda_2 T)} \lambda_2^2 - 8\lambda_1 \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)T} + 4\lambda_1 \lambda_2 (e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)T})^2 \right] \right) \right] \right]^{1/2}. \quad (3.26)$$

Ferner kann ein Beobachtbarkeitsmaß für ein lineares, zeitinvariantes System definiert werden als das Steuerbarkeitsmaß des dualen linearen Systems.

3.4 Eigenschaften der Strukturmaße im Vergleich

Werden die oben definierten Maße anhand der drei in Abschnitt 2 vorgestellten Forderungen genauer untersucht, ergeben sich die folgenden Resultate:

Unabhängigkeit von der Transformation auf Modalform

Bei den Maßen nach Litz (Abschnitt 3.1) besteht eine generelle Unabhängigkeit der Maße von linearen Transformationen, solange die Transformationsmatrix regulär ist. Diese Unabhängigkeit besteht auch bei Lückel und Müller, allerdings muß hier die Transformationsmatrix orthogonal sein. Bei dem Steuerbarkeitsmaß nach Benninger (Abschnitt 3.3) besteht aus methodischen Gründen keine Abhängigkeit des Maßes von der Transformation, denn es erfolgt die Untersuchung von Struktureigenschaften der physikalischen Systemgrößen. Die Forderung nach Unabhängigkeit von der Transformation auf Modalform erfüllen alle drei Maße.

Unabhängigkeit von der Mehrdeutigkeit der Eigenvektoren

Sowohl die Dominanzmaße als auch die Strukturmaße nach Lückel und Müller besitzen keine Abhängigkeit von der Mehrdeutigkeit der Eigenvektoren, da diese Abhängigkeit explizit aufgehoben wird. Dies erfolgt bei den Maßen nach Litz mit dem Term

$$\hat{C}\hat{B} = CV^{-1}VB \quad (3.27)$$

(s. Gl. (3.10)). Für die Maße nach Lückel und Müller besteht diese Unabhängigkeit infolge der Division durch $\mathbf{w}_k^T \overline{\mathbf{w}}_k$ bzw. $\mathbf{v}_k^T \overline{\mathbf{v}}_k$. Für das Steuerbarkeitsmaß nach Benninger gilt dasselbe wie bei der Unabhängigkeit von einer linearen Transformation. Diese Bedingung wird also auch von allen drei Maßen erfüllt.

Konsistenz mit dem Kalmanschen Steuerbarkeitsbegriff

Ein dritter wichtiger Aspekt bei der Untersuchung der vorgestellten Strukturmaße ist die Konsistenz dieser Maße mit dem klassischen, Kalmanschen Steuerbarkeitsbegriff (Juen 1982, Litz 1983). Der Konsistenzbegriff ist in Definition 2.2 erläutert. Diese Eigenschaft soll anhand eines einfachen Beispiels untersucht werden. Hierzu wird in Anlehnung an Gl. (3.8) exemplarisch folgendes System gewählt:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 - \alpha \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix} u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad . \end{aligned} \quad (3.28)$$

Mit Hilfe dieses Systems soll untersucht werden, ob die oben vorgestellten Maßzahlen den lokalen Verlust der Steuerbarkeit des Systems richtig, das heißt mit dem Wert 0 wiedergeben. Dieser Verlust findet in dem Beispiel genau an der Stelle $\alpha = 0$ statt. Zunächst wird das Summenmaß nach Litz für den zweiten Eigenwert für verschiedene Werte von α berechnet. Das Ergebnis ist in Bild 3.2 dargestellt.

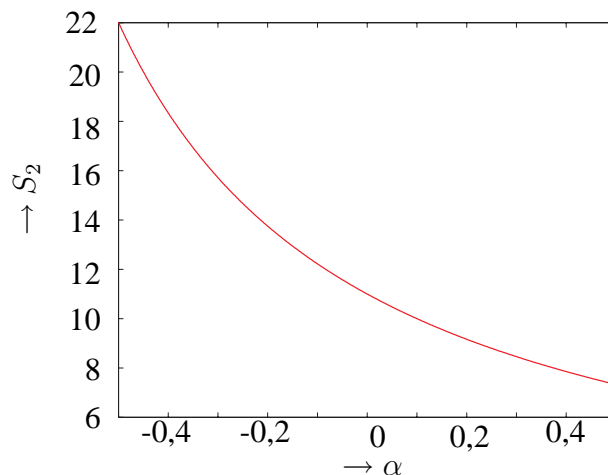


Bild 3.2: Summendominanzmaß S_2 für λ_2 für das Beispiel (Gl. (3.28)) in Abhängigkeit von α

Das Summenmaß für den ersten Eigenwert ist konstant und nimmt den Wert $S_1 = 5$ an. Ebenfalls einen konstanten Wert ergeben die beiden Strukturmaße nach Lückel und Müller. Sie zeigen keine Abhängigkeit von dem Faktor α , da in ihnen die Eigenwerte λ_i nicht auftreten. Also ist keines der beiden Maße, weder das von Litz (1979) noch das von Lückel und Müller (1975),

konsistent mit dem Kalman'schen Steuerbarkeitsbegriff im Sinne von Definition 2.2, denn kein Maß gibt den Verlust der Steuerbarkeit an der Stelle $\alpha = 0$ korrekt wieder.

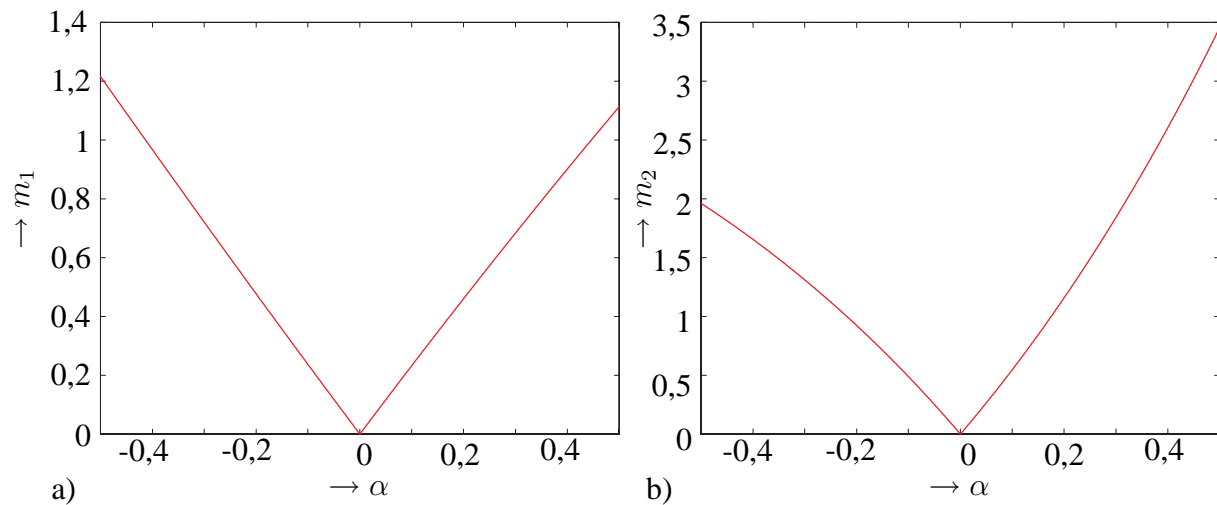


Bild 3.3: Steuerbarkeitsmaße m_1 und m_2 nach Benninger für das Beispiel (Gl. (3.28)) in Abhängigkeit von α

Im Vergleich dazu zeigt Bild 3.3 den Verlauf der Steuerbarkeitsmaße nach Benninger für das Beispielsystem 2. Ordnung. Hier wurde, entsprechend der oben angegebenen Erläuterung, der freie Parameter zu $T = -1/\lambda_1 = 1$ s gewählt. Es ist zu erkennen, daß in diesem Fall der Verlust der Steuerbarkeit an der Stelle $\alpha = 0$ richtig wiedergegeben wird. Im folgenden Abschnitt soll nun die Anwendbarkeit der drei Maße an einem praktischen Beispiel untersucht werden.

4 Anwendungsbeispiel

In diesem Abschnitt wird als Anwendungsbeispiel für die in den letzten Abschnitten vorgestellten Strukturmaße ein elastischer Roboter mit elektrischen Antrieben gewählt, der sich in der Ebene bewegt. Dieser Roboter ist im Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik als Versuchsträger vorhanden (Bai 1996). Zunächst wird das nichtlineare Modell, das aus der physikalischen Modellbildung resultiert, kurz vorgestellt und anschließend um einen allgemeinen Arbeitspunkt linearisiert. Auf der Grundlage dieser linearen Modelle werden die Strukturmaße zuerst in Abhängigkeit von verschiedenen Positionen der Sensoren entlang der elastischen Arme auf ihre Aussagekraft untersucht. Daraus kann auf Unterschiede in der Beobachtbarkeit diskreter Punkte entlang der elastischen Glieder geschlossen werden. Der Ausgang des Modells ergibt sich in dieser ersten Untersuchung als absolute Position verschiedener, diskret entlang der elastischen Glieder angeordneter Punkte in der x - y -Ebene für den gleichen Arbeitspunktvektor.

In der sich anschließenden Untersuchung werden verschiedene Armkonfigurationen im Arbeitsraum als Linearisierungspunkte gewählt und wieder die Maße der Einzelmodelle miteinander verglichen, diesmal für eine feste Sensorposition. Im Gegensatz zur ersten Untersuchung ändern sich hier von Modell zu Modell alle Systemmatrizen.

4.1 Modellbildung und Modellapproximation

Der zweiachsige, ebene, elektrisch angetriebene elastische Roboter, dessen Modell untersucht werden soll, ist in Bild 4.1 dargestellt und bereits ausführlich beschrieben (Bai 1996).

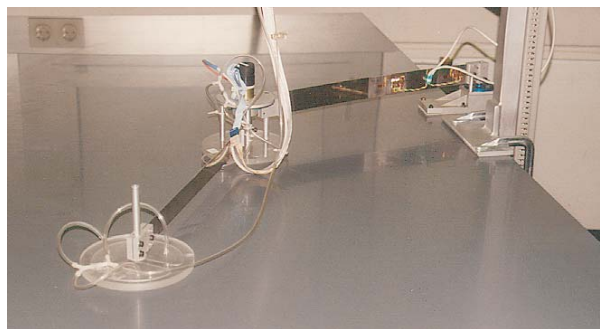


Bild 4.1: Zweiachsiger elastischer Roboter DFM01

Grundlage für die folgenden Untersuchungen bildet ein in (Arteaga Pérez und Riege 1997) mit Hilfe des Modellbildungsverfahrens nach Euler-Lagrange hergeleitetes analytisches Modell des Systems. Es berücksichtigt pro Glied jeweils eine elastische Eigenfunktion. Verschiedene Parameter dieses Modells sind auf experimentellem Wege bestimmt. Das Modell wird in (Arteaga Pérez und Riege 1997) mit realen Meßdaten verglichen. Mit dem Vektor der verallgemeinerten Koordinaten

$$\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, \delta_{11}, \delta_{21}]^T, \quad (4.1)$$

wobei mit θ_i der i -te Gelenkwinkel und mit δ_{i1} die erste elastische Koordinate des i -ten Gliedes bezeichnet wird, ergibt sich folgendes nichtlineares Modell (Riege und Arteaga Pérez 1998):

$$(\mathbf{H}(\mathbf{q}) + \mathbf{J})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}_C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_e\mathbf{q} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{K}_m\mathbf{U} . \quad (4.2)$$

Der Eingangsvektor $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^2$ besteht aus den Ansteuerspannungen der beiden Gelenkmotoren. Die Parameter der Matrizen dieses Modells sind in (Arteaga Pérez und Riege 1997) zu finden. Durch Einführung des Zustandsvektors

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

ergibt sich ein nichtlineares Zustandsmodell der Klasse ALS (analytische Systeme mit linear eingehender Steuerung) als Ausgangspunkt für die sich anschließende Linearisierung in der folgenden Form:

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ (\mathbf{H}(\mathbf{q}) + \mathbf{J})^{-1} [-\mathbf{h}_C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{K}_e\mathbf{q} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ (\mathbf{H}(\mathbf{q}) + \mathbf{J})^{-1}\mathbf{K}_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}(\mathbf{x})} \mathbf{U} . \quad (4.4)$$

Dieses System wird nun um einen allgemeinen Arbeitspunkt $(\mathbf{x}_{AP}, \mathbf{U}_{AP})$ mit Hilfe einer Taylorreihenentwicklung mit Abbruch nach dem ersten Glied durch ein lineares Modell approximiert. Die Linearisierung erfolgt unter Zuhilfenahme einer unter MAPLE[®] entwickelten Routine zur analytischen Approximation von Systemen der Form ALS (Spielmann und Jelali 1996). Bei diesem Programm müssen die Vektorfelder $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ aus Gl. (4.4) sowie der Arbeitspunkt und die gewünschte Approximationsordnung vorgegeben werden, und es wird automatisch rechnergestützt das Approximationsmodell, in diesem Fall ein lineares System 8. Ordnung ermittelt. Das linearisierte Modell ergibt sich aus Gl. (4.4) allgemein zu:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[(\mathbf{H}(\mathbf{q}) + \mathbf{J})^{-1} [-\mathbf{h}_C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{K}_e\mathbf{q} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_m\mathbf{U}] \right]}_{\mathbf{A}} \Big|_{\mathbf{x}_{AP}, \mathbf{U}_{AP}} \Delta\mathbf{x} \\ &+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \left[(\mathbf{H}(\mathbf{q}) + \mathbf{J})^{-1}\mathbf{K}_m\mathbf{U} \right]}_{\mathbf{B}} \Big|_{\mathbf{x}_{AP}, \mathbf{U}_{AP}} \Delta\mathbf{U} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die Güte des entwickelten linearisierten Modells ist im Vergleich zum komplexen nichtlinearen Modell sehr hoch. Dies zeigen beispielhaft die Simulationsergebnisse in den Bildern 4.2 und 4.3. Als Grundlage dient hier ein um den Arbeitspunkt

$$\mathbf{x}_{AP} = [-5^\circ, 5^\circ, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^\text{T} \text{ und } \mathbf{U}_{AP} = [0, 0]^\text{T} \quad (4.6)$$

linearisiertes Modell, das mit zwei Sinussignalen

$$U_1(t) = -1 \sin\left(\frac{2\pi}{4}t\right) \text{ V}, \quad U_2(t) = 0,5 \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) \text{ V} \quad (4.7)$$

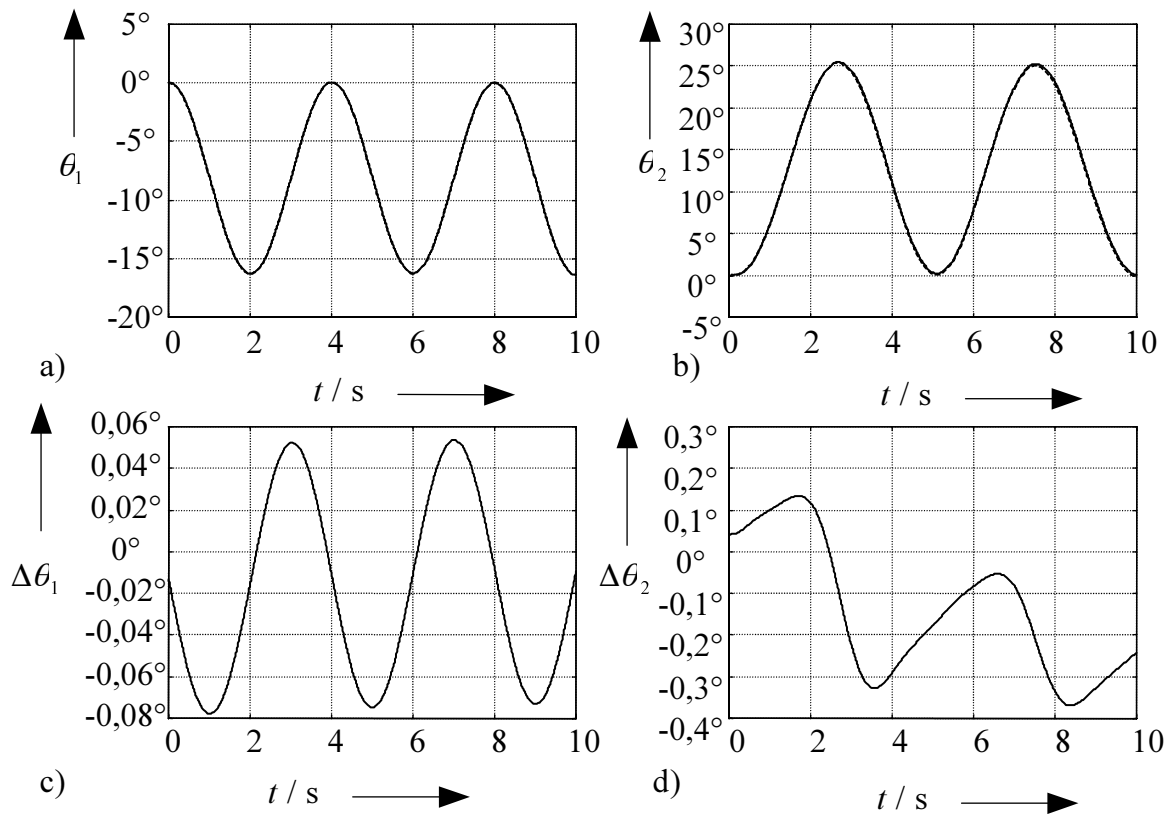


Bild 4.2: a),b) Winkelkoordinaten θ_1 und θ_2 des nichtlinearen (—) und des linearisierten (---) Modells; c),d) Differenzen $\Delta\theta_1$ und $\Delta\theta_2$

als Eingangsspannungen angeregt wurde. In Bild 4.2 sind die Winkelverläufe θ_1 und θ_2 von nichtlinearem und linearem Modell sowie deren Differenzen

$$\Delta\theta_1 = \theta_{1,\text{lin}} - \theta_{1,\text{nl}} \quad \text{und} \quad \Delta\theta_2 = \theta_{2,\text{lin}} - \theta_{2,\text{nl}} \quad (4.8)$$

im Vergleich dargestellt. Der Fehler ist sehr gering, wie deutlich zu erkennen ist.

Ähnlich klein ist der Fehler, der durch die Linearisierung entsteht, in den elastischen Koordinaten, wie in Bild 4.3 zu erkennen. Hier sind die elastischen Koordinaten δ_{11} und δ_{21} sowie die Fehler

$$\Delta\delta_{11} = \delta_{11,\text{lin}} - \delta_{11,\text{nl}} \quad \text{und} \quad \Delta\delta_{21} = \delta_{21,\text{lin}} - \delta_{21,\text{nl}} \quad (4.9)$$

veranschaulicht. Die Güte der Approximationsmodelle ist sehr hoch, solange die Winkelkoordinaten nicht um mehr als 10° vom Arbeitspunkt abweichen. Lineare Approximationen wie diese werden in den nächsten Unterabschnitten genauer untersucht.

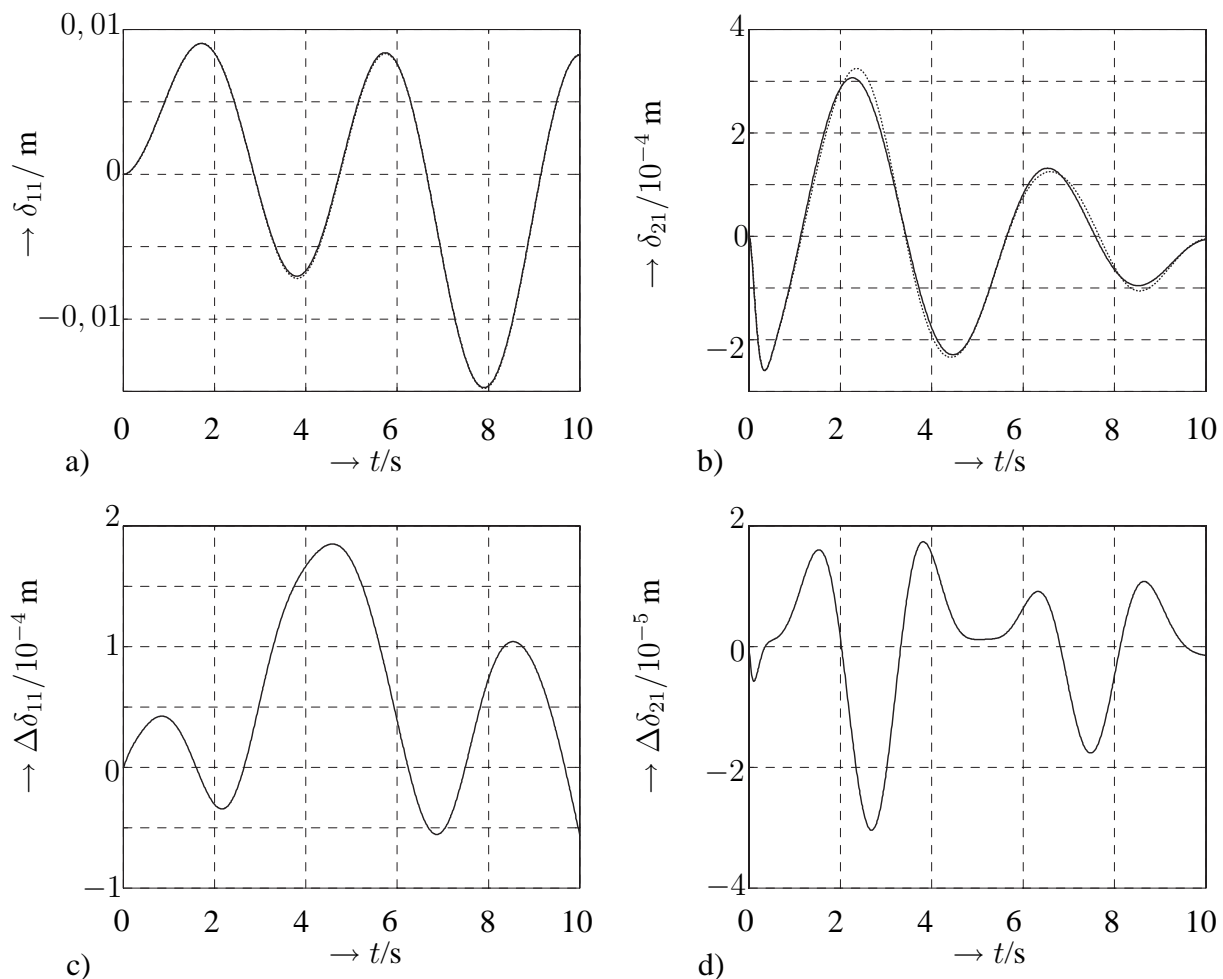


Bild 4.3: a),b) Elastische Koordinaten δ_{11} und δ_{21} des nichtlinearen (—) und des linearisierten (\cdots) Modells; c),d) Differenzen $\Delta\delta_{11}$ und $\Delta\delta_{21}$

4.2 Untersuchung für verschiedene Sensorpositionen

Bild 4.4 zeigt die prinzipielle Vorgehensweise. Für jede Sensorposition entlang der beiden elastischen Glieder soll ein lineares Modell ermittelt werden, dessen Strukturmaße dann berechnet werden. Es ändert sich in dieser Untersuchung nicht die nominale Konfiguration des Roboters bzw. die Arbeitspunkte, sondern nur die Meßmatrix $c(\boldsymbol{x})$. Sie ergibt im nichtlinearen Fall den Systemausgang:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) . \quad (4.10)$$

Mit x, y ist hier die absolute Position des Punktes, an dem der Sensor befestigt ist, in der Bewegungsebene bezeichnet. D. h., als Ausgang wird die Information gewählt, die auch der optische 3 D-Sensor zur Verfügung stellt (s. hierzu auch (Arteaga Pérez und Riege 1997)). Dieses Ausgangsvektorfeld $c(\boldsymbol{x})$ wird nach (Arteaga Pérez 1995, Arteaga Pérez und Riege 1997) mit

Hilfe von Transformationsmatrizen A_i, E_i bestimmt. Im einzelnen bezeichnen die Matrizen A_i Transformationen, die durch die Gelenke durchgeführt werden und die Matrizen E_i Transformationen durch die elastischen Glieder.

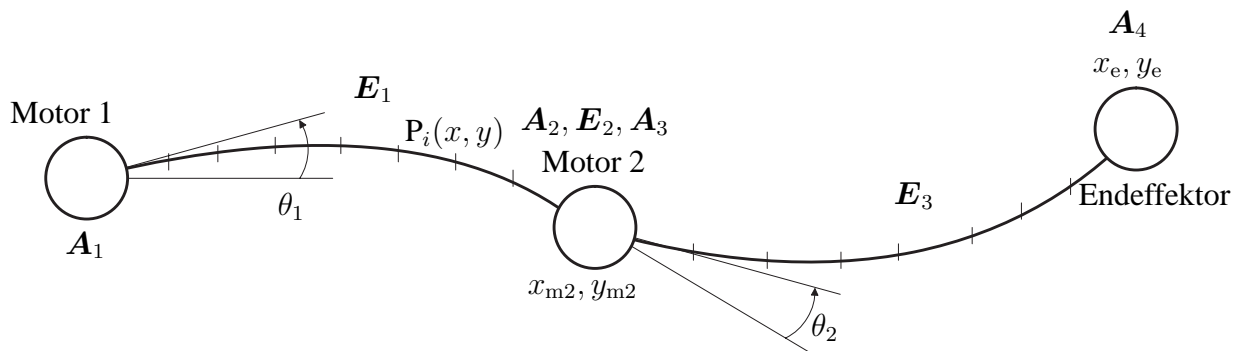


Bild 4.4: Anordnung der Sensorpositionen entlang der elastischen Glieder

Die resultierende Meßgleichung ist dementsprechend eine Multiplikation von Transformationsmatrizen, die den Vektor ${}^i r_i$, ausgedrückt in Koordinaten des sich mit dem Glied mitbewegenden Koordinatensystems $(x, y)_i$, in das ortsfeste Koordinatensystem $(x, y)_0$ überführt. So erhält man

$${}^0 r_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = A_1 E_1 A_2 \dots E_{i-1} A_i {}^i r_i. \quad (4.11)$$

Die ersten beiden Komponenten von ${}^0 r_i$ werden als Modellausgang gewählt. Die Transformationsmatrizen A_i und E_i können im Anhang A nachgelesen werden.

Je nachdem, auf welchem der beiden Glieder der betrachtete Sensorpunkt P liegt, müssen andere Transformationsmatrizen berücksichtigt werden. Wird die absolute Position eines Punktes P auf dem ersten elastischen Glied gesucht, so muß zunächst der Ortsvektor zu diesem Punkt im gliedfesten Koordinatensystem $(x, y)_1$ bestimmt werden. Dieser ergibt sich zu:

$${}^1 r_P(t) = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P(t) \\ z_P(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{S,P} \\ \sum_{j=1}^n \delta_{1j}(t) \phi_{1j}(x_{S,P}) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{S,P} \\ \delta_{11}(t) \phi_{11}(x_{S,P}) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Mit dem Index S wird dabei die Gliedkoordinate bezeichnet, wie sie sich im unverformten Fall ergeben würde. Da in dem vorliegenden Modell nur eine Eigenfunktion pro Glied betrachtet wird, reduziert sich die Summe in Gl. (4.12) auf einen Term. Der Verlauf der Eigenfunktionen

ϕ_{ij} wurde in (Arteaga Pérez und Riege 1997) experimentell ermittelt. Für einen Punkt P auf dem zweiten elastischen Glied (drittes Koordinatensystem) ergibt sich analog:

$${}^3\mathbf{r}_P(t) = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P(t) \\ z_P(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{S,P} \\ \sum_{j=1}^n \delta_{2j}(t) \phi_{2j}(x_{S,P}) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{S,P} \\ \delta_{21}(t) \phi_{21}(x_{S,P}) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Nun kann die absolute Position, der Systemausgang, berechnet werden:

$${}^0\mathbf{r}_P = \begin{cases} \mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{r}_P & \text{falls der Punkt P auf Glied 1 liegt,} \\ \mathbf{A}_1 \mathbf{E}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{E}_2 \mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{r}_P & \text{falls der Punkt P auf Glied 2 liegt.} \end{cases} \quad (4.14)$$

Mit Hilfe des in Abschnitt 4.1 vorgestellten Verfahrens werden nun jeweils 9 lineare Modelle pro Glied mit Sensorpositionen entlang der beiden elastischen Glieder entwickelt. Die Sensorpositionen liegen jeweils im Abstand von 50 mm voneinander entfernt. Bei dieser Vorgehensweise bleiben die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} für alle linearen Teilmodelle gleich, da der gleiche Arbeitspunktsvektor

$$\mathbf{x}_{AP} = [5^\circ, -5^\circ, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^\text{T} \text{ und } \mathbf{U}_{AP} = [0, 0]^\text{T} \quad (4.15)$$

gewählt wird. Es ändert sich lediglich die Ausgangsmatrix des Systems.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	$\lambda_{5/6}$	$\lambda_{7/8}$
0	0	-261,4	-192,2	$-7,5 \pm 7,9j$	$-0,02 \pm 0,33j$

Tabelle 4.1: Eigenwerte

Die Eigenwerte ergeben sich für alle 18 linearen Modelle wie in Tabelle 4.1 dargestellt. Es existiert jeweils ein doppelter Eigenwert bei Null, zwei reelle Eigenwerte sowie zwei konjugiert komplexe Paare von Eigenwerten. Dabei entstehen die Eigenwerte bei Null durch den Integrator zwischen den Winkelgeschwindigkeiten und den Winkeln. Die komplexen Eigenwerte sind den elastischen Koordinaten zuzuordnen. Da in diesem Anwendungsfall für alle Sensorpositionen ein konstantes Steuerbarkeitsmaß nach Benninger vorliegt, werden nur die beiden anderen Maße näher betrachtet, wobei aus demselben Grund konstante Steuerbarkeitsmaße κ_B für alle Eigenwerte berechnet werden. Ferner liefern Summen- und Maximaldominanzmaße immer qualitativ gleiche Ergebnisse, so daß im folgenden nur das Maximalmaß und das Beobachtbarkeitsmaß nach Lückel und Müller dargestellt werden. Die Dominanzmaße ergeben sich für die beiden Eigenwerte im Ursprung als unendlich, da in der Berechnung nach Gl. (3.10) durch den Eigenwert dividiert wird.

Die Ergebnisse für den reellen Eigenwert λ_3 sind in Bild 4.5 zu sehen. Hier sind die Strukturmaße über die Position des Sensors auf dem unverformten Glied aufgetragen. Bei $l = 0,43$ m

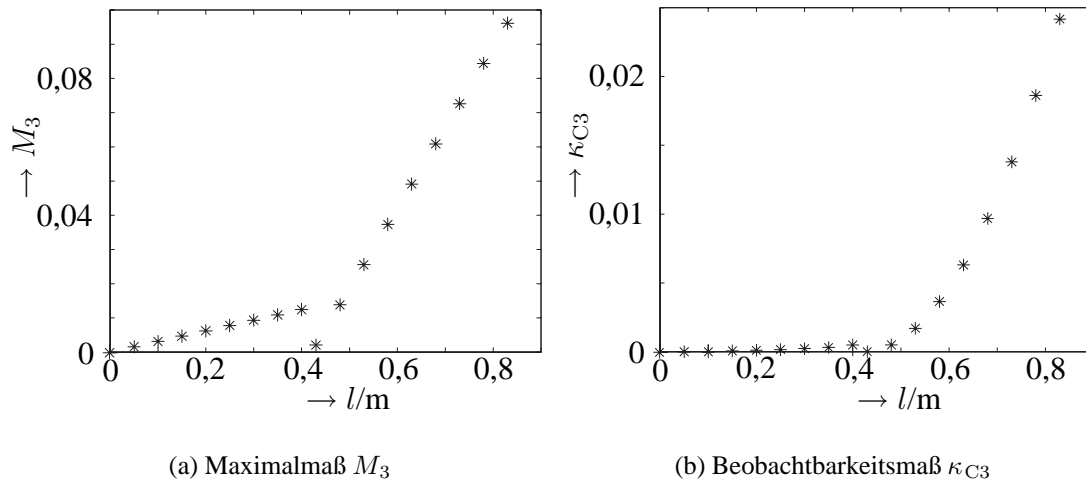


Bild 4.5: Maße für einen reellen Eigenwert $\lambda_3 = -261,4$

beginnt das zweite Glied. Die Gesamtlänge beider Glieder beträgt 0,86 m. Die Ergebnisse für die komplexen Eigenwerte finden sich in den Bildern 4.6 und 4.7. Bei einem komplexen Eigenwertpaar ergeben sich in diesem Fall für beide Eigenwerte exakt die gleichen Strukturmaße.

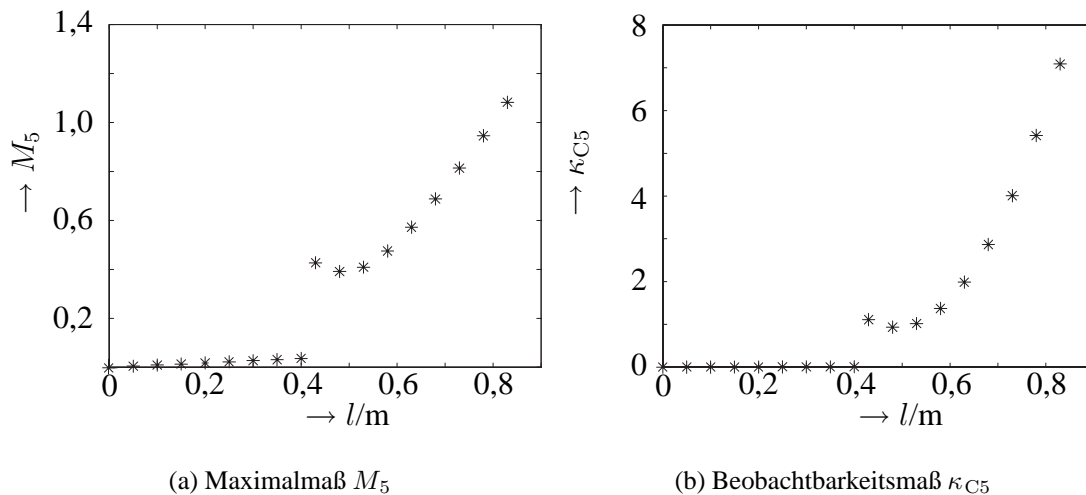


Bild 4.6: Maße für das erste komplexe Eigenwertpaar $\lambda_{5/6} = -7,5 \pm 7,9j$

In allen Kurvenverläufen ist deutlich ein Sprung der Maßzahl an der Stelle zu erkennen, an der der zweite elastische Arm beginnt ($l = 0,43$ m). Ferner tragen alle Maße der Tatsache Rechnung, daß bei einer Sensorposition genau auf dem ersten Motor ($l = 0$ m) die Eigenbewegung nicht mehr beobachtbar ist.

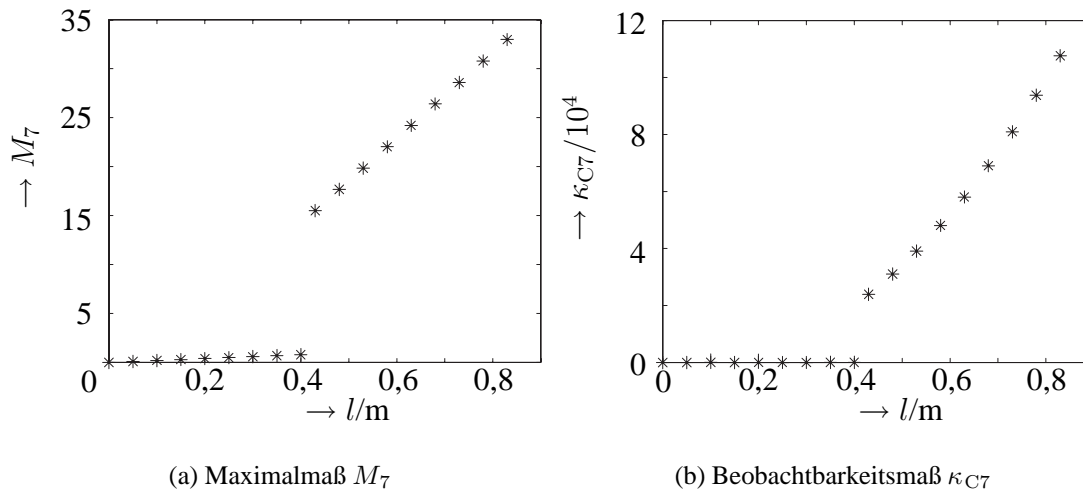


Bild 4.7: Maße für das zweite komplexe Eigenwertpaar $\lambda_{7/8} = -0,02 \pm 0,33j$

Ebenso einheitlich findet sich die Tendenz, daß bei einer Sensorposition in größerer Entfernung zum Motor die Dominanz bzw. die Beobachtbarkeit des entsprechenden Eigenwertes zunimmt. Dies erklärt sich für den hier vorliegenden Fall der ersten Eigenfunktion durch deren größere Auslenkung in größerer Entfernung zum Lagerpunkt, der in diesem Falle identisch ist mit dem Motor. Es ist deutlich zu erkennen bzw. kann anhand der Zahlenwerte nachgewiesen werden, daß für das erste elastische Glied alle Strukturmaße monoton steigend über x sind. Hier ist also die Eigenfunktion eines einachsigen, gelenkig gelagerten Balkens noch weitgehend als Näherung gültig (Bernzen 1995). Eine Untersuchung der Strukturmaße, die sich im einachsigen Fall ergeben, erzielt qualitativ die gleichen Ergebnisse. Bei dem zweiten Glied tritt jedoch durch die mechanischen Kopplungen der Effekt zutage, daß die Maße keine Monotonie über die ganze Armlänge mehr zeigen. Quantitativ ergibt sich eine um mehrere Größenordnungen höhere Dominanz / Beobachtbarkeit der komplexen Eigenwerte im Vergleich zu den reellen.

4.3 Untersuchung für unterschiedliche Armkonfigurationen

In diesem Unterabschnitt werden wieder lineare Approximationen des oben vorgestellten nicht-linearen Modells untersucht. Diesmal findet die Linearisierung für verschiedene Winkelkonstellationen statt. Untersucht wird der gesamte Gültigkeitsbereich des nichtlinearen Modells, also die Bereiche $\theta_1 \in [-20^\circ; 20^\circ]$, $\theta_2 \in [-20^\circ; 20^\circ]$, jeweils in Schritten von 5° . Der Arbeitspunkt wird zu

$$\mathbf{x}_{AP} = [\theta_1, \theta_2, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \text{ und } \mathbf{U}_{AP} = [0, 0]^T \quad (4.16)$$

gewählt. So ergeben sich 81 lineare Modelle über den gesamten Arbeitsraum verteilt. Im Gegensatz zu Abschnitt 4.2 entstehen bei der Linearisierung aufgrund der unterschiedlichen Wahl der Arbeitspunkte Modelle, die sich auch in den Systemmatrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} und somit der Lage der Eigenwerte unterscheiden. Aus diesem Grund können hier auch die Steuerbarkeitsmaße

näher untersucht werden. Qualitativ lassen sich die Eigenwerte jedoch weiterhin in die im letzten Unterabschnitt (Tabelle 4.1) dargestellten Gruppen klassifizieren. Als Ausgangsvektor wird für alle Modelle die Absolutposition eines Sensors an der Stelle $x = 0,3$ m auf dem ersten Glied gewählt. Die Bilder 4.8 und 4.9 zeigen die Strukturmaße S_k , M_k , κ_{Bk} und κ_{Ck} für die beiden reellen, von Null verschiedenen Eigenwerte λ_3 und λ_4 , aufgetragen über die verschiedenen Winkelpositionen.

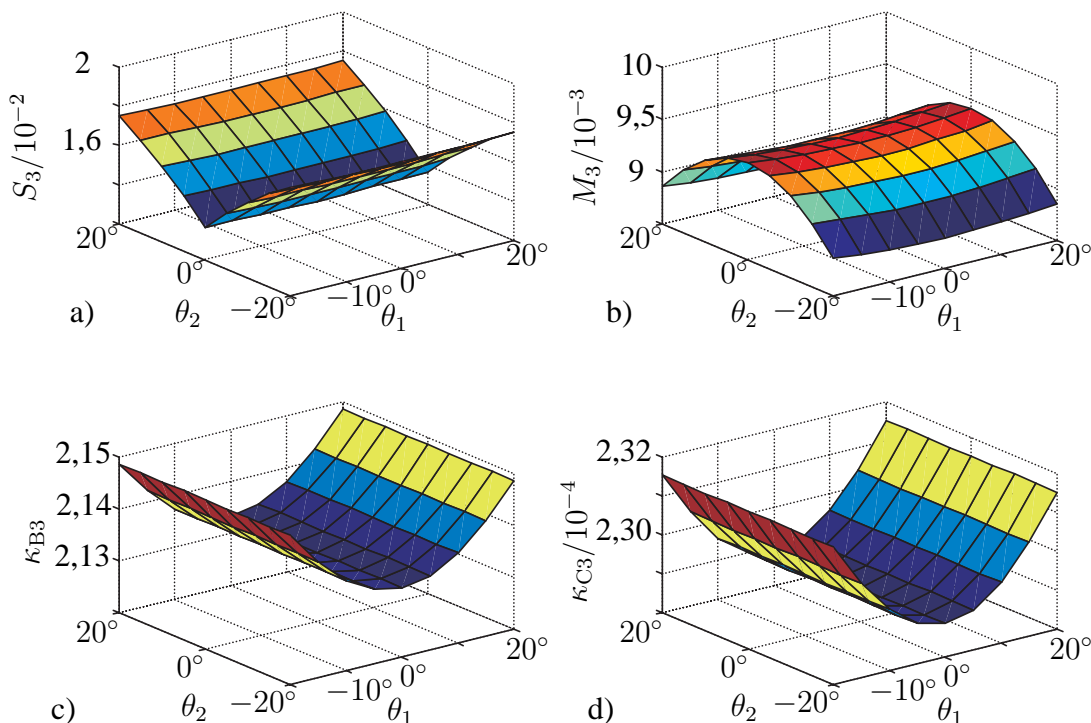


Bild 4.8: Strukturmaße nach Litz (a,b) und Lückel/Müller (c,d) für den ersten reellen Eigenwert λ_3

Im Vergleich zeigen die Maße für diese beiden reellen Eigenwerte ähnliches Verhalten, mit dem Unterschied, daß der vom Absolutbetrag höhere Eigenwert λ_3 mit niedrigeren Maßzahlen bewertet wird. Interessant ist darüber hinaus, daß die Maße nach Litz für einen festen Winkel θ_2 Kurven mit nahezu konstanten Werten für θ_1 bilden, während dies bei den Maßen nach Lückel und Müller genau umgekehrt ist. Die Frage, welches Ergebnis im Sinne einer physikalischen Interpretation plausibler ist, läßt sich wieder mit Hilfe des Beispiels eines einachsigen, gelenkig gelagerten elastischen Balkens beantworten. Hier existiert ein lineares Modell, das das Verhalten des Systems im gesamten Arbeitsraum mit ausreichender Güte beschreibt. Offensichtlich müssen also bei diesem Modell für eine feste Sensorposition die Strukturmaße über alle Werte des Gelenkwinkels θ konstant sein. Der Fall des einseitig gelenkig gelagerten elastischen Balkens wird in dem vorliegenden zweiachsigen Roboter am ehesten dadurch repräsentiert, daß der Winkel θ_1 festgehalten und nur das zweite Glied bewegt wird. Im umgekehrten Fall haben die nichtlinearen Kopplungseffekte einen deutlich größeren Einfluß. Daraus folgt eine höhere physikalische Aussagekraft der Maße nach Lückel und Müller.

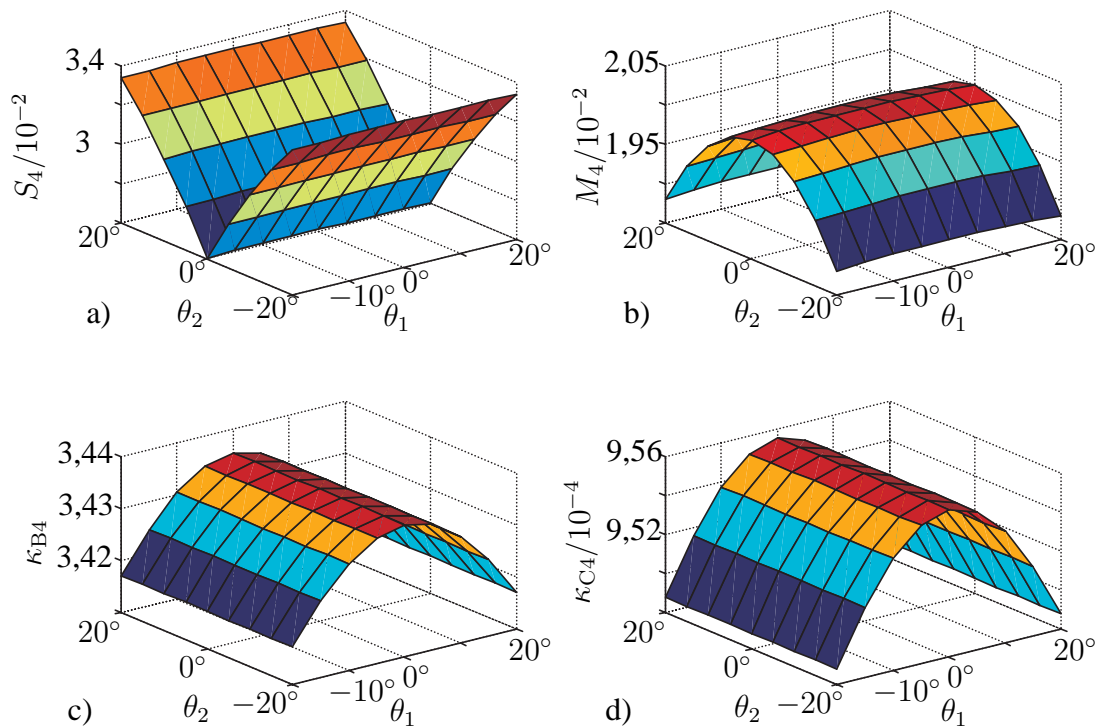


Bild 4.9: Strukturmaße nach Litz (a,b) und Lückel/Müller (c,d) für den zweiten reellen Eigenwert λ_4

Für die beiden komplexen Eigenwertpaare ergeben sich jeweils identische Maße. Sie sind in den Bildern 4.10 und 4.11 dargestellt.

Es sind ähnliche Tendenzen abzulesen wie bei λ_3 und λ_4 . Eigenwerte, die näher am Stabilitätsrand liegen, werden mit höheren Maßzahlen belegt. Dies entspricht der Dominanzdefinition aus Abschnitt 2, da nach (Litz 1979) instabile Eigenwerte von Natur aus dominant sind. Anschaulich formuliert, bedeutet dies eine niedrigere Maßzahl, je „stabiler“ der Eigenwert ist. Die Maße nach Litz bilden eine Fläche, die in zwei Richtungen gekrümmt ist, während bei κ_B und κ_C weiterhin nur die oben erläuterte eindimensionale Krümmung vorliegt. Wie in den Bildern 4.10 und 4.11 zu erkennen, ergeben sich an der Stelle $\theta_2 = 0^\circ$ hohe Maximalmaße, während die Summenmaße der Eigenwerte zum Rand des Arbeitsraums hin größer werden. Das läßt auf eine relativ hohe Dominanz der Eigenwerte in einem Übertragungskanal schließen. Für die beiden anderen Maße nach Lückel und Müller erkennt man deutlich, daß bei den komplexen Eigenwerten die Konfigurationen am Rand des Arbeitsbereiches besser steuerbar und beobachtbar sind als in der Nähe von $\theta_1 = 0^\circ$.

Bei der Bestimmung der Steuerbarkeitsmaße nach Benninger und Rivoir ergeben sich numerische Probleme. Standardalgorithmen unter MATLAB[®] zur Ermittlung der Gramschen Steuerbarkeitsmatrix sind nicht verwendbar, da die Matrizen numerisch zu schlecht konditioniert sind.

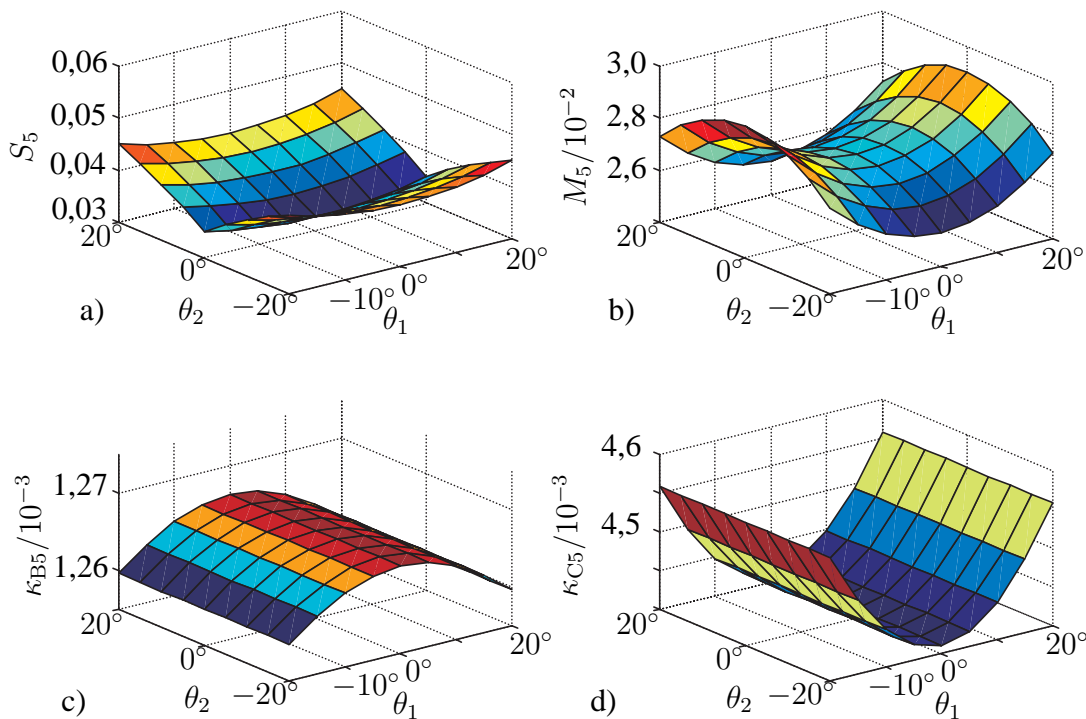


Bild 4.10: Strukturmaße nach Litz (a,b) und Lückel/Müller (c,d) für das erste konjugiert komplexe Polpaar λ_5/λ_6

So muß für jeden gewählten Punkt im Konfigurationsraum das Maß „von Hand“ bestimmt werden, was äußerst zeitaufwendig ist. Aufgrund der numerischen Instabilitäten ist es daher auch fragwürdig, wie verlässlich und realitätsnah die erhaltenen Maßzahlen sind, zumal sie auch offensichtlich keine klaren Eigenschaften wie die oben untersuchten Maße besitzen. Sie sind zum Beispiel nicht abschnittsweise monoton über einem Winkelverlauf. Für die beiden reellen Eigenwerte λ_3 und λ_4 ist das Ergebnis in Bild 4.12 zu sehen.

Es ist zu beachten, daß wegen der numerisch aufwendigen Berechnung die Menge der betrachteten Winkelkombinationen vergleichsweise gering ist. Eine Tendenz läßt sich dennoch ablesen. Das gleiche gilt für die Steuerbarkeitsmaße eines komplexen Eigenwertpaares, die in Bild 4.13 dargestellt sind. Auffallend ist, daß nicht wie bei den anderen Maßen ein klar monotones Verhalten zu erkennen ist. Berechnet man noch Maßzahlen an einzelnen weiteren Punkten, so bestätigt sich dieses Verhalten. Wie oben schon erwähnt, liegt die Vermutung nahe, daß es sich hier um ein numerisches Problem handelt. Darauf weist auch die Tatsache hin, daß für verschiedene Eigenwerte um Größenordnungen verschiedene Maße berechnet werden. Desweiteren werden bei einem komplexen Eigenwertpaar nicht für beide Eigenwerte die gleichen Maßzahlen ermittelt. Ferner existieren diese Probleme bei bisher untersuchten einfacheren Systemen nicht.

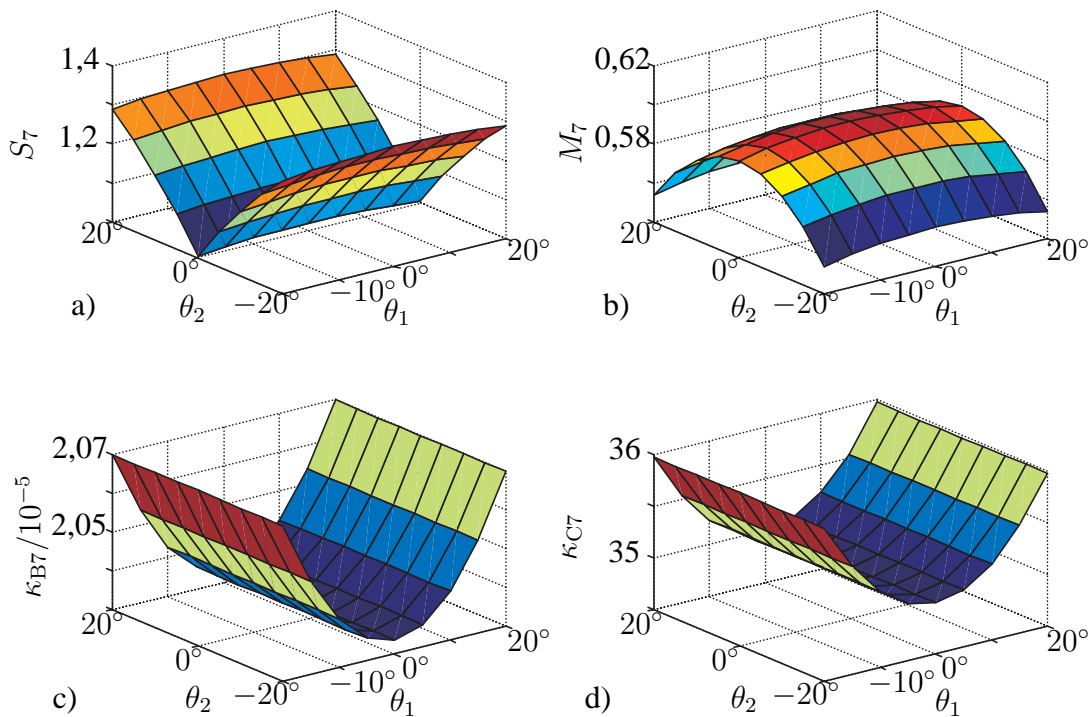


Bild 4.11: Strukturmaße nach Litz (a,b) und Lückel/Müller (c,d) für das zweite konjugiert komplexe Polpaar λ_7/λ_8

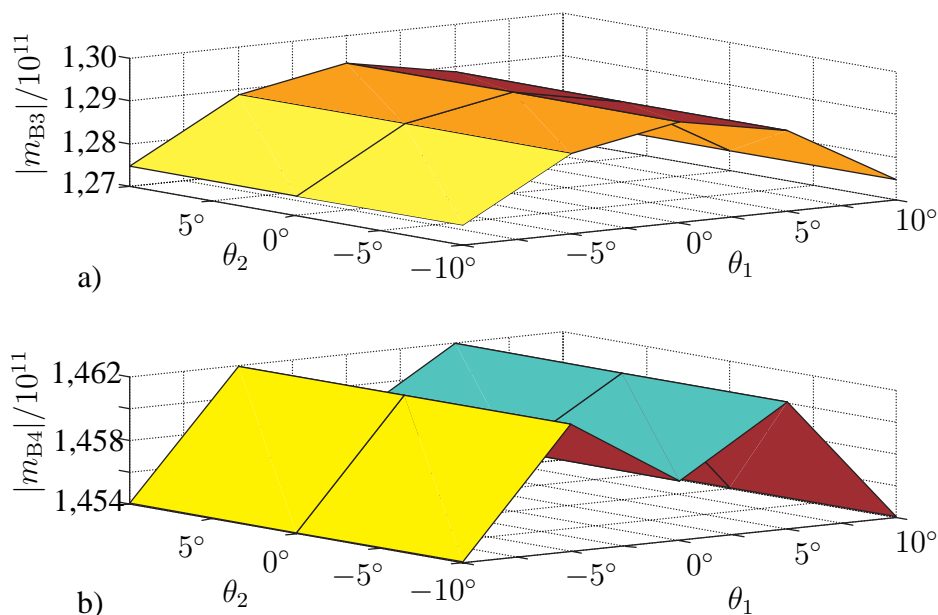


Bild 4.12: Betrag der Steuerbarkeitsmaße nach Benninger für die reellen Eigenwerte λ_3 (a) und λ_4 (b)

Eine Aussage läßt sich über die Steuerbarkeitsmaße nach Benninger (1987) für dieses Anwendungsbeispiel dennoch treffen: Sie sind für alle Eigenwerte für einen festen Wert von θ_1 kon-

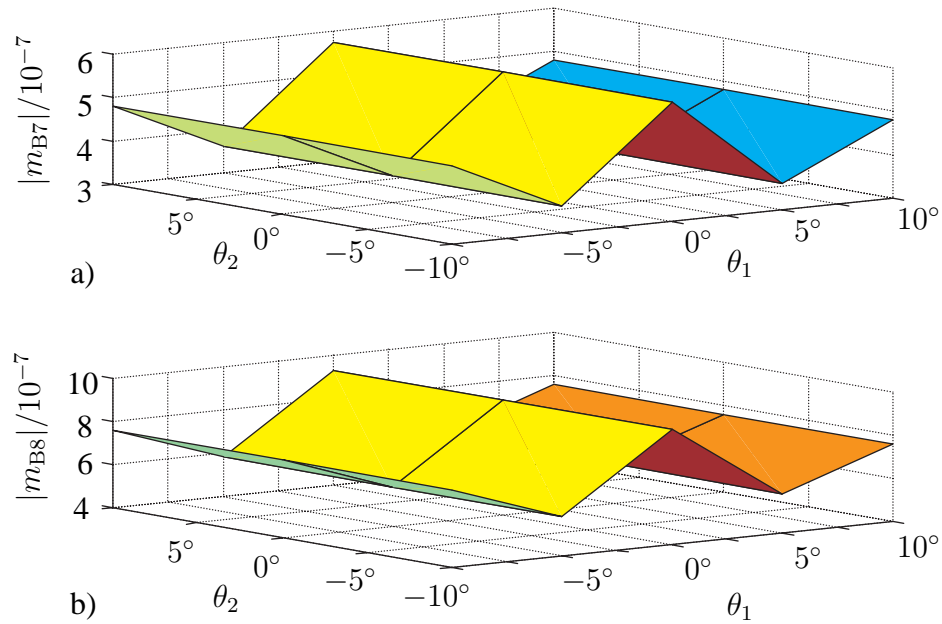


Bild 4.13: Betrag der Steuerbarkeitsmaße nach Benninger für das komplexe Eigenwertpaar λ_7 (a) und λ_8 (b)

stant über dem Winkel θ_2 . Dies entspricht genau den Ergebnissen für κ_B .

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß in diesem Anwendungsfall nur die beiden ersten Maßzahlen interpretierbare Ergebnisse liefern, wobei die Maße nach Lückel und Müller (1975) das physikalische Verhalten besser widerspiegeln. Zudem sind sie einfach zu berechnen, und es treten keinerlei numerische Schwierigkeiten auf. Ein großes Problem bei diesen eigenwertbezogenen Betrachtungen stellt die Interpretierbarkeit der Ergebnisse dar. Es ist nicht mehr ohne weiteres möglich, die sich ergebenden Eigenwerte auch den tatsächlichen physikalischen Zuständen zuzuordnen. In dem hier vorliegenden Fall ist jedoch eine einheitliche Tendenz für alle eigenwertspezifischen Maße ablesbar.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In dem vorliegenden Bericht werden Strukturmaße auf ihre Aussagekraft untersucht und vergleichend auf ein technisches Beispiel angewendet. Dazu erfolgt zunächst die Erarbeitung von allgemeinen Anforderungen an ein Maß zur Quantifizierung einer Systemeigenschaft. Im Anschluß daran erfolgt die Einführung dreier verschiedener Maße auf der Basis linearer Modelle nach Litz (1979), Lückel und Müller (1975) sowie nach Benninger und Rivoir (1986). Diese Maße werden im Vergleich auf Eigenschaften wie Konsistenz und Unabhängigkeit von einer vorgenommenen linearen Koordinatentransformation untersucht. Im letzten Abschnitt findet die Anwendung aller Maße auf das Beispiel eines elastischen Roboters statt. Dabei werden lineare Approximationen des nichtlinearen Modells eines ebenen zweiachsigen Handhabungssystems gebildet und deren Eigenschaften untersucht. Es zeigt sich, daß die beiden ersten Maße ein stetiges Verhalten zeigen. Insbesondere die von Lückel und Müller eingeführten Maße spiegeln physikalische Eigenschaften des Modells gut wider. Sie berechnen sich aus der Eingangsmatrix des auf Modalform transformierten Systems. Dieser Ansatz liegt auch anderen Maßen zugrunde, die insbesondere auf elastische Systeme angewendet werden. Trotz der im dritten Abschnitt dargestellten Mängel der Maße nach Litz und Lückel in Bezug auf die Konsistenz zeigen sie sich in diesem Beispiel durch relativ geringen numerischen Aufwand und physikalisch interpretierbare Ergebnisse aus.

Ein allgemeines Problem bildet die Interpretierbarkeit der Einzelmaße für jeden Eigenwert. Da jedoch die Maße für alle Eigenwerte der linearen Teilmodelle in diesem Anwendungsfall eine einheitliche globale Tendenz zeigen, ist eben diese physikalische Aussage dennoch möglich. Bei der Bestimmung des Steuerbarkeitsmaßes nach Benninger und Rivoir ergeben sich bei dem hier untersuchten Modell erhebliche numerische Schwierigkeiten, so daß dieses Maß überhaupt keine Aussage über das Verhalten des Systems im Arbeitsraum ermöglicht. Hier bleibt zu untersuchen, ob das Steuerbarkeitsmaß bei anderen Beispielsystemen bessere Ergebnisse liefert.

Da sich die Untersuchungen auf diesem Gebiet bisher nur auf den Bereich der linearen Systemtheorie beschränkt haben, bietet es sich an, auch bei der Bestimmung von Strukturmaßen die zusätzlichen Informationen zu nutzen, die ein nichtlinearer Modellansatz bietet. Die vorgestellten Maße sind jedoch nicht ohne weiteres übertragbar, da es bei nichtlinearen Systemen i. a. nicht möglich ist, eine geschlossene Lösung des Zustandsmodells zu finden, die aber erforderlich ist, um wie beispielsweise in (Benninger 1987) die Steuerenergie zu ermitteln, die aufgewendet werden muß, um einen Zustand in einen anderen zu überführen. Hier liegt nahe, bestimmte Unterklassen nichtlinearer Systeme zu nutzen, die schon relativ gut untersucht sind. Als einfachste Unterklasse und als Basis für darüber hinausgehende Überlegungen dient die Klasse der bilinearen Systeme, die den Vorteil einer geschlossenen Lösung bietet (Schwarz 1991). Die nächsthöhere Klasse der QLS, der quadratischen Systeme mit linear eingehender Steuerung (Jelali 1997), läßt sich durch zwei in Reihe geschaltete bilineare Systeme darstellen. So kann sukzessive der Übergang auf bestimmte nichtlineare Systemklassen geschaffen werden, zumal es zur Strukturuntersuchung von BLS und QLS schon mehrere relativ

leicht auswertbare Kriterien gibt (Riege 1996). Allerdings ist zu überlegen, ob tatsächlich auch ein Informationsgewinn gegenüber der oben vorgestellten Methode der Untersuchung linearer Approximationen zu erwarten ist, da im allgemeinen zur Bestimmung von Strukturinvarianten wie Steuerbarkeit oder Beobachtbarkeit die Untersuchung linearisierter Modelle ausreicht (Fliess und Glad 1993, Sontag 1991).

Ein zusätzlicher Schwerpunkt weiterführender Untersuchungen ist die Anwendung auf andere Systeme. Vor allem ist zu prüfen, ob es bei mehrachsigen elastischen Systemen mit mehr als einem elastischen Freiheitsgrad möglich ist, immer noch quantitative Aussagen über die Eigenschaften einzelner Teilsysteme zu erlangen. Ist das der Fall, so kann für ein Modell automatisiert geprüft werden, an welchen Orten es günstig ist, Schwingungen zu messen, beziehungsweise an welchen Stellen Aktuatoren zur Beeinflussung der Eigenschwingformen die höchste Wirkung bei geringstmöglichem energetischem Aufwand zeigen.

6 Literaturverzeichnis

- Arteaga Pérez, M. A.** 1995. *Zur Positionsbestimmung bei elastischen Robotern*. Forschungsbericht 9/95. MSRT. Universität Duisburg.
- Arteaga Pérez, M. A.** und **B. Riege**. 1997. *Zur experimentellen Modellbildung eines zweiachsigen elastischen Roboters*. Forschungsbericht 3/97. MSRT. Universität Duisburg.
- Bai, M.** 1996. *Modellbildung und Simulation eines zweiachsigen elastischen Handhabungssystems*. Forschungsbericht 5/96. MSRT. Universität Duisburg.
- Benninger, N. F.** 1987. *Analyse und Synthese linearer Systeme mit Hilfe neuer Strukturmaße*. VDI Fortschritt-Berichte. Reihe 8. 138. Düsseldorf: VDI.
- Benninger, N. F.** und **J. Rivoir**. 1986. Ein neues konsistentes Maß zur Beurteilung der Steuerbarkeit in linearer, zeitinvarianten Systemen. *Automatisierungstechnik* 34. 473–479.
- Bernzen, W.** 1995. *Parameterstudien zu den Eigenbewegungen eines einachsigen elastischen Roboterarms*. Forschungsbericht 11/95. MSRT. Universität Duisburg.
- Birk, J.** 1992. *Rechnergestützte Analyse und Lösung nichtlinearer Beobachtungsaufgaben*. VDI Fortschritt-Berichte. Reihe 8. 294. Düsseldorf: VDI.
- Canudas de Wit, C., B. Siciliano** und **G. Bastin**. 1996. *Theory of Robot Control*. New York: Springer.
- Fliess, M.** und **S. T. Glad**. 1993. An algebraic approach to linear and nonlinear control. *Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications*, hg. von H. L. Trentelmann und J. C. Willems. *Progress in Systems and Control Theory*. 14. 223–267. Boston/USA: Birkhäuser.
- Föllinger, O.** 1988. *Optimierung dynamischer Systeme*. Heidelberg: Hüthig.
- Gawronski, W.** 1996. *Balanced Control of Flexible Structures. Lecture notes in Control and Information Sciences*. 211. London: Springer.
- Gilbert, E. G.** 1963. Controllability and observability in multivariable control systems. *SIAM J. Control Ser. A* (1). 128–151.
- Jelali, M.** 1997. *Über die nichtlineare Approximation und Zustandsschätzung zeitkontinuierlicher dynamischer Prozesse*. VDI Fortschritt-Berichte. Reihe 8. 636. Düsseldorf: VDI.
- Juen, G.** 1982. Anmerkungen zu den Strukturmaßen für die Steuer-, Stör- und Beobachtbarkeit linearer, zeitinvarianter Systeme. *Regelungstechnik* 30. 64–66.
- Kalman, R. E., P. L. Falb** und **M. A. Arbib**. 1969. *Topics in Mathematical System Theory*. New York: McGraw-Hill.

- Konno, A., M. Uchyama, Y. Kito und M. Muakami.** 1994. Configuration-dependent controllability of flexible manipulators. *Lecture notes in Control and Information, Experimental Robotics III*, hg. von T. Yoshikawa und F. Miyazaki. 531–544. London: Springer.
- Lückel, J. und R. Kasper.** 1981. Strukturkriterien für die Steuer-, Stör- und Beobachtbarkeit linearer, zeitinvarianter, dynamischer Systeme. *Regelungstechnik* 29. 357–362.
- Lückel, J. und P. C. Müller.** 1975. Analyse von Steuerbarkeits-, Beobachtbarkeits- und Störbarkeitsstrukturen linearer, zeitinvarianter Systeme. *Regelungstechnik* 23. 163–171.
- Lemmen, M. und M. Jelali.** 1996. *Differentialgeometrische Steuer- und Beobachtbarkeits-Analyse nichtlinearer Systeme*. Forschungsbericht 8/96. MSRT. Universität Duisburg.
- Litz, L.** 1979. *Reduktion der Ordnung linearer Zustandsraummodelle mittels modaler Verfahren*. Stuttgart: Hochschulverlag.
- Litz, L.** 1983. Modale Maße für Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Regelbarkeit und Dominanz – Zusammenhänge, Schwachstellen, neue Wege. *Regelungstechnik* 31. 148–158.
- Liu, Z., D. Wang, H. Hu und M. Yu.** 1994. Measures of modal controllability and observability in vibration control of flexible structures. *Journal of Guidance* 17(6). 1377–1380.
- Porter, B. und R. Crossley.** 1972. *Modal Control*. London: Taylor and Francis.
- Riege, B.** 1996. *Zur Strukturanalyse der Modelle elastischer Handhabungssysteme*. Forschungsbericht 09/96. MSRT. Universität Duisburg.
- Riege, B. und M. A. Arteaga Pérez.** 1998. Experimental modeling of a two-link flexible manipulator. *IFAC Conference on System, Structure, and Control*. Nantes, Frankreich. (angenommener Beitrag).
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme – Systemtheoretische Grundlagen*. München: Oldenbourg.
- Sontag, E. D.** 1991. Kalman's Controllability Rank Condition: From Linear to Nonlinear. *Mathematical System Theory. The Influence of R.E. Kalman*, hg. von A. E. Anatoulas. Berlin: Springer.
- Spielmann, M. und M. Jelali.** 1996. *Zur rechnergestützten Approximation nichtlinearer Systeme durch Polynomsysteme*. Forschungsbericht 20/96. MSRT. Universität Duisburg.
- Svaricek, F.** 1995. *Zuverlässige numerische Analyse linearer Regelungssysteme*. Stuttgart: B. G. Teubner.
- Uchiyama, M. und A. Konno.** 1995. Modeling, controllability and vibration suppression of 3 D flexible robots. *Robotics Research, The seventh International Symposium*, hg. von G. Giralt und G. Hirzinger. 90–99. Berlin: Springer.

A Transformationsmatrizen zur Ermittlung der Absolutposition eines Punktes

Zur Berechnung der absoluten Position eines Punktes P auf einem der Glieder des Roboters dienen nach Gl. (4.14) die homogenen Transformationsmatrizen A_i und E_i , die nach (Arteaga Pérez und Riege 1997) wie folgt gegeben sind: Für das erste elastische Glied gilt:

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{z_1} & 0 & l_1 \\ \theta_{z_1} & 1 & 0 & \delta_{y_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

mit

$$\theta_{z_1} = \left. \frac{d\phi_{11}(x_1)}{dx_1} \right|_{x_1=l_1} \quad \delta_{11} = \phi'_{11}(l_1)\delta_{11} \quad (\text{A.2})$$

und

$$\delta_{y_1} = \phi_{11}(l_1)\delta_{11}. \quad (\text{A.3})$$

Die Matrix für das Glied 2 ist durch

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

gegeben. In Analogie folgen die beiden anderen Matrizen zu

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{z_3} & 0 & l_3 \\ \theta_{z_3} & 1 & 0 & \delta_{y_3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

mit

$$\theta_{z_3} = \left. \frac{d\phi_{31}(x_3)}{dx_3} \right|_{x_3=l_3} \quad \delta_{21} = \phi'_{31}(l_3)\delta_{21} \quad (\text{A.6})$$

und

$$\delta_{y_3} = \phi_{31}(l_3)\delta_{21}, \quad (\text{A.7})$$

sowie für das vierte Glied:

$$\mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Die Matrizen zur Transformation an den Drehgelenken ergeben sich jeweils unter Zuhilfenahme der Drehwinkel β_i zu (Canudas de Wit u. a. 1996):

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 & 0 & 0 \\ \sin \beta_1 & \cos \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & -\sin \beta_2 & 0 & 0 \\ \sin \beta_2 & \cos \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(A.9)

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \cos \beta_3 & -\sin \beta_3 & 0 & 0 \\ \sin \beta_3 & \cos \beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} \cos \beta_4 & -\sin \beta_4 & 0 & 0 \\ \sin \beta_4 & \cos \beta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt die Kenntnis der Koordinaten aller Punkte \mathbf{p}_i im ortsfesten Koordinatensystem. Dabei ist zu beachten, daß bei der Modellbildung in (Arteaga Pérez und Riege 1997) aus systematischen Gründen zwischen den elastischen Gliedern ein zusätzliches virtuelles Glied eingeführt wurde, dessen Winkelkoordinaten aber zu Null gesetzt wird. So ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen den „künstlichen“ Drehwinkeln β_i und den „echten“ Drehwinkeln θ_i :

$$\beta_1 = \theta_1, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = \theta_2, \quad \beta_4 = 0. \quad (\text{A.10})$$