

# Simulation modellbasierter Regelungskonzepte für einen dreiachsigen Manipulator mit komplexer kinematischer Topologie

Britta Riege, Torsten Scholt

Forschungsbericht Nr. 1/99

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

**Übersicht:** Dieser Bericht stellt modellbasierte Regelungskonzepte vor, die für ein Simulationsmodell des elastischen Roboters HyRob des Fachbiets Meß-, Steuer- und Regelungstechnik entworfen werden. Das Simulationsmodell wird mit Hilfe der Simulationsumgebung MÖBILE des Fachgebietes Mechatronik generiert und um die nötigen Hilfskonstrukte zum Betrieb des numerischen Modells erweitert. Dazu gehört beispielsweise ein Trajektorienplaner. Im Verlauf des Berichtes werden kurz die Erzeugung des Modells, der zugehörigen Approximationen und der Regelungsgesetze beschrieben. Die Regelungskonzepte werden an einfachen Trajektorien getestet.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg  
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik  
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

# Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	II
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Dreiachsiger Manipulator HyRob als Versuchsträger</b>	<b>3</b>
<b>3 Modellbildung und nichtlineare Approximation</b>	<b>5</b>
3.1 Automatische symbolische Generierung der Bewegungsgleichungen . . . . .	6
3.1.1 Klassifizierung der Systeme . . . . .	7
3.1.2 TAYLOR-Reihenentwicklung der Bewegungsgleichungen . . . . .	8
3.2 Automatische Differentiation . . . . .	9
<b>4 Regelungskonzepte</b>	<b>10</b>
4.1 Lineares Konzept . . . . .	10
4.1.1 Implementierung des linearen Reglers in M□BILE . . . . .	12
4.2 Nichtlineares Konzept . . . . .	13
4.2.1 Entkopplung nichtlinearer Mehrgrößensysteme . . . . .	14
4.2.2 Modellfolgeregelung . . . . .	17
4.2.3 Implementierung des nichtlinearen Reglers in M□BILE . . . . .	23
<b>5 Simulationsergebnisse</b>	<b>27</b>
<b>6 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>31</b>
<b>7 Literatur</b>	<b>33</b>
<b>Anhang</b>	<b>35</b>
<b>A Konstruktive Daten des Versuchsträgers</b>	<b>35</b>
<b>B Mathematische Erläuterungen</b>	<b>36</b>

## Vektoren und Matrizen

$\mathbf{a}(\mathbf{x})$	Vektorfeld, Driftterm eines ALS
$\mathbf{A}_i$	Systemmatrizen
$\mathbf{B}, \mathbf{B}_i$	Eingangsmatrizen
$\mathbf{b}_i$	$i$ -te Spalte der Eingangsmatrix
$\mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Vektor der Coriolis- und Zentrifugalkräfte
$\mathbf{C}$	Ausgangsmatrix
$\mathbf{c}^T$	Ausgangsvektor
$\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{u})$	vektorwertige Funktion zur Approximation
$\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$	Verstärkungsmatrizen der charakteristischen Polynome zur Festlegung der Fehlerdynamik
$\mathbf{D}, \tilde{\mathbf{D}}$	Entkopplungsmatrizen
$\mathbf{d}$	(Vektor-) Differenzengrad
$\mathbf{G}(\mathbf{q})$	Verteilungsmatrix
$\mathbf{G}(s)$	Übertragungsmatrix
$\mathbf{V}, \mathbf{r}, \mathbf{f}$	Terme der Standard-Entkopplungsrückführung
$\mathbf{K}$	Verstärkungsmatrix des entkoppelnden linearen Reglers
$\mathbf{M}(\mathbf{q})$	verallgemeinerte Massenmatrix
$(\tilde{m}_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, f\}}$	Elemente der Inversen der Massenmatrix $\mathbf{M}$
$\mathbf{P}_0$	Entwicklungspunkt
$\Phi(\mathbf{x})$	vektorwertige Funktion zur Approximation
$\mathbf{q}(t)$	Vektor der verallgemeinerten Koordinaten
$\mathbf{Q}(\hat{\mathbf{q}}, \dot{\hat{\mathbf{q}}})$	Vektor der verallgemeinerten eingepprägten Kräfte
$\mathbf{t}(\mathbf{x})$	Koordinatentransformation eines ALS in Normalform
$\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)$	Zustandsvektor bzw. dessen Ableitung
$\bar{\mathbf{x}}(t), \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)$	Zustandsvektor eines approximierten Systems bzw. dessen Ableitung
$\mathbf{x}_m(t), \dot{\mathbf{x}}_m(t)$	Zustandsvektor des Referenzsystems bzw. dessen Ableitung
$\mathbf{x}_{soll}(t)$	Sollwerte des linearen Reglers
$\mathbf{y}(t)$	Ausgangsvektor
$\bar{\mathbf{y}}(t)$	Ausgangsvektor des Referenzsystems
$\Delta \mathbf{y}(t)$	Ausgangsvektor des Differenzsystems
$\Delta \mathbf{y}^*(t)$	Ausgangsvektor des Differenzsystems mit Polvorgabe für die Fehlerdynamik
$\mathbf{u}(t)$	Eingangsvektor
$\bar{\mathbf{u}}(t)$	Eingangsvektor eines approximierten Systems
$\mathbf{u}_m(t)$	Eingangsvektor des Referenzsystems (Solltrajektorie)
$\mathbf{w}(t), \bar{\mathbf{w}}(t)$	neuer Systemeingang eines entkoppelten Systems ohne bzw. mit Polvorgabe
$\mathbf{z}(t)$	Zustandsvektor eines ALS in Normalform

**Skalare Größen**

$a_i$	Rückführverstärkungen bei der Polvorgabe für ein Eingrößensystem
$c_i(\mathbf{x})$	zum $i$ -ten Ausgang gehörige Ausgangsfunktion eines ALS
$d_i$	$i$ -ter Zeilendifferenzengrad
$f$	Anzahl der Freiheitsgrade
$i, j, k, l$	Indizes
$m$	Anzahl der Systemausgänge
$n$	Systemordnung
$N_i(s)$	Charakteristisches Polynom der $i$ -ten Integrator-kette
$p$	Anzahl der Systemeingänge
$q_i(t)$	$i$ -te verallgemeinerte Koordinate
$t$	Zeit
$T_i$	Zeitkonstante des PT <sub>1</sub> -Ersatzsystems
$u(t)$	Eingangsgröße eines Eingrößensystems
$u_i(t)$	$i$ -ter Systemeingang
$w_i(t)$	neuer Systemeingang eines entkoppelten Systems mit Polvorgabe
$\bar{w}_i(t)$	neuer Systemeingang eines entkoppelten Systems
$\gamma_i, \gamma_{s,i}$	Rückführverstärkungen bei der Polvorgabe

**Operatoren und sonstige Zeichen**

$\tilde{(\cdot)}$	Erweiterter Vektor bzw. Matrix
ad	Lie-Kommutator
$L_{\mathbf{a}}^* \mathbf{d}$	Lie-Ableitung eines Kovektorfeldes $\mathbf{d}$ entlang eines Vektorfeldes $\mathbf{a}$
rang	Rang einer Matrix
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$[\cdot, \cdot]$	Lie-Klammer zweier Vektorfelder
$\otimes$	Kronecker-Produktoperator

**Abkürzungen**

ALS	Analytisches System mit linear eingehender Steuerung
DMS	Dehnungsmeßstreifen
LS	Lineares System
QLS	Zustandsquadratisches System mit linear eingehender Steuerung
TCP	Tool Center Point

## 1 Einleitung

Die zunehmende Komplexität technischer Systeme erfordert die Erforschung und Entwicklung neuer Regelungskonzepte. Im Bereich der modellbasierten Regelung bietet sich neben der Verwendung linearer Regelungskonzepte oder Verfahren, die auf der Ein-/ Ausgangslinearisierung basieren, der Entwurf von Regelungskonzepten auf der Basis einfacher nichtlinearer Modelle an. Diese einfachen nichtlinearen Modelle zeichnen sich dadurch aus, daß sie einen größeren Gültigkeitsbereich besitzen als die linearen Modelle, andererseits sind sie einfacher auszuwerten als die komplexen nichtlinearen Modelle.

Der Entwurf neuer nichtlinearer Regelungskonzepte geschieht auf der Grundlage einfacher nichtlinearer Modelle. Für einfache Systeme können experimentelle Verfahren wie die Parameteridentifikation zur Approximation einfacher nichtlinearer Modelle angewendet werden. Bei komplexeren Systemen bieten sich theoretische Verfahren zur Modellapproximation an. Ein nützliches Werkzeug stellt die TAYLOR-Reihenentwicklung dar. Da die Regelstrecke meistens durch ein mechanisches System, das in der Regel ein Mehrgrößensystem (MIMO) darstellt, gebildet wird, werden die die Dynamik beschreibenden Bewegungsgleichungen in Zustandsform einer TAYLOR-Reihenentwicklung um einen Entwicklungspunkt unterzogen. Durch Abbruch der Reihenentwicklung nach höheren Gliedern können einfache nichtlineare Systeme gebildet werden. Unbekannt in den Reihenentwicklungen sind die partiellen Ableitungen der Bewegungsgleichungen nach den Zustandsgrößen.

Das Aufstellen der Bewegungsgleichungen „von Hand“ ist nur für sehr einfache Systeme möglich. Für komplexe Mehrkörpersysteme mit kinematischen Schleifen, zu denen hydraulisch angetriebene Manipulatoren zählen, kann das Aufstellen der Bewegungsgleichungen nur mit Rechneinsatz erfolgen. Zur automatischen Generierung der Bewegungsgleichungen bietet sich der im Fachgebiet Mechatronik entwickelte Kinematik- und Dynamikcompiler SYMKIN an. Bei Vorgabe des kinematischen Skeletts, der Gelenkvariablen, Trägheitseigenschaften und eingepprägten Kräfte für das betrachtete mechanische System generiert SYMKIN die Bewegungsgleichungen symbolisch in Minimalform als eine Sequenz sukzessive auszuwertender Gleichungen. Dabei werden mögliche explizite Lösungen für die kinematischen Schleifen berücksichtigt. Bei einer Vielzahl technischer Systeme existieren explizite Lösungen für die Relativkinematik.

Zur Bestimmung der partiellen Ableitungen existieren mehrere Verfahren. Aufgrund des Umfangs der Bewegungsgleichungen scheidet für die meisten technischen Systeme eine analytische Berechnung der partiellen Ableitungen aus. Numerische Verfahren zur Differentiation haben den Nachteil, daß lediglich Näherungen für die Ableitungen bestimmt werden. Ein leistungsfähiges Verfahren stellt die automatische Differentiation dar, das im Rahmen der Rechnergenauigkeit exakte Differentiationsergebnisse liefert. Dazu müssen

die zu differenzierenden Gleichungen in symbolischer Form vorliegen.

Die Grundlage zum Entwurf eines Mehrgrößenregelungskonzeptes ist die Methode der Ein-/Ausgangsentkopplung. Dabei wird über ein entsprechendes Regelungsgesetz die Dynamik des betrachteten Systems in der Art verändert, daß jeder Eingang des Systems nur einen Ausgang des Systems beeinflußt. Darüber hinaus zeigt jeder dieser entkoppelten Kanäle lineares (integrierendes) Verhalten. Mit einem linearen Konzept ist es nun möglich, für jeden dieser Kanäle einzeln einen Regler auszulegen. Ein anderer, nichtlinearer Ansatz entkoppelt ebenfalls die Ein-/Ausgangskanäle, nutzt jedoch lineare Referenzsysteme zur Vorgabe der Dynamik der einzelnen Kanäle. Darüber hinaus wird die Dynamik des Fehlers zwischen den Referenzsystemen und den entkoppelten Ein-/Ausgangskanälen über eine Polvorgabe festgelegt. Bei diesem Ansatz spricht man von der asymptotisch stabilen Modellfolgeregelung.

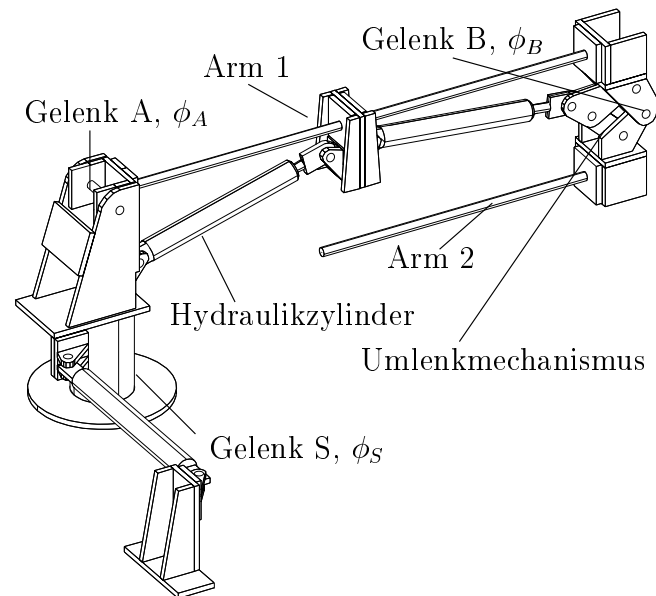
Ein Einsatzgebiet für diese neuen nichtlinearen Regelungskonzepte wird durch hydraulisch angetriebene Manipulatoren erschlossen. Im Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik wurde der hydraulisch angetriebene, dreiachsige Versuchsträger HyRob, der wesentliche Eigenschaften eines Großmanipulators besitzt, aufgebaut. Der Versuchsträger dient im wesentlichen der Erprobung neuer Regelungskonzepte. Vor der praktischen Erprobung bietet sich der Test in der Simulation an. Die in C++ geschriebene Simulationsumgebung MÖBILE ermöglicht die Simulation mechatronischer Systeme, die meistens als geschlossene Regelkreise realisiert sind. Zur Simulation von Regelungskonzepten für den HyRob kann in MÖBILE ein Regelkreis aufgebaut werden. Im zweiten Abschnitt dieses Forschungsberichtes wird in kurzer Form der Versuchsträger HyRob vorgestellt. Die für den Reglerentwurf benötigten Approximationsmodelle werden durch automatische Approximation der dynamischen Gleichungen erzeugt. Dazu werden im dritten Abschnitt die Verfahren und die Vorgehensweise zur automatischen Generierung und Approximation der Bewegungsgleichungen erläutert. Im vierten Abschnitt werden ein lineares und ein nichtlineares Regelungskonzept für MIMO-Systeme vorgestellt. Diese Konzepte werden in der Simulation getestet und miteinander verglichen. Der Bericht schließt mit einer Zusammenfassung.

## 2 Dreiachsiger Manipulator HyRob als Versuchsträger

Der dreiachsige Versuchsträger HyRob besitzt wesentliche Eigenschaften eines Großmanipulators und dient der Erprobung neuer Regelungskonzepte. In Bild 2.1 a) ist ein Foto des Prüfstandes, der im Labor des Fachgebiets Meß-, Steuer- und Regelungstechnik der Universität Duisburg zu finden ist, dargestellt.



a) Foto des Prüfstands



b) CAD-Modell des Versuchsträgers

**Bild 2.1:** Dreiachsiger Versuchsträger HyRob

Der konstruktive Aufbau des Versuchsträgers ist in Bild 2.1 b) zu sehen. Der Ausleger des Manipulators, bestehend aus zwei über einen Umlenkmechanismus miteinander verbundenen Armen, ist auf einer drehbaren Basis montiert, die Drehungen um die Hochachse ermöglicht und einen Drehbereich von  $\phi_S = 0^\circ - 90^\circ$  besitzt. Der Arm 1 des Auslegers setzt sich aus zwei elastischen Segmenten zusammen und kann Drehbewegungen um eine horizontale Achse in einem Bereich  $\phi_A = 0^\circ - 90^\circ$  durchführen. Der ebenfalls elastische Arm 2 ist mit dem ersten Arm über ein Drehgelenk verbunden, das Drehungen um eine horizontale Achse in einem Bereich von  $\phi_B = (-180^\circ) - 0^\circ$  zuläßt. Der Ausleger besitzt im ausgestreckten Zustand eine Reichweite von ca. 1,6 m.

Die hydrostatischen Antriebe sind entkoppelt im System angeordnet, d. h. die Drehbewegung der Säule bzw. die Drehbewegungen der einzelnen Arme können – abgesehen von der dynamischen Kopplung – unabhängig voneinander ausgeführt werden. Die Hydraulikzylinder der einzelnen Antriebseinheiten werden separat über am Fundament angebrachte Servoventile angesteuert. Während der Antrieb der Säule und des Armes 1 kinematisch betrachtet mit Hilfe eines einschleifigen Mechanismus erfolgt, erfordert der Antrieb des

zweiten Armes aufgrund des großen Schwenkwinkels einen zweischleifigen Umlenkmechanismus, bestehend aus Hydraulikzylinder, Umlenkhebel und Druckstange.

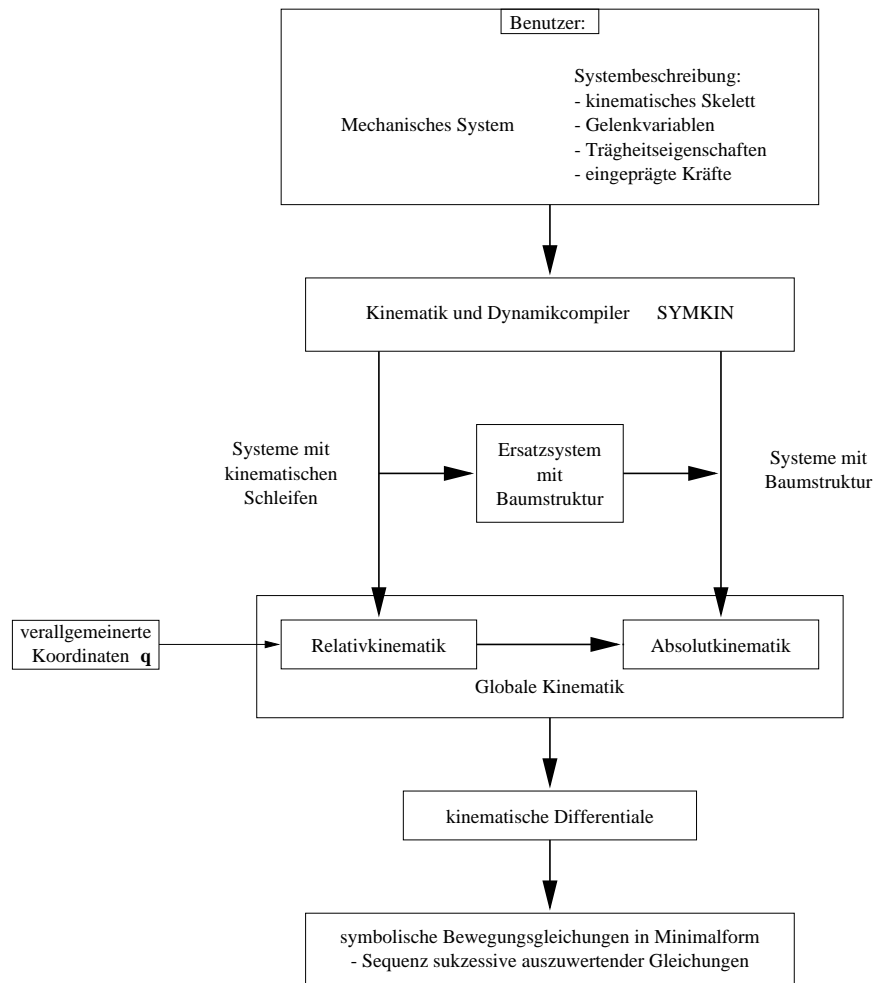
Die Armsegmente sind austauschbar, so daß durch den Einbau von Federstahlrundstäben (X12CrNi17 7) große elastische Verformungen realisiert werden können. Der Manipulator ist für eine maximal zulässige Endlast von  $m_E = 10,0$  kg ausgelegt. Im Anhang A sind die wichtigsten konstruktiven Daten, die der Modellbildung und Simulation zugrunde liegen, aufgeführt.

Am realen System sind darüber hinaus noch einige meßtechnische Einrichtungen angebracht, die es ermöglichen, wichtige Systemzustände zu erfassen. So können die Positionen der Zylinder über inkrementale Wegmeßsysteme und die Starrkörperwinkel über Winkelgeber ermittelt werden. Außerdem können die elastischen Verformungen über Dehnungsmeßstreifen bestimmt werden. Diese gemessenen Informationen sind für die Simulation irrelevant, werden jedoch bei einer eventuellen Implementierung des Regelungsgesetzes an einer realen Anlage interessant. Hier wäre es jedoch nötig, die nicht zu messenden Größen über einen Beobachter zu rekonstruieren. Eine ausführlichere Beschreibung des mechanischen Systems findet sich in (Bernzen 1995).



### 3 Modellbildung und nichtlineare Approximation

Der Entwurf neuer modellbasierter, *nichtlinearer* Regelungskonzepte zur Bahnverfolgung erfordert die Generierung einfacher nichtlinearer Ersatzmodelle für die Dynamik der zugrundeliegenden mechanischen Systeme. Diese Modelle können auf der Basis der Bewegungsgleichungen approximiert werden, indem die Bewegungsgleichungen in TAYLOR-Reihen entwickelt werden. Durch Abbruch der Reihenentwicklung nach höheren Gliedern können einfache nichtlineare Modelle approximiert werden. Unbekannt in den Reihenentwicklungen sind die partiellen Ableitungen. Aufgrund der Komplexität der betrachteten mechanischen Systeme ist das Aufstellen der Bewegungsgleichungen und die Berechnung der partiellen Ableitungen für die Ersatzmodelle „von Hand“ nicht möglich.



**Bild 3.1:** Vorgehensweise in Symkin

In diesem Abschnitt werden in kurzer Form die Verfahren und Methoden vorgestellt, die nach Vorgabe der Systembeschreibung durch den Anwender die *automatische* Generierung der Bewegungsgleichungen und approximierten Modelle ermöglichen.

### 3.1 Automatische symbolische Generierung der Bewegungsgleichungen

Zur automatischen Generierung der Bewegungsgleichungen bietet sich der im Fachgebiet Mechatronik entwickelte Kinematik- und Dynamikcompiler SYMKIN (Kecskeméthy u. a. 1997) an, der in MATHEMATICA (Wolfram 1988) programmiert ist. Er stellt automatisch die Bewegungsgleichungen komplexer mechanischer Systeme in symbolischer Form als eine Sequenz sukzessive auszuwertender Gleichungen auf. In Abbildung 3.1 ist die Vorgehensweise bildlich dargestellt.

Der Benutzer gibt das kinematische Skelett, die Gelenkvariablen, Trägheitseigenschaften, die eingepprägten Kräfte und wahlweise die verallgemeinerten Koordinaten für ein mechanisches System vor. Zunächst wird überprüft, ob ein System mit Baumstruktur oder eines mit kinematischen Schleifen vorliegt. Bei Systemen mit Baumstruktur kann direkt die *Absolutkinematik* gelöst werden. Die *Relativkinematik* umfaßt die Lösung der Bindungsgleichungen für die kinematischen Schleifen. In den meisten technischen Anwendungsfällen sind die Bindungsgleichungen explizit lösbar. Auch das im Rahmen dieses Berichtes betrachtete mechanische Modell des Versuchsträgers ist durch explizit lösbare Bindungsgleichungen gekennzeichnet, so daß im weiteren nur Systeme mit geschlossen lösbaren Bindungsgleichungen betrachtet werden.

Bei Systemen mit Schleifen werden mit *graphentheoretischen Algorithmen* (Krupp 1998) Subsysteme, kleinste Schleifen, das kinematische Netzwerk sowie das Ersatzsystem mit Baumstruktur bestimmt. Die Lösung der Relativkinematik bildet zusammen mit der Absolutkinematik die *globale Kinematik* des Systems, die die absoluten kinematischen Größen der Körper des betrachteten Systems in Abhängigkeit von den unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten angibt. Unter Anwendung des Verfahrens der *kinematischen Differentiale* (Hiller und Kecskeméthy 1989) kann dann die Dynamik in Form der Koeffizienten der Bewegungsgleichungen bestimmt werden.

Wenn die Eingangs- bzw. Stellgrößen  $\mathbf{u}$  auf Kräfte und Momente beschränkt sind, wie es in mechanischen Systemen immer der Fall ist, lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \mathbf{u}. \quad (3.1)$$

Darin ist die Matrix  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{f,p}$  die Verteilungsmatrix, welche die  $p$  Kräfte und Momente  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  auf die verallgemeinerten Kräfte überführt, abhängig von den gewählten verallgemeinerten Koordinaten,  $\hat{\mathbf{Q}}$  der  $f \times 1$ -Vektor der verallgemeinerten eingepprägten Kräfte ohne die Stellkräfte. Entsprechend der Anzahl  $f$  der Freiheitsgrade ist  $\mathbf{M}$  die verallgemeinerte  $[f \times f]$  Massenmatrix,  $\mathbf{b}$  der  $[f \times 1]$ -Vektor der verallgemeinerten Kreiselkräfte. Die unbekanntenen Jacobimatrizen werden aus der globalen Kinematik mit dem Verfahren der *kinematischen Differentiale* berechnet (Hiller und Kecskeméthy 1989). Dazu werden die verallgemeinerten Koordinaten mit Einsen und Nullen belegt und mehrmals die globale Kinematik gelöst. Dadurch erhält man die Spalten der Jacobimatrizen. Nähere Informationen finden sich in (Büdding u. a. 1999).

Durch Einführung des Zustandsvektors

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

kann Gleichung (3.1) in Zustandsform überführt werden:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ (\tilde{m}_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, f\}} (-\mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}\mathbf{u}) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

mit:

$$(\tilde{m}_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, f\}} : [f \times f]\text{-Inverse der Massenmatrix } \mathbf{M}.$$

### 3.1.1 Klassifizierung der Systeme

Die Bewegungsgleichungen in Zustandsform (Gleichung (3.3)) entsprechen der Klasse der *analytischen Systeme mit linear eingehender Steuerung* (ALS) (Schwarz 1991). Aus den komplexen nichtlinearen Systemen der Form ALS lassen sich einfachere Systeme der Form LS (*lineares System*) und QLS (*quadratisches System mit linear eingehender Steuerung*) ableiten (Jelali 1997):

**LS:**

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}_1 \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_0 \bar{\mathbf{u}}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}(\bar{\mathbf{x}}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

**QLS:**

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}_1 \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{A}_2 \bar{\mathbf{x}}(t) \otimes \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_0 \bar{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{B}_1 \bar{\mathbf{x}}(t) \otimes \bar{\mathbf{u}}(t) \\ &\quad + \mathbf{B}_2 \bar{\mathbf{x}}(t) \otimes \bar{\mathbf{x}}(t) \otimes \bar{\mathbf{u}}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}(\bar{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Darüberhinaus eignen sich zur Approximation nichtlinearer Systeme Polynomsysteme höherer Ordnung (PLS), die im Rahmen dieses Berichtes nicht betrachtet werden.

### 3.1.2 TAYLOR-Reihenentwicklung der Bewegungsgleichungen

Zur Bestimmung der Matrizen der approximierten Systeme wird jeweils eine TAYLOR-Reihenentwicklung für die aus Gleichung (3.1) gewonnenen vektorwertigen Funktionen  $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  und  $\Phi(\mathbf{x})$ ,

$$\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ (\tilde{m}_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, f\}} (-\mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u}) \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\Phi(\mathbf{x}) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ (\tilde{m}_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, f\}} \mathbf{G}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

durchgeführt (Büdding 1998).

Die Reihenentwicklungen erfolgen um eine Ruhelage  $\mathbf{P}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  mit

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0. \quad (3.9)$$

Setzt man

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \quad (3.10)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \quad (3.11)$$

so errechnen sich die approximierten Zustandsmodelle zu:

LS:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left. \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{P}_0} \bar{\mathbf{x}} + \left. \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{P}_0} \bar{\mathbf{u}}, \quad (3.12)$$

QLS:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \left. \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{P}_0} \bar{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{\mathbf{P}_0} \bar{\mathbf{x}} \otimes \bar{\mathbf{x}} + \left. \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{P}_0} \bar{\mathbf{u}} \\ &+ \left. \frac{\partial^2 \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{P}_0} \bar{\mathbf{x}} \otimes \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^3 \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{x}^2} \right|_{\mathbf{P}_0} \bar{\mathbf{x}} \otimes \bar{\mathbf{x}} \otimes \bar{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Es ist zu erkennen, daß gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} &= \Phi(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial^2 \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{x}^2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Der Gleichungssatz (3.14) wird zur Berechnung der partiellen Ableitungen ausgenutzt. Er wird in die Gleichungen (3.12) und (3.13) eingesetzt. Durch Koeffizientenvergleich zwischen den Gleichungen (3.4), (3.5) und den Gleichungen (3.12), (3.13) ergeben sich die Systemmatrizen zu (Büdding 1998)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{P}_0} & \mathbf{A}_2 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \mathbf{x}^2} \right]_{\mathbf{P}_0} \\ \mathbf{B}_0 &= \Phi|_{\mathbf{P}_0} & \mathbf{B}_1 &= \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{P}_0} & \mathbf{B}_2 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{P}_0}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Die Systemmatrizen  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{B}_1$  und  $\mathbf{B}_2$  haben die Dimensionen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &\in \mathbb{R}^{2f \times 2f} & \mathbf{A}_2 &\in \mathbb{R}^{2f \times 4f \cdot f} \\ \mathbf{B}_0 &\in \mathbb{R}^{2f \times p} & \mathbf{B}_1 &\in \mathbb{R}^{2f \times 2f \cdot p} & \mathbf{B}_2 &\in \mathbb{R}^{2f \times 4f \cdot f \cdot p}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.2 Automatische Differentiation

Zur Berechnung der in den Systemmatrizen auftretenden partiellen Ableitungen wird das Verfahren der *automatischen Differentiation* angewendet. Der Vorteil des Verfahrens liegt darin, daß es einerseits auf komplexe, umfangreiche Gleichungen angewendet werden kann, andererseits die berechneten Ableitungen im Rahmen der Rechnergenauigkeit exakt sind im Gegensatz zu Ableitungen, die durch Differenzenverfahren bestimmt werden. Durch Aufruf von Hilfsfunktionen (`makeA1ForQLS(...)`, ..., `makeB2ForQLS(...)`), die dem Bediener zur Verfügung gestellt werden, können automatisch nach der Berechnung der partiellen Ableitungen durch Aufruf der Funktion `doApproximation()` die Matrizen für die approximierten Systeme abgerufen werden. Weitere Details finden sich in (Büdding u. a. 1999). Somit stehen nun Modelle der LS und QLS zur Verfügung, welche im nächsten Abschnitt dazu genutzt werden, modellbasierte Regler auszulegen.

## 4 Regelungskonzepte

Die folgenden Unterabschnitte beschäftigen sich mit der Auslegung eines Reglers für den im Abschnitt 2 beschriebenen dreiachsigen Manipulators. Dabei sollen zwei Konzepte untersucht werden. Bei dem einen Konzept handelt es sich um einen linearen, entkoppelnden Regler. Der nichtlineare Entwurf behandelt eine asymptotisch stabile Modellfolgeregelung auf Basis eines QLS. Beide Konzepte werden für ein MIMO-System mit  $p = 3$  Eingangs- und  $m = 3$  Ausgangsgrößen entworfen. Das Mehrgrößensystem soll aus mechanischer Sicht  $f = 3$  Freiheitsgrade und  $p = 3$  Stellgrößen besitzen, so dass das System in Minimalform durch den  $[6 \times 1]$  Zustandsvektor  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T = [q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3]^T$  und den  $[3 \times 1]$ -Vektor  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$  der Stellgrößen beschrieben werden kann.

### 4.1 Lineares Konzept

In diesem Abschnitt wird ein linearer, entkoppelnder Regler für den dreiachsigen Versuchsträger entworfen, der auf einer automatisch erzeugten, linearen Approximation des dynamischen Modells aufbaut. Die Ausführungen lehnen sich an (Riege und Arteaga Perez 1998). Am Ende der modellbasierten Approximation, die im Detail in Abschnitt 3 erläutert ist, steht ein lineares Modell 6. Ordnung der folgenden Form:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(t) \quad , \quad \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^6; \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \quad . \end{aligned} \quad (4.1)$$

Mit  $m = p = 3$  handelt es sich um ein quadratisches System und die erste notwendige Entkoppelbarkeitsbedingung ist somit erfüllt. Nimmt man nun an, daß die zu entkoppelnden Ausgänge genau die Minimalkoordinaten  $q_i, i = 1, \dots, 3$  sind, gilt also:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \\ \mathbf{c}_3^T \end{bmatrix} \quad , \quad (4.2)$$

so läßt sich nach (Schwarz 1991, Svaricek 1995) eine Ein-/Ausgangs-entkoppelnde Rückführung der Form

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{V}\mathbf{w}(t) \quad (4.3)$$

mit dem neuen Eingangsvektor  $\mathbf{w}(t)$  und den Matrizen

$$\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} \quad \in \mathbb{R}^{3,6} \quad (4.4)$$

sowie

$$\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{K} \quad \in \mathbb{R}^{3,3} \quad (4.5)$$

angeben. Hierzu muß zunächst die Entkopplungsmatrix

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \mathbf{A}^{d_1} \mathbf{B} \\ \mathbf{c}_2^T \mathbf{A}^{d_2} \mathbf{B} \\ \mathbf{c}_3^T \mathbf{A}^{d_3} \mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} \quad (4.6)$$

berechnet werden. Die  $d_i, i = 1, \dots, 3$  stellen dabei die Entkopplungsindizes dar, die nach der folgenden Definition berechnet werden können:

**Definition .1** (Svaricek 1995)

Die Entkopplungsindizes  $d_i, i = 1, \dots, m$  sind die jeweils kleinsten positiven Zahlen, die

$$\mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{d_i} \mathbf{B} \neq 0 \quad (4.7)$$

erfüllen, wobei  $\mathbf{c}_i^T$  die  $i$ -te Zeile von  $\mathbf{C}$  bezeichnet. Falls  $\mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^j \mathbf{B} = 0$  für alle  $j$  gilt, wird  $d_i = n - 1$  gesetzt.  $\square$

Als hinreichende Bedingung für die Entkoppelbarkeit des linearen Systems muß die Entkopplungsmatrix regulär sein. Für das vorliegende Mehrgrößensystem muss gelten:

$$\text{rang}(\tilde{\mathbf{D}}) = m = 3 \quad . \quad (4.8)$$

Für die anderen Matrizen in Gl. (4.4), (4.5) gilt:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \mathbf{A}^{d_1+1} \\ \mathbf{c}_2^T \mathbf{A}^{d_2+1} \\ \mathbf{c}_3^T \mathbf{A}^{d_3+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,6} \quad , \quad (4.9)$$

sowie

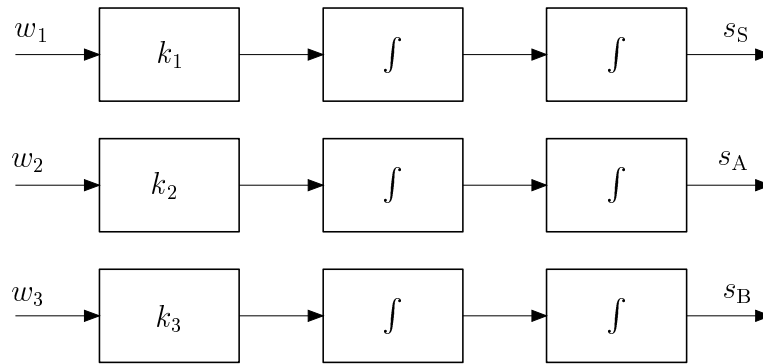
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} \quad . \quad (4.10)$$

Dabei werden die Werte von  $k_i$  so gewählt, daß die Übertragungsmatrix  $\mathbf{G}(s)$  des entkoppelten Systems,

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{s^{d_1+1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{s^{d_2+1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_3}{s^{d_3+1}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} \quad , \quad (4.11)$$

vernünftige Werte ergibt, also zum Beispiel  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ .

In dem hier betrachteten Fall besitzt die Entkopplungsmatrix den Rang drei, das lineare Approximationsmodell ist also entkoppelbar. Ferner ergeben sich alle drei Entkopplungsindizes zu eins. Geht man davon aus, daß das lineare System (Gl. (4.1)) die Dynamik des



**Bild 4.1:** Blockschaltbild des entkoppelten Systems

realen Systems exakt wiedergibt, so besitzt das durch die Rückführung (4.3) entkoppelte System die in Bild 4.1 dargestellte Form. Durch die Entkopplung entsteht ein nicht beobachtbarer Unterraum des Zustandsraums, der nach (Svaricek 1995) die Dimension

$$n_{\ddot{u}N} = n - \sum_{i=1}^m (d_i + 1) \quad (4.12)$$

hat. In dem betrachteten Fall ergibt sich dieser Wert gerade zu Null, d. h. das entkoppelte Modell besitzt keine Nulldynamik. Da durch die Entkopplung drei Integratorketten der Länge zwei entstehen, wird durch eine zusätzliche lineare Zustandsrückführung eine beliebige Dynamik vorgegeben. Diese ist beschrieben durch

$$\mathbf{w} = \mathbf{K}_P (\bar{\mathbf{x}}_{\text{soll}} - \bar{\mathbf{x}}) \quad , \text{ mit } \mathbf{K}_P = \begin{bmatrix} k_{p,1} & 0 & 0 & k_{p,4} & 0 & 0 \\ 0 & k_{p,2} & 0 & 0 & k_{p,5} & 0 \\ 0 & 0 & k_{p,3} & 0 & 0 & k_{p,6} \end{bmatrix} \quad . \quad (4.13)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_P$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_D$

So ergibt sich ein zusätzlicher linearer PD-Regler für das Modell. Das gesamte Regelgesetz lautet:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{V}\mathbf{K}_P (\bar{\mathbf{x}}_{\text{soll}}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)) \quad . \quad (4.14)$$

#### 4.1.1 Implementierung des linearen Reglers in M□BILE

Die ersten Untersuchungen des in Abschnitt 4.1 vorgestellten linearen Reglers in der Simulation erfolgen mit dem linearen Modell als Regelstrecke in der Simulationsumgebung Matlab. Dort werden die Reglerparameter grob voreingestellt. Anschließend werden die oben vorgestellten Algorithmen, also im Einzelnen die Ermittlung der Entkopplungsindizes (siehe Gln. (4.7)), die Berechnung und Rangbestimmung der Entkopplungsmatrix



(siehe Gln. (4.6) und Gln. (4.8)), sowie der Regelalgorithmus selber als Unterklassen bzw. -funktionen direkt in M $\square$ BILE implementiert.

## 4.2 Nichtlineares Konzept

Grundlage dieses Entwurfes ist die asymptotisch stabile Modellfolgeregelung. Der Ausgangspunkt zur Auslegung des nichtlinearen Reglers ist ein ALS bzw. eine quadratische Nahrung in der Standardform eines ALS, welches das dynamische Verhalten des betrachteten Systems nachbildet:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}})\bar{\mathbf{u}}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}(\bar{\mathbf{x}}(t)) \quad ; \quad \bar{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p, \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m.\end{aligned}\tag{4.15}$$

Zu diesem System wird der Differenzegrad eines dynamischen Systems der Klasse der ALS definiert zu:

**Definition .2** (Schwarz 1991)

Ein Mehrgrößen-ALS der Form (4.15) mit  $m = p$  hat den (Vektor-) Differenzegrad  $\mathbf{d}$  fur alle  $\bar{\mathbf{x}}$  in einer Umgebung von  $\bar{\mathbf{x}}_0$ :

$$\mathbf{d} = \{d_1, d_2, \dots, d_p\}\tag{4.16}$$

mit

$$d_i = \min_{r \in \mathbb{N}^+} L_{\mathbf{b}_j} L_{\mathbf{a}}^{r-1} c_i(\bar{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0} ; \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, p \end{array}.\tag{4.17}$$

□

Im Anhang B finden sich Erlauerungen der in Gleichungen (4.17) auftretenden Lie-Ableitungen. Fur die weiteren Ausfuhungen soll gelten:  $\mathbf{d} = \{2, 2, 2\}$ . Der so ermittelte Vektordifferenzegrad ist die Grundlage fur die Betrachtungen der folgenden Unterabschnitte. Es soll außerdem gelten:  $m = p = 3$ . Damit hat das System drei Ausgange und drei Eingange.

### 4.2.1 Entkopplung nichtlinearer Mehrgrößensysteme

Innerhalb dieses Abschnittes eine asymptotisch stabile Modellfolgeregelung realisiert, wie sie in (Scholt 1998) vorgestellt wurde. Ansatz zur Berechnung dieser nichtlinearen Regelung sind die Ein-/Ausgangsentkopplung mit einer Polvorgabe. Aus diesem Grund wird zunächst erläutert, wie ein durch Gleichung (4.15) beschriebenes System ein-/ausgangsentkoppelt werden kann und wie eine Polvorgabe erzielt wird. Zunächst gilt:

**Satz .1** (Schwarz 1991)

Das Entkopplungsproblem ist dann und nur dann lösbar, wenn zusammen mit

$$L\mathbf{B}\mathbf{V}_j L_{\mathbf{a}+}^{d_i-1} \mathbf{B}\mathbf{r} c_i(\bar{\mathbf{x}}_0) = 0, \quad \forall i \neq j \quad (4.18)$$

und

$$\bar{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{x}}_0) = \mathbf{D}(\bar{\mathbf{x}}_0) \cdot \mathbf{V}(\bar{\mathbf{x}}) = \left[ L\mathbf{B}\mathbf{V}_j L_{\mathbf{a}+}^{d_i-1} \mathbf{B}\mathbf{r} c_i(\bar{\mathbf{x}}_0) \right] \quad (4.19)$$

die Matrix  $\mathbf{D}(\bar{\mathbf{x}}_0)$  nach Gleichung (4.23) nichtsingulär ist und damit das System einen Vektordifferenzengrad  $\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$  mit  $d_i \neq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, p$  für den betrachteten Arbeitspunkt  $\bar{\mathbf{x}}_0$  hat.  $\square$

Nach (Schwarz 1991) ergibt sich die Standard-Entkopplungsrückführung aus

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{V}(\bar{\mathbf{x}})\bar{\mathbf{w}} \quad ; \quad \bar{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^p, \quad (4.20)$$

wenn die Zuordnungen

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\bar{\mathbf{x}}) &= -\mathbf{D}^{-1}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{V}(\bar{\mathbf{x}}) &= \mathbf{D}(\bar{\mathbf{x}})^{-1} \end{aligned} \quad (4.21)$$

verwendet werden. Die noch unbekannt Matrix  $\mathbf{D}(\bar{\mathbf{x}})$  und der Vektor  $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$  berechnen sich nach (Schwarz 1991) allgemein zu:

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} f_1(\bar{\mathbf{x}}) \\ f_2(\bar{\mathbf{x}}) \\ \vdots \\ f_p(\bar{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{a}}^{d_1} c_1(\bar{\mathbf{x}}) \\ L_{\mathbf{a}}^{d_2} c_2(\bar{\mathbf{x}}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{a}}^{d_p} c_p(\bar{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

und

$$\mathbf{D}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{b}_1} L_{\mathbf{a}}^{d_1-1} c_1(\bar{\mathbf{x}}) & L_{\mathbf{b}_2} L_{\mathbf{a}}^{d_1-1} c_1(\bar{\mathbf{x}}) & \dots & L_{\mathbf{b}_p} L_{\mathbf{a}}^{d_1-1} c_1(\bar{\mathbf{x}}) \\ L_{\mathbf{b}_1} L_{\mathbf{a}}^{d_2-1} c_2(\bar{\mathbf{x}}) & L_{\mathbf{b}_2} L_{\mathbf{a}}^{d_2-1} c_2(\bar{\mathbf{x}}) & \dots & L_{\mathbf{b}_p} L_{\mathbf{a}}^{d_2-1} c_2(\bar{\mathbf{x}}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{\mathbf{b}_1} L_{\mathbf{a}}^{d_p-1} c_p(\bar{\mathbf{x}}) & L_{\mathbf{b}_2} L_{\mathbf{a}}^{d_p-1} c_p(\bar{\mathbf{x}}) & \dots & L_{\mathbf{b}_p} L_{\mathbf{a}}^{d_p-1} c_p(\bar{\mathbf{x}}) \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

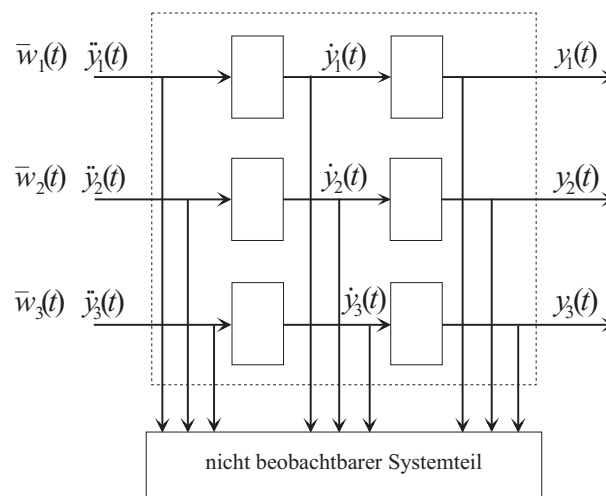
Im betrachteten Fall gelten:

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} f_1(\bar{\mathbf{x}}) \\ f_2(\bar{\mathbf{x}}) \\ f_3(\bar{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{a}}^{d_1} c_1(\bar{\mathbf{x}}) \\ L_{\mathbf{a}}^{d_2} c_2(\bar{\mathbf{x}}) \\ L_{\mathbf{a}}^{d_3} c_3(\bar{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{a}}^2 c_1(\bar{\mathbf{x}}) \\ L_{\mathbf{a}}^2 c_2(\bar{\mathbf{x}}) \\ L_{\mathbf{a}}^2 c_3(\bar{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

und

$$\mathbf{D}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{b}_1} L_{\mathbf{a}} c_1(\bar{\mathbf{x}}) & L_{\mathbf{b}_2} L_{\mathbf{a}} c_1(\bar{\mathbf{x}}) & L_{\mathbf{b}_3} L_{\mathbf{a}} c_1(\bar{\mathbf{x}}) \\ L_{\mathbf{b}_1} L_{\mathbf{a}} c_2(\bar{\mathbf{x}}) & L_{\mathbf{b}_2} L_{\mathbf{a}} c_2(\bar{\mathbf{x}}) & L_{\mathbf{b}_3} L_{\mathbf{a}} c_2(\bar{\mathbf{x}}) \\ L_{\mathbf{b}_1} L_{\mathbf{a}} c_3(\bar{\mathbf{x}}) & L_{\mathbf{b}_2} L_{\mathbf{a}} c_3(\bar{\mathbf{x}}) & L_{\mathbf{b}_3} L_{\mathbf{a}} c_3(\bar{\mathbf{x}}) \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Durch die so gebildete Rückführung ergibt sich ein System wie in Bild 4.2<sup>1</sup> dargestellt.



**Bild 4.2:** Entkoppeltes System mit nicht beobachtbarer Nulldynamik.

Setzt man

$$\ddot{\mathbf{y}}(\bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) = \bar{\mathbf{w}}(t) \quad (4.26)$$

und stellt nach  $\mathbf{u}(t)$  um, so erhält man die gesuchte statische Rückführung. Das entkoppelte Teilsystem ist damit noch nicht asymptotisch stabil. Durch eine geeignete Rückführung der Zustände kann es jedoch stabilisiert werden. Für jeden Kanal gilt:

$$w_i(t) = -a_0^i c_i(\bar{\mathbf{x}}) - a_1^i L_{\mathbf{a}} c_i(\bar{\mathbf{x}}) - a_{d_i-1}^i L_{\mathbf{a}}^{d_i-1} c_i(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{w}_i(t); \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Das so gewonnene System hat die Übertragungsmatrix

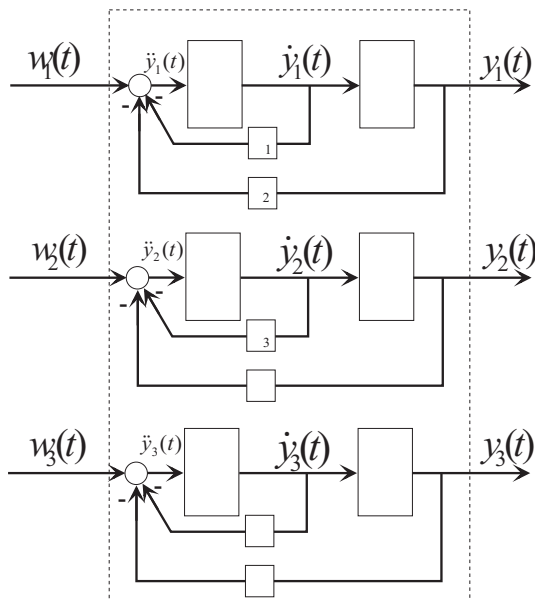
$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{N_1(s)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{N_2(s)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{N_p(s)} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

<sup>1</sup> Der Teil der Nulldynamik wurde wegen seiner untergeordneten Rolle nur angedeutet.

mit

$$N_i(s) = a_0^i + a_1^i s + \dots + a_{d_i-1}^i s^{d_i-1} + s^{d_i}; \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (4.28)$$

Da jeder der Zeilendifferenzgrade gleich 2 ist, wird für jeden Kanal ein System 2. Ordnung angesetzt, wie in Bild 4.3 zu erkennen ist.



**Bild 4.3:** Vorgabe der Pole des entkoppelten Systems

In der entsprechenden Notierung stellt sich dieses System dar als:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1(t) &= -\gamma_1 \dot{y}_1(t) - \gamma_2 y_1(t) + w_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) &= -\gamma_3 \dot{y}_2(t) - \gamma_4 y_2(t) + w_2(t) \\ \ddot{y}_3(t) &= -\gamma_5 \dot{y}_3(t) - \gamma_6 y_3(t) + w_3(t) \end{aligned} \quad (4.29)$$

mit  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  als vorgebbaren Koeffizienten der gewünschten charakteristischen Polynome der ein-/ausgangslinierisierten Kanäle.

Der Nachteil dieses Ansatzes ist, daß kleinste Abweichungen zwischen dem zur Generierung des Regelungsgesetzes genutzten Zustandsmodell und der damit geregelten Strecke zu schnell zu einem Abdriften der Strecke vom Arbeitspunkt führen kann. Regelt man also das betrachtete Zustandsmodell mit einem Regelungsgesetz, welches vom gleichen Zustandsmodell abgeleitet wurde, so sind alle Betrachtungen exakt. Versucht man jedoch, mit dem über dieses Zustandsmodell generierte Regelgesetz die reale Strecke zu regeln, so führen die Unterschiede zwischen der Anlage und dem Zustandsmodell zu einem unbrauchbaren Ergebnis.

### 4.2.2 Modellfolgeregelung

Diesen Nachteil kann man vermeiden, in dem man nicht das physikalische Modell der Strecke selbst ein-/ausgangsentkoppelt, sondern die Differenz zwischen diesem und einem Referenzmodell exakt ein-/ausganglinearisiert. In (Schwarz 1991) sind die entsprechenden Ausführungen für Eingrößensysteme zu finden. Zur Anwendung in diesem Fall muß diese Theorie auf Mehrgrößensysteme übertragen werden. Zunächst sei der Fall eines Eingrößensystems, wie in (Schwarz 1991) ausgeführt, betrachtet. So kann das Problem der exakten Modellfolgeregelung folgendermaßen formuliert werden:

**Definition .3** (Schwarz 1991)

Gegeben sei ein ALS der Form

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}})u(t) \\ y(t) &= c(\bar{\mathbf{x}}(t)) \quad ; \quad \bar{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n ; u(t), y(t) \in \mathbb{R},\end{aligned}\tag{4.30}$$

und ein dynamisches Referenzmodell

$$\left. \begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_m(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}_m(t) + \mathbf{b}u_m(t) & \mathbf{x}_{m0} &= \mathbf{x}_m(0) \\ \bar{y}(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_m(t) & \mathbf{x}_m &\in \mathbb{R}^{2p}\end{aligned}\right\}.\tag{4.31}$$

Das Folgeregelungsproblem für ein  $u_m \neq 0, t \geq t_0$ , bei dem für ein Fehlersignal  $e(t)$  zwischen Systemausgang  $y(t)$  und dem Modellausgang  $\bar{y}(t)$  gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\bar{y}(t) - y(t)] \longrightarrow 0,\tag{4.32}$$

heißt das asymptotische *Modellfolgeregelungsproblem*. □

Hat das Modell den Differenzegrad  $d_p$ , der gleich oder größer als der Differenzegrad  $d$  des ALS sei:

$$d_p \geq d ,\tag{4.33}$$

dann gilt für das Modell (4.31)

$$\mathbf{c}^T \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{b} = \dots = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{d-2} \mathbf{b} u_m(t) = 0\tag{4.34}$$

Damit ist dann aber:

$$\left. \begin{aligned}\bar{y}^{(i)}(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{x}}_m(t) & ; i = 0, 1, 2, \dots, d-1 \\ \bar{y}^{(d)}(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^d \bar{\mathbf{x}}_m(t) + \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{d-1} \mathbf{b} u_m(t)\end{aligned}\right\}.\tag{4.35}$$

Die ersten  $d - 1$  Ableitungen von  $\bar{y}(t)$  hängen damit nicht explizit von  $u_m(t)$  ab, während  $\bar{y}^{(d)}(t)$  direkt von  $u_m(t)$  beeinflusst wird. Die exakte Linearisierung mit Polvorgabe für das Differenzsystem ergibt:

$$u(t) = \frac{1}{L_{\mathbf{b}}L_{\mathbf{a}}^{d-1}c(\bar{\mathbf{x}})} \left[ -L_{\mathbf{a}}^d c(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{c}^T \mathbf{A}^d \mathbf{x}_m(t) + \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{d-1} \mathbf{b} u_m(t) - \sum_{i=1}^d \alpha_{i-1} (L_{\mathbf{a}}^{i-1} c(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{x}_m(t)) \right]. \quad (4.36)$$

Entsprechend des hier vorgegebenen Konstrukts wird der Systemausgang bei geeigneter Wahl der  $\alpha_i$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots, d - 1$  sich asymptotisch  $\bar{y}(t)$  nähern. Die  $\alpha_i$  stellen hier nun die vorgebbaren Koeffizienten des gewünschten charakteristischen Polynoms für den Differenzausgang  $\bar{y} - y$  dar.

Vernachlässigt man die Terme, die den Zustandsvektor des Referenzsystems  $\mathbf{x}_m(t)$  enthalten, so zeigt sich, daß es sich hierbei um ein exakt linearisiertes System mit einer Polvorgabe handelt, wie schon weiter oben gezeigt. Damit ist es möglich, die für Mehrgrößensysteme erarbeitete Ein-/Ausgangsentkopplung auf die exakte Modellfolgeregelung zu übertragen. In diesem Fall jedoch wird ein Differenzsystem, wie Bild 4.4 es zeigt, als Ansatzpunkt gewählt. Über die Polvorgabe ist es dann möglich, die Fehlerdynamik in bestimmten Grenzen frei zu wählen. Die Wahl des Begriffes der „exakten“ Modellfolgeregelung läßt sich damit begründen, daß, ähnlich wie bei der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung, die Betrachtungen für den gesamten Zustandsraum Gültigkeit besitzen. Greift man nun auf die Standard-Entkopplungszustandsrückführung zurück, so läßt sich damit die exakte Modellfolgeregelung für Mehrgrößensysteme formulieren:

So gilt zunächst für Mehrgrößensysteme:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_m(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}_m(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}_m(t) & \bar{\mathbf{x}}_{m0} &= \mathbf{x}_m(0) \\ \bar{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_m(t) & \mathbf{x}_m &\in \mathbb{R}^{2p} \end{aligned} \right\}. \quad (4.37)$$

Das Folgeregelproblem für ein  $\mathbf{u}_m \neq 0, t \geq t_0$ , bei dem für ein Fehlersignal  $\mathbf{e}(t)$ , zwischen Systemausgang  $\mathbf{y}(t)$  und dem Modellausgang  $\bar{\mathbf{y}}(t)$ , gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\bar{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t)] \longrightarrow \mathbf{0}, \quad (4.38)$$

heißt das exakte *Modellfolgeregelungsproblem* für Mehrgrößensysteme.

Hat ein System, welches per Zustandsrückführung in ein lineares System überführt worden ist

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{r}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{V}(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}(\bar{\mathbf{x}}) \end{aligned} \right\}, \quad (4.39)$$

den Differenzengrad  $\mathbf{d}$ , so läßt sich eine für  $\bar{\mathbf{x}}_0$  lokal geltende Koordinatentransformation (Schwarz 1991) festlegen:

$$t_r^i(\bar{\mathbf{x}}) = L_{\mathbf{a}}^{r-1} c_i(\bar{\mathbf{x}}) ; \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, p \\ r = 1, 2, \dots, d_i \end{array} . \quad (4.40)$$

In den neuen Koordinaten wird das Systemverhalten so beschrieben:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{z}_1^i(t) = z_2^i \\ \vdots \\ \dot{z}_{d_i-1}^i(t) = z_{d_i}^i \\ \dot{z}_{d_i}^i(t) = f_i(\mathbf{z}) + \sum_{j=1}^m d_{ij}(\mathbf{z}) u_j(t) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, p \\ y_i(t) = z_1^i(t) \end{array} \right\} , \quad (4.41)$$

worin

$$\mathbf{z}(t) = [z_1^1, \dots, z_{d_1}^1, z_1^2, \dots, z_{d_2}^2, \dots, z_{d_p}^p]^T$$

ist. Nun gilt aber in der Nähe des Punktes  $\mathbf{z}_o = \mathbf{t}(\bar{\mathbf{x}}_0)$  und für die  $m \times p$  Matrix  $\mathbf{D}(\bar{\mathbf{x}})$  aus Gl. (4.23)

$$\text{Rang } \mathbf{D}(\mathbf{z}) = \text{Rang } \mathbf{D}(\bar{\mathbf{x}})|_{\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{t}^{-1}(\mathbf{z})} = p \quad , \quad (4.42)$$

so daß die Beziehung

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}) + \mathbf{D}(\mathbf{z})\mathbf{u}(t) \quad (4.43)$$

nach  $\mathbf{u}(t)$  aufgelöst werden kann zu:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{z}) [-\mathbf{f}(\mathbf{z}) + \mathbf{w}(t)] . \quad (4.44)$$

Die Realisierung dieses Problems für ein Mehrgrößensystem, wie es zu Beginn des Abschnittes 4 festgelegt worden ist, wird im folgenden beschrieben.

Das existierende quadratisch approximiertes Modell des Systems in der Standardform eines ALS (Gleichung (4.15)) wird um das Referenzmodell erweitert, welche damit das Zustandsmodell um drei PT<sub>2</sub>-Systeme mit der Verstärkung  $K = 1$  vergrößern. Als Referenzmodell können alle dynamischen Systeme genutzt werden, selbst nichtlineare Modelle sind denkbar. Da jedoch die Differenzengrade des betrachteten Systems zwei werden, muß auch das dynamische Referenzsystem einen Differenzengrad von mindestens zwei besitzen. Außerdem muß die Steuerung in das Modell der Regelstrecke linear eingehen, da sonst später keine eindeutige Lösung zu finden ist. Definiert man zunächst den neuen Zustandsvektor

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = [\bar{\mathbf{x}}^T, \mathbf{x}_m^T]^T , \quad (4.45)$$

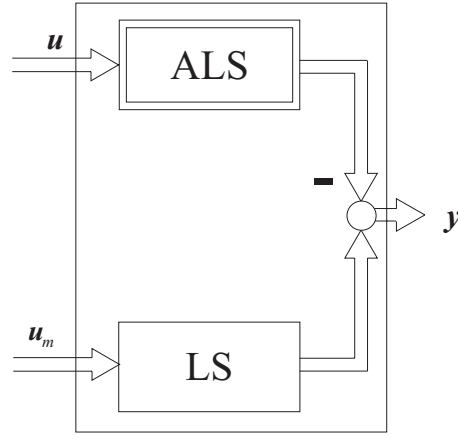


Bild 4.4: Ausgangssystem der Modellfolgeregelung

mit dem Zustandsvektor des Referenzmodells

$$\mathbf{x}_m(t) = [x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}]^T, \quad (4.46)$$

so läßt sich das Zustandsmodell darstellen als:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) \\ x_8 \\ -\frac{(T_a+T_b)}{T_a T_b} x_8(t) - \frac{1}{T_a T_b} (x_7(t) - u_{m1}(t)) \\ x_{10} \\ -\frac{(T_c+T_d)}{T_c T_d} x_{10}(t) - \frac{1}{T_c T_d} (x_9(t) - u_{m2}(t)) \\ x_{12} \\ -\frac{(T_e+T_f)}{T_e T_f} x_{12}(t) - \frac{1}{T_e T_f} (x_{11}(t) - u_{m3}(t)) \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^p \tilde{\mathbf{b}}_i(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_m(t)) u_i(t) \quad (4.47)$$

$$\Delta \mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{c}}(\tilde{\mathbf{x}}(t)) = [\tilde{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t)] = \begin{bmatrix} x_8(t) - x_1(t) \\ x_{10}(t) - x_2(t) \\ x_{12}(t) - x_3(t) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^{12}, \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^3 \quad (4.48)$$

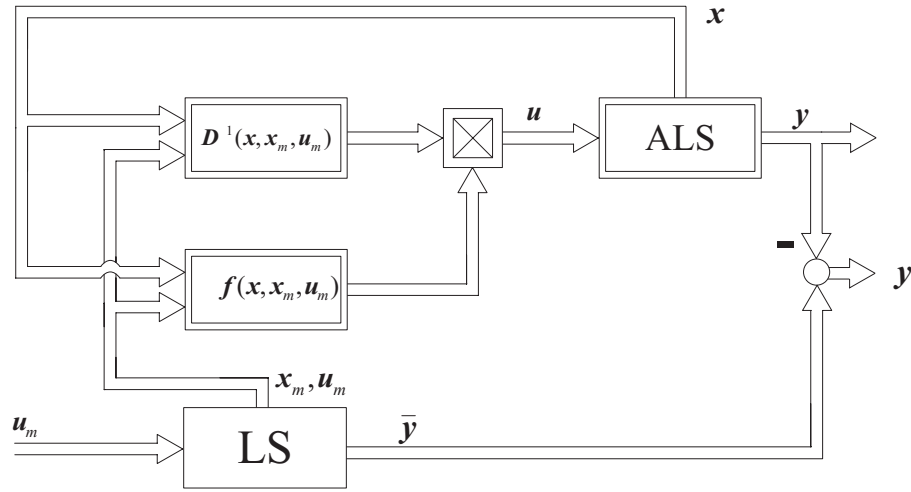
oder

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{x}}(t)) + \sum_{i=1}^p \tilde{\mathbf{b}}_i(\tilde{\mathbf{x}}(t)) u_{i,m}(t) \quad (4.49)$$

$$\Delta \mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{c}}(\tilde{\mathbf{x}}(t)). \quad (4.50)$$

Hier müssen die Spaltenvektoren  $\mathbf{b}_i(\bar{\mathbf{x}})$  entsprechend erweitert werden auf  $\tilde{\mathbf{b}}_i(\bar{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R}^{12}$ . Die Solltrajektorie wird durch die Werte von  $\mathbf{u}_m(t)$  vorgegeben.  $\Delta \mathbf{y}(t)$  wird auch der Modellfolgefehler genannt. In Bild 4.5 werden Gleichungen (4.47) bzw. (4.49) verdeutlicht.





**Bild 4.5:** Modellfolgeregelung ohne Polvorgabe

Die in Gleichung (4.47) erscheinenden Zeitkonstanten  $T_a$  bis  $T_f$  sind die Zeitkonstanten, welche für die Dynamik der linearen Referenzsysteme (hier  $PT_2$ ) frei zu wählen sind. In Abbildung 4.6 sind die entsprechenden Zusammenhänge der gekoppelten Differentialgleichungen 1. Ordnung zu erkennen. Für jeden linearen Kanal wird ein gewünschtes charakteristisches Polynom mit den entsprechenden Zeitkonstanten festgelegt

Gilt weiterhin

$$\Delta \ddot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{w}(t) \equiv \mathbf{0} , \quad (4.51)$$

und substituiert man  $\mathbf{w} \equiv \mathbf{0}$  in Gleichung (4.44), so erhält man mit  $\mathbf{u}(t)$  die gesuchte Rückführung. Es ergibt sich für die ursprünglichen Koordinaten:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{D}^{-1}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_m, \mathbf{u}_m) [-\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_m, \mathbf{u}_m) + \mathbf{0}] . \quad (4.52)$$

In Bild 4.5 ist die Zusammenstellung der Gleichung (4.52) als Blockschaltbild zu sehen. Führt man auch hier die Ausgänge  $\Delta \mathbf{y}(t)$  und deren Ableitungen  $\Delta \dot{\mathbf{y}}(t)$  zurück, so kann erzwungen werden, daß die Fehler zwischen dem Modell bzw. der realen Strecke und dem Referenzmodell mit einer vorgegebenen Dynamik gegen Null gehen. Ein entsprechendes Blockschaltbild ist in Bild 4.7 zu erkennen. Hier werden allerdings, der Übersichtlichkeit willen, nur die Größen des Vektors  $\Delta \mathbf{y}$  dargestellt.

Für die Dynamik des Modellfolgefehlers ergibt sich:

$$\Delta \ddot{\mathbf{y}}^*(t) = \Delta \ddot{\mathbf{y}}(t) - \begin{bmatrix} \gamma_{s_1} \Delta \dot{y}_1(t) + \gamma_{s_2} \Delta y_1(t) \\ \gamma_{s_3} \Delta \dot{y}_2(t) + \gamma_{s_4} \Delta y_2(t) \\ \gamma_{s_5} \Delta \dot{y}_3(t) + \gamma_{s_6} \Delta y_3(t) \end{bmatrix} \equiv \mathbf{0} \quad (4.53)$$

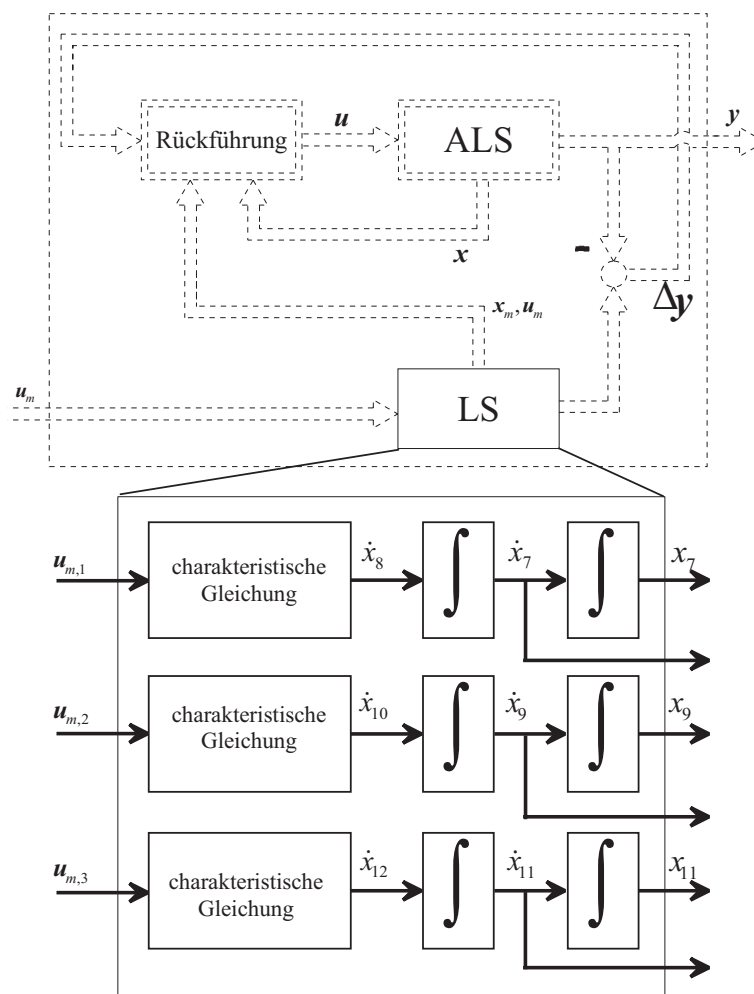


Bild 4.6: Lineare Referenzsysteme der Modellfolgeregelung

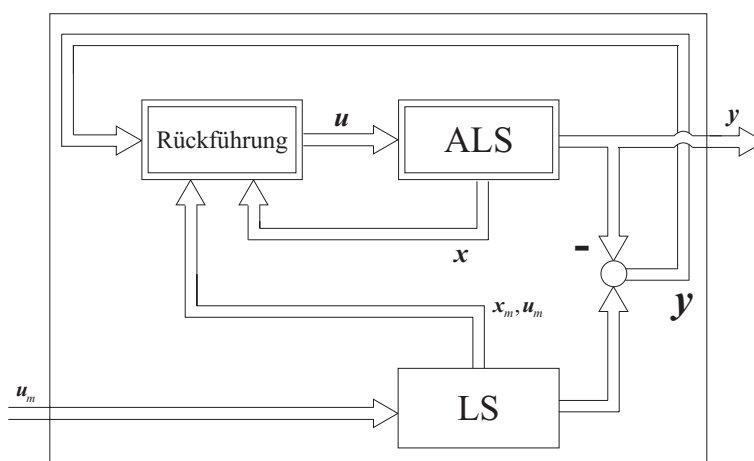


Bild 4.7: Modellfolgeregelung mit Polvorgabe

Alle Konstanten  $\gamma_{s_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ , sind frei wählbar, so daß sich die gewünschten charakteristischen Polynome für die Modellfolgefehlerdynamik ergeben. Das dynamische Verhalten des Referenzsystems wird ähnlich „schnell“ gewählt, wie das Verhalten des physikalischen Modells bzw. das der realen Strecke. Löst man nun Gleichung (4.53) nach den Stellgrößen  $\mathbf{u}$  auf, so erhält man das gesuchte Regelgesetz bzw. die Stellgrößen  $[u_1, u_2, u_3]$ .

### 4.2.3 Implementierung des nichtlinearen Reglers in MÖBILE

Ausgehend von einem approximierten Modell des Versuchsträgers, bestehend aus den Systemmatrizen  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{B}_1$  und  $\mathbf{B}_2$ , soll in diesem Abschnitt der weiter oben beschriebene entkoppelnde Regler implementiert werden. Für den betrachteten Fall ist es notwendig, die Untersuchungen des Kapitels 4.2.2 so weit wie möglich zu vereinfachen, um die nötigen numerischen Berechnungen zu minimieren. Dabei gilt es, eine Vorschrift, wie sie mit Gleichung (4.53) vorgestellt wurde, in der Art zu entwickeln, daß sich der benutzerdefinierte Kraftvektor berechnen läßt. Betrachtet man Gleichung (4.53), so lassen sich beispielsweise die zuvor gebildeten Ableitungen des Ausgangsvektors relativ einfach bestimmen.

Definiert man zunächst

$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{x}}) + \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}})\mathbf{u}_m, \quad \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R}^{12}, \quad (4.54)$$

so ergeben sich die Ableitungen des Differenzenvektor  $\Delta\mathbf{y}$  nach der Zeit zu:

$$\Delta\dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\tilde{\mathbf{x}}}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\tilde{\mathbf{x}}}\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (4.55)$$

und

$$\Delta\ddot{\mathbf{y}} = \frac{\partial\Delta\dot{\mathbf{y}}}{\partial\tilde{\mathbf{x}}}\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}). \quad (4.56)$$

Für die betrachteten Gleichungen ergibt sich :

$$\Delta\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} x_4 - x_8 \\ x_5 - x_{10} \\ x_6 - x_{12} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

und

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{\mathbf{y}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) \\ &= \begin{bmatrix} f_4 - \frac{(T_a+T_b)}{T_aT_b}x_8 + \frac{x_7-u_{m,1}}{T_aT_b} \\ f_5 - \frac{(T_c+T_d)}{T_cT_d}x_{10} + \frac{x_9-u_{m,2}}{T_cT_d} \\ f_6 - \frac{(T_e+T_f)}{T_eT_f}x_{12} + \frac{x_{11}-u_{m,3}}{T_eT_f} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Die charakteristischen Gleichungen zur Festlegung der Fehlerdynamik (siehe Gl. 4.53) ergeben sich zu:

$$\Delta \ddot{\mathbf{y}}^*(t) = \Delta \dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{\Gamma}_\alpha \Delta \dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{\Gamma}_\beta \Delta \mathbf{y}(t), \quad (4.59)$$

mit

$$\mathbf{\Gamma}_\alpha = \begin{bmatrix} \gamma_{s1} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{s3} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{s5} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

und

$$\mathbf{\Gamma}_\beta = \begin{bmatrix} \gamma_{s2} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{s4} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{s6} \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

Betrachtet man weiterhin den erweiterten Driftterm  $\tilde{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{x}})$  bzw. die Eingangsmatrix  $\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}})$ , so erkennt man, daß sich das System in Gleichung (4.59) zu einem einfacheren System reduzieren läßt. Zunächst gelten:

$$f_4 = \tilde{a}_4(\tilde{\mathbf{x}}) + \tilde{\mathbf{b}}_4^T \mathbf{u} \quad (4.62)$$

$$f_5 = \tilde{a}_5(\tilde{\mathbf{x}}) + \tilde{\mathbf{b}}_5^T \mathbf{u} \quad (4.63)$$

$$f_6 = \tilde{a}_6(\tilde{\mathbf{x}}) + \tilde{\mathbf{b}}_6^T \mathbf{u} \quad (4.64)$$

mit den besetzten Zeilenvektoren aus der Eingangsmatrix  $\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}})$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{red} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_4^T \\ \tilde{\mathbf{b}}_5^T \\ \tilde{\mathbf{b}}_6^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} \\ b_{5,1} & b_{5,2} & b_{5,3} \\ b_{6,1} & b_{6,2} & b_{6,3} \end{bmatrix}. \quad (4.65)$$

Damit ergibt sich für die Dynamik des Modellfolgefehlers folgende Gleichung:

$$\Delta \dot{\mathbf{y}}^*(t) = \begin{bmatrix} a_4(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{b}}_4^T \mathbf{u} + \frac{(T_a + T_b)}{T_a T_b} x_8 + \frac{x_7 - u_{m,1}}{T_a T_b} - \gamma_{s1}(x_4 - x_8) - \gamma_{s2}(x_1 - x_7) \\ a_5(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{b}}_5^T \mathbf{u} + \frac{(T_c + T_d)}{T_c T_d} x_{10} + \frac{x_9 - u_{m,2}}{T_c T_d} - \gamma_{s3}(x_5 - x_{10}) - \gamma_{s4}(x_2 - x_9) \\ a_6(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{b}}_6^T \mathbf{u} + \frac{(T_e + T_f)}{T_e T_f} x_{12} + \frac{x_{11} - u_{m,3}}{T_e T_f} - \gamma_{s5}(x_6 - x_{12}) - \gamma_{s6}(x_3 - x_{11}) \end{bmatrix} \equiv \mathbf{0}. \quad (4.66)$$

Es seien abkürzend eingeführt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{(T_a + T_b)}{T_a T_b} &= c_1 & ; & & \frac{1}{T_a T_b} &= c_2 \\ \frac{(T_c + T_d)}{T_c T_d} &= c_3 & ; & & \frac{1}{T_c T_d} &= c_4 \\ \frac{(T_e + T_f)}{T_e T_f} &= c_5 & ; & & \frac{1}{T_e T_f} &= c_6. \end{aligned} \right\} \quad (4.67)$$

Gleichungssystem (4.66) läßt sich umstellen zu:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} \\ b_{5,1} & b_{5,2} & b_{5,3} \\ b_{6,1} & b_{6,2} & b_{6,3} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \\ & + \begin{bmatrix} a_4(\mathbf{x}) + c_1 x_8 + \frac{x_7 - u_{m,1}}{c_2} - \gamma_{s1}(x_4 - x_8) - \gamma_{s2}(x_1 - x_7) \\ a_5(\mathbf{x}) + c_3 x_{10} + \frac{x_9 - u_{m,2}}{c_4} - \gamma_{s3}(x_5 - x_{10}) - \gamma_{s4}(x_2 - x_9) \\ a_6(\mathbf{x}) + c_5 x_{12} + \frac{x_{11} - u_{m,3}}{c_6} - \gamma_{s5}(x_6 - x_{12}) - \gamma_{s6}(x_3 - x_{11}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Damit ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten und drei Gleichungen, welches sich eindeutig lösen läßt:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} \\ b_{5,1} & b_{5,2} & b_{5,3} \\ b_{6,1} & b_{6,2} & b_{6,3} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \\ & \cdot (-1) \cdot \begin{bmatrix} a_4(\mathbf{x}) + c_1 x_8 + \frac{x_7 - u_{m,1}}{c_2} - \gamma_{s1}(x_4 - x_8) - \gamma_{s2}(x_1 - x_7) \\ a_5(\mathbf{x}) + c_3 x_{10} + \frac{x_9 - u_{m,2}}{c_4} - \gamma_{s3}(x_5 - x_{10}) - \gamma_{s4}(x_2 - x_9) \\ a_6(\mathbf{x}) + c_5 x_{12} + \frac{x_{11} - u_{m,3}}{c_6} - \gamma_{s5}(x_6 - x_{12}) - \gamma_{s6}(x_3 - x_{11}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

An diesem Punkt wird deutlich, warum die Steuerung linear in die Beschreibung der Regelstrecke eingehen muß. Wäre dies nicht der Fall, ließe sich Gleichungssystem (4.69) nicht eindeutig lösen. Damit ist die Berechnung des Regelungsgesetzes abgeschlossen, die Stellgrößen stehen bzw. der benutzerdefinierte Kraftvektor  $[u_S, u_A, u_B]^T = [u_1, u_2, u_3]^T$  steht zur Verfügung.

Die Größen des Referenzmodelleingangs  $\mathbf{u}_m$  sind die von der Trajektorienplanung berechneten Werte für die Positionen der prismatischen Gelenke. Da für die Dynamik der einzelnen Kanäle – Kraft am prismatischen Gelenk als Eingang und Position des Schubgelenks als Ausgang – lineare Systeme vorgegeben wurden, kann hier die Position der Schubgelenke direkt als Sollwert vorgegeben werden. Die Größen des linearen, dynamischen Referenzsystems werden von einem während der Simulation mitlaufenden Zustandsmodell generiert. Bei diesem Modell handelt es sich um 6 gekoppelte Differentialgleichungen 1. Ordnung, welche im MOBILE-Kontext integriert werden.

Ein wichtiger Aspekt ist die Bestimmung der Zeitkonstanten der linearen Referenzsysteme und der Verstärkungen der charakteristischen Gleichungen der Modellfolgefehler. Die Größe der Zeitkonstanten richtet sich in erster Linie nach den maximal vom System erreichbaren und sekundär nach den von der Bahnplanung geforderten maximalen

Geschwindigkeiten. Es lassen sich für einzelne prismatische Gelenke (bzw. ideale Aktuatoren) Positionsverläufe aufzeichnen für eine sprungförmige Veränderung der Stellgrößen bzw. Kräfte. Anhand der maximalen Änderungsrate der Positionen lassen sich die maximal mit diesem System realisierbaren Geschwindigkeiten bestimmen. Im betrachteten Fall eines simulierten Systems ist eine solche Vorgehensweise weniger relevant. Daher wurden die Zeitkonstanten ebenso wie die Verstärkungen der charakteristischen Gleichungen der Modellfolgefehler empirisch bestimmt. Es läßt sich jedoch generell sagen, dass das dynamische Verhalten des ersten Aktuators in der Kette langsamer gewählt wird, als die der folgenden Aktuatoren. Die schnellste Dynamik hat das letzte Glied in der Kette. Eine ähnliche Tendenz läßt sich bei der Betrachtung der Verstärkungsfaktoren der charakteristischen Gleichungen des Modellfolgefehlers erkennen. Hier werden die Faktoren für die Verstärkungen für die letzten Glieder größer gewählt.

## 5 Simulationsergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse vorgestellt, die sich für den dreiachsigen Manipulator beim Abfahren der in (Büdding u. a. 1999) vorgestellten Trajektorien in der Simulation ergeben. In der Simulation wurden beide Regler, linearer und nichtlinearer, eingesetzt. In allen Simulationsläufen wurden für den linearen Regler die in Tabelle 5.1 angegebenen Verstärkungskoeffizienten verwendet. Ebenfalls in allen Simulationsläufen wurden für den nichtlinearen Regler die in Tabelle 5.2 aufgeführten Zeitkonstanten und die in Tabelle 5.3 aufgeführten Verstärkungskoeffizienten gewählt.

$k_{p,1}[-]$	$k_{p,2}[-]$	$k_{p,3}[-]$	$k_{p,4}[-]$	$k_{p,5}[-]$	$k_{p,6}[-]$
100.0	100.0	1000.0	20.0	500.0	20.0

**Tabelle 5.1:** Verstärkungskoeffizienten für den linearen Regler

$T_a[s]$	$T_b[s]$	$T_c[s]$	$T_d[s]$	$T_e[s]$	$T_f[s]$
0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02

**Tabelle 5.2:** Zeitkonstanten für den nichtlinearen Regler

$\gamma_{s1}[-]$	$\gamma_{s2}[-]$	$\gamma_{s3}[-]$	$\gamma_{s4}[-]$	$\gamma_{s5}[-]$	$\gamma_{s6}[-]$
-80.0	-200.0	-100.0	-300.0	-80.0	-1000.0

**Tabelle 5.3:** Verstärkungskoeffizienten für den nichtlinearen Regler

Es wurde ein Simulationslauf durchgeführt, wobei sich der Endeffektor auf einer Kreisbahn im Raum mit einem rampenförmigen Geschwindigkeitsprofil bewegt.

Zur Simulation der Bewegung des TCP auf Kreisbahnen wird der Arbeitspunkt, dessen Zahlenwerte in Tabelle 5.4 aufgeführt sind, verwendet. Der in Tabelle 5.4 aufgeführte Vektor  $\mathbf{r}_{Km}$ , der dem Ortsvektor zum TCP für den Arbeitspunkt entspricht, ist gleichzeitig der Ortsvektor zu den Kreismittelpunkten.

Verschiebeweg	[m]	Gelenkwinkel	[°]	$\mathbf{r}_{Km}$	[m]	Stellkraft	[kN]
$s_S^0$	-0.1	$\phi_S^0$	54.0	$r_{Kmx}$	0.72	$u_S^0$	0.0
$s_A^0$	-0.1	$\phi_A^0$	37.3	$r_{Kmy}$	0.4	$u_A^0$	0.817
$s_B^0$	-0.13	$\phi_B^0$	-105.1	$r_{K mz}$	-0.99	$u_B^0$	0.374

**Tabelle 5.4:** Arbeitspunkt für das Abfahren der Kreise

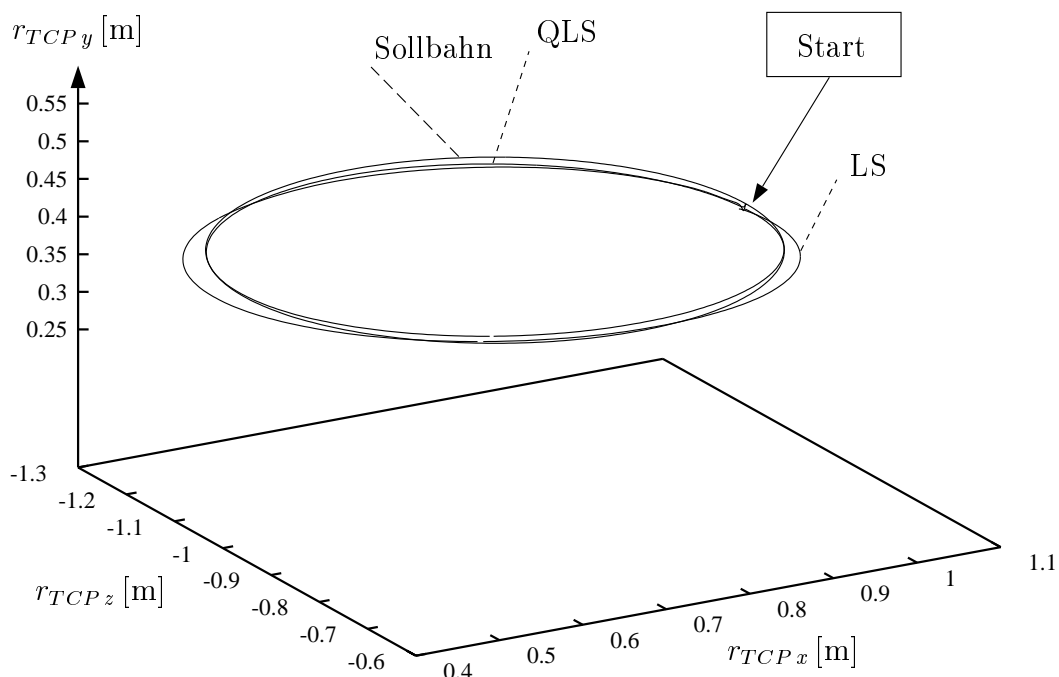
### Rampenförmiges Geschwindigkeitsprofil

Für das rampenförmige Geschwindigkeitsprofil sind in Tabelle 5.5 die Kenngrößen des zugehörigen Kreises aufgeführt. Der resultierende Kreis befindet sich in einer Ebene, parallel zur  $x$ - $z$ -Ebene des Inertialsystems.

Startpkt.	[m]	N.-vekt.	[m]	B.-gesch.	[m/s]	B.-beschl.	[m/s <sup>2</sup> ]	Zeit	[s]
$r_{TCPx}$	1.02	$r_{nx}$	0.72	$v_{max}$	1.0	$a_{max}$	1.0	$t_e$	2.69
$r_{TCPy}$	0.4	$r_{ny}$	1.4						
$r_{TCPz}$	-0.99	$r_{nz}$	-0.99						

**Tabelle 5.5:** Kenngrößen des Kreises mit rampenförmigem Geschwindigkeitsprofil

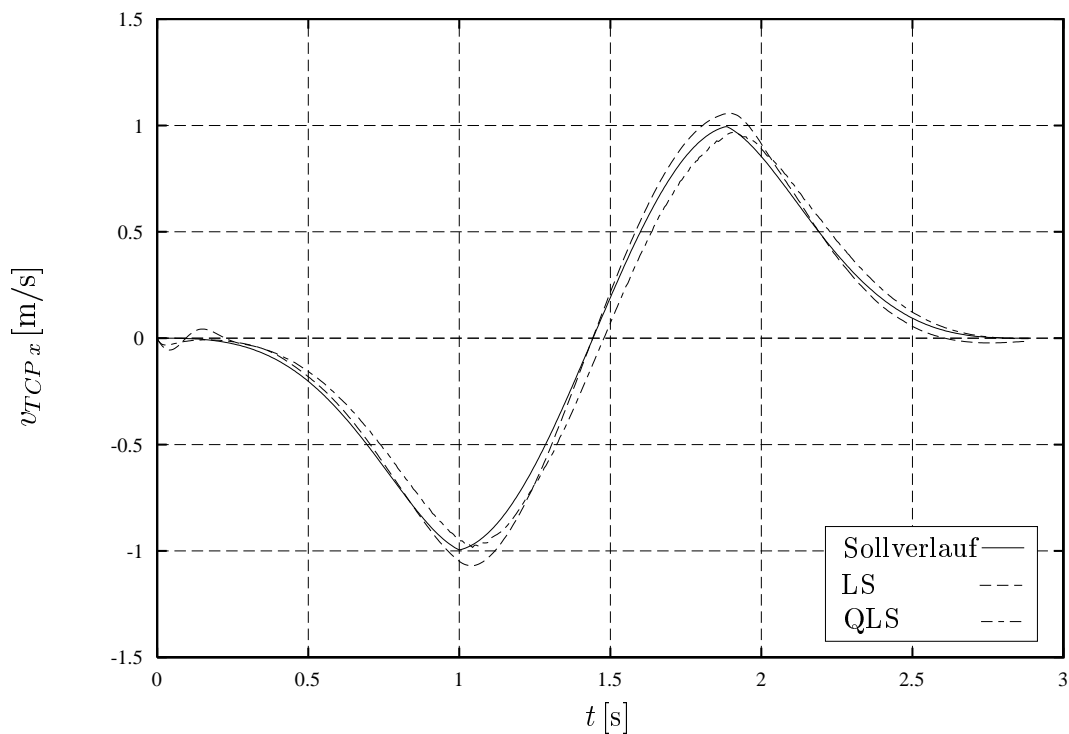
In Abbildung 5.1 ist der Verlauf des TCP im Raum beim Abfahren des Kreises mit rampenförmigem Geschwindigkeitsprofil zu sehen. Auch hier zeigt die Kreisbahn des nicht-linearen Reglers eine bessere Übereinstimmung mit der Solltrajektorie als der lineare Regler.



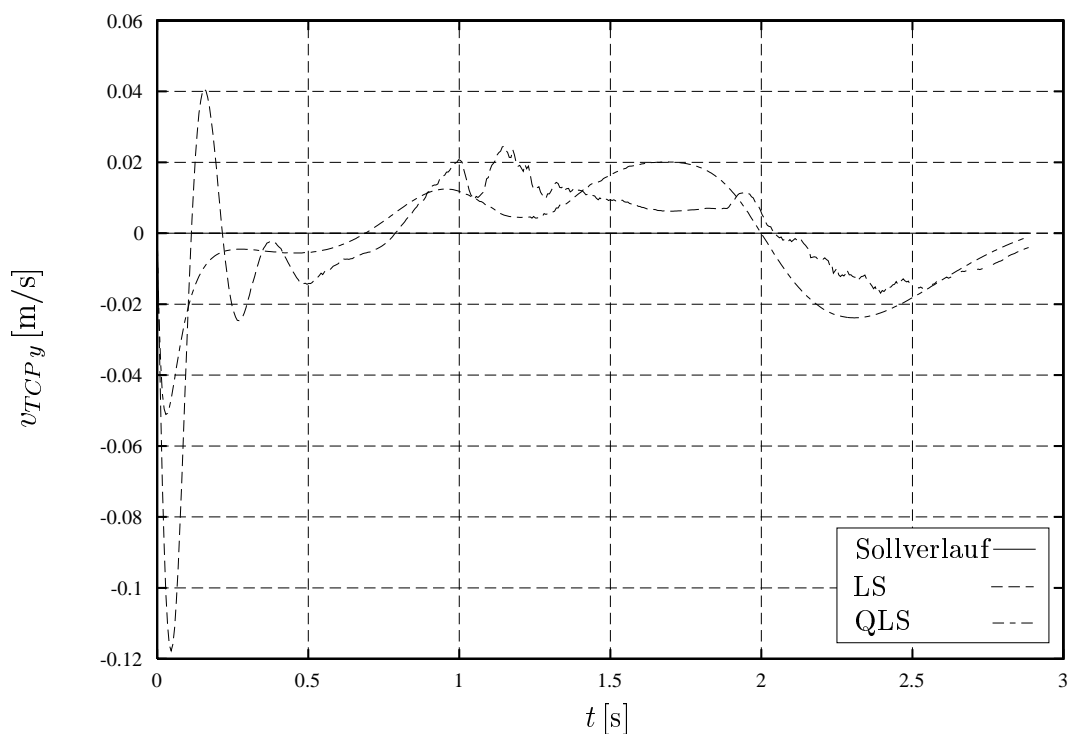
**Bild 5.1:** Verläufe des TCP im Raum beim Abfahren eines Kreises mit rampenförmigem Geschwindigkeitsprofil für verschiedene Regler

Die Geschwindigkeitsverläufe beim Abfahren der Kreisbahn sind in den Abbildungen 5.2, 5.3 und 5.4 dargestellt.

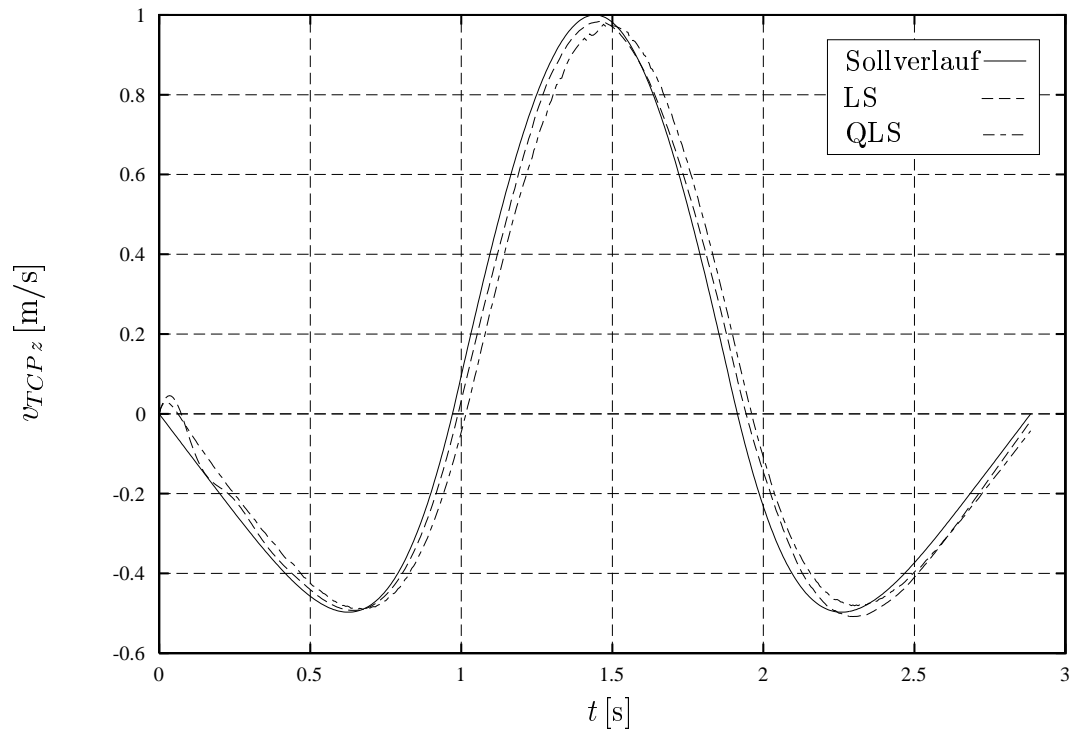




**Bild 5.2:** Verlauf von  $v_{TCP_x}$  beim Abfahren eines Kreises mit rampenförmigem Geschwindigkeitsprofil für verschiedene Regler



**Bild 5.3:** Verlauf von  $v_{TCP_y}$  beim Abfahren eines Kreises mit rampenförmigem Geschwindigkeitsprofil für verschiedene Regler



**Bild 5.4:** Verlauf von  $v_{TCP_z}$  beim Abfahren eines Kreises mit rampenförmigem Geschwindigkeitsprofil für verschiedene Regler

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Komplexe Manipulationsaufgaben erfordern Handhabungssysteme, die häufig durch eine komplexe Topologie charakterisiert sind. Dies wiederum setzt ebenso aufwendige Regelungsstrategien voraus, welche es ermöglichen, das Handhabungssystem nach Belieben im Arbeitsbereich zu bewegen. Ziel dieses Berichtes ist es, verschiedene Konzepte zu diesem Zweck vorzustellen. Als Beispielsystem wird der Roboter HyRob des Fachgebietes Meß-, Steuer- und Regelungstechnik betrachtet. Bei diesem System handelt es sich um einen dreiachsigen Manipulator. Zu diesem System wird ein nichtlineares Simulationsmodell entwickelt, das die Kinematik und Dynamik des realen Systems beschreibt. Es wird vereinfachend angenommen, dass dieses System starr ist und die eingesetzten Aktuatoren ideal sind. Die Bewegungsgleichungen des Manipulators werden automatisch in symbolischer Form mit dem Programm SYMKIN generiert. Als Simulationsumgebung für den gesamten Regelkreis dient das Mehrkörpersimulationsprogramm M□BILE des Fachgebietes Mechatronik. Desweiteren werden auf der Grundlage der symbolischen Gleichungen Approximationen in Form von Zustandsmodellen (LS, QLS) erzeugt, welche als Basis zur Synthese eines modellbasierten Reglers dienen. Im Rahmen dieses Berichtes wird der Aufbau des gesamten Regelkreises in M□BILE vorgestellt.

Da es sich um einen mehrachsigen Manipulator mit drei Aktuatoren und damit um ein Mehrgrößensystem handelt, ist es notwendig, aufwendige Regelungskonzepte heranzuziehen. Im Rahmen dieses Berichtes werden ein linearer und ein nichtlinearer modellbasierter Ansatz vorgestellt. Beide nutzen als Grundlage die Möglichkeit, durch die Wahl einer geeigneten Rückführung der Mess- bzw. Zustandsgrößen des Systems die Wirkungskette Aktuatorkraft – Zylinderposition für jeden Zylinder zu entkoppeln (Ein-/Ausgangsentkopplung), d. h. dass die jeweilige Stellgröße (hier Aktuatorkraft) nur die eine zugehörige Regelgröße (hier Zylinderposition) beeinflusst. Zur Bestimmung der dazu benötigten Rückführung werden die zuvor erwähnten linearen bzw. nichtlinearen Approximationsmodelle genutzt. Im Falle des linearen Regelgesetzes werden die entkoppelten Ein-/Ausgangskanäle (drei Integratorketten) mittels eines PD-Reglers geregelt. Der nichtlineare Ansatz entkoppelt nicht die Ein-/Ausgangskanäle des Manipulators selbst, sondern die Differenz zwischen diesem und drei linearen Referenzsystemen. Durch die Vorgabe der Dynamik der Referenzsysteme (hier  $PT_2$ -Verhalten) und der Dynamik des Fehlers zwischen dem Modell und den Referenzsystemen (Modellfolgefehler) läßt sich das Verhalten fast beliebig festlegen. Eingeschränkt wird die Wahl der Parameter nur durch die Kenngrößen der Bahnplanung (maximale Geschwindigkeiten und Beschleunigungen) und die Schnelligkeit der Dynamik des zu regelnden Systems.

Im Vergleich zwischen beiden Konzepten zeigt sich zunächst, dass sich beide modellbasierten Ansätze zur Regelung des simulierten Manipulators HyRob eignen. Beide liefern akzeptable Ergebnisse, wobei zu bemerken ist, dass beide Regler gut, jedoch nicht opti-

mal eingestellt sind. Tendenziell ist zu erkennen, dass das nichtlineare Konzept bessere Ergebnisse zeigt. Es sei hier erwähnt, dass das System bei Verwendung des nichtlinearen Konzeptes weniger zum Schwingen neigt und auch von den Rückführungen kleinere Stellgrößen (bzw. Kräfte) ausgegeben werden.

In zukünftigen Arbeiten kann man z. B. zunächst die hier als ideal betrachteten Aktuatoren durch wirklichkeitsnähere dynamische Systeme ersetzen. Hier wäre es dann auch vonnöten, eine entsprechende Kraftregelung der Aktuatoren zu realisieren. Ein wichtiger Teilaspekt des Manipulators – seine Elastizität – wurde vernachlässigt. Es sind jedoch für die Simulationsumgebung MÖBILE entsprechende Objekte vorhanden, die es ermöglichen, die elastischen Glieder des Manipulators nachzubilden. Damit wäre jedoch auch der Entwurf eines neuen Reglers notwendig. Wie weiter oben erwähnt, ist die Bahnplanung auf Geraden und Kreise im Raum beschränkt. Hier kann das Simulationsprogramm auf komplexere Bahnen erweitert werden<sup>2</sup>. Außerdem wirft die Betrachtung elastischer Glieder das Problem einer nicht mehr eindeutigen Bahnplanung auf. So wird die Dynamik des Systems um eine nichtbeobachtbare Nulldynamik erweitert. Ist diese Nulldynamik instabil, so lassen sich die einzelnen Kanäle nicht mehr entkoppeln.

---

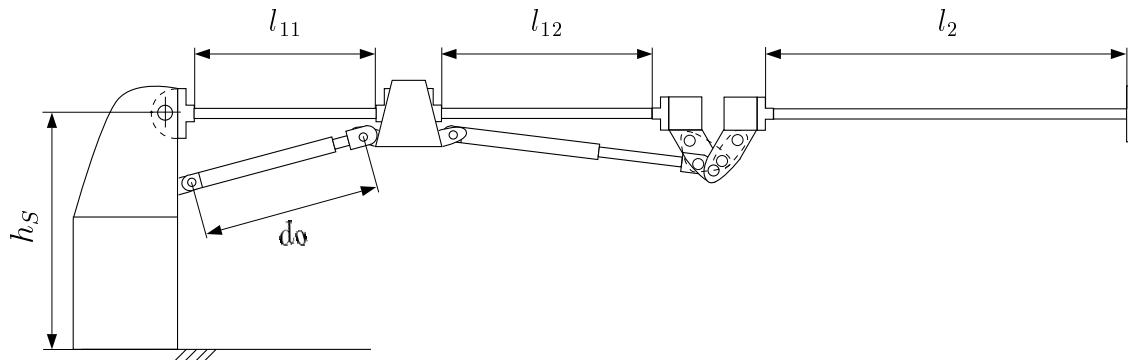
<sup>2</sup> z. B. „continous-path“-Planung

## 7 Literatur

- Bernzen, W.** 1995. *Der Versuchsträger: hydraulisch angetriebener elastischer Roboter*. Forschungsbericht 21/95. Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik. Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg.
- Büdding, G., B. Riege und T. Scholt.** 1999. *Simulation modellbasierter Regelungskonzepte für einen dreiachsigen Manipulator mit komplexer kinematischer Topologie*. IB 99-1. Fachgebiet Mechatronik. Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg.
- Büdding, G. und Hiller, M.** 1998. Nichtlineare Approximation mechanischer Modelle mit elastischen Elementen. *GAMM Jahrestagung in Bremen*. Wird veröffentlicht in der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik.
- Hiller, M. und A. Kecskeméthy.** 1989. Equations of motion of complex multibody systems using kinematical differentials. *Transactions of the Canadian Society of Mechanical Engineers* 13(4). 113–121.
- Jelali, M.** 1997. *Über die nichtlineare Approximation und Zustandsschätzung zeitkontinuierlicher dynamischer Prozesse*. Reihe 8. number 636 in Reihe 8. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Kecskeméthy, A., T. Krupp und M. Hiller.** 1997. Automated Symbolic Processing of the Dynamics of Multiple-Loop Mechanisms Using Closed-Form Solutions of the Kinematics. *Multibody System Dynamics* 1(1). 23–45.
- Krupp, T.** 1998. *Symbolische Gleichungen für Mehrkörpersysteme mit kinematischen Schleifen*. Dissertation. Gerhard-Mercator-Universität - GH - Duisburg.
- Riege, B. und M. Arteaga Perez.** 1998. *A Simple Robust Control Approach for a Robot with Hydraulic Drives*. Proceedings. IFAC Workshop on Motion Control. Grenoble, Frankreich.
- Sand, C.** 1995. *Entwurf und Konstruktion eines hydraulisch angetriebenen 3achsigen elastischen Manipulators*. Studienarbeit. Fachgebiet Mechatronik, Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik, Gerhard-Mercator-Universität – GH Duisburg.
- Scholt, T.** 1998. *Strukturuntersuchung und Regelung eines zweiachsigen elastischen Roboters*. Diplomarbeit. Meß-, Steuer- und Regelungstechnik. Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme - Systemtheoretische Grundlagen*. München: Oldenbourg.
- Svaricek, F.** 1995. *Zuverlässige numerische Analyse linearer Regelungssysteme*. Stuttgart: B. G. Teubner.

**Wolfram, S.** 1988. *Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer*. Berkeley: Addison-Wesley Publishing Company.

## A Konstruktive Daten des Versuchsträgers



**Bild A.1:** Skizze des Versuchsträgers

### Basis (Säule)

Höhe (Abstand Fundament-Drehgelenk Arm 1)  $h_S = 384$  mm  
 Masse  $m_S = 16,22$  kg

### Arm 1

1. Segment Länge  $l_{11} = 412$  mm  
 Masse  $m_{11} = 0,464$  kg

2. Segment Länge  $l_{12} = 445$  mm  
 Masse  $m_{12} = 0,536$  kg

### Arm 2

Segment Länge  $l_2 = 510$  mm  
 Masse  $m_2 = 0,614$  kg

### Hydrostatische Antriebe

Für die Antriebseinheiten der beiden Arme werden Differentialzylinder der Firma Mannesmann Rexroth, Typ CD 160 B25/18-200 Z1X/01 HHDMT, bzw. für die Säule ein Differentialzylinder vom Typ CD 250 B25/18-200 Z1X/01 HHDMT verwendet.

eingefahrene Zylinderlänge	$d_0 = 372 \text{ mm}$
Hub	$h = 200 \text{ mm}$ bzw. $h = 250 \text{ mm}$
Masse	$m_H = 2,5 \text{ kg}$

Alle weiteren Konstruktionsdaten für die Simulation, d. h. die geometrischen Abmessungen, die Massen und Trägheitsparameter der einzelnen Bauteile des Manipulators sind den mit der Software ACAD 12 erstellten Konstruktionszeichnungen (Sand 1995) entnommen.

## B Mathematische Erläuterungen

### Lie-Klammer

Die Lie-Klammer, die Ableitung eines Vektorfeldes  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  entlang des Vektorfeldes  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ , mit  $\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{b}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  berechnet sich nach (Schwarz 1991) zu

$$\text{ad}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}(\mathbf{x}) = [\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{b}(\mathbf{x})] = \mathbf{b}\mathbf{x}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}\mathbf{x}(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.1})$$

mit

$$\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Das Ergebnis der Lie-Klammer ist dann wieder ein Vektorfeld der Dimension  $n$ .

### Lie-Ableitung eines Kovektorfeldes entlang eines Vektorfeldes

Die Lie-Ableitung eines Kovektorfeldes  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})$  entlang eines Vektorfeldes  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  mit

$$\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) = [\kappa_1(\mathbf{x}), \dots, \kappa_n(\mathbf{x})] \quad (\text{B.3})$$

ist (Schwarz 1991) definiert zu

$$L_{\mathbf{f}}^*\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{B.4})$$

Das Ergebnis ist wieder ein Kovektorfeld.

### Kronecker-Produkt-Notation



Für zwei Vektoren  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$  und  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = [a_1 \mathbf{b}^T, a_2 \mathbf{b}^T, \dots, a_m \mathbf{b}^T]^T \in \mathbb{R}^{nm}. \quad (\text{B.5})$$

Für einen Vektor  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$  gilt:

$$\mathbf{a}^{(i)} = \underbrace{\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \otimes \dots \otimes \mathbf{a}}_{i\text{-mal}}. \quad (\text{B.6})$$