Differentialalgebraischer Nulldynamikalgorithmus für Systeme mit rationalen Funktionen

Jan Polzer

Forschungsbericht Nr. 2/99

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Die Nulldynamik stellt bei der Untersuchung dynamischer Systeme eine wichtige Systemkenngröße dar. Eine stabile Nulldynamik ist z. B. Voraussetzung für viele, insbesondere nichtlineare Regelungskonzepte. Um Aussagen über die Nulldynamik treffen zu können, muß sie bekannt sein. Dieser Bericht stellt einen differentialalgebraischen Algorithmus vor, mit dem sich die Nulldynamik eines analytischen Systems mit linear eingehender Steuerung bestimmen läßt. Zur Systembeschreibung sind allerdings nur rationale Funktionen zugelassen. Enthält das Zustandsmodell auch nichtrationale Funktionen, ist die Bestimmung eines Ersatzsystems erforderlich, welches dann statt dessen den Gegenstand der Analyse bildet. Diese Ersatzsysteme lassen sich mit einem Algorithmus berechnen.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur

Abkürzungen

ALS	Analytisches System mit linear eingehender Steuerung
AS	Analytisches System
CAS	Computer-Algebra-System

Skalare und vektorwertige Größen

$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$	Drift eines ALS (Vektorfeld)
$a(\boldsymbol{x})$	Drift eines ALS (skalarwertige Funktion)
$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$	Eingangsmatrix eines ALS
$B(\boldsymbol{x})$	Eingangsmatrix eines ALS der Dimension 1×1
$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})$	Ausgangsfunktion eines ALS (Vektorfeld)
$c(\boldsymbol{x})$	Skalarwertige Ausgangsfunktion
$\boldsymbol{c}^{(k)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k-1)})$	k-te zeitliche Ableitung des Systemausgangs
$\tilde{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k-1)})$	$\boldsymbol{c}^{(k)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k-1)})$ restringiert auf $\mathcal{U}_{k-1}$ und $\mathcal{M}_{k-1}$
$\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x})$	Nulldynamikvektorfeld eines ALS
$f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$	Skalarwertiges Polynom, skalarwertige rationale Funktion
i, j, k, l	Laufindizes
m	Dimension des Eingangsvektors
n	Dimension des Zustandsvektors $\boldsymbol{x}(t)$
p	Dimension des Ausgangsvektors $\boldsymbol{y}(t)$
$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$	Hilfsfunktion, die $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ abbildet
t	Zeit
$\boldsymbol{u}(t)$	Stellgrößenvektor
$u(t)$	Stellgröße
$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})$	Ausgangssignalnullende Zustandsrückführung
$\boldsymbol{x}(t)$	Zustandsvektor des Systems
$x(t)$	Skalare Zustandsvariable, Schlittenposition
$\boldsymbol{y}(t)$	Systemausgangsvektor
$y(t)$	Skalarer Systemausgang

Operatoren

$\forall$	Für alle
$\exists$	Es existiert
$\subset$	Teilmenge oder gleich
$\cup$	Vereinigung von Mengen
$\cap$	Schnitt von Mengen
$/$	Körpererweiterung
$[\cdot]^{\mathrm{T}}$	Transponierte zu $[\cdot]$
$(\cdot)^{(k)}$	k-te zeitliche Ableitung von $(\cdot)$

Mengen

$\emptyset$	Leere Menge
$\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$	Menge aller glatten Funktionen, die $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^m$ abbilden
$\mathcal{I}_k, \tilde{\mathcal{I}}_k, \mathcal{J}_k, \hat{\mathcal{J}}_k$	Indexmengen
$K(\boldsymbol{x})$	Ring der Polynome in den Variablen $\boldsymbol{x}$ mit Koeffizienten aus dem Grundkörper K
$K\{\boldsymbol{x}\}$	Menge der differentiellen Polynome in den Variablen $\boldsymbol{x}$ mit Koeffizienten aus dem Grundkörper K
$K\langle\boldsymbol{x}\rangle$	Körper der in $\boldsymbol{x}$ differentiell rationalen Funktionen mit Koeffizienten aus dem Grundkörper K
$\mathcal{M}_k, \tilde{\mathcal{M}}_k, \bar{\mathcal{M}}_k$	Teilmengen des $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen mit „0“
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$	Körper der in $\boldsymbol{x}$ rationalen Funktionen mit Koeffizienten aus dem Grundkörper $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}\rangle[\boldsymbol{x}]$	Körper der in $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}$ differentiell rationalen und in $\boldsymbol{x}$ rationalen Funktionen mit Koeffizienten aus dem Grundkörper $\mathbb{R}$
$\mathcal{U}_k, \tilde{\mathcal{U}}_k$	Teilmengen von $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$

1 Einleitung

Viele technische Systeme bieten nicht die Möglichkeit, alle Systemzustände wie z. B. Position, Druck, Winkel, Geschwindigkeit etc. meßtechnisch zu erfassen. Diese Systemzustände beeinflussen zwar das dynamische Verhalten, stehen aber als Meßgröße nicht direkt zur Verfügung. Dies hat mehrere Gründe: Zum einen sind gute Meßgeräte teuer, zum anderen lassen sich nicht überall Meßgeräte anbringen. Daher gibt es bei der Modellbildung einen Systemausgang, welcher nur die gemessenen Systemzustände enthält. Oft läßt sich die Aufgabe einer Regelung so formulieren, daß ein derartiger Systemausgang für alle Zeiten null sein soll. Diese Eigenschaft ist charakteristisch für die Nulldynamik. Aber auch wenn der Systemausgang identisch null nicht direkt das Regelungsziel ist, stellt die Nulldynamik eine wichtige Systemkenngröße dar. Die Nulldynamik eines Systems gibt die *innere* Dynamik des Systems wieder, wenn der Ausgang identisch null ist; es ergibt sich also ein Einblick in das dynamische Verhalten der nicht gemessenen Systemgrößen.

Für die erfolgreiche Anwendung vieler, insbesondere nichtlineare Regelungskonzepte ist eine stabile Nulldynamik Voraussetzung. Im Falle einer instabilen Nulldynamik können u. a. folgende Regelungskonzepte zu einem instabilen Verhalten des geregelten Systems führen:

- Modellfolgeregelung,
- Adaptive Regelung,
- Exakte Ein-/ Ausgangslinearisierung und
- High Gain Regelung.

Bei linearen Systemen liegt eine instabile Nulldynamik vor, wenn die Übertragungsfunktion Nullstellen in der rechten s-Halbebene besitzt. Systeme mit nicht asymptotisch stabiler Nulldynamik werden auch Nichtphasenminimumsysteme genannt (Sastry und Isidori 1989, Schwarz 1991). Die Auswirkungen einer instabilen Nulldynamik soll das folgende Beispiel verdeutlichen:

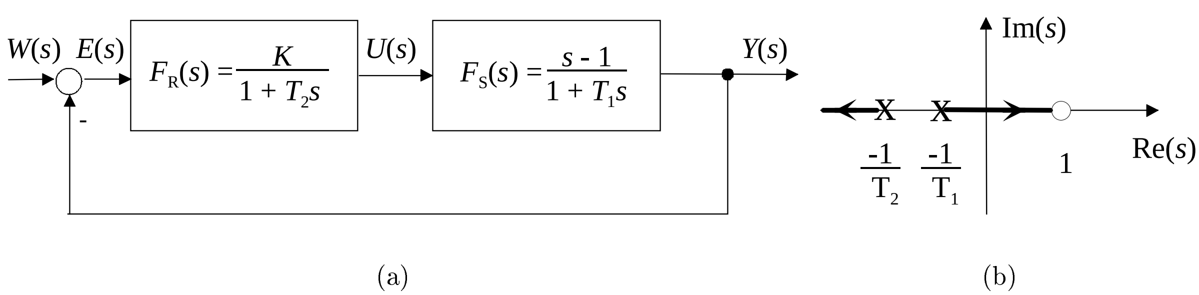

Bild 1.1: a) Blockschaltbild b) Wurzelortskurve des Regelkreises

Das Nichtphasenminimumsystem aus Bild 1.1(a) besitzt die Übertragungsfunktion $F_o(s) = K\frac{s-1}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$ und somit eine instabile Nulldynamik, da die Übertragungsfunktion eine Nullstelle in der rechten s-Halbebene hat. Aus der Wurzelortskurve (Bild 1.1(b)) läßt sich sofort ablesen, daß das geregelte System ab einem kritischen Wert für die Regelkreisverstärkung einen Pol in der rechten Halbebene aufweist. Daraus ergibt sich dann ein instabiles System. Im Falle einer instabilen Nulldynamik ist der geschlossene Regelkreis also nicht immer instabil, das System kann aber durch die Rückführung sehr schnell ein instabiles Verhalten aufweisen. Die eingangs genannten Regelungskonzepte sind somit nur sehr eingeschränkt verwendbar. Daher ist es wichtig, die Nulldynamik zu kennen. Bei Systemen mit instabiler Nulldynamik kann die Erweiterung des Systemausgangs zu einer neuen, stabilen Nulldynamik führen. Die Bestimmung dieser neuen Nulldynamik erfordert allerdings einen Algorithmus, der eine unterschiedliche Anzahl von Systemein- und -ausgängen zuläßt.

Mittlerweile sind mehrere Algorithmen zur Berechnung der Nulldynamik bekannt. Dabei finden unterschiedliche mathematische Ansätze Verwendung: Entweder die Differentialgeometrie oder die Differentialalgebra. Im einzelnen stehen folgende Nulldynamikalgorithmen zur Verfügung: Ein auf der Differentialgeometrie basierender Algorithmus von Isidori (1995) und zwei differentialalgebraische Algorithmen, der eine von Senger und Riege (1997), ein weiterer von Fortell (1995). In diesem Bericht findet sich ein neuer, differentialalgebraischer Nulldynamikalgorithmus. Dieser stellt eine Erweiterung des Algorithmus von Senger und Riege (1997) dar. Der in diesem Bericht neu vorgestellte Nulldynamikalgorithmus kann nur Systeme behandeln, die sich durch rationale Funktionen im Zustandsmodell beschreiben lassen. Damit möglichst alle Modelle technischer Systeme analysierbar sind, ist gegebenenfalls ein Ersatzsystem erforderlich. Der Nulldynamikalgorithmus baut somit auf einem früheren Forschungsbericht (Polzer 1998) auf, da sich dort ein Algorithmus zur Berechnung der Ersatzsysteme findet.

Der Inhalt dieser Arbeit gliedert sich wie folgt: Zunächst sind im Abschnitt 2 die analysierbaren Systemklassen beschrieben. In der Literatur existieren leider mehrere Definitionen des Begriffs *Nulldynamik*. Die hier verwendete Definition der *Nulldynamik* ist im Abschnitt 3 wiedergegeben. Der Nulldynamikalgorithmus selbst ist im Abschnitt 4 beschrieben. Als Anwendungsbeispiel dient im Abschnitt 5 ein nichtlineares System, welches auch bei Isidori (1995) und bei Senger und Riege (1997) Gegenstand der Analyse ist. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse und einen Ausblick auf weitere Forschungsmöglichkeiten beschließen diesen Bericht im Abschnitt 6.

2 Voraussetzung der Nulldynamikanalyse

Zur Untersuchung der Struktureigenschaften technischer Systeme wie etwa Nulldynamik, Beobachtbarkeit, Steuerbarkeit etc. ist es notwendig, ein mathematisches Modell des Systems zu besitzen, damit dieses dementsprechend analysierbar ist. Zunächst wird in diesem Abschnitt dargelegt, welche mathematischen Modelle mit den hier behandelten Methoden analysierbar sind.

Da der Ausgangssignalableitung eine besondere Bedeutung in den Nulldynamikalgorithmen zukommt, muß auf die formalen Probleme bei der Schreibweise eingegangen werden. Wie die Größen der Ausgangssignalableitung zu interpretieren sind, wird im zweiten Teil des Abschnitts erklärt.

2.1 Betrachtete Systemklassen

Zur Analyse der Nulldynamik mit dem hier vorgestellten Algorithmus ist es erforderlich, daß das mathematische Modell in Form eines Differentialgleichungssystems vorliegt und sich insbesondere durch ein ***analytisches System (AS)***

$$\Sigma_{AS}: \begin{array}{rcl} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &=& \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)) \quad ; \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0) \\ \boldsymbol{y}(t) &=& \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t)) \qquad\quad ; \quad \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^{\tilde{n}} \; ; \boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^{\tilde{m}} \; ; \boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^{p} \end{array} \tag{2.1}$$

mit den analytischen Funktionen $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))$ und $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t))$ eine hinreichende Approximationsgüte erzielen läßt.

Im weiteren bilden ***analytische Systeme mit linear eingehender Steuerung (ALS)***

$$\Sigma_{ALS}: \begin{array}{rcl} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &=& \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{u}(t) \quad ; \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0) \\ \boldsymbol{y}(t) &=& \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}(t)) \qquad\qquad\qquad ; \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^{n} \; ; \boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^{m} \; ; \boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^{p} \end{array} \tag{2.2}$$

die zu analysierende Systemklasse. Die Funktionen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{c}$ müssen analytisch in $\boldsymbol{x}$ sein. Nach Lévine (1997) läßt sich jedes analytische System der Form (2.1) in ein analytisches System mit linear eingehender Steuerung gemäß (2.2) transformieren. Aus diesem Grund stellt die Betrachtung von Systemen der Form (2.2) keine Einschränkung dar.

2.2 Notation der Ausgangssignalableitung

Der Nulldynamikalgorithmus verwendet die zeitlichen Ableitungen des Systemausgangs; hierbei existiert ein formales Problem: Der k-ten zeitlichen Ableitung in der klassischen Notation kann nicht angesehen werden, von welchen Größen sie abhängt. Natürlich hängt $\boldsymbol{y}^{(k)}(t)$ wie $\boldsymbol{y}(t)$ letztendlich nur von der Zeit ab, allerdings über die Funktionen $\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)$ bzw. deren zeitlichen Ableitungen. Diese Abhängigkeiten in der Ausgangssignalableitung spielen in den Nulldynamikalgorithmen eine entscheidende Rolle. Daher ist es notwendig Notation einzuführen, die diese Zusammenhänge verdeutlicht.

Ausgehend von einem ALS gemäß (2.2), wird hier die folgende Schreibweise für die Ausgangssignalableitungen eingeführt:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{y}}(t) &= \boldsymbol{y}^{(1)}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{y}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}(t)) = \frac{\partial \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}(t))}{\partial \boldsymbol{x}(t)}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t) \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}(t))}{\partial \boldsymbol{x}(t)}\left[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{u}(t)\right] \\
&=: \dot{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) && (2.3) \\
&=: \boldsymbol{c}^{(1)}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \;. && (2.4)
\end{aligned}$$

Mit dieser Schreibweise läßt sich die zweite zeitliche Ableitung $\ddot{\boldsymbol{y}}(t)$ durch

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{y}}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{y}^{(1)}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \\
&= \frac{\partial \dot{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))}{\partial \boldsymbol{x}(t)}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \frac{\partial \dot{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))}{\partial \boldsymbol{u}(t)}\,\dot{\boldsymbol{u}}(t) \\
&= \frac{\partial \dot{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))}{\partial \boldsymbol{x}(t)}\left[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{u}(t)\right] + \frac{\partial \dot{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))}{\partial \boldsymbol{u}(t)}\,\dot{\boldsymbol{u}}(t) \\
&=: \ddot{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \dot{\boldsymbol{u}}(t)) && (2.5) \\
&=: \boldsymbol{c}^{(2)}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \dot{\boldsymbol{u}}(t)) && (2.6)
\end{aligned}$$

ausdrücken. Damit ist zugleich die Funktion $\ddot{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \dot{\boldsymbol{u}}(t))$ definiert. Generell werden die Funktionsargumente an den Stellen weggelassen, wo es der Übersichtlichkeit dient und keine Verwechslungen zu erwarten sind.

Die soeben eingeführte Schreibweise für die Ausgangssignalableitung läßt sich iterativ fortsetzen, und es folgt für die k-te Ausgangssignalableitung die Schreibweise

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}^{(k)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{y}^{(k-1)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{c}^{(k-1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k-2)}) && (2.7) \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{c}^{(k-1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k-2)})}{\partial \boldsymbol{x}}\,\dot{\boldsymbol{x}} + \sum_{i=0}^{k-2} \frac{\partial \boldsymbol{c}^{(k-1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k-2)})}{\partial \boldsymbol{u}^{(i)}}\,\dot{\boldsymbol{u}}^{(i+1)} \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{c}^{(k-1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k-2)})}{\partial \boldsymbol{x}}\left[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\right] + \sum_{i=0}^{k-2} \frac{\partial \boldsymbol{c}^{(k-1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k-2)})}{\partial \boldsymbol{u}^{(i)}}\,\dot{\boldsymbol{u}}^{(i+1)} \\
&=: \boldsymbol{c}^{(k)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k-1)}) \;. && (2.8)
\end{aligned}$$

3 Definitionen der Nulldynamik

Der Begriff *Nulldynamik* stammt aus der linearen Systemtheorie, in der ein enger Zusammenhang zu den Nullstellen der Übertragungsfunktion eines linearen Systems besteht. Diese Nullstellen finden sich bei geeigneter Normalform direkt im Zustandsmodell wieder. Daher beeinflussen sie maßgeblich die Dynamik des Systems, und es entstand der Name *Null*dynamik. Im Gegensatz zu den Polen der Übertragungsfunktion sind die Nullstellen invariant gegenüber einer Ausgangsrückführung (Schwarz 1994:S. 1).

Leider gibt es für nichtlineare Systeme keine einheitliche Definition der Nulldynamik, auch wenn alle Ansätze im Grunde die gleiche Systemeigenschaft beschreiben. Für das Verständnis der folgenden Definition von Schwarz (1991) ist es unerläßlich, sich vor Augen zu führen, daß die Beobachtbarkeit eines Systems von der Art der Steuerung abhängt. Wählt man eine spezielle Zustandsrückführung, so kann es passieren, daß ein ehemals vollständig beobachtbares System mit dieser Zustandsrückführung zum Teil oder ganz unbeobachtbar gemacht wird. Die Definition zu diesem Ansatz lautet:

Definition 3.1: (Schwarz 1991) Der durch Zustandsrückführung unbeobachtbar zu machende Systemteil heißt ***Nulldynamik*** des Systems. □

Die nachfolgende Definition von Isidori (1995) schließt die Definition 3.1 ein, wenn auch ein scheinbar anderer Grundgedanke Verwendung findet. Bei dem Ansatz ist es wichtig, diejenigen Anfangswerte aufzufinden, zu denen Stellgrößen existieren, die einen Systemausgang identisch null bewirken. Das System, eingeschränkt auf diese Anfangswerte und diese Stellgrößen, liefert dann die Nulldynamik. Mit differentialgeometrischen Begriffen läßt sich der Sachverhalt durch folgende Definition ausdrücken:

Definition 3.2: ***Nulldynamik (differentialgeometrisch)*** (Isidori 1995, Byrnes und Isidori 1989:S. 438)

Existiert eine Teilmannigfaltigkeit $\mathcal{Z}^*$ des Zustandsraumes mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{Z}^*$,

2. in jedem Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathcal{Z}^*$ existiert eine eindeutige Stellgröße $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}(t)) =: \boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ derart, daß $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})$ tangential zu $\mathcal{Z}^*$ ist,

3. $\mathcal{Z}^*$ ist maximal bzgl. der Eigenschaften 1. und 2. .

Ist $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})$ ferner eine glatte Funktion in $\boldsymbol{x}$, dann wird $\mathcal{Z}^*$ ***Nulldynamikmannigfaltigkeit*** genannt. Das System

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}) \quad , \boldsymbol{x} \in \mathcal{Z}^* \tag{3.1}$$

wird als ***Nulldynamik*** des Systems (2.2) bezeichnet. Die Funktion $\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x})$ heißt ***Nulldynamikvektorfeld***. □

Die Nulldynamik eines Systems kann besonders leicht angegeben werden, wenn das System zuvor einer Koordinatentransformation, wie sie in Isidori (1995:S. 310) angegeben ist, unterworfen wurde. Eine solche Transformation ist aber für große System ($n > 10$) oft zum Scheitern verurteilt (Wey 1998). Selbst wenn eine solche Transformation gelingt, muß sie aufwendig rücktransformiert werden, will man das Ergebnis physikalisch interpretieren. Aufgrund des stark eingeschränkten praktischen Nutzens wurde auf eine Darstellung der Koordinatentransformation an dieser Stelle verzichtet, und der interessierte Leser sei auf die angegebene Literaturstelle verwiesen.

Es ist zum gegenwärtigen Zeitpunkt keine differentialalgebraische Definition der Nulldynamik aus der Literatur bekannt. Meist wird eine differentialgeometrische Definition zugrunde gelegt. Eine Formulierung der Grundidee von Isidori (1995), die keine differentialgeometrischen Begriffe enthält, kann wie folgt aussehen:

Definition 3.3: ***Nulldynamik (differentialalgebraisch)***

Existiert eine Teilmenge $\mathcal{Z}^* \subset \mathbb{R}^n$ des Zustandsraumes mit den Eigenschaften:

1. $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{Z}^*$ und

2. es existiert zu jedem $\boldsymbol{x} \in \mathcal{Z}^*$ ein Stellgrößenvektor $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}(t)) =: \boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ derart, daß

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{0} \quad \forall\, t \geq t_0, k \in \mathbb{N}_0 \tag{3.2}$$

ist und

3. $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})$ ist eine glatte Funktion in $\boldsymbol{x}$,

dann wird $\mathcal{Z}^*$ ***Nullkern***,

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}) \quad , \boldsymbol{x} \in \mathcal{Z}^* \tag{3.3}$$

Nulldynamik des Systems, die Funktion $\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x})$ ***Nulldynamikvektorfeld*** und $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})$ ***ausgangssignalnullende Zustandsrückführung*** genannt. □

Die differentialgeometrische Definition 3.2 liefert eine, wenn sie denn existiert, eindeutig bestimmte Nulldynamik, im Gegensatz zur Definition 3.3. Stimmt die Zahl der Systemeingänge nicht mit der Zahl der Systemausgänge überein, so kann es mehrere Mengen $\mathcal{Z}^*$ und Stellgrößen $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}(t)) =: \boldsymbol{u}(t)$ geben, die die Definition 3.3 erfüllen.

4 Differentialalgebraische Nulldynamikalgorithmen

Ist der differentialgeometrische Nulldynamikalgorithmus von Isidori (1995) aufgrund nicht erfüllter Voraussetzungen nicht angewendbar, bilden differentialalgebraischen Methoden oft eine Alternative. Dabei sind dann zur Systembeschreibung lediglich polynomiale oder rationale Funktionen zugelassen.

4.1 Polynomiale Systeme

Unter einem ***polynomialen System*** ist ein Zustandsmodell der Form (2.2) zu verstehen, bei dem die Funktionen $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})$ Polynome in $\boldsymbol{x}$ sind. Polynome sind analytische Funktionen, von daher kann der differentialgeometrische Nulldynamikalgorithmus von Isidori (1995) prinzipiell polynomiale Systeme untersuchen. Weist das betreffende System aber eine unterschiedliche Anzahl an Ein- und Ausgangsgrößen auf, kann der differentialgeometrische Algorithmus keine Verwendung finden. Eine beliebige Anzahl an Systemein- und Systemausgängen erlaubt der Nulldynamikalgorithmus von Senger und Riege (1997). Als einschränkende Voraussetzung ist zu nennen, daß in diesem Ansatz nur Polynome zur Systembeschreibung zugelassen sind. Die Darstellung des Algorithmus und Anwendungsbeispiele finden sich in Senger und Riege (1997).

Der differentialalgebraische Nulldynamikalgorithmus von Fortell (1995) ist im allgemeinen keine Alternative zum Nulldynamikalgorithmus von Isidori (1995), da dieser meist nur eine Teilmenge der Systeme analysieren kann, die mit dem Algorithmus von Isidori (1995) untersuchbar sind.

4.2 Rationale Systeme

Sind bei einem ALS der Form (2.2) die Funktionen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{c}$ rational, soll dieses Modell ***rationales System*** genannt werden. Die physikalische Modellbildung liefert meist Zustandsmodelle, die auch nichtrationale Funktionen, wie etwa trigonometrische Terme, enthalten. Glücklicherweise existieren für die Modelle real existierender Anlagen Ersatzsysteme, die ausschließlich rationale Funktionen enthalten (Fliess 1987). Ein Algorithmus zur Konstruktion der Ersatzsysteme ist in Polzer (1998) angegeben. Ebenso wie die Polynome sind auch rationale Funktionen analytisch. Der differentialgeometrische Nulldynamikalgorithmus von Isidori (1995) kann somit auch rationale Systeme untersuchen. Allerdings gilt diese Aussage nur unter der Voraussetzung, daß die Anzahl der Systemeingänge mit der der Systemausgänge übereinstimmt. Diese Einschränkung verhindert die Untersuchung der Nulldynamik für eine Vielzahl von Systemen. Auch wenn das System den Anforderungen genügt, kann es von Interesse sein, den Systemausgang im Modell zu erweitern und von diesem erweiterten System die Nulldynamik zu bestimmen. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die Nulldynamik des Systems instabil ist. Denn wie eingangs erwähnt, führt eine instabile Nulldynamik bei vielen Regelungskonzepten zu

Problemen. Durch die Messung zusätzlicher Zustandsgrößen, also eine Erweiterung des Systemausgangs, ist es aber denkbar, daß die Nulldynamik des so veränderten Systems stabil ist. Die Erweiterung des Systemausgangs ist normalerweise nur durch weitere Meßgeräte an der realen Anlage möglich. Erweitert man aber zunächst den Systemausgang im Modell, ist es möglich vorab zu entscheiden, ob und für welche Zustandsgrößen weitere Meßgeräte an der realen Anlage Aussicht auf Erfolg bezüglich einer stabilen Nulldynamik haben.

Der in diesem Abschnitt vorgestellte Nulldynamikalgorithmus ist eine Erweiterung des differentialalgebraischen Nulldynamikalgorithmus für polynomiale Systeme von Senger und Riege (1997). Jener weist zwar nicht die Einschränkung auf die gleiche Anzahl von Ein- und Ausgangsgrößen auf, läßt aber nur Polynome für die Funktionen $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})$ zu. In dem Algorithmus von Senger und Riege (1997) muß in jedem Iterationsschritt eine reduzierte Gröbner-Basis (Pauer und Pfeifhofer 1988) von den Polynomen der Ausgangssignalableitung bestimmt werden. Gröbner-Basen sind aber nur für Polynome definiert. Damit auch rationale Funktionen in der Systembeschreibung zugelassen sind, muß die Bildung der Gröbner-Basen ersetzt werden. Anstelle der Gröbner-Basis der Ausgangssignalableitung wird in dem folgenden Algorithmus direkt die Ausgangssignalableitung weiterverarbeitet. Dadurch entstehen Probleme, die bei der Betrachtung der Gröbner-Basis nicht vorhanden sind, wie z. B. unter- und überbestimmte Gleichungssysteme. Ferner muß ein neues Abbruchkriterium gefunden werden. Der nachfolgende Satz 4.2 liefert das Abbruchkriterium für den erweiterten Algorithmus. Insgesamt bewirkt die Erweiterung, daß jetzt auch rationale Funktionen für $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})$ zugelassen sind.

Gemäß Definition 3.3 ist es das Ziel des Nulldynamikalgorithmus, einen ausgangssignalnullenden Stellgrößenvektor und eine Menge von Anfangswerten derart zu bestimmen, daß der Systemausgang für alle Zeiten identisch null ist. Die Grundidee für die Realisierung dieses Ziels mit Hilfe des Algorithmus sieht wie folgt aus: Beginnend mit der nullten Ableitung des Systemausgangs $\boldsymbol{y}(t)$, also $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}(t))$ selbst, muß versucht werden, daß durch eine Zustandsrückführung jede Ableitungsstufe des Systemausgangs identisch null ist. Dort, wo dies nicht möglich ist, ergeben sich Bedingungen an die Menge der zulässigen Anfangswerte.

Es ist offensichtlich, daß im ersten Schritt des Algorithmus $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{0}$ nicht durch eine Zustandsrückführung erreichbar ist, da $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})$ nicht von $\boldsymbol{u}$ abhängt. Damit der Systemausgang aber trotzdem null ist, muß die Menge $\mathcal{M}_0$ der zulässigen Zustände $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ soweit eingeschränkt werden, daß $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\ \forall\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_0$ gilt. Die erste Ausgangssignalableitung hingegen kann von $\boldsymbol{u}$ abhängen:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{y}}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}(t)) = \frac{\partial \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}(t))}{\partial \boldsymbol{x}(t)}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\partial \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}(t))}{\partial \boldsymbol{x}(t)}\left[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{u}(t)\right] \\
&=: \dot{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \ .
\end{aligned}$$

Alle Größen, die nicht durch eine Zustandsrückführung *nullbar* sind, ergeben Bedingungen an die Menge der zulässigen Zustände, d.h. die anfangs definierte Menge $\mathcal{M}_0 \subset \mathbb{R}^n$ verkleinert sich zu $\mathcal{M}_1$. Insgesamt muß die Ausgangssignalableitung, restringiert auf $\mathcal{M}_1$, sowie die Zustandsrückführung identisch null sein. Der Systemausgang wird so lange abgeleitet und auf die eben geschilderte Weise untersucht, bis keine neuen Bedingungen an die Zustandsmenge mehr hinzukommen. Denn dann kann die k-te Ausgangssignalableitung, restringiert auf die Zustandsmenge $\mathcal{M}_{k-1}$, durch eine Zustandsrückführung *genullt* werden.

Um entscheiden zu können, ob ein Element der k-ten Ausgangssignalableitung durch eine Zustandsrückführung *nullbar* ist oder ob dieses Element Bedingungen für die Anfangswerte liefert, wird zunächst die (nichtdifferentielle) Körpererweiterung

$$\mathbb{R}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y} \rangle[\boldsymbol{x}] \ / \ \mathbb{R}[\boldsymbol{x}] \tag{4.1}$$

eingeführt. $\mathbb{R}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y} \rangle[\boldsymbol{x}]$ ist ein differentieller Körper, der alle rationalen Funktionen sowie alle zeitlichen Ableitungen in $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}$ und alle rationalen Funktionen in $\boldsymbol{x}$ enthält. Der Ausdruck $\dot{\boldsymbol{x}}$ läßt sich durch $[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}]$ ersetzen. Dadurch ist es möglich jede zeitliche Ableitung $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\boldsymbol{x}(t)$ über ein Substituieren von $\dot{\boldsymbol{x}}$ als Funktion von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{u}^{(i)}$, $(i \in \{1, \ldots, k-1\})$ auszudrücken. Somit gilt

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\boldsymbol{x}(t), \ \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y} \rangle[\boldsymbol{x}], \quad \forall\ k \in \mathbb{N}_0 . \tag{4.2}$$

Da der differentielle Körper $\mathbb{R}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y} \rangle[\boldsymbol{x}]$ per Definition auch ein nichtdifferentieller Körper ist, kann (4.1) als (nichtdifferentielle) Körpererweiterung interpretiert werden.

Für jede Ableitungsstufe des Ausgangssignals ist, durch eine geeignete Wahl der Anfangswerten und eines entsprechenden Stellgrößenvektors die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{c}^{(k)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k-1)}) = \boldsymbol{0} \tag{4.3}$$

sicherzustellen. Die Elemente der Ableitungsstufen der Gleichung (4.3), welche keine Stellgrößen enthalten, ergeben Bedingungen an die Menge der Anfangswerte. Die eingeführte Körpererweiterung dient als Hilfsmittel, um festzustellen, ob die Ausgangssignalableitung durch den Stellgrößenvektor *nullbar* ist. Die beiden folgenden Fälle können auftreten:

(i) Ist $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}y_i(t)$ $(i \in \{1, \ldots, p\})$ algebraisch abhängig über $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$, so läßt sich dieses Element der Ausgangssignalableitung nicht mit dem Stellgrößenvektor *nullen*, und aus der Forderung (4.3) ergeben sich Bedingungen an die Menge der Anfangswerte.

(ii) Eine notwendige Bedingung für die Bestimmung der ausgangssignalnullenden Zustandsrückführung ist, daß $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}y_i(t)$ $(i \in \{1, \ldots, p\})$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ ist. □

Ein kurzes Beispiel soll diesen Sachverhalt veranschaulichen:

Beispiel 4.1: Es sei als Teil eines ALS das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = x_3 \\ \text{und} \quad &\dot{y}_2 = x_2 + u_1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

gegeben. Die Frage, ob $\dot{y}_i$ $(i = 1, 2)$ algebraisch abhängig über $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ ist, hängt gemäß Definition C.5 von der Existenz der Polynome $P_i(\dot{y}_i) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \ \dot{y}_i^j \quad , \quad \alpha_j \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$, $k \in \mathbb{N}_0$ mit $P_i(\dot{y}_i) = 0$ $(i = 1, 2)$ ab.

$\dot{y}_1$ ist algebraisch abhängig über $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$, da ein Polynom P_1 mit

$$P_1(\dot{y}_1) = \underbrace{x_3}_{\in\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]} \cdot \dot{y}_1^0 + \underbrace{(-1)}_{\in\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]} \cdot \dot{y}_1^1 = 0 \tag{4.5}$$

existiert. Es liegt also der Fall (i) vor. Da nach Gl. (4.3) $\dot{y}_1 = 0$ gelten soll, folgt aus Gl. (4.4) für die Anfangswerte: $x_3 = 0$.

$\dot{y}_2$ ist algebraisch unabhängig über $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$, denn es gilt $u_1 \notin \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$, daher kann es kein Polynom P_2 der Form

$$P_2(\dot{y}_2) \ = \ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \ \dot{y}_2^i \quad , \quad \alpha_i \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}], k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{mit} \tag{4.6}$$

$$P_2(\dot{y}_2) \ \stackrel{!}{=} \ 0 \tag{4.7}$$

und mindestens einem Koeffizienten $\alpha_i \neq 0$ geben. Somit liegt hier der Fall (ii) vor. Nach Gl. (4.3) soll wieder $\dot{y}_2 = 0$ gelten. Die daraus folgende Zustandsrückführung ergibt für u_1 die Funktionsvorschrift $u_1(t) = -x_3(t)$.

Fordert man, daß $x_3 = 0$ und $u_1(t) = -x_3(t)$ sein muß, so ist die Gleichung (4.3) für $k = 1$ erfüllt. □

Die Frage, wann der Systemausgang identisch null ist, ist eng mit der Frage verbunden, nach welcher Ableitungsstufe des Systemausgangs genügend Informationen über die notwendigen Anfangswerte und Stellgrößen vorliegen, damit alle weiteren Ableitungsstufen identisch null sind. Aus diesem Ansatz läßt sich ein Abbruchkriterium ableiten.

Für den in diesem Abschnitt noch zu formulierenden Nulldynamikalgorithmus kann als Abbruchbedingung der folgende Satz Verwendung finden:

Satz 4.2: Es sei ein ALS der Form (2.2) mit rationalen Funktionen $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(t)), \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}(t))$ und $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}(t))$ gegeben. Ferner sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{U} \subset \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ und $k \in \mathbb{N}$. Gelten die Voraussetzungen

(i) $\dfrac{\mathrm{d}^{k-j}}{\mathrm{d}t^{k-j}} \boldsymbol{y}|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}, \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}} = \boldsymbol{c}^{(k-j)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{k-j-1})|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}, \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}} \equiv \mathbf{0} \ , \ 1 \leq j \leq k \ ,$

(ii) $\dfrac{\mathrm{d}^{k}}{\mathrm{d}t^{k}} \boldsymbol{y}|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}, \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}} = \boldsymbol{c}^{(k)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{k-1})|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}, \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}} \equiv \mathbf{0}$ und

(iii) $\mathcal{M}$ ist die größtmögliche Menge an Anfangswerten, die (i) erfüllt,

dann ist der Systemausgang des ALS für $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{M}$ und $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ identisch null, d.h. es gilt

$$\boldsymbol{y}(t) \equiv 0 \ . \tag{4.8}$$

Beweis: Nach (ii) ist es möglich, die $k-$te Ausgangssignalableitung durch eine Stellgröße $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ mit Anfangswerten $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{M}$ zu *nullen*, ohne weitere Bedingungen an die Anfangswerte stellen zu müssen. Da ferner nach (iii) $\mathcal{M}$ die größte Menge von Anfangswerten repräsentiert, für die die ersten $(k-1)$ Ausgangssignalableitungen durch eine Zustandsrückführung identisch null verbleiben, stellt $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \boldsymbol{y}(t)|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}, \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}}$ eine Funktion dar, die von der Zeit t abhängt; diese Funktion ist konstant. Leitet man die konstante zeitabhängige Funktion wiederum nach der Zeit ab, so ergibt sich erneut eine Funktion, die identisch null ist. Somit gilt

$$\frac{\mathrm{d}^{k+i}}{\mathrm{d}t^{k+i}} \boldsymbol{y}|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}, \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}} \equiv \mathbf{0} \ , \ \forall \ i \in \mathbb{N}_0 \ . \tag{4.9}$$

Dies, zusammen mit der Voraussetzung (i), liefert die gewünschte Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}^{i}}{\mathrm{d}t^{i}} \boldsymbol{y}|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}, \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}} \equiv \mathbf{0} \ , \ \forall \ i \in \mathbb{N} \ , \tag{4.10}$$

und daraus folgt die Behauptung: $\boldsymbol{y}(t) \equiv 0$ für $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$ und $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$. □

Der nachfolgende Satz liefert die Aussage, daß die k-te Ausgangssignalableitung, eingeschränkt auf die notwendigen Anfangswerte und Stellgrößen, nur von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{u}$ abhängt. Somit können sich keine Forderungen an $\dot{\boldsymbol{u}}$ ergeben. Die notwendigen Anfangswerte und Stellgrößen ergeben sich aus der Forderung, daß die ersten $(k-1)$ Ausgangssignalableitungen identisch null sein sollen. Benötigt wird dieser Satz im anschließend formulierten Nulldynamikalgorithmus.

Satz 4.3: Es sei ein ALS der Form (2.2) mit rationalen Funktionen $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(t)), \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}(t))$ und $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}(t))$ gegeben. Ferner seien $\mathcal{M}_k \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{U}_k \subset \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ und $k \in \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften, daß die Mengen $\mathcal{M}_k$ und $\mathcal{U}_k$ absteigend sind, d.h. $\mathcal{M}_{k+1} \subset \mathcal{M}_k$ und $\mathcal{U}_{k+1} \subset \mathcal{U}_k$ gelten für alle $k \in \mathbb{N}$. Des weiteren sei die Beziehung
$\boldsymbol{c}^{(k-1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k-2)})|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_{k-1}, \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_{k-1}} \equiv \mathbf{0}$ erfüllt.
Unter diesen Voraussetzungen hängt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{c}^{(k-1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k-2)})|_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_{k-1}}\right]\Big|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_{k-1}}$ nur von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{u}$ ab.

Beweis: Induktionsanfang: Die Menge $\mathcal{M}_0$ werde so bestimmt, daß

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \text{ genau dann gilt, wenn } \boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_0 \text{ ist.} \tag{4.11}$$

Die Mengen $\tilde{\mathcal{M}}_1$ und $\mathcal{U}_1$ definieren sich über die Forderung

$$\dot{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_0} \overset{!}{\equiv} \mathbf{0} \text{ für } \boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_0 \cap \tilde{\mathcal{M}}_1 \;,\; \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_1. \tag{4.12}$$

Setzte $\mathcal{M}_1 := \mathcal{M}_0 \cap \tilde{\mathcal{M}}_1$.
Es ist $\ddot{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}) = \dfrac{\partial \dot{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}}[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}] + \dfrac{\partial \dot{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}\dot{\boldsymbol{u}}$.
Zu zeigen ist, daß $\ddot{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}})|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_1, \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_1}$ nicht von $\dot{\boldsymbol{u}}$ abhängt, was erfüllt ist, wenn $\dfrac{\partial \dot{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}\Big|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_1, \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_1} = \mathbf{0}_{p \times m}$ gilt.
Diese Aussage wird über eine Widerspruchsannahme bewiesen:

Annahme: $\dfrac{\partial \dot{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}\Big|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_1, \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_1} \neq \mathbf{0}_{p \times m}$ für mind. ein Paar $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_1$, $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_1$.

$\Rightarrow \exists\ i \in \{1, \ldots, p\} \wedge j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\dfrac{\partial \dot{c}_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial u_j}|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_1, \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_1} \neq 0$ für mind. ein Paar $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_1$, $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_1$.

$\Rightarrow \dot{c}_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_1, \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_1} \neq 0$ für mind. ein Paar $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_1$, $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_1$, was einen Widerspruch zu (4.12) darstellt!

$\Rightarrow \ddot{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}})|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_1, \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_1}$ hängt nicht von $\dot{\boldsymbol{u}}$ ab.

Induktionsannahme: Die Behauptung sei für $(k-1) \in \mathbb{N}$ richtig, d.h. für
$\boldsymbol{c}^{(k-1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k-2)})|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_{k-1}, \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_{k-1}} \equiv \mathbf{0}$ ist
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{c}^{(k-1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k-2)})|_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_{k-1}}\right]\Big|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_{k-1}}$
nur von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{u}$ abhängig.

Induktionsschritt: Unter der Voraussetzung

$$\boldsymbol{c}^{(k)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k-1)})|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_k, \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_k} \equiv \mathbf{0} \tag{4.13}$$

gilt: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{c}^{(k)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k-1)})|_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_k}\right]\Big|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_k}$ ist nur von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{u}$ abhängig.

Beweis des Induktionsschrittes.:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{c}^{(k)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\ldots,\boldsymbol{u}^{(k-1)})|_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_k}\right]\Big|_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}_k} =$$

$$= \left[\frac{\partial \boldsymbol{c}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{x}}[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}] + \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\partial \boldsymbol{c}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{u}^{(j)}}\boldsymbol{u}^{(j+1)}\right]\Bigg|_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}_k,\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_k} =$$

$$= \left[\frac{\partial \boldsymbol{c}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{x}}[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}]\right]\Bigg|_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}_k,\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_k} + \sum_{j=0}^{k-1}\left[\frac{\partial \boldsymbol{c}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{u}^{(j)}}\boldsymbol{u}^{(j+1)}\right]\Bigg|_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}_k,\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_k}$$

Die Behauptung des Induktionsschrittes ist erfüllt, wenn $\left.\frac{\partial \boldsymbol{c}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{u}^{(j)}}\right|_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}_k,\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_k}$ gleich der Nullmatrix $\mathbf{0}_{p\times m}$ ist.

Nach Induktionsannahme hängt $\boldsymbol{c}^{(k)}|_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}_k,\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_k}$ nur von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{u}$ ab, da die Teilmengenbeziehungen $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_{k-1}$ und $\mathcal{U}_k \subset \mathcal{U}_{k-1}$ gelten.

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial \boldsymbol{c}^{(k)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}^{(j)}}\right|_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}_k,\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_k} = \mathbf{0}_{p\times m} \quad \text{für } \ j=1,\ldots,k-2$$

Jetzt bleibt lediglich noch zu zeigen, daß $\left.\frac{\partial \boldsymbol{c}^{(k)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}_k,\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_k} = \mathbf{0}_{p\times m}$ gilt.

Annahme: $\left.\frac{\partial \boldsymbol{c}^{(k)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}_k,\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_k} \neq \mathbf{0}_{p\times m}$ für mindestens ein Paar $\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}_k, \boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_k$.

$\Rightarrow \exists\ i \in \{1,\ldots,p\} \wedge j \in \{1,\ldots,m\}$ mit $\frac{\partial c_i^{(k)}}{\partial u_j}|_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}_k,\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_k} \neq 0$ für mind. ein Paar $\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}_k$, $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_k$.

$\Rightarrow c_i^{(k)}|_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}_k,\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_k} \neq 0$ für mind. ein Paar $\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}_k$, $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_k$, im Widerspruch zur Voraussetzung (4.13)!

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial \boldsymbol{c}^{(k)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}_k,\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_k} = \mathbf{0}_{p\times m}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{c}^{(k)}|_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}_k,\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_k}$ hängt nur von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{u}$ ab.

Damit ist der Satz 4.3 bewiesen. □

Mit den eben ausgeführten Grundideen kann ein Nulldynamikalgorithmus formuliert werden, der nach einem Initialisierungsschritt iterativ die Schritte $k.1$ bis $k.3$ so lange durchläuft, bis die in $k.3$ ($k\in\mathbb{N}$) angegebene Abbruchbedingung erfüllt ist:

Initialisierungsschritt 0:

0.1 Definiere $\mathcal{U}_0 := \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$ und bestimme die Menge $\mathcal{M}_0 := \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\,|\,\boldsymbol{c}(x)=\mathbf{0}\}$.

Iterationsschritt $k \geq 1$:

***k*.1** Setze einen Stellgrößenvektor $\boldsymbol{u}$ aus $\mathcal{U}_{k-1}$ in die $(k-1)$-te Ausgangssignalableitung ein und leite diese anschließend erneut nach der Zeit ab. Dieser Vorgang soll so verstanden werden, daß alle u_i , $(i \in \{1, \ldots, m\})$, für die eine Funktionsvorschrift bereits ermittelt wurde, durch diese in der $(k-1)$-ten Ausgangssignalableitung zu ersetzen sind. Alle anderen u_j werden als noch freie zeitabhängige Funktionen mitgeführt. Ist z. B. die Menge $\mathcal{U}_1 = \{\boldsymbol{u} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \mid u_3 = x_4\}$ und $\dot{c}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = u_3 + u_1$, so ergibt die eben erwähnte Substitution $\dot{c}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_1} = x_4 + u_1$. Dieser substituierte Ausdruck ist nun nach t abzuleiten (im ersten Iterationsschritt beinhaltet $\mathcal{U}_0$ alle denkbaren Stellgrößen, deshalb können keine u_i , $(i \in \{1, \ldots, m\})$ substituiert werden):

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\boldsymbol{c}^{(k-1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k-2)})|_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_{k-1}}) = \\ &\qquad \left.\left(\frac{\partial \boldsymbol{c}^{(k-1)}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}) + \sum_{i=0}^{k-2} \frac{\partial \boldsymbol{c}^{(k-1)}}{\partial \boldsymbol{u}^{(i)}} \boldsymbol{u}^{(i+1)}\right)\right|_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_{k-1}} .\end{aligned} \tag{4.14}$$

***k*.2a** Die k-te Ausgangssignalableitung mit $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_{k-1}$ von (4.14) wird auf $\mathcal{M}_{k-1}$ restringiert. Anschließend sind alle Elemente $c_i^{(k)}|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_{k-1}, \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_{k-1}}$ $(i = 1, \ldots, p)$ auf ihre algebraische Abhängigkeit über $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ hin zu überprüfen. Die daraus resultierenden Bedingungen für die Anfangswerte und die Stellgrößen schränken die Mengen $\mathcal{M}_{k-1}$ und $\mathcal{U}_{k-1}$ weiter ein. Diese eingeschränkten Mengen wiederum definieren $\mathcal{M}_k$ und $\mathcal{U}_k$. Setze dafür

$$\tilde{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k-1)}) := \left.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\boldsymbol{c}^{(k-1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k-2)})|_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_{k-1}})\right]\right|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_{k-1}} . \tag{4.15}$$

Dabei hängt $\tilde{\boldsymbol{c}}$ nach Satz 4.3 formal nicht von den zeitlichen Ableitungen der Stellgröße ab, d.h. es existiert eine Darstellung

$$\tilde{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k-1)}) = [f_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \ldots, f_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})]^{\mathrm{T}} \tag{4.16}$$

mit rationalen Funktionen $f_1, \ldots, f_p$.

Bestimme des weiteren die Menge aller Indizes $\{i_1, \ldots, i_l\} =: \mathcal{I}_k$, für die

$$f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \text{ algebraisch abhängig über } \mathbb{R}[\boldsymbol{x}] \quad \forall\, i \in \mathcal{I}_k \tag{4.17}$$

ist. Anschließend wird die Menge aller Indizes $\{j_1, \ldots, j_{\tilde{k}}\} =: \mathcal{J}_k$, für welche

$$f_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \text{ algebraisch unabhängig über } \mathbb{R}[\boldsymbol{x}] \quad \forall\, j \in \mathcal{J}_k \tag{4.18}$$

ist, ermittelt. Es sei angemerkt, daß die Aussagen

$$\begin{aligned} \tilde{k}, l &\leq p \;, \\ \mathcal{I}_k \cup \mathcal{J}_k &= \{1, \ldots, p\} \quad \text{und} \\ \mathcal{I}_k \cap \mathcal{J}_k &= \emptyset \end{aligned} \tag{4.19}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gelten.

k.2b Ist die Indexmenge $\mathcal{I}_k$ leer, so existieren in diesem Schritt keine Funktionen, die über $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ algebraisch abhängig sind. Deshalb kommen in diesem Teilschritt keine Bedingungen für die Menge der Anfangswerte hinzu. Aus diesem Grund ergibt sich

$$\tilde{\mathcal{M}}_k := \mathcal{M}_{k-1} \; . \tag{4.20}$$

Fahre im Fall einer leeren Indexmenge $\mathcal{I}_k$ mit dem Schritt $k.2c$ fort.

Ist die Indexmenge $\mathcal{I}_k$ nicht leer, müssen die Nullstellen der über $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ algebraisch abhängigen Funktionen f_i , $(i \in \mathcal{I}_k)$ berechnet werden, d.h. die Gleichungen

$$f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0 \;, \quad i \in \mathcal{I}_k \tag{4.21}$$

sind nach $\boldsymbol{x}$ aufzulösen, und die gefundenen Nullstellen definieren die Menge

$$\tilde{\mathcal{M}}_k := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0, \; i \in \mathcal{I}_k \right\} \; . \tag{4.22}$$

Da $f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ für $i \in \mathcal{I}_k$ algebraisch abhängig über $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ ist, hängt f_i nicht explizit von $\boldsymbol{u}$ ab. Falls das Gleichungssystem (4.21) unterbestimmt ist, ist der komplette Algorithmus mehrfach anzuwenden. Es muß dann jeweils eine andere Lösung von (4.21) an dieser Stelle Verwendung finden.

k.2c Sollte eine der Indexmengen $\mathcal{I}_k$ oder $\mathcal{J}_k$ leer sein oder $\tilde{\mathcal{M}}_k = \mathbb{R}^n$ gelten, so kann dieser Teilschritt übersprungen werden.

Die Menge $\mathcal{M}_{k-1}$ stellt die Menge der zulässigen Anfangswerte dar, die eine *Nullung* der Ableitungen des Systemausgangs bis zur Stufe $k-1$ ermöglichen. Diese Menge von Anfangswerten wird durch $\tilde{\mathcal{M}}_k$ ggf. weiter eingeschränkt. Die Restriktion von f_j $(j \in \mathcal{J}_k)$ auf $\tilde{\mathcal{M}}_k$ kann dazu führen, daß die im vorherigen Schritt noch transzendenten Funktionen nicht mehr algebraisch unabhängig über $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ sind. Das ist z. B. der Fall, wenn in $\tilde{\mathcal{M}}_k$ die Bedingung $x_3 = 0$ enthalten und $f_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = x_3 u_4 + x_5$ ist. Denn dann ergibt $f_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{x} \in \tilde{\mathcal{M}}_k} = 0 + x_5$ und kann somit keine Bedingung für die Stellgröße liefern.

Es ist jetzt möglich, daß $\mathcal{J}_k$ auch Indizes von über $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ algebraisch abhängigen Funktionen enthält. Aus diesem Grund muß die Indexteilmenge $\tilde{\mathcal{I}}_k \subset \mathcal{J}_k$, für die

$$f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{x} \in \tilde{\mathcal{M}}_k} \text{ algebraisch abhängig über } \mathbb{R}[\boldsymbol{x}] \quad \forall \; i \in \tilde{\mathcal{I}}_k \tag{4.23}$$

ist, ermittelt werden.

Falls die Indexteilmenge $\tilde{\mathcal{I}}_k$ leer ist, fahre mit Schritt $k.2d$ fort.

Ansonsten müssen, wie im Schritt k.2b, wieder die Gleichungen

$$f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{x}\in\tilde{\mathcal{M}}_k} = 0 \quad i \in \tilde{\mathcal{I}}_k \tag{4.24}$$

nach $\boldsymbol{x}$ aufgelöst werden. Diese Lösungen definieren eine weitere Hilfsmenge $\bar{\mathcal{M}}_k$ durch

$$\bar{\mathcal{M}}_k := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{x}\in\tilde{\mathcal{M}}_k} = 0,\ i \in \tilde{\mathcal{I}}_k\right\} . \tag{4.25}$$

Die Hilfsmenge $\tilde{\mathcal{M}}_k$ aus (4.22) wird durch

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{M}}_k &:= \bar{\mathcal{M}}_k \cap \tilde{\mathcal{M}}_k, \\ \tilde{\mathcal{M}}_k &:= \hat{\mathcal{M}}_k \end{aligned} \tag{4.26}$$

weiter eingeschränkt. Im Falle eines unterbestimmten Gleichungssystems (4.24) ist wie im Schritt $k.2b$ zu verfahren.

Da $\tilde{\mathcal{I}}_k$ nicht leer ist, enthält $\mathcal{J}_k$ auch Indizes von Funktionen $f_i \ \ (i \in \tilde{\mathcal{I}}_k)$, die über $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ algebraisch abhängig sind. Daher wird die Indexmenge $\mathcal{J}_k$ durch

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{J}}_k &:= \mathcal{J}_k \backslash \tilde{\mathcal{I}}_k, \\ \mathcal{J}_k &:= \hat{\mathcal{J}}_k \end{aligned} \tag{4.27}$$

verkleinert, um wieder zu gewährleisten, daß $\mathcal{J}_k$ nur die Indizes der Funktionen $f_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{x}\in\tilde{\mathcal{M}}_k}$ enthält, die über $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ algebraisch unabhängig sind.

Dieser Schritt $k.2c$ muß nun so lange wiederholt werden, bis $\tilde{\mathcal{I}}_k$ die leere Menge ergibt.

***k*.2d** Ist die Menge $\mathcal{J}_k$ leer, so existieren keine über $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ algebraisch unabhängigen Funktionen, und somit sind auch keine neuen Bedingungen für den Stellgrößenvektor ermittelbar. In diesem Fall ändert sich die Menge der Stellgrößenfunktionen nicht:

$$\mathcal{U}_k := \mathcal{U}_{k-1} \ . \tag{4.28}$$

Falls $\mathcal{J}_k$ die leere Menge repräsentiert, fahre mit $k.2e$ fort.

Die Nullstellen der über $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ algebraisch unabhängigen Funktionen f_j $(j \in \mathcal{J}_k)$ ergeben Anforderungen an den Stellgrößenvektor durch das Auflösen der Gleichungen

$$f_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}_{k-1}\cap\tilde{\mathcal{M}}_k} = 0, \quad j \in \mathcal{J}_k \tag{4.29}$$

nach $\boldsymbol{u}$. Die gefundenen Lösungen von (4.29) können von $\boldsymbol{x}$ abhängen. Sofern Lösungen von Gl. (4.29) existieren, ist die Definition einer Hilfsfunktion $\boldsymbol{r} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch

$$f_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_{k-1} \cap \tilde{\mathcal{M}}_k} = 0 \quad \text{für} \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) \ , \quad j \in \mathcal{J}_k \tag{4.30}$$

immer möglich. Liefert Gl. (4.29) ein unterbestimmtes Gleichungssystem, ergeben sich mehrere Möglichkeiten für die Wahl der Funktion $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$. Der komplette Algorithmus sollte dann mehrfach angewendet werden, wobei an dieser Stelle jeweils eine andere Lösung von (4.29) zur Bestimmung von $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ zu wählen ist. Ist das Gleichungssystem (4.29) aufgrund einer Überbestimmtheit nicht lösbar, so kann dieses Problem durch weitere Bedingungen an die Anfangswerte gelöst werden. Dann muß eine Hilfsmenge $\check{\mathcal{M}}_k \subset \mathbb{R}^n$ derart gewählt werden, daß

$$f_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_{k-1} \cap \tilde{\mathcal{M}}_k \cap \check{\mathcal{M}}_k} = 0, \quad j \in \mathcal{J}_k \tag{4.31}$$

nach $\boldsymbol{u}$ aufgelöst werden kann. Wie eben beschrieben, definieren die Lösungen für $\boldsymbol{u}$ die Hilfsfunktion $\boldsymbol{r} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Ist diese Vorgehensweise nicht eindeutig, muß der komplette Algorithmus mehrfach durchlaufen werden.

Durch die Hilfsfunktion $\boldsymbol{r}$ sind weitere Anforderungen an die ausgangssignalnullende Stellgröße spezifizierbar:

$$\tilde{\mathcal{U}}_k := \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \middle| \ \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}(t)) \right\}. \tag{4.32}$$

Die Menge der möglichen Stellgrößen $\mathcal{U}_k$ schränkt sich ggf. damit weiter ein:

$$\mathcal{U}_k := \mathcal{U}_{k-1} \cap \tilde{\mathcal{U}}_k \ . \tag{4.33}$$

$\boldsymbol{k}$.2e Die Menge der Anfangswerte $\mathcal{M}_k$ wird durch

$$\mathcal{M}_k := \mathcal{M}_{k-1} \cap \tilde{\mathcal{M}}_k \tag{4.34}$$

bzw. falls (4.29) überbestimmt ist, via

$$\mathcal{M}_k := \mathcal{M}_{k-1} \cap \tilde{\mathcal{M}}_k \cap \check{\mathcal{M}}_k \tag{4.35}$$

ggf. weiter eingeschränkt. Insgesamt geht daraus

$$f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})|_{(\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_k, \, \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_k)} = 0 \quad \forall \ i \in \{1, \ldots, p\} \tag{4.36}$$

hervor, d.h. die k-te Ausgangssignalableitung ist für $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_k$ mit einer Zustandsrückführung $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_k$ gleich null.

***k*.3** Der Algorithmus kann nach Satz 4.2 abgebrochen werden, wenn keine neuen Bedingungen an die Anfangswerte in dieser Ableitungsstufe hinzugekommen sind, d.h. wenn

$$\mathcal{M}_k \overset{!}{=} \mathcal{M}_{k-1} \tag{4.37}$$

eine wahre Aussage darstellt, ansonsten fährt man mit Schritt k.1 fort.

Ist die Abbruchbedingung (4.37) erfüllt, sind alle Elemente der Nulldynamik bekannt. Bei der Bestimmung des Nullkerns $\mathcal{Z}^*$ müssen zwei Fälle unterschieden werden, zum einen den Fall, daß das analysierte System ein Ersatzsystem (vgl. Polzer (1998)) ist, zum anderen, daß ein unverändertes "Originalsystem" den Gegenstand der Untersuchung darstellt. Im Falle eines Ersatzsystems sind die Anfangswerte der "neuen" Zustandsgrößen bereits festgelegt und schränken daher den Nullkern $\mathcal{Z}^*$ weiter ein. Dies geschieht folgendermaßen:

Es sei σ die Anzahl der "neuen" Zustandsgrößen um die das "Originalsystem" erweitert wurde (vgl. Polzer (1998:S. 4)) . Ferner werde mit $\tilde{n}$ die "ursprüngliche" Dimension des Zustandsmodells bezeichnet (dabei gilt: $n = \sigma + \tilde{n}$). Die Berechnung der Anfangswerte erfolgt nun über die, zum Ersatzsystem gehörende Substitution (vgl. Polzer (1998:S. 7))

$$x_{\tilde{n}+j}(t) := r_j(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \quad , \quad j = 1, \ldots, \sigma \tag{4.38}$$

durch

$$\begin{aligned} x_{\tilde{n}+j}(t_0) &= r_j(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)) \quad , \quad j = 1, \ldots, \sigma \\ &=: x_{\tilde{n}+j,0} \ . \end{aligned} \tag{4.39}$$

Die Menge der zulässigen Anfangswerte muß in diesem Fall über

$$\check{\mathcal{M}}_k := \mathcal{M}_k \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_{\tilde{n}+j} = x_{\tilde{n}+j,0} \ , \ j = 1, \ldots \sigma\} \tag{4.40}$$

eingeschränkt werden.

Im Falle eines Ersatzsystems ergibt sich damit der Nullkern $\mathcal{Z}^*$ zu

$$\mathcal{Z}^* := \check{\mathcal{M}}_k \ , \tag{4.41}$$

ansonsten wird der Nullkern durch

$$\mathcal{Z}^* := \mathcal{M}_k \tag{4.42}$$

festgelegt.

Als ausgangssignalnullende Zustandsrückführung $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}(t)) =: \boldsymbol{u}(t)$ kann ein Element der Menge $\mathcal{U}_k$, also der Menge der ausgangssignalnullenden Stellfunktionen gewählt werden:

$$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{u}(t) \in \mathcal{U}_k \ . \tag{4.43}$$

Mit diesen Größen kann das Nulldynamikvektorfeld $\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x})$ mittels

$$\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}) \quad , \ \boldsymbol{x} \in \mathcal{Z}^* \tag{4.44}$$

berechnet werden, woraus sich direkt die Nulldynamik des Systems

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x}) \quad , \ \boldsymbol{x} \in \mathcal{Z}^* \tag{4.45}$$

ergibt. $\square$

5 Anwendungsbeispiel

Um eine Vergleichsmöglichkeit mit dem Nulldynamikalgorithmus von Isidori (1995) und dem von Senger und Riege (1997) zu geben, wird hier ebenfalls das System

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 x_4 \\ x_5 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{=:\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & x_2 \\ 0 & 1 \\ x_5 & x_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{=:\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{y} &= \underbrace{[x_1, x_2]^T}_{=:\,\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})}\end{aligned} \tag{5.1}$$

analysiert.

Der hier neu vorgestellte Nulldynamikalgorithmus beginnt mit einem

Initialisierungsschritt 0. :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_0 &:= \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \quad ; \\ \mathcal{M}_0 &:= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\} \\ &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 0, x_2 = 0\} \ .\end{aligned} \tag{5.2}$$

Es folgt der **Iterationsschritt 1:**

1.1:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_0}\right] &= \frac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial \boldsymbol{x}}\left[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\right] \\ &= \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \ .\end{aligned} \tag{5.3}$$

1.2a: Setze

$$\begin{aligned}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{u}\,\in\,\mathcal{U}_0}\right]\Bigg|_{\boldsymbol{x}\,\in\,\mathcal{M}_0} &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1 \\ x_4 + x_3 u_1 \end{bmatrix} \qquad (5.4) \\ &=: \tilde{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \\ &=: \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \\ f_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \end{bmatrix} \ . \qquad (5.5)\end{aligned}$$

Bestimme die Menge aller Indizes $\{i_1, \ldots, i_l\} =: \mathcal{I}_1$, für die

$$f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \text{ algebraische abhängig über } \mathbb{R}[\boldsymbol{x}] \ \forall\ i \in \mathcal{I}_i \tag{5.6}$$

ist. Da f_1 und f_2 explizit von u_1 abhängen, sind beide Funktionen über $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ algebraisch unabhängig. Aus diesem Grund gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \emptyset \ \text{ und} && (5.7) \\ \mathcal{J}_1 &= \{1,2\}\ . && (5.8) \end{aligned}$$

1.2b: Die Indexmenge $\mathcal{J}_1$ ist leer, daher wird

$$\tilde{\mathcal{M}}_1 := \mathcal{M}_0 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 0, x_2 = 0\} \tag{5.9}$$

gesetzt. Der Rest von diesem Teilschritt kann übersprungen werden.

1.2c: Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}_0\cap\tilde{\mathcal{M}}_1} &= 0\ , \quad j \in \mathcal{J}_1 = \{1,2\} && (5.10) \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} u_1 &=& 0 \\ x_4 + x_3 u_1 &=& 0 \end{array} \right. & && (5.11) \end{aligned}$$

ist nach $\boldsymbol{u}$ aufzulösen. (5.11) stellt ein überbestimmtes Gleichungssystem dar. Somit muß eine Hilfsmenge $\check{\mathcal{M}}_1 \subset \mathbb{R}^5$ derart gewählt werden, daß das Gleichungssystem (5.11), eingeschränkt auf $\boldsymbol{x} \in \check{\mathcal{M}}_1$, nach $\boldsymbol{u}$ auflösbar ist. Als sinnvolle Wahl für die Menge $\check{\mathcal{M}}_1$ ergibt sich sofort

$$\check{\mathcal{M}}_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_4 = 0\}\ , \tag{5.12}$$

denn damit ist

$$\begin{aligned} f_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}_0\cap\tilde{\mathcal{M}}_1\cap\check{\mathcal{M}}_1} &= 0 \quad j \in \mathcal{J}_1 = \{1,2\} && (5.13) \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} u_1 &=& 0 \\ x_3 u_1 &=& 0 \end{array} \right. & && (5.14) \end{aligned}$$

nach $\boldsymbol{u}$ auflösbar. Aus (5.14) folgt : $u_1 = 0$. Diese Lösung definiert die Hilfsfunktion $\boldsymbol{r} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}_0\cap\tilde{\mathcal{M}}_1\cap\check{\mathcal{M}}_1} = 0 \quad \text{für } \boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) \quad \text{und } j \in \mathcal{J}_1 = \{1,2\}\ . \tag{5.15}$$

Dabei besitzt die Hilfsfunktion $\boldsymbol{r}$ die Gestalt:

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix}\ . \tag{5.16}$$

In (5.14) ist u_2 nicht explizit enthalten, daher bleibt u_2 eine nicht näher bestimmte variable Größe in der Funktionsbeschreibung von $\boldsymbol{r}$. Mittels der Hilfsfunktion $\boldsymbol{r}$ ist ein Anforderung an die Menge der Stellgrößen bekannt:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}_1 &:= \{\boldsymbol{u} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}(t))\} \\ &= \{\boldsymbol{u} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2 \mid u_1(t) = 0\} \ . \end{aligned} \tag{5.17}$$

Die Menge der möglichen Stellgrößen schränkt sich damit erstmals ein:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &:= \mathcal{U}_0 \cap \tilde{\mathcal{U}}_1 \\ &= \{\boldsymbol{u} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \mid u_1(t) = 0\} \ . \end{aligned} \tag{5.18}$$

1.2e: Durch

$$\mathcal{M}_1 := \mathcal{M}_0 \cap \tilde{\mathcal{M}}_1 \cap \check{\mathcal{M}}_1 \tag{5.19}$$

$$= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0\} \tag{5.20}$$

wird die Menge der Anfangswerte $\mathcal{M}_1$ weiter eingeschränkt.

1.3: Die Abbruchbedingung

$$\mathcal{M}_1 \overset{!}{=} \mathcal{M}_0 \tag{5.21}$$

ist noch nicht erfüllt, denn

$$\mathcal{M}_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0\} \neq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 0, x_2 = 0\} = \mathcal{M}_0 \ . \tag{5.22}$$

Aus diesem Grund folgt ein weiterer Iterationsschritt.

2.1: Setze einen Stellgrößenvektor $\boldsymbol{u}$ aus $\mathcal{U}_1$ in die erste Ausgangssignalableitung ein und leite diese anschließend erneut nach der Zeit ab:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_1}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) \tag{5.23}$$

$$= \begin{bmatrix} x_4 + x_2 u_2 \\ x_5 + x_2 u_2 + [x_4 + x_2 u_2] u_2 + x_2 \dot{u}_2 \end{bmatrix} \ . \tag{5.24}$$

2.2a: Die 1. Ausgangssignalableitung, mit $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_1$, wird auf $\mathcal{M}_1$ restringiert und definiert die Funktion $\tilde{\boldsymbol{c}}$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_1}\right]\Bigg|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_5 \end{bmatrix} \\ &=: \tilde{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \\ &=: \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \\ f_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \end{bmatrix} \ . \end{aligned} \tag{5.25}$$

Die beiden Funktionen f_1 und f_2 sind über $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ algebraisch abhängig (vgl. Definition B.11). Daraus ergibt sich direkt, daß die Indexmenge $\mathcal{I}_2$ die Indizes von beiden Funktionen enthält, d. h.

$$\mathcal{I}_2 = \{1, 2\}. \tag{5.26}$$

Da $\mathcal{I}_\in \cup \mathcal{J}_2 = \{1, 2\}$ und $\mathcal{I}_2 \cap \mathcal{J}_2 = \emptyset$ grundsätzlich gilt, folgt für $\mathcal{J}_2$ sofort:

$$\mathcal{J}_2 = \emptyset. \tag{5.27}$$

2.2b: Die Gleichungen

$$\begin{aligned} & f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0 \qquad , \; i \in \mathcal{I}_2 = 1, 2 \\ \Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & = & 0 \\ x_5 & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned} \tag{5.28}$$

sind nach $\boldsymbol{x}$ aufzulösen. In diesem Fall ergibt sich die Menge

$$\tilde{\mathcal{M}}_2 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0, i \in \mathcal{I}_2\}$$

direkt zu

$$\tilde{\mathcal{M}}_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_5 = 0\} \; . \tag{5.29}$$

2.2c: Da die Indexmenge $\mathcal{J}_2$ leer ist, überspringt man diesen Teilschritt und fährt mit 2.2d fort.

2.2d: Dieser Teilschritt wird ebenfalls übersprungen, da die Indexmenge $\mathcal{J}_2$ leer ist.

2.2e: Die Menge der Anfangswerte wird durch

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 \;&:=\; \mathcal{M}_1 \cap \tilde{\mathcal{M}}_2 \\ &=\; \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0\} \end{aligned} \tag{5.30}$$

weiter eingeschränkt.

2.3: Da die Abbruchbedingung

$$\mathcal{M}_2 \;\stackrel{!}{=} \mathcal{M}_1$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 = \; & \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0\} \;\neq \\ & \quad \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0\} \qquad = \; \mathcal{M}_1 \end{aligned} \tag{5.31}$$

noch nicht erfüllt ist, schließt sich ein weiterer Iterationsschritt an.

3.1: Setze einen Stellgrößenvektor $\boldsymbol{u}$ aus $\mathcal{U}_2 = \{\boldsymbol{u} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2 \mid u_1(t) = 0\}$ in die 2. Ausgangssignalableitung ein und differenziere diese erneut nach der Zeit:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\ddot{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_2}\right] = \tag{5.32}$$

$$\begin{bmatrix} x_5 + x_2u_2 + (x_4 + x_2u_2)u_2 + x_2\dot{u}_2 \\ \\ x_3 + u_2 + (x_4 + x_2u_2)u_2 + x_2\dot{u}_2 + (x_5 + x_2u_2)u_2 + x_4\dot{u}_2 + \\ +(x_4 + x_2u_2)u_2^2 + 2x_2u_2\dot{u}_2 + (x_4 + x_2u_2)\dot{u}_2 + x_2\ddot{u}_2 \end{bmatrix} . \tag{5.33}$$

3.2a: Diese Ausgangssignalableitung mit $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_2$ wird auf $\mathcal{M}_2$ restringiert:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ddot{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_2}\right]\Bigg|_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 + u_2 \end{bmatrix} \\ &=: \tilde{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \\ &=: \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \\ f_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} . \end{aligned} \tag{5.34}$$

Nur die Funktion $f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})(= 0)$ ist über $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ algebraisch abhängig. Daher folgt für die Indexmenge $\mathcal{I}_3$:

$$\mathcal{I}_3 = \{1\} . \tag{5.35}$$

Hieraus erhält man sofort, daß nur $f_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})(= x_3 + u_2)$ über $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ algebraisch unabhängig ist. Somit bestimmt sich die Indexmenge $\mathcal{J}_3$ zu:

$$\mathcal{J}_3 = \{2\} . \tag{5.36}$$

3.2b: Es ist die Gleichung

$$\begin{aligned} & f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = 0 \quad , \quad i \in \mathcal{I}_3 = \{1\} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = 0 \end{aligned} \tag{5.37}$$

nach $\boldsymbol{x}$ aufzulösen. Da diese Gleichung immer erfüllt ist, ergeben sich keine Bedingungen für $\boldsymbol{x}$. Aus diesem Grund folgt für die Menge $\tilde{\mathcal{M}}_k$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}}_k &:= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = 0, i \in \mathcal{I}_3\} \\ &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid 0 = 0\} \\ &= \mathbb{R}^5 . \end{aligned} \tag{5.38}$$

3.2c: In der Menge $\tilde{\mathcal{M}}_k$ sind keine Bedingungen für die Anfangswerte enthalten ($\tilde{\mathcal{M}}_k = \mathbb{R}^5$), somit kann dieser Teilschritt übersprungen werden.

3.2d: Die Gleichung

$$\begin{aligned} & f_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\big|_{\boldsymbol{x}\,\in\,\mathcal{M}_2\,\cap\,\tilde{\mathcal{M}}_2} && = 0 \quad , \quad j \in \mathcal{J}_3 = \{2\} \\ \Leftrightarrow \quad & x_3 + u_2 && = 0 \end{aligned} \tag{5.39}$$

ist nach $\boldsymbol{u}$ aufzulösen. Die Lösung ($u_2 = -x_3$) definiert die Hilfsfunktion $\boldsymbol{r} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ über

$$f_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\big|_{\boldsymbol{x}\,\in\,\mathcal{M}_2\,\cap\,\tilde{\mathcal{M}}_2} = 0 \quad , \quad j \in \mathcal{J}_3 = \{2\} \quad \text{für} \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$$

zu

$$r_2(\boldsymbol{x}) = -x_3 \ . \tag{5.40}$$

Die Funktion $r_1(\boldsymbol{x}) = u_1$ kann und braucht nicht näher bestimmt zu werden, da (5.39) nicht von u_1 abhängt. Mit der Hilfsfunktion $\boldsymbol{r}$ sind jetzt weitere Anforderungen an die Stellgrößen spezifizierbar:

$$\tilde{\mathcal{U}}_3 := \{\boldsymbol{u} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^2 \mid u_2(t) = r_2(\boldsymbol{x}(t)) = -x_3(t)\} \ . \tag{5.41}$$

Die Menge der möglichen Stellgrößen schränkt sich damit weiter ein:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_3 &:= \mathcal{U}_2 \cap \tilde{\mathcal{U}}_3 \\ &= \{\boldsymbol{u} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^2 \mid u_1 = 0, u_2(t) = -x_3(t)\} \ . \end{aligned} \tag{5.42}$$

3.2e: Die Abbruchbedingung

$$\mathcal{M}_3 \stackrel{!}{=} \mathcal{M}_2 \tag{5.43}$$

ist erfüllt. Deshalb terminiert der Algorithmus an dieser Stelle.

Der Nullkern $\mathcal{Z}^*$ ist gleich $\mathcal{M}_3$, d. h.

$$\mathcal{Z}^* = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0\} \ . \tag{5.44}$$

Als ausgangssignalnullende Rückführung kann ein Element aus $\mathcal{U}_3$ gewählt werden:

$$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{u}(t) \in \mathcal{U}_3 \tag{5.45}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3(t) \end{bmatrix} \ . \tag{5.46}$$

Mit diesen beiden Größen berechnet sich das Nulldynamikvektorfeld $\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x})$ über

$$\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}) \quad , \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{Z}^*$$

zu

$$\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{Z}^* \,. \tag{5.47}$$

Die Nulldynamik des Systems setzt sich aus den drei soeben bestimmten Größen zusammen:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{x}) \quad , \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{Z}^*$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0\} \,. \tag{5.48}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem von Isidori (1995) (S. 304) und dem von Senger und Riege (1997) (S. 18) überein. Die Nulldynamik (5.48) des Systems (5.1) ist stabil. Anschaulich formuliert heißt das folgendes: Wenn die eigentliche Regelung nur dafür sorgt, daß der Systemausgang $[x_1, x_2]$ null ist und Anfangswerte $\boldsymbol{x}_0$ aus $\mathcal{Z}$ gewählt werden, so ergibt sich ein stabiles Systemverhalten. Der unbeobachtbare Teil des Systems ist also auch stabil.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Die Nulldynamik ist eine wesentliche Systemeigenschaft, die besonders für Systeme von Interesse ist, die durch eine Ausgangsrückführung zu regeln sind. Anschaulich gesprochen beschreibt die Nulldynamik das ïnnere“ dynamische Systemverhalten, wenn ein Systemausgang, der identisch null ist, das Ziel der Regelung darstellt. Die Nulldynamik gewährt also einen Einblick in das dynamische Verhalten der nicht gemessenen Systemzustände.

Ist die Nulldynamik bekannt, lassen sich Aussagen über die Stabilität treffen. Folgende Regelungsstrategien können bei instabiler Nulldynamik zu einem instabilem System führen:

- Modellfolgeregelung,
- Adaptive Regelung,
- Exakte Ein-/ Ausgangslinearisierung und
- High Gain Regelung.

Im Falle einer instabilen Nulldynamik ist es häufig hilfreich, den Systemausgang im Modell zu erweitern und von diesem erweiterten System die Nulldynamik zu bestimmen. Mit weiteren Zustandsgrößen am Systemausgang ist es nämlich möglich, daß die Nulldynamik des so veränderten Systems stabiles Verhalten zeigt. Auf diese Weise läßt sich vorab entscheiden, ob und für welche Zustandsgrößen weitere Meßgeräte an der realen Anlage Aussicht auf Erfolg bezüglich einer stabilen Nulldynamik haben. Die eben beschriebene Erweiterung des Systemausgangs ist nur mit einem Nulldynamikalgorithmus möglich, der eine unterschiedliche Dimension der Systemein- und -ausgänge zuläßt.

Die derzeit relevanten Algorithmen zur Bestimmung der Nulldynamik mit ihren wesentlichen Eigenschaften sind:

- Ein differentialgeometrischer Nulldynamikalgorithmus von Isidori (1995), welcher analytische Systeme mit linear eingehender Steuerung (ALS) untersuchen kann. Die Systeme müssen allerdings die gleiche Anzahl an Systemein- und -ausgängen besitzen. Deshalb ist eine Erweiterung des Systemausgangs mit diesem Algorithmus nicht analysierbar. Diesen Algorithmus haben Essen und Jager (1992) für das Computer-Algebra-System Maple© V Release 3 programmiert, was eine automatisierte Anwendung zuläßt.

- Der differentialalgebraische Nulldynamikalgorithmus von Fortell (1995) geht auf Ritt (1950) zurück. Dieser fordert ebenfalls die gleiche Anzahl an Systemein- und -ausgängen. Außerdem sind zur Systembeschreibung lediglich Polynome zugelassen. Somit ist der Algorithmus auf wesentlich weniger Systeme anwendbar als der von Isidori (1995).

- Mit dem differentialalgebraischen Nulldynamikalgorithmus von Senger und Riege (1997) sind Systeme analysierbar, die eine beliebige Anzahl an Ein- und Ausgangsgrößen aufweisen. Das stellt eine Erweiterung gegenüber dem Algorithmus von Isidori (1995) dar. Es ist allerdings eine zusätzliche Voraussetzung notwendig: Zur Systembeschreibung sind lediglich Polynome zugelassen.

Dieser Bericht stellt einen neuen, differentialalgebraischen Nulldynamikalgorithmus vor, der eine beliebige Anzahl an Systemein- und -ausgängen behandeln kann. Zur Systembeschreibung sind rationale Funktionen zugelassen. Verglichen mit dem Algorithmus von Senger und Riege (1997) ist somit eine größere Systemklasse analysierbar. Systeme, deren Beschreibung nichtrationale Funktionen erfordern, lassen sich analysieren, wenn ein Ersatzsystem vorliegt, welches den Anforderungen der Differentialalgebra genügt. Konkret heißt das, daß die Ersatzsysteme nur rationale Funktionen beinhalten dürfen. In Polzer (1998) findet sich ein Algorithmus zur Bestimmung solcher Ersatzsysteme.

Zur Verdeutlichung der Arbeitsweise des hier neu vorgestellten Nulldynamikalgorithmus wird ein nichtlineares System untersucht, welches auch bei Isidori (1995) und Senger und Riege (1997) Gegenstand der Analyse ist. Das System ist ein akademisches Beispiel, es veranschaulicht aber die Funktionsweise des Algorithmus besser als ein komplexes reales System.

Um die Nulldynamik mit Hilfe eines Rechners zu berechnen, ist eine Programmierung des Nulldynamikalgorithmus von Senger und Riege (1997) und dessen Erweiterung unumgänglich. Dazu bieten sich besonders Computer–Algebra–Systeme, wie MATHEMATICA© oder MAPLE© an, da sie Gleichungen symbolisch verarbeiten können. Diese Programmierung bildet den Gegenstand eines weiteren Berichts. Da das Computer–Algebra–System MAPLE© nicht abwärtskompatibel ist, ist der von Essen und Jager (1992) programmierte Nulldynamikalgorithmus von Isidori (1995) nicht mit der derzeit aktuellen Maple–Version (MAPLE© V RELEASE 5) anwendbar. Um den Algorithmus von Isidori (1995) auch mit der aktuellen Maple–Version automatisiert zu verwenden, ist das Programm von Essen und Jager (1992) anzupassen. Allerdings kommt diese Anpassung einer Neuprogrammierung gleich, was ebenfalls Gegenstand einer weiteren Arbeit ist.

7 Literaturverzeichnis

Bronstein, I. N. und **K. A. Semendjajew**. 1987. *Taschenbuch der Mathematik*. Leipzig: Teubner.

Buchberger, B. 1985. Gröbner Bases: an algorithmic method in polynomial ideal theory. *Multidimensional System Theory: Progress, Directions and Open Problems in Multidimensional Systems*, hg. von N. K. Bose. 184–229. Dordrecht/Niederlande: Reidel.

Byrnes, C. I. und **A. Isidori**. 1989. New results and examples in nonlinear feedback stabilization. *Systems & Control Letters* 12. 437–442.

Di Benedetto, M. D., **J. W. Grizzle** und **C. H. Moog**. 1989. Rank invariants of nonlinear systems. *SIAM J. Control* 27(3). 658–672.

do Carmo, M. P. 1993. *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. Braunschweig: Vieweg.

Essen, H. v. und **B. d. Jager**. 1992. Analysis and design of nonlinear control systems with the symbolic computation system maple. *Proc. IFAC Nonlinear Control System Design Symposium*. Bordeaux/Frankreich. 2081–2085.

Fliess, M. 1987. Nonlinear control theory and differential algebra: Some illustrative examples. *Proc. 10th IFAC World Congress*. München. 114–118.

Fliess, M. 1988. Nonlinear control theory and differential algebra. *Modeling and Adaptive Control*, hg. von C. I. Byrnes und A. Kurszanski. Berlin: Springer.

Fliess, M. 1989. Automatique et corps différentiels. *Forum Mathematik* 1. 227–238.

Fliess, M. und **S. T. Glad**. 1993. An algebraic approach to linear and nonlinear control. *Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications*, hg. von H. L. Trentelmann und J. C. Willems. *Progress in Systems and Control Theory*. 14. 223–267. Boston/USA: Birkhäuser.

Fortell, H. 1995. *Algebraic Approaches to Normal Forms and Zero Dynamics*. Dissertation. Linköping-Universität, Schweden.

Freudenberg, J. S. und **D. P. Looze**. 1985. Right half plane poles nad zeros and design tradeoffs in feedback systems. *IEEE transaktions on automatic control* 30. 555–565.

Horowitz, I. und **Y.-K. Liao**. 1984. Limitations of non-minimum-phase feedback systems. *Int. J. Control* 40. 1003–1013.

Isidori, A. 1995. *Nonlinear Control Systems*. 3. Auflage. Berlin: Springer.

Isidori, A. und **C. I. Byrnes**. 1996. Nonlinear zero dynamics. *The control handbook*, hg. von W. S. Levine. 917–932. Boca Rato: CRC Press.

Jelali, M. 1993. *Zur Beobachtbarkeits-Aanalyse zustandsquadratischer Systeme mit linearer Steuerung (QLS)*. Forschungsbericht 11/93. MSRT. Universität Duisburg.

Jelali, M. 1994a. *Zur Modellierung nichtlinearer Prozesse durch quadratische Systeme mit linearer Steuerung (QLS)*. Forschungsbericht 5/94. MSRT. Universität Duisburg.

Jelali, M. 1994b. *Zur Steuer- und Beobachtbarkeits-Analyse der QLS*. Forschungsbericht 1/94. MSRT. Universität Duisburg.

Johnson, J. 1969. Kähler differentials and differential algebra. *Ann. of Math* 89. 92–98.

Kailath, T. 1980. *Linear Systems*. Englewood Cliffs/USA: Prentice-Hall.

Lemmen, M. 1997. *Ausgangs-Regel-Relative und Nulldynamik*. Forschungsbericht 05/97. MSRT. Universität Duisburg.

Lemmen, M. 1998. *Über Relative und dynamische Systeme*. *VDI Fortschritt-Berichte. Reihe 8*. 711. Düsseldorf: VDI.

Lemmen, M., **T. Wey** und **M. Jelali**. 1995. *NSAS – ein Computer-Algebra-Paket zur Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme*. Forschungsbericht 20/95. MSRT. Universität Duisburg.

Lévine, J. 1997. A Graph-Theoretic Approach to Input-Output Decoupling and Linearization. *Nonlinear Systems*, hg. von A. J. Fossard und D. Normand-Cyrot. 296–310. London/Großbritannien: Chapman & Hall.

Looze, D. P. und **J. S. Freudenberg**. 1996. Tradeoffs and limitations in feedback systems. *The control handbook*, hg. von W. S. Levine. 537–550. Boca Rato: CRC Press.

Lublin, L. und **M. Athans**. 1996. Linear quadratic regulator control. *The control handbook*, hg. von W. S. Levine. 635–650. Boca Rato: CRC Press.

Meyberg, K. 1976. *Algebra Teil 1*. München: Carl Hanser.

Meyberg, K. 1980. *Algebra Teil 2*. 2. Auflage. München: Carl Hanser.

Nijmeijer, H. und **A. J. van der Schaft**. 1990. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. New York/USA: Springer.

Pauer, F. und **M. Pfeifhofer**. 1988. The theory of Gröbner Bases. *L'Enseignement Mathematique* 34. 215–232.

Polzer, J. 1998. *Erweiterte Anwendbarkeit differentialalgebraischer Analysemethoden durch die Nutzung von Ersatzsystemen*. Forschungsbericht 10/98. MSRT. Universität Duisburg.

Remmert, R. 1989. *Funktionentheorie I.* Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag.

Ritt, J. F. 1950. *Differential Algebra.* New York/USA: Amer. Math. Soc.

Sastry, S. und **A. Isidori**. 1989. Adaptive control of linearizable systems. *IEEE Trans. Automat. Control* 34. 1123–1131.

Schwarz, H. 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme – Systemtheoretische Grundlagen.* München: Oldenbourg.

Schwarz, H. 1993. *Quadratische Systeme mit linearer Steuerung (QLS).* Forschungsbericht 12/93. MSRT. Universität Duisburg.

Schwarz, H. 1994. *Die Nulldynamik der BLS und QLS in Regelungsnormalform.* Forschungsbericht 12/94. MSRT. Universität Duisburg.

Senger, M. 1998. An algebraic zero dynamics algorithm for nonlinear analytic MIMO state space systems. *Proc. 4th IFAC Nonlinear Control System Design Symposium.* Enschede/Niederlande.

Senger, M. und **B. Riege**. 1997. *Zur Berechnung der Nulldynamik mit algebraischen Methoden.* Forschungsbericht 14/97. MSRT. Universität Duisburg.

Stöcker, H. 1993. *Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren.* Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch.

Wey, T. 1992. *Einführung in die Differentialalgebra und ihre Anwendung auf nichtlineare Systeme.* Forschungsbericht 10/92. MSRT. Universität Duisburg.

Wey, T. 1996. *Ein graphentheoretischer Ansatz zur strukturellen Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme. VDI Fortschritt-Berichte. Reihe 8.* 556. Düsseldorf: VDI.

Wey, T. und **F. Svaricek**. 1995. Analyse und Synthese nichtlinearer Regelungssysteme mittels Differentialalgebra. *Automatisierungstechnik - at* 43(4). 163–173.

Wey, T. 1998. An algebraic approach to zero dynamics of nonlinear MIMO systems. *Proc. 4th IFAC Nonlinear Control System Design Symposium.* Enschede/Niederlande.

A Funktionsklassen

In diesem Bericht finden glatte, analytische und rationale Funktionen Verwendung:

Definition A.1: ***Glatte Funktionen*** Isidori (1995:S. 471)

(i) Es sei A eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f wird ***glatt*** genannt, wenn alle partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung existieren und stetig sind.

(ii) Es sei A wieder eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{g} : A \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = [g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_m(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}$. Die Funktion $\boldsymbol{g}$ wird ***glatt*** genannt, wenn alle Funktionen $g_i, (i = 1, \ldots, m)$ glatt sind. Die Menge aller glatten Funktionen wird mit C^∞ bezeichnet. □

Definition A.2: ***Analytische Funktionen*** Isidori (1995:S. 471)

(i) Die Teilmenge A der $\mathbb{R}^n$ sei offen und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f wird ***analytisch*** genannt, wenn f eine glatte Funktion ist und es für jeden Punkt $\boldsymbol{x}_0 \in A$ ein Umgebung U derart gibt, daß die Taylorreihe von f für alle $\boldsymbol{x} \in U$ gegen f konvergiert.

(ii) Es sei A wieder eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{g} : A \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = [g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_m(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}$. Die Funktion $\boldsymbol{g}$ wird ***analytisch*** genannt, wenn alle Funktionen $g_i, (i = 1, \ldots, m)$ analytisch sind. □

Definition A.3: ***Rationale Funktionen*** Stöcker (1993:S. 106)

Funktionen, die sich durch endlich viele Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen in den unabhängigen Variablen $\boldsymbol{x}$ beschreiben lassen, werden ***rationale Funktionen*** genannt. □

B Grundlegende Begriffe der Algebra

Grundlage für die differentialalgebraischen Nulldynamikalgorithmen bilden sowohl die Algebra als auch die Differentialalgebra. Aus beiden Gebieten werden jedoch nur relativ elementare Begriffe und Zusammenhänge verwendet. Es ist allerdings unerläßlich, die benötigten Begriffe einzuführen. Da die Algebra Gurndlage der Differentialalgebra ist, werden in diesem Abschnitt zunächst einige Begriffe der Algebra definiert.

Definition B.1: (Meyberg 1980:S. 19) Ein Paar $(H, \circ)$, bestehend aus einer nichtleeren Menge H und einer assoziativen inneren Verknüpfung $\circ$ auf H, heißt ***Halbgruppe***.

□

Definition B.2: (Meyberg 1980:S. 26)

(i) Ein Paar $(G, \cdot)$ heißt eine ***Gruppe***, wenn gilt:

(G_1) : $(G, \cdot)$ ist eine Halbgruppe,

(G_2) : in G gibt es ein neutrales Element e,

(G_3) : zu jedem $a \in G$ gibt es ein $b \in G$ mit $ba = e$.

(ii) Eine Gruppe $(G, \cdot)$ heißt ***abelsch*** oder ***kommutativ***, wenn $ab = ba \quad \forall\, a, b \in G$ gilt. □

Definition B.3: (Meyberg 1980:S. 105) Ein Tripel $(R, +, \cdot)$, bestehend aus einer nichtleeren Menge R und inneren Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + \quad &: R \times R \to R, \quad (x, y) \mapsto x + y, \quad \text{(Addition) und} \\ \cdot \quad &: R \times R \to R, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y, \quad \text{(Multiplikation),} \end{aligned}$$

heißt ein ***Ring***, wenn gilt:

(R_1) : $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(R_2) : $(R, \cdot)$ ist eine Halbgruppe.

(R_3) : Für alle $x, y, z \in R$ gelten die Distributivgesetze.

Hierbei stehen üblicherweise 0 für das neutrale Element bez. der Addition und 1 für das neutrale Element bzgl. der Multiplikation. □

Definition B.4 (Fortell 1995:S. 74)

(i) Ein ***Körper*** K ist ein kommutativer Ring mit Einselement $1 \neq 0$, in dem für alle $a \in K$ mit $a \neq 0$ ein $c \in K$ derart existiert, daß $a \cdot c = 1$ gilt.

(ii) Als Körper mit ***Charakteristik Null*** wird ein Körper bezeichnet, für den kein $p \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{i=1}^{p} v = 0, \quad \forall v \in K \tag{B.1}$$

existiert. □

Definition B.5 (Meyberg 1976:S. 10) Eine nichtleere Teilmenge L eines Körpers K heißt ***Unterkörper*** von K, wenn L bezüglich der in K gegebenen Operationen selbst ein Körper ist. □

Definition B.6 (Meyberg 1976:S. 12) Ist L ein Unterkörper des Körpers K, dann heißt K ***Körpererweiterung*** über K, und wir schreiben (K/L). □

Die mehrdimensionalen Polynome seien hier nicht, wie in der Algebra sonst üblich, eingeführt, sondern so wie bei Fortell (1995). Dieser Ansatz ist wesentlich anschaulicher und für die Nulldynamikuntersuchung völlig hinreichend.

Definition B.7 (Fortell 1995:S. 74) Ein ***Monom*** m in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist ein Produkt

$$m(x_1, \ldots, x_n) := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \quad \text{mit } \alpha_i \in \mathbb{N}_0, i = \{1, \ldots, n\} \,. \tag{B.2}$$

□

Definition B.8 (Fortell 1995:S. 74) Ein ***Polynom*** p in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus einem Ring K ist eine endliche Linearkombination von Monomen:

$$p(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \,. \tag{B.3}$$

Dabei ist $a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \in K$ und $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ für $i = \{1, \ldots, n\}$. □

Definition B.9 Die Polynome in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ bilden über einem kommutativen Ring R mit Einselement ebenfalls einen Ring, welcher durch $R(x_1, \ldots, x_n)$ gekennzeichnet wird. □

Definition B.10 (Meyberg 1976:S. 15) Es sei K/L eine Körpererweiterung.

(i) Ein Element $a \in K$ heißt ***algebraisch*** über L, wenn es ein von Null verschiedenes Polynom $p \in K(x)$ gibt mit $p(a) = 0$.

(ii) Ein Element $a \in K$ heißt ***transzendent*** über K, wenn es nicht algebraisch ist. □

Definition B.11 (Fortell 1995:S. 75) Es seien $f_1, \ldots, f_m \in K$ und K eine Körpererweiterung von L. Die Elemente f_i $(i = 1, \ldots, m)$ werden ***algebraisch abhängig*** über L genannt, wenn ein von null verschiedenes Polynom $p \in L(x_1, \ldots, x_m)$ mit $p(f_1, \ldots, f_m) = 0$ existiert. Ansonsten werden die Elemente f_i $(i = 1, \ldots, m)$ ***algebraisch unabhängig*** über L genannt. □

Definition B.12 (Fortell 1995:S. 76) Es sei K/L eine Körpererweiterung und $U \subset K$ derart gegeben, daß alle Elemente von U über L algebraisch unabhängig sind. Die maximale Anzahl an Elementen, die U unter dieser Bedingungen enthalten kann, wird ***Transzendenzgrad*** von K/L genannt (kurz: ***Trg*** K/L). Besitzt U die maximal mögliche Anzahl an Elementen, so wird U ***Transzendenzbasis*** von K/L genannt. Ist Trg K/L endlich, so wird K/L endlich erzeugt genannt, und falls Trg $K/L = 0$ ist, so nennt man K/L algebraische Körpererweiterung. □

Satz B.13 (Meyberg 1976:S. 55) Für jede Körpererweiterung K/L existiert eine Transzendenzbasis B.

□

Satz B.14 (Meyberg 1976:S. 55) Existiert in einer Körpererweiterung K/L eine endliche Transzendenzbasis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, dann hat jede andere Transzendenzbasis ebenfalls n Elemente. □

Die auf diesen algebraischen Begriffen aufbauende Differentialalgebra ist im nächsten Abschnitt zusammengefaßt dargestellt.

C Grundlegende Begriffe der Differentialalgebra

In den fünfziger Jahren hat der Mathematiker Ritt (1950) die Differentialalgebra mit der Intention erschaffen, ein Werkzeug zu kreieren, welches die gleiche Rolle für Differentialgleichungen spielt wie die Algebra für algebraische Gleichungen. Mitte der achtziger Jahre wurde von Fliess die Bedeutung der Differentialalgebra für die nichtlineare Kontrolltheorie entdeckt. Seitdem haben sich eine Reihe von Wissenschaftlern mit dieser Thematik beschäftigt, so daß mittlerweile ein umfassender Teil der systemtheoretischen Zusammenhänge bei nichtlinearen Systemen mit Hilfe der Differentialalgebra beschreibbar ist. Der Nulldynamikalgorithmus benötigt jedoch nur elementare Begriffe und Zusammenhänge der Differentialalgebra. Eine ausführlichere Einführung in die Differentialalgebra findet sich z. B. bei Ritt (1950), Fliess (1988), Wey und Svaricek (1995) und Wey (1992). Die Differentialalgebra geht bei der Systembeschreibung von Ein-/ Ausgangsdifferentialgleichungen aus, welche rational bezüglich ihrer Argumente sein müssen. Aus diesen Ein-/ Ausgangsdifferentialgleichungen kann ein Zustandsmodell gebildet werden. Bei der physikalischen Modellbildung geht man normalerweise in der umgekehrten Reihenfolge vor. Die notwendigerweise rationalen Ein-/ Ausgangsdifferentialgleichungen stellen für die Modelle real existierender Anlagen keine Einschränkung dar, da sie ggf. in ein entsprechndes Modell transformierbar sind (Fliess 1987).

Definition C.1 (Fliess 1987:S. 114) Ein ***differentieller Ring*** R ist ein kommutativer Ring mit Einselement $1 \neq 0$ und einer Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} : R \to R$, $a \mapsto \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \dot{a}$, für die gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a+b) &= \dot{a}+\dot{b} && \in R, \quad \forall\, a,b \in R \;\text{ und} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ab) &= \dot{a}b + a\dot{b} && \in R, \quad \forall\, a,b \in R\,. \end{aligned} \tag{C.1}$$

□

Definition C.2 (Fliess 1987:S. 114) Ein ***differentieller Körper*** K ist ein Körper mit einer Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} : K \to K$, $a \mapsto \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \dot{a}$, für die gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a+b) &= \dot{a}+\dot{b} && \in K, \quad \forall\, a,b \in K \;\text{ und} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ab) &= \dot{a}b + a\dot{b} && \in K, \quad \forall\, a,b \in K\,. \end{aligned} \tag{C.2}$$

□

Definition C.3 (Fortell 1995:S. 85) Ist der differentielle Körper L eine Teilmenge des differentiellen Körpers K, so wird K ***differentielle Körpererweiterung*** von L genannt und mit K/L bezeichnet. □

Definition C.4 (Fortell 1995:S. 85) Es sei ein differentieller Körper K gegeben. Ein ***differentielles Polynom*** in x mit Koeffizienten aus K ist ein Polynom, das von $x, \dot{x}, \ldots$ abhängt. Die Menge aller differentiellen Polynome in x wird mit $K\{x\}$ bezeichnet. Analog hängt ein differentielles Polynom in $x_1, \ldots, x_m$ auch von allen zeitlichen Ableitungen der x_i $(i = 1, \ldots, m)$ ab. □

Definition C.5 (Fortell 1995:S. 85) Es sei K/L eine differentielle Körpererweiterung. $v \in K$ wird ***differentiell algebraisch*** über L genannt, wenn ein differentielles Polynom $P \in L\{x\}$ $(\neq 0)$ mit der folgenden Form existiert:

$$P(v, \dot{v}, \ldots v^{(i)}) = 0, \quad i \in \mathbb{N}_0 \ . \tag{C.3}$$

Ist v nicht differentiell algebraisch über L, so wird v ***differentiell transzendent über L*** genannt. □

Definition C.6 (Fortell 1995:S. 86) Seien $f_1, \ldots, f_m \in K$ und K/L eine differentielle Körpererweiterung. Die Elemente $f_1, \ldots, f_m$ werden ***differentiell algebraisch abhängig*** über L genannt, wenn ein von null verschiedenes differentielles Polynom $P \in L\{x_1, \ldots, x_m\}$ mit

$$P(f_1, \dot{f}_1, \ldots f_1^{(i_1)}, \ldots, f_m, \dot{f}_m, \ldots, f_m^{(i_m)}) = 0 \quad ; \quad i_1, \ldots, i_m \in \mathbb{N}_0 \tag{C.4}$$

existiert. Ansonsten werden die Elemente $f_1, \ldots, f_m$ ***differentiell algebraisch unabhängig*** über L genannt. □

Definition C.7 (Fortell 1995:S. 86) Es sei K/L eine differentielle Körpererweiterung und $U \subset K$ derart gegeben, daß alle Elemente von U über L differentiell algebraisch unabhängig sind. Die maximale Anzahl an Elementen, die U unter diesen Bedingungen enthalten kann, wird ***differentieller Transzendenzgrad von*** K/L genannt (***diff.Trg*** K/L). Besitzt U die maximal mögliche Anzahl an Elementen, so wird U ***differentielle Transzendenzbasis*** von K/L genannt. Ist diff.Trg K/L endlich, so wird K/L endlich erzeugt genannt. Gilt diff.Trg $K/L = 0$, so nennt man K/L differentiell algebraische Körpererweiterung. □

Definition C.8 (Fliess 1988:S. 138) Als ***differentieller Rang*** ρ^* wird der differentielle Transzendenzgrad der differentiellen Körpererweiterung $K\langle \boldsymbol{y} \rangle / K$ bezeichnet. □

Bemerkung C.9 Der differentielle Rang ρ^* entspricht gerade der Anzahl der voneinander unabhängigen Ausgangsgrößen $y_i \quad (i = 1, \ldots, p)$. □

Satz C.10 (Wey und Svaricek 1995:S. 166) Für den differentiellen Rang ρ^* gilt:

$$\rho^* \leq min(m, p). \tag{C.5}$$

□

Satz C.11 (Fliess 1988:S. 138) Für lineare zeitinvariante Systeme entspricht der differentielle Rang dem Rang der Übertragungsmatrix. □

Definition C.12 (Fliess 1989, Wey 1996:S. 14) Ein ***nichtlineares Ein-/Ausgangssystem*** Σ entspricht einer differentiellen Körpererweiterung $K\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}\rangle / K\langle \boldsymbol{u}\rangle$, die differentiell algebraisch ist. □

Satz C.13 (Fliess 1988:S. 141) Die minimale Dimension einer Zustandssystembeschreibung n_{min} von einem nichtlinearen Ein-/Ausgangssystem entspricht dem (nichtdifferentiellen) Transzendenzgrad der Körpererweiterung $K\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}\rangle / K\langle \boldsymbol{u}\rangle$.

$$n_{min} = Trg.K\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}\rangle / K\langle \boldsymbol{u}\rangle \ . \tag{C.6}$$

□