

# Robuste Regelung eines einachsigen elastischen Roboters mittels Riccati-Gleichungsmethode

Jianqi Wang

Forschungsbericht Nr. 4/99

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

**Übersicht:** Bei elastischen Robotern handelt es sich um ein System mit Multizeitskalen und Parameterunsicherheiten. Obwohl die Multizeitskalen-Singular-Perturbation-Methode verwendet werden kann, um dieses System in ordnungsreduzierte Teilsysteme zu zerlegen, lassen sich die resultierenden Grenzschnittteilsysteme nicht durch die Rückführung der Zustandsvariablen der Grenzschnittteilsysteme stabilisieren, weil wegen der Unsicherheiten die Zustandsvariablen der Grenzschnittteilsysteme nicht aus den elastischen Koordinaten berechnet werden können. Die vorliegende Arbeit enthält neue Ergebnisse zur robusten Regelung einachsiger elastischer Roboter, die auf einer Kombination des Multizeitenskalen-Singular-Perturbation-Verfahrens und der Riccati-Gleichungsmethode basiert. Im Gegensatz zum Standardverfahren des Reglerentwurfs mittels der Singular-Perturbation-Methode stabilisiert das vorgestellte Verfahren das entsprechende Grenzschnittteilsystems vor der Systemdekomposition. Simulationsergebnisse zeigen, daß der durch Verwendung des vorgestellten Verfahrens resultierende Regler starke Robustheit gegenüber der Veränderlichkeit der Nutzlastmasse hat.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg  
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik  
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>III</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Modell eines einachsigen elastischen Roboters</b>	<b>4</b>
<b>3 Singular-Perturbation-System mit Parameterunsicherheiten</b>	<b>6</b>
3.1 Einführung in Singular-Perturbation-Methode . . . . .	6
3.2 System mit Parameterunsicherheiten . . . . .	7
3.3 Problem des Singular-Perturbation-Systems mit Parameterunsicherheiten .	8
<b>4 Modell in Singular-Perturbation-Form mit Parameterunsicherheiten</b>	<b>10</b>
<b>5 Entwurf robuster Regler</b>	<b>13</b>
<b>6 Simulationsergebnisse</b>	<b>20</b>
<b>7 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>23</b>
<b>8 Literaturverzeichnis</b>	<b>24</b>

# Nomenklatur

## Mengen

$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\Xi$	kompakte Untermenge

## Abkürzungen

DMS	Dehnungsmeßstreifen
-----	---------------------

## Vektoren und Matrizen

$\mathbf{A}, \mathbf{A}_i$	nominaler Wert der Systemmatrix
$\mathbf{A}_{ij}, \mathbf{A}_{ij}(\boldsymbol{\sigma})$	$i, j$ -te Untermatrix der Systemmatrix
$\mathbf{A}_i(\cdot), \mathbf{A}_{ic}(\cdot)$	Systemmatrix
$\mathbf{B}, \mathbf{b}_i$	nominaler Wert der Eingangsmatrix
$\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_i(\cdot)$	$i$ -te Untermatrix der Eingangsmatrix
$\mathbf{b}_i(\cdot)$	Eingangsmatrix
$\mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}), \mathbf{E}(\boldsymbol{\sigma})$	Matrixfunktionen
$\mathbf{H}(\cdot)$	Umkehrmatrix zur $\mathbf{M}(\cdot)$
$\mathbf{K}_i$	Reglermatrix
$\mathbf{k}_i$	Vektor der Reglerparameter
$\mathbf{M}(\cdot)$	Trägheitsmatrix
$\mathbf{p}(\mathbf{x}(t))$	Rückführungsvektorfunktion
$\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i, \mathbf{W}_i$	Matrix
$\mathbf{u}(t)$	Stellvektor
$\mathbf{x}(t)$	Zustandsvektor
$\mathbf{x}_0$	Anfangswert von $\mathbf{x}(t)$
$\mathbf{y}(t), \mathbf{y}_k(t)$	Zustandsvektor
$\mathbf{z}(t), \mathbf{z}_k(t)$	Zustandsvektor
$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_0, \boldsymbol{\sigma}_2$	Unsicherheitsvektoren

## Skalare Größen

$a_i, b_i$	nominale Werte
$c_{1i}$	Koeffizient von $\phi_{1i}(x)$
$d(r)$	Funktion
$\underline{d}, \bar{d}$	Konstante
$(EI)_1$	Biegesteifigkeit des Arms
$f_i(\cdot)$	Funktion
$H_{ij}(\cdot)$	$i, j$ -te Element von $\mathbf{H}(\cdot)$
$h_i(\cdot)$	Funktion der Coriolis- und Zentrifugalkräfte
$J_{h1}$	Trägheitsmoment der Nabe
$J_{L1}$	nominaler Wert des Trägheitsmoments der Nutzlast des Arms
$J_p$	Trägheitsmoment des Endeffektors

$k_i^j$	Reglerparameter
$k_{eii}, k_{eii}^*$	Steifigkeit
$l_1$	Länge des Arms
$M_{ij}, M_{ij}(\cdot)$	$i, j$ -tes Element von $\mathbf{M}(\cdot)$
$M_{L1}$	nominaler Wert der Masse der Nutzlast des Arms
$m_p$	Endmasse
$r, r_0$	Konstante
$r_i, s_i$	Grenzwerte
$T(\bar{d}, r)$	Zeitfunktion
$t$	Zeit
$u(t)$	Stellgröße
$w_1(x_1, t)$	Auslenkung des Arms
$x_{i0}(t)$	Zustandsvariablen
$z_{ij}(t)$	Zustandsvariablen
$\alpha_i$	Reglerparameter
$\delta(\bar{d})$	Funktion
$\delta_{1j}(t)$	$j$ -te elastische Koordinate des Arms
$\varepsilon, \varepsilon_i$	Singular-Perturbation-Parameter
$\theta_1(t)$	Gelenkwinkel
$\theta_1^d(t)$	Sollbahn des Gelenks
$\tau_1(t), \tau_1^i(t)$	Moment des Gelenks
$\mu_i, \mu_i^*$	$i$ -ter Singular-Perturbation-Parameter
$\lambda_{1j}$	Frequenz der $j$ -ten Ansatzfunktion des Arms
$\lambda_{1j}^k$	Eigenwert
$\rho_1$	Masse pro Längeneinheit des Arms
$\phi_{1j}(x_1)$	$j$ -te Eigenfunktion des Arms
$\omega_{1i}$	Kreisfrequenz der elastischen Schwingung

### Operatoren

$ \cdot $	Betragsfunktion
$\text{Im}$	Imaginärteil
$\mathcal{O}(\cdot)$	Ordnung „groß O“
$\mathcal{o}(\cdot)$	Ordnung „klein o“
$\dot{(\cdot)}$	zeitliche Ableitung
$(\cdot)'$	partielle Ableitung nach $x$
$\sum$	Summation
$\prod$	Produkt
$\bar{(\cdot)}$	nominaler Wert oder langsamer Anteil
$\hat{(\cdot)}$	schneller Anteil
$\Delta(\cdot)$	Abweichung

# 1 Einleitung

Dem Thema Roboter wird seit Jahren große Aufmerksamkeit in der Industrie, Forschung und Lehre zugeteilt. Die Gründe hierfür sind vielfältig: Für die Industrie steht die Entwicklung und der Einsatz des Roboters als Komponente von Automatisierungslösungen im Vordergrund; Forschung und Lehre nutzen den Roboter gerne als Prototyp eines „mechatronischen Systems“, an dem moderne Methoden aus der Regelungstechnik erprobt werden können (Schwarz 1991). Um den Endeffektor mittels einer einfachen Steuerung bzw. Regelung präzise positionieren zu können, werden die einzelnen Armsegmente und Gelenke der heutigen Industrieroboter als starr ausgelegt, so daß sie bezüglich der Materialbeanspruchung überdimensioniert sind. Die heutigen Roboter erfüllen zwar ihre Aufgaben, im Hinblick auf zukünftige Anforderungen zeichnen sich jedoch Einschränkungen hinsichtlich

- Nutzlast-/Eigengewichtsverhältnis,
- Geschwindigkeit und
- Energieverbrauch

ab. Die sich daraus ableitenden Entwicklungstendenzen sind leichtere und damit „weichere“ Roboter, die bei vielen Aufgabenstellungen, beispielsweise in der Raumfahrt, schon aus Kostengründen gefordert sind.

Die in Leichtbauweise gebauten Armsegmente führen allerdings zu strukturellen Elastizitäten des Robotersystems, die in manchen Fällen, z.B. bei Putzrobotern, auch erwünscht sind. Da die Elastizitäten des Robotersystems großen Einfluß auf dessen Dynamik haben, sind sie bei der Modellierung zu berücksichtigen. Darüber hinaus sollten die wegen der Elastizitäten in Robotersystemen auftretenden, unerwünschten Schwingungen durch die Anwendung moderner Regelungskonzepte gedämpft werden. Wegen der Besonderheit der elastischer Robotersysteme, wie z. B. der Nichtlinearität und dem nichtminimalphasigen Verhalten zwischen Endeffektorposition und Antriebsmoment, ist dies aber eine sehr anspruchsvolle Aufgabe (Book 1993).

Die Modellbildung und die Regelung elastischer Handhabungssysteme sind in den letzten Jahren stark weiterentwickelt worden. In der Literatur finden sich zahlreiche Berichte zu diesem Thema (Book 1993). Bei der Entwicklung von Industrierobotern spielt die Robotersteuerung eine besondere Rolle. Für einen elastischen Roboter wird dies im allgemeinen durch das inverse System realisiert (Bayo 1987, Bayo u. a. 1989, Kwon und Book 1994). Zu diesem Themenbereich gehören auch *input preshaping method* (Khorrami u. a. 1995) sowie *Shaped torque inputs* (Tokhi und Azad 1996).

Zur Regelung elastischer Roboter ist eine Vielzahl von Regelkonzepten vorgeschlagen worden. Unter anderm sind die folgenden zu erwähnen: PD-Gelenkregler (Yigit 1994), lineare

Zustandsrückführung (Cannon und Schmitz 1984, Hastings und Book 1985), nichtlineare Zustandsrückführung (Castelazo und Lee 1990), Verfahren mittels exakter Linearisierung (De Luca u. a. 1989, De Luca und Siciliano 1989, De Luca und Siciliano 1993a, Lucibello und Di Benedetto 1993) und Pseudolinearisierung (Nicosia u. a. 1989), adaptive Regelung (Koivo und Lee 1992, Lammerts u. a. 1995, Yuan u. a. 1989), robuste Regelung (Cordes 1992, Landau u. a. 1996), Fuzzy-Regelung (Fabritz u. a. 1995, Garcia-Benitez u. a. 1993, Moudgal u. a. 1994), lernende Regelung (De Luca und Panzieri 1994, Moudgal u. a. 1995), gain scheduling control (Carusone u. a. 1993), Sliding Mode-Regelung (Parker u. a. 1996), prädiktive Regelung (Cetinkunt und Wu 1992) sowie Regelung mit neuronalen Netzen (Takahashi und Yamada 1994). In Aoustin u. a. (1994), Book u. a. (1975), Chang und Jayasuriya (1995) und Cetinkunt und Book (1990) werden verschiedene Regelkonzepte verglichen.

Bremer und Pfeiffer (1995) und Pfeiffer (1989) haben ein zweistufiges Regelungsverfahren für elastische Roboter entwickelt: Im ersten Schritt entwerfen sie eine Steuerung für einen bestimmten gewünschten Bewegungsablauf mit Hilfe des Modells des entsprechenden starren Roboters. Mit dieser Steuerung kann das Robotersystem als linear betrachtet werden. Im zweiten Schritt regeln sie dann die Abweichungen der Gelenkwinkel von den gewünschten Bahnen und die elastische Schwingungen aus. In Singh und Schy (1986a), Singh und Schy (1986b), Yim und Singh (1995), Nathan und Singh (1991), Nathan und Singh (1992), wird die Steuerung durch eine auf der entsprechenden starren Dynamik beruhende exakte Linearisierung, Sliding Mode-Regelung bzw. robuste Regelung ersetzt. Im zweiten Schritt ist nun nur noch die elastische Schwingung zu dämpfen. In Bernzen (1998), Sakawa u. a. (1985) wird gezeigt, daß die nichtlineare starre Regelung ferner durch einen PD-Gelenkregler ersetzt werden kann, wenn die Motoren der Roboter einen Geschwindigkeitsservoregler besitzen. Eine andere Vorgehensweise, die auf einer durch einen Vorfilter eintretenden Pol-/Nullstellen-Kürzung basiert, wird von Geniele u. a. (1997) und Gross und Tomizuka (1994) angegeben.

Zur aktiven Schwingungsdämpfung werden die Beschleunigungen der Gelenke (Yuan und Jang 1994), das Biegemoment an einer Position nahe der Drehachse (Bernzen 1998, Luo 1993, Luo und Guo 1997, Sakawa u. a. 1985), die elastischen Koordinaten (Singh und Schy 1986a, Singh und Schy 1986b), die Endeffektorposition (Pota 1990), die Geschwindigkeit des Endeffektors (Khorrami und Zheng 1992) sowie die Beschleunigung des Endeffektors (Khorrami und Jain 1993, Kotnik u. a. 1988) zurückgeführt. Neben den Motoren werden auch anders geartete Stellglieder zur Dämpfung von elastischen Schwingungen eingesetzt. Eine andere Idee zur aktiven Schwingungsdämpfung ist die Verwendung zusätzlicher Aktuatoren in Form von piezoelektrischen Elementen, die direkt als räumlich verteilte Aktuatoren an den elastischen Armsegmenten angebracht werden (Burke und Hubbard 1988, Jiang u. a. 1992, Schoenwald und Özgüner 1996).

Bei der Regelung von elastischen Robotern treten im wesentlichen zwei Probleme auf. Zum einen handelt es sich bei elastischen Robotern um ein hoch-dimensionales System mit Multizeitskalen, d.h., ein System, dessen dynamisches Verhalten im wesentlichen durch mehrere verschiedene Zeitkonstanten gekennzeichnet werden kann (Zaad und Khorasani 1996, Siciliano und Book 1988). Wegen der Kopplung zwischen dem langsamen und schnellen Verhalten ist das System schlecht konditioniert. Darunter leiden die Analyse des Systems und der Reglerentwurf. Zum anderen sind im allgemeinen bei Handhabungsaufgaben von Robotern die tatsächlichen Werte der Masse und des Trägheitsmoments der Nutzlast im voraus unbekannt oder während der Durchführung veränderlich. Aus diesen und weiteren Gründen, die hier nicht erläutert werden sollen, wird ein Roboter durch eine Gruppe nichtlinearer Differentialgleichungen mit unsicheren Parametern modelliert.

Das im Mittelpunkt stehende Ziel dieser Arbeit ist, eine robuste Regelung für einen einachsigen elastischen Roboter durch Kombination von dem Multizeitenskalen-Singular-Perturbation-Verfahren und der Riccati-Gleichungsmethode zu entwickeln. Im einzelnen umfaßt die Arbeit die folgenden Abschnitte: Abschnitt 2 enthält die Darstellung eines dynamischen Modells des betrachteten elastischen Roboters. Im Abschnitt 3 werden kurz die wichtigsten der in der Ausarbeitung vorkommenden Begriffe erläutert. Das Modell des elastischen Roboters läßt sich im Abschnitt 4 in eine Singular-Perturbation-Form mit Parameterunsicherheiten überführen. Der Abschnitt 5 befaßt sich ausführlich mit dem Entwurf eines robusten Reglers. Der Abschnitt 6 behandelt die Simulationsstudien. Der Bericht schließt mit einer Zusammenfassung und mit einem Ausblick auf Ziele zukünftiger Forschungen ab.

## 2 Modell eines einachsigen elastischen Roboters

Der Einfachheit halber wird der in Bild 2.1 skizzierte, einachsige elastische Roboter betrachtet. Der homogene elastische Arm bewegt sich in einer horizontalen Ebene.  $(EI)_1$ ,  $\rho_1$  und  $l_1$  bezeichnen die konstanten Werte von Biegesteifigkeit, Masse pro Längeneinheit und Länge des Arms.  $J_{h1}$  ist das Trägheitsmoment der Nabe,  $\tau_1(t)$  das Moment im Gelenk. Die Masse und das Trägheitsmoment der Nutzlast werden mit  $m_p$  und  $J_p$  dargestellt. Unter der Annahme, daß die Verformung des elastischen Arms nur durch reine Biegung

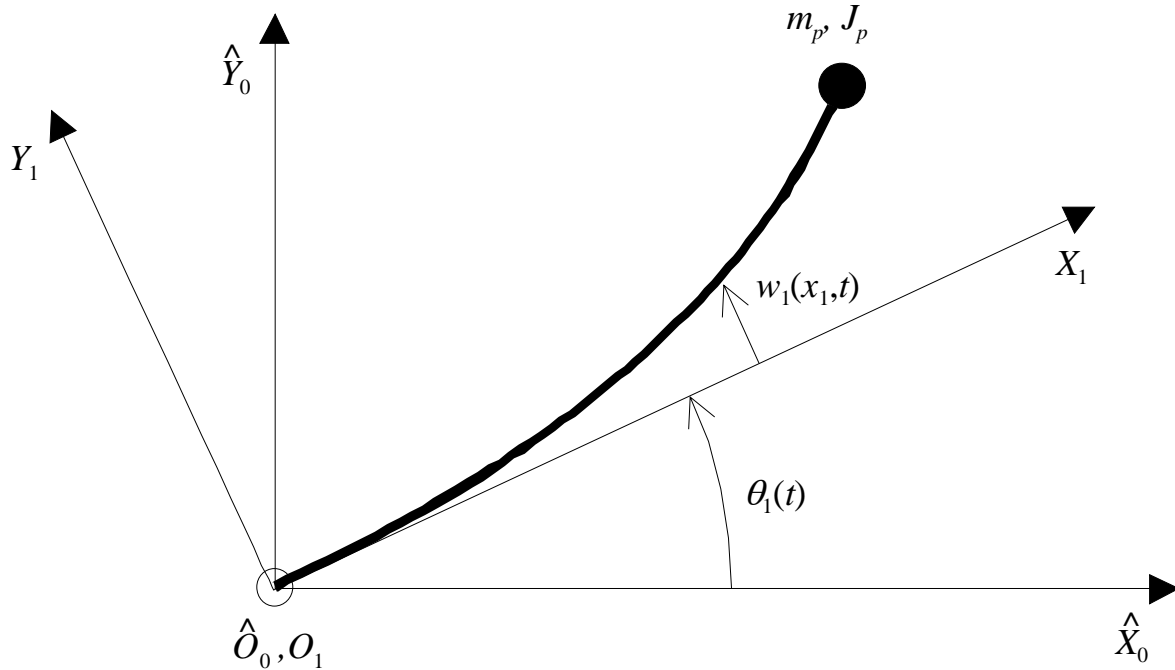


Bild 2.1: Einachsiger elastischer Roboter

$w_1(x_1, t)$  hervorgerufen wird, die sich in der horizontalen Ebene befindet und es sich bei dem Arm um einen Euler-Bernoulli-Balken handelt, ergibt sich das Modell des Roboters aus Wang (1998c) durch Setzen von  $M_{L1} = 0$  und  $J_{L1} = 0$  wie folgt:

$$\begin{aligned}
 M_{00}(\delta_{11}(t), \delta_{12}(t))\ddot{\theta}_1(t) + \sum_{j=1}^2 M_{0j}\ddot{\delta}_{1j}(t) \\
 + h_0(\delta_{11}(t), \delta_{12}(t), \dot{\theta}_1(t), \dot{\delta}_{11}(t), \dot{\delta}_{12}(t)) = \tau_1(t), \quad (2.1) \\
 M_{i0}\ddot{\theta}_1(t) + \sum_{j=1}^2 M_{ij}\ddot{\delta}_{1j}(t) + h_i(\delta_{11}(t), \delta_{12}(t), \dot{\theta}_1(t)) + k_{eii}\delta_{1i}(t) = 0, \quad i = 1, 2,
 \end{aligned}$$

dabei ist  $\theta_1(t)$  der Gelenkwinkel und es gilt für

$$w_1(x_1, t) = \sum_{i=1}^2 \phi_{1i}(x_1)\delta_{1i}(t). \quad (2.2)$$

Die Elemente der Trägheitsmatrix ergeben sich zu:

$$M_{00}(\delta_{11}(t), \delta_{12}(t)) = J_{h1} + \frac{1}{3}\rho_1 l_1^3 + m_p l_1^2 + J_p + \rho_1 l_1 \sum_{i=1}^2 \delta_{1i}^2(t)$$



$$+m_p \left[ \sum_{i=1}^2 \phi_{1i}(l_1) \delta_{1i}(t) \right]^2, \quad (2.3)$$

$$M_{0i} = \frac{2\rho_1}{\lambda_{1i}^2} + m_p l_1 \phi_{1i}(l_1) + J_p \phi'_{1i}(l_1), \quad i = 1, 2, \quad (2.4)$$

$$M_{ii} = \rho_1 l_1 + m_p \phi_{1i}^2(l_1) + J_p \left[ \phi'_{1i}(l_1) \right]^2, \quad i = 1, 2, \quad (2.5)$$

$$M_{12} = m_p \phi_{1i}(l_1) \phi_{1j}(l_1) + J_p \phi'_{1i}(l_1) \phi'_{1j}(l_1), \quad (2.6)$$

$$M_{ij} = M_{ji}, \quad i = 1, 2; \quad 0 \leq j \leq i - 1. \quad (2.7)$$

Die Elemente des Vektors der Coriolis- und Zentrifugalkräfte sind

$$h_0(\delta_{11}(t), \delta_{12}(t), \dot{\theta}_1(t), \dot{\delta}_{11}(t), \dot{\delta}_{12}(t)) = 2 \left\{ \rho_1 l_1 \left[ \sum_{i=1}^2 \delta_{1i}(t) \dot{\delta}_{1i}(t) \right] + m_p \left[ \sum_{i=1}^2 \phi_{1i}(l_1) \delta_{1i}(t) \right] \left[ \sum_{i=1}^2 \phi_{1i}(l_1) \dot{\delta}_{1i}(t) \right] \right\} \dot{\theta}_1(t), \quad (2.8)$$

$$h_i(\delta_{11}(t), \delta_{12}(t), \dot{\theta}_1(t)) = -\rho_1 l_1 \delta_{1i}(t) \dot{\theta}_1^2(t) - m_p \phi_{1i}(l_1) \left[ \sum_{j=1}^2 \phi_{1j}(l_1) \delta_{1j}(t) \right] \dot{\theta}_1^2(t), \quad i = 1, 2. \quad (2.9)$$

Die Elemente der Steifigkeitsmatrix lassen sich wie folgt darstellen:

$$k_{eii} = \rho_1 l_1 \omega_{1i}^2, \quad i = 1, 2, \quad (2.10)$$

und die Ansatzfunktionen werden berechnet als:

$$\phi_{1i}(x_1) = \cosh(\lambda_{1i} x_1) - \cos(\lambda_{1i} x_1) - c_{1i} [\sinh(\lambda_{1i} x_1) - \sin(\lambda_{1i} x_1)], \quad (2.11)$$

$$c_{1i} = \frac{\cos(\lambda_{1i} l_1) + \cosh(\lambda_{1i} l_1)}{\sin(\lambda_{1i} l_1) + \sinh(\lambda_{1i} l_1)}, \quad (2.12)$$

$$1 + \cos(\lambda_{1i} l_1) \cosh(\lambda_{1i} l_1) = 0, \quad (2.13)$$

$$\omega_{1i} = \sqrt{\frac{(EI)_1}{\rho_1}} \lambda_{1i}^2. \quad (2.14)$$

### 3 Singular-Perturbation-System mit Parameterunsicherheiten

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten der in der Ausarbeitung vorkommenden Begriffe kurz erläutert.

#### 3.1 Einführung in Singular-Perturbation-Methode

Entsprechend der Voraussetzung über zwei verschiedene Zeithorizonte geht die Singular-Perturbation-Methode von einer Systemdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_{00}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{01}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_0\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \\ \varepsilon\dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}_{10}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{11}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}(t), & \mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^m\end{aligned}\quad (3.1)$$

für kleine Werte von  $\varepsilon$  aus. Dabei ist  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^r$  der Vektor der Stellgrößen.

Unter der Annahme, daß  $\mathbf{A}_{11}$  nicht singulär ist, läßt sich System (3.1) durch Setzen von  $\varepsilon = 0$  in die folgenden zwei Teilsysteme zerlegen (Kokotovic u. a. 1986):

- das quasistationäre Teilsystem:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}_{00} - \mathbf{A}_{01}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{10}] \bar{\mathbf{x}}(t) + [\mathbf{B}_0 - \mathbf{A}_{01}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{B}_1] \bar{\mathbf{u}}(t), \quad (3.2)$$

$$\bar{\mathbf{z}}(t) = -\mathbf{A}_{11}^{-1}[\mathbf{A}_{10}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_1\bar{\mathbf{u}}(t)]. \quad (3.3)$$

Dabei bezeichnen  $\bar{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\bar{\mathbf{z}}(t)$  und  $\bar{\mathbf{u}}(t)$  den langsamen Anteil von  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{z}(t)$  bzw.  $\mathbf{u}(t)$ .

- das Grenzschichtteilsystem:

$$\varepsilon\dot{\hat{\mathbf{z}}}(t) = \mathbf{A}_{11}\hat{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{B}_1\hat{\mathbf{u}}(t). \quad (3.4)$$

Mit  $\hat{\mathbf{z}}(t)$  und  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  wird der schnelle Anteil von  $\mathbf{z}(t)$  bzw.  $\mathbf{u}(t)$  bezeichnet.

Aus Kokotovic u. a. (1986) folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{O}(\varepsilon), \\ \mathbf{z}(t) &= \bar{\mathbf{z}}(t) + \hat{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{O}(\varepsilon), \\ \mathbf{u}(t) &= \bar{\mathbf{u}}(t) + \hat{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{O}(\varepsilon).\end{aligned}\quad (3.5)$$

Auf der Grundlage des ordnungsreduzierten Systems (3.2) bzw. (3.4) können  $\bar{\mathbf{u}}(t)$  und  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  als

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}(t) &= \mathbf{K}_0\bar{\mathbf{x}}(t), \\ \hat{\mathbf{u}}(t) &= \mathbf{K}_1\hat{\mathbf{z}}(t)\end{aligned}\quad (3.6)$$

ausgewählt werden. Dabei sind  $\mathbf{K}_i$  die Reglermatrizen. Durch Einsetzen von (3.6) und (3.3) in (3.5) ergibt sich

$$\mathbf{u}(t) = [\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 \mathbf{A}_{11}^{-1} (\mathbf{A}_{10} + \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_0)] \mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_1 \mathbf{z}(t). \quad (3.7)$$

**Definition 3.1** (Ladde und Siljak 1983)

Wenn die folgenden Beziehungen gelten

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \mathbf{o}(1), \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j} &= \mathbf{O}(1), \quad i, j = 1, 2, \dots, r, \\ \frac{\mu_i}{\varepsilon_j} &= \mathbf{o}(1), \quad i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, r, \\ \frac{\mu_i}{\mu_j} &= \mathbf{O}(1), \quad i, j = 1, 2, \dots, s, \end{aligned} \quad (3.8)$$

stellen die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_{00} \mathbf{x}(t) + \sum_{k=1}^r \mathbf{A}_{0k} \mathbf{y}_k(t) + \sum_{k=1}^s \mathbf{A}_{0(r+k)} \mathbf{z}_k(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(t), \\ \varepsilon_i \dot{\mathbf{y}}_i(t) &= \mathbf{A}_{i0} \mathbf{x}(t) + \sum_{k=1}^r \mathbf{A}_{ik} \mathbf{y}_k(t) + \sum_{k=1}^s \mathbf{A}_{i(r+k)} \mathbf{z}_k(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t), \\ &\quad i = 1, 2, \dots, r, \\ \mu_i \dot{\mathbf{z}}_i(t) &= \mathbf{A}_{(r+i)0} \mathbf{x}(t) + \sum_{k=1}^r \mathbf{A}_{(r+i)k} \mathbf{y}_k(t) + \sum_{k=1}^s \mathbf{A}_{(r+i)(r+k)} \mathbf{z}_k(t) \\ &\quad + \mathbf{B}_{r+i} \mathbf{u}(t), \quad i = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (3.9)$$

eine Standardform eines Multiparameter-Singular-Perturbation-Systems mit 3-Zeitskalen dar. Dabei sind  $\mu_i$  Parameter mit kleinem Wert.

## 3.2 System mit Parameterunsicherheiten

Ein lineares System mit unsicheren Parametern wird allgemein im Zustandsraum durch die Vektordifferentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma})] \mathbf{x}(t) + [\mathbf{B} + \Delta \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma})] \mathbf{u}(t) \quad (3.10)$$

beschrieben. Dabei ist  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  der Zustandsvektor,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  der Vektor der Stellgrößen.  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sind der nominale Wert der Systemmatrix bzw. der Eingangsmatrix.  $\Delta \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma})$  und  $\Delta \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma})$  sind die Abweichung der Systemmatrix bzw. der Eingangsmatrix von ihrem nominalen Wert.  $\boldsymbol{\sigma}$  ist der Vektor von unsicheren Parametern.

**Definition 3.2** (Chen 1986)

Die Unsicherheiten im System (3.10) können angepaßt werden, wenn Matrixfunktionen  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma})$  und  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\sigma})$  geeigneter Dimensionen existieren, so daß

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}) &= \mathbf{B} \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}) \text{ und} \\ \Delta \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}) &= \mathbf{B} \mathbf{E}(\boldsymbol{\sigma}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

gilt.

**Definition 3.3** (Chen und Leitmann 1987)

Der Regler  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(\mathbf{x}(t))$  macht das System (3.10) praktisch stabil, wenn ein  $\underline{d} \in [0, \infty)$  und  $r_0 > 0$  derart existiert, daß folgende Aussagen gelten:

1. Existenz der Lösung: Im Intervall  $[t_0, t_1]$  ( $t_1 > t_0$ ) existiert eine Trajektorie  $\mathbf{x}(t)$ , die der Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma})] \mathbf{x}(t) + [\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma})] \mathbf{p}(\mathbf{x}(t)) \quad (3.12)$$

und der Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  genügt.

2. Gleichmäßige Beschränktheit: Für  $r \in [0, r_0)$  existiert eine positive reelle Zahl  $d(r) < \infty$ , so daß für alle Lösungen des Systems (3.12),  $\mathbf{x}(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , gilt

$$\|\mathbf{x}_0\| \leq r \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \leq d(r), \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (3.13)$$

3. Fortsetzung der Lösung: Jede Lösung des Systems (3.12),  $\mathbf{x}(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , mit  $\|\mathbf{x}_0\| < r_0$ , kann auf  $[t_0, \infty)$  fortgesetzt werden.

4. Gleichmäßige endgültige Beschränktheit: Für  $\bar{d} > \underline{d}$  und  $r \in [0, r_0)$  existiert  $T(\bar{d}, r) \in [0, \infty)$ , so daß für jede Lösung des Systems (3.12),  $\mathbf{x}(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , gilt

$$\|\mathbf{x}_0\| \leq r \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \leq \bar{d}, \quad \forall t \geq t_0 + T(\bar{d}, r). \quad (3.14)$$

5. Gleichmäßige Stabilität: Für  $\bar{d} > \underline{d}$  existiert eine positive  $\delta(\bar{d}) < \infty$ , so daß für jede Lösung des Systems (3.12),  $\mathbf{x}(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , gilt

$$\|\mathbf{x}_0\| \leq \delta(\bar{d}) \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \leq \bar{d}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.15)$$

### 3.3 Problem des Singular-Perturbation-Systems mit Parameterunsicherheiten

Betrachtet wird das durch

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_{00}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{01}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_0(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \\ \varepsilon \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}_{10}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{11}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_1(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{u}(t), & \mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (3.16)$$

dargestellte Singular-Perturbation-System mit Parameterunsicherheiten.

Durch Verwendung der Singular-Perturbation-Methode zur Regelung des Systems (3.15) erhält man aus (3.5) und (3.3) das Ergebnis

$$\hat{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{z}(t) + \mathbf{A}_{11}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}) [\mathbf{A}_{10}(\boldsymbol{\sigma}) \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_1(\boldsymbol{\sigma}) \bar{\mathbf{u}}(t)]. \quad (3.17)$$

Da  $\boldsymbol{\sigma}$  unbekannt ist, kann  $\hat{\mathbf{z}}(t)$  nicht mit (3.17) berechnet werden. Dies deutet an, daß  $\hat{\mathbf{z}}(t)$  nicht zur Rückführung zur Verfügung steht und der Regler (3.7) für diesen Fall nicht realisierbar ist.

## 4 Modell in Singular-Perturbation-Form mit Parameterunsicherheiten

Da die tatsächlichen Werte der Masse und des Trägheitsmoments der Nutzlast im allgemeinen im voraus unbekannt oder veränderlich sind, soll man sie als unsichere Parameter betrachten. Die Grenzen, in denen die Parameterwerte variieren, können aber als bekannt angenommen werden. Wird der Vektor aus diesen unsicheren Parametern mit  $\sigma_0$  bezeichnet, läßt sich das System aus Gl. (2.1) wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
 M_{00}(\sigma_0, \delta_{11}(t), \delta_{12}(t))\ddot{\theta}_1(t) + \sum_{j=1}^2 M_{0j}(\sigma_0)\ddot{\delta}_{1j}(t) \\
 + h_0(\sigma_0, \delta_{11}(t), \delta_{12}(t), \dot{\theta}_1(t), \dot{\delta}_{11}(t), \dot{\delta}_{12}(t)) = \tau_1(t), \\
 M_{i0}(\sigma_0)\ddot{\theta}_1(t) + \sum_{j=1}^2 M_{ij}(\sigma_0)\ddot{\delta}_{1j}(t) + h_i(\sigma_0, \delta_{11}(t), \delta_{12}(t), \dot{\theta}_1(t)) \\
 + k_{eii}\delta_{1i}(t) = 0, \quad i = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Da die Eigenfunktionen eines nicht rotierenden, einseitig fest eingespannten Balkens, dessen Ende frei ist, als Ansatzfunktionen gewählt werden, haben die Parameterunsicherheiten keinen Einfluß auf  $k_{eii}$  ( $i = 1, 2$ ).

Gleichung (4.1) bildet ein nichtlineares Modell für elastische Roboter mit Parameterunsicherheiten. Das Ziel dieser Arbeit ist, einen robusten Regler für das System (4.1) zu entwerfen, der die Stabilität des geregelten Robotersystems bei Anwesenheit von Unsicherheiten gewährleistet. Da die Anzahl der verallgemeinerten starren und elastischen Koordinaten größer als die Anzahl der Stellgrößen ist, können die Unsicherheiten im allgemeinen nicht mit einer nominalen Eingangsmatrix angepaßt werden (mismatched) (Chen 1986). Deshalb lassen sich dazu die von Corless und Leitmann (1981), Gutman (1979), Leitmann (1979), Leitmann (1981) und Chen (1986) erarbeiteten deterministischen Methoden nicht unmittelbar verwenden. Obwohl das von Barmish und Leitmann (1982) und Chen und Leitmann (1987) erweiterte deterministische Reglerentwurfverfahren manche nicht angepaßte Unsicherheiten ohne Verletzung der Stabilität des geregelten Systems tolerieren kann, ist deren erlaubte Höchstgrenze im allgemeinen zu gering. Die sogenannte Reglerentwurfsmethode mittel Riccati-Gleichungen (Petersen und Hollot 1986, Schmitendorf 1988) hat keine explizite Anforderung an die Erfüllung der anpassenden Bedingungen. Die Existenz von Lösungen für die entsprechende Riccati-Gleichung können aber bei der Verletzung dieser Bedingungen nicht gewährleistet werden.

Wie von Wang (1998b) gezeigt, kann das System (4.1) für viele elastische Roboter als ein System mit 3-Zeitskalen betrachtet werden. Darauf basierend wird in der vorliegenden Arbeit ein neues Verfahren zum Entwurf robuster Regler für den elastischen Roboter mit Hilfe der Riccati-Gleichungsmethode entwickelt. Dazu werden zunächst die Gleichungen aus dem System (4.1) in einer Multizeitskalen-Singular-Perturbation-Form überführt.

Mit

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}_0, \delta_{11}(t), \delta_{12}(t)) = \begin{bmatrix} H_{00}(\boldsymbol{\sigma}_0, \delta_{11}(t), \delta_{12}(t)) & H_{01}(\boldsymbol{\sigma}_0, \delta_{11}(t), \delta_{12}(t)) \\ H_{10}(\boldsymbol{\sigma}_0, \delta_{11}(t), \delta_{12}(t)) & H_{11}(\boldsymbol{\sigma}_0, \delta_{11}(t), \delta_{12}(t)) \\ H_{20}(\boldsymbol{\sigma}_0, \delta_{11}(t), \delta_{12}(t)) & H_{21}(\boldsymbol{\sigma}_0, \delta_{11}(t), \delta_{12}(t)) \\ H_{02}(\boldsymbol{\sigma}_0, \delta_{11}(t), \delta_{12}(t)) \\ H_{12}(\boldsymbol{\sigma}_0, \delta_{11}(t), \delta_{12}(t)) \\ H_{22}(\boldsymbol{\sigma}_0, \delta_{11}(t), \delta_{12}(t)) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

wird die Umkehrmatrix zur Matrix

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}_0, \delta_{11}(t), \delta_{12}(t)) = \begin{bmatrix} M_{00}(\boldsymbol{\sigma}_0, \delta_{11}(t), \delta_{12}(t)) & M_{01}(\boldsymbol{\sigma}_0) & M_{02}(\boldsymbol{\sigma}_0) \\ M_{10}(\boldsymbol{\sigma}_0) & M_{11}(\boldsymbol{\sigma}_0) & M_{12}(\boldsymbol{\sigma}_0) \\ M_{20}(\boldsymbol{\sigma}_0) & M_{21}(\boldsymbol{\sigma}_0) & M_{22}(\boldsymbol{\sigma}_0) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

gekennzeichnet. Für die folgenden Betrachtungen werden  $\mu_j$  ( $j = 1, 2$ ) als der Kehrwert des geometrischen Mittels der Absolutwerte der Imaginärteile der Eigenwerte von der Gruppe  $\{\lambda_{1j}^k$  ( $k = 1, 2$ ) definiert:

$$\mu_j = \frac{1}{\sqrt{\prod_{k=1}^2 |\operatorname{Im}(\lambda_{1j}^k)|}}, \quad j = 1, 2. \quad (4.4)$$

Dabei sind  $\{\lambda_{1j}^k, j = 0, 1, 2; k = 1, 2\}$  die Eigenwerte des linearisierten Modells des Systems (4.1), wenn  $\boldsymbol{\sigma}_0$  den nominalen Wert annimmt.  $\lambda_{10}^k, \lambda_{1j}^k$  ( $j = 1, 2; k = 1, 2$ ) entsprechen den starren Koordinaten  $\theta_1(t)$  und  $\dot{\theta}_1(t)$  bzw. den elastischen Koordinaten  $\delta_{1j}(t)$  und  $\dot{\delta}_{1j}(t)$ . Es werden

$$\begin{aligned} x_{10}(t) &= \theta_1(t), \\ x_{20}(t) &= \dot{\theta}_1(t), \\ z_{1i}(t) &= \frac{1}{2} \delta_{1i}(t), \quad i = 1, 2, \\ z_{2i}(t) &= \frac{1}{\mu_i} \dot{\delta}_{1i}(t), \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

eingeführt. Durch Einsetzen von (4.2) und (4.5) in (4.1) läßt sich das System (4.1) in folgender Multizeitskalen-Singular-Perturbation-Form darstellen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{10}(t) &= x_{20}(t), \\ \dot{x}_{20}(t) &= f_0(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), \mu_2^2 z_{12}(t), x_{20}(t), \mu_1 z_{21}(t), \mu_2 z_{22}(t)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^2 H_{0j}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), \mu_2^2 z_{12}(t)) k_{ejj}^* z_{1j}(t) \\ &\quad + H_{00}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), \mu_2^2 z_{12}(t)) \tau_1(t), \\ \mu_i \dot{z}_{1i}(t) &= z_{2i}(t), \quad i = 1, 2, \\ \mu_i \dot{z}_{2i}(t) &= f_i(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), \mu_2^2 z_{12}(t), x_{20}(t), \mu_1 z_{21}(t), \mu_2 z_{22}(t)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^2 H_{ij}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), \mu_2^2 z_{12}(t)) k_{ejj}^* z_{1j}(t) \\ &\quad + H_{i0}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), \mu_2^2 z_{12}(t)) \tau_1(t), \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

mit

$$\begin{aligned}
f_i(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), \mu_2^2 z_{12}(t), x_{20}(t), \mu_1 z_{21}(t), \mu_2 z_{22}(t)) &= -H_{i0}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), \mu_2^2 z_{12}(t)) \\
&\cdot h_0(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), \mu_2^2 z_{12}(t), x_{20}(t), \mu_1 z_{21}(t), \mu_2 z_{22}(t)) \\
&- \sum_{j=1}^2 H_{ij}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), \mu_2^2 z_{12}(t)) h_j(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), \mu_2^2 z_{12}(t), x_{20}(t)), \\
i &= 0, 1, 2.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$k_{eii}^* = \mu_i^2 k_{eii}, \quad i = 1, 2. \tag{4.8}$$

Im Hinblick auf die Multizeitskalen des Systems (4.6) kann die Multizeitskalen-Singular-Perturbation-Methode zur Zerlegung des Systems (4.6) in 3 ordnungsreduzierte Teilsysteme verwendet werden. Jedes Teilsystem entspricht einer verallgemeinerten Koordinate. Bei jedem Teilsystem ist die Anzahl der Ausgangsgrößen gleich der Anzahl der Stellgrößen, deshalb können die Unsicherheiten angepaßt werden. Da die daraus resultierenden Grenzschnittteilsysteme des Systems (4.6) lediglich grenzstabil sind, muß ein Regler für jedes Grenzschnittteilsystem ausgelegt werden, um die auftretenden dauerhaften Schwingungen zu dämpfen. Dies läßt sich normalerweise durch Zustandsrückführung des Grenzschnittteilsystems realisieren. Wie im Abschnitt 3.3 erwähnt, können die Grenzschnittteilsysteme des Systems (4.6) nicht so stabilisiert werden, weil wegen der Unsicherheiten die Zustandsvariablen der Grenzschnittteilsysteme nicht für die Rückführung zur Verfügung stehen.

Um dieses Problem zu lösen, haben Garofalo und Leitmann (1988 und 1990) den Begriff „nominale quasistationäre Zustände“ eingeführt. Darunter werden hier die quasistationären Zustände, wenn die Unsicherheiten ihre nominalen Werte annehmen, verstanden. Durch Umkehrung der Reihenfolge von Systemdekomposition und Stabilisierung des Grenzschnittteilsystems haben Corless u. a. (1989 und 1993) ein neues Verfahren entwickelt, d.h. sie haben das Grenzschnittteilsystem zunächst asymptotisch stabil gemacht, indem die schnellen Zustände  $z_{ik}(t)$  ( $i = 1, 2$ ) vor der Systemdekomposition mit Bezug auf die  $\mu_k$ -Zeitskala mittels Singular-Perturbation-Methode zurückgeführt werden. Im Hinblick auf die Einfachheit des resultierenden Reglers wird diese Methode, zusammen mit der Riccati-Gleichungsmethode, in der vorliegenden Arbeit zum Entwurf robuster Regler für den elastischen Roboter verwendet.



## 5 Entwurf robuster Regler

Inspiziert von den Arbeiten von Corless u. a. (1989 und 1993) wird der folgende Algorithmus zum Entwurf robuster Regler für das System (4.6) vorgestellt:

### Algorithmus 5.1

1. Bestimmung eines Vektors  $\mathbf{k}_2 = [k_2^1 \ k_2^2]$ , so daß das  $\mu_2$ -Zeitskala Grenzschicht-teilsystem des durch den Regler

$$\tau_1(t) = \mathbf{k}_2 \begin{bmatrix} z_{12}(t) \\ z_{22}(t) \end{bmatrix} + \tau_1^1(t). \quad (5.1)$$

geschlossenen Systems (4.6) asymptotisch stabil ist. Dabei ist  $\tau_1^1(t)$  die Stellgröße für das  $\mu_2$ -Zeitskala quasistationäre Teilsystem des durch (5.1) geschlossenen Systems (4.6). Dies deutet an, daß alle Eigenwerte der Matrix

$$\mathbf{A}_{2c}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t)) = \mathbf{A}_2(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0) + \mathbf{b}_2(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0) \mathbf{k}_2 \quad (5.2)$$

in der linken  $s$ -Halbebene liegen, wobei  $\bar{z}_{11}(t)$  der  $\mu_2$ -Zeitskala langsame Teil von  $z_{11}(t)$  ist, und

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -H_{22}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0) k_{e22}^* & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b}_2(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ H_{20}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Unter der Annahme, daß das  $\mu_2$ -Zeitskala quasistationäre Teilsystem des durch (5.1) geschlossenen Systems (4.6) stabil ist, ist  $\bar{z}_{11}(t)$  beschränkt. Nach Osman und Roberts (1991 und 1995) und Wang und Wend (1997a) läßt sich  $\bar{z}_{11}(t)$  in der Matrix  $\mathbf{A}_{2c}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t))$  zusammen mit  $\boldsymbol{\sigma}_0$  als Parameterunsicherheit betrachten, deren oberen Schranken als bekannt anzunehmen sind. Mit

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = [\boldsymbol{\sigma}_0^T \ \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t) \ 0]^T \in \Xi_2 \quad (5.4)$$

wird der Vektor dieser Parameterunsicherheiten bezeichnet. Dabei ist  $\Xi_2$  eine angegebene kompakte Untermenge eines geeigneten Raums. Die Aufgabe, einen solchen Vektor  $\mathbf{k}_2$  zu ermitteln, läßt sich äquivalent wie folgt darstellen:

Ermittlung von  $\mathbf{k}_2$ , so daß das System

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}_2(\boldsymbol{\sigma}_2) \mathbf{y}(t) + \mathbf{b}_2(\boldsymbol{\sigma}_2) u(t), \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^2, \ u(t) \in \mathbb{R} \quad (5.5)$$

mit

$$u(t) = \mathbf{k}_2 \mathbf{y}(t). \quad (5.6)$$

asymptotisch stabil ist.

Mit Hilfe der Riccati-Gleichung-Methode für Systeme mit Parameterunsicherheiten (Petersen und Hollot 1986, Schmitendorf 1988) gilt

$$\mathbf{k}_2 = -\alpha_2 \mathbf{b}_2^T \mathbf{P}_2. \quad (5.7)$$

Dabei ist  $\alpha_2$  ein positiver Reglerparameter und  $\mathbf{P}_2$  ist die positiv definite, symmetrische Lösung der algebraischen Riccatigleichung

$$\mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 - (2\alpha_2 - 2r_2\alpha_2 - s_2) \mathbf{P}_2 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{W}_2 + \mathbf{Q}_2 = 0, \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{W}_2 &= \begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

$a_2$  und  $b_2$  sind die nominalen Werte von  $-H_{22}(\boldsymbol{\sigma}_2)k_{e22}^*$  bzw.  $H_{20}(\boldsymbol{\sigma}_2)$ , die durch Verwendung der von Osman und Roberts (1991 und 1995) und Wang und Wend (1997a) vorgestellten Methode berechnet werden können.  $s_2$  und  $r_2$  bezeichnen die Grenze von  $\frac{\Delta a_2(\boldsymbol{\sigma}_2)}{b_2}$  bzw.  $\frac{\Delta b_2(\boldsymbol{\sigma}_2)}{b_2}$ ,  $\Delta a_2(\boldsymbol{\sigma}_2)$  und  $\Delta b_2(\boldsymbol{\sigma}_2)$  sind die Abweichung von  $-H_{22}(\boldsymbol{\sigma}_2)k_{e22}^*$  bzw.  $H_{20}(\boldsymbol{\sigma}_2)$  von ihrem nominalen Wert. Somit gelten

$$\begin{aligned} -H_{22}(\boldsymbol{\sigma}_2)k_{e22}^* &= a_2 + \Delta a_2(\boldsymbol{\sigma}_2), \\ H_{20}(\boldsymbol{\sigma}_2) &= b_2 + \Delta b_2(\boldsymbol{\sigma}_2), \\ \max_{\boldsymbol{\sigma}_2 \in \Xi_2} \left| \frac{\Delta a_2(\boldsymbol{\sigma}_2)}{b_2} \right| &\leq s_2, \\ \max_{\boldsymbol{\sigma}_2 \in \Xi_2} \left| \frac{\Delta b_2(\boldsymbol{\sigma}_2)}{b_2} \right| &\leq r_2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Da die Unsicherheiten im System (5.5) angepaßt werden können und das mit  $\mathbf{A}_2$  und  $\mathbf{b}_2$  beschriebene nominale System normalerweise als steuerbar anzunehmen ist (Wang 1998c), ist die Existenz der Lösung der Riccatigleichung (5.8) für  $r_2 < 1$  gewährleistet.

2. Durch Einsetzen von (5.1) in (4.6) folgt

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{10}(t) &= x_{20}(t), \\
\dot{x}_{20}(t) &= f_0(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), \mu_2^2 z_{12}(t), x_{20}(t), \mu_1 z_{21}(t), \mu_2 z_{22}(t)) \\
&\quad - \sum_{j=1}^2 H_{0j}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), \mu_2^2 z_{12}(t)) k_{ejj}^* z_{1j}(t) \\
&\quad + H_{00}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), \mu_2^2 z_{12}(t)) [k_2^1 z_{12}(t) + k_2^2 z_{22}(t)] \\
&\quad + H_{00}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), \mu_2^2 z_{12}(t)) \tau_1^1(t), \\
\mu_i \dot{z}_{1i}(t) &= z_{2i}(t), \quad i = 1, 2, \\
\mu_i \dot{z}_{2i}(t) &= f_i(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), \mu_2^2 z_{12}(t), x_{20}(t), \mu_1 z_{21}(t), \mu_2 z_{22}(t)) \\
&\quad - \sum_{j=1}^2 H_{ij}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), \mu_2^2 z_{12}(t)) k_{ejj}^* z_{1j}(t) \\
&\quad + H_{i0}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), \mu_2^2 z_{12}(t)) [k_2^1 z_{12}(t) + k_2^2 z_{22}(t)] \\
&\quad + H_{i0}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), \mu_2^2 z_{12}(t)) \tau_1^1(t), \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

3. Da alle Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}_{2c}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t))$  in der linken  $s$ -Halbebene liegen, ist  $-H_{22}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0) k_{e22}^* + H_{20}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0) k_2^1$  nicht gleich Null. Deshalb lässt sich das System (5.11) durch Setzen von  $\mu_2 = 0$  in die folgenden zwei Teilsysteme zerlegen:

- Das quasistationäre Teilsystem:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{x}}_{10}(t) &= \bar{x}_{20}(t), \\
\dot{\bar{x}}_{20}(t) &= \bar{f}_0(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), \bar{x}_{20}(t), \mu_1 \bar{z}_{21}(t)) \\
&\quad - \bar{H}_{01}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t)) k_{e11}^* \bar{z}_{11}(t) \\
&\quad + \bar{H}_{00}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t)) \tau_1^1(t), \\
\mu_1 \dot{\bar{z}}_{11}(t) &= \bar{z}_{21}(t), \\
\mu_1 \dot{\bar{z}}_{21}(t) &= \bar{f}_1(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), \bar{x}_{20}(t), \mu_1 \bar{z}_{21}(t)) \\
&\quad - \bar{H}_{11}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t)) k_{e11}^* \bar{z}_{11}(t) \\
&\quad + \bar{H}_{10}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t)) \tau_1^1(t),
\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
\bar{z}_{12}(t) &= -[-H_{22}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0) k_{e22}^* + H_{20}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0) k_2^1]^{-1} \\
&\quad \cdot [f_2(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0, \bar{x}_{20}(t), \mu_1 \bar{z}_{21}(t), 0) \\
&\quad - H_{21}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0) k_{e11}^* \bar{z}_{11}(t) \\
&\quad + H_{20}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0) \tau_1^1(t)], \\
\bar{z}_{22}(t) &= 0.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Dabei sind  $\bar{x}_{i0}(t)$  und  $\bar{z}_{i2}(t)$  ( $i = 1, 2$ ) der langsame Teil von  $x_{i0}(t)$  bzw.  $z_{i2}(t)$ ,

und

$$\begin{aligned}
\bar{f}_i(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), \bar{x}_{20}(t), \mu_1 \bar{z}_{21}(t)) &= f_i(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0, \bar{x}_{20}(t), \mu_1 \bar{z}_{21}(t), 0) \\
&\quad - [-H_{i2}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0)k_{e22}^* + H_{i0}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0)k_2^1] \\
&\quad \cdot [-H_{22}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0)k_{e22}^* + H_{20}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0)k_2^1]^{-1} \\
&\quad \cdot f_2(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0, \bar{x}_{20}(t), \mu_1 \bar{z}_{21}(t), 0), \quad i = 0, 1, \\
\bar{H}_{ij}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t)) &= H_{ij}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0) \\
&\quad - [-H_{i2}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0)k_{e22}^* + H_{i0}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0)k_2^1] \\
&\quad \cdot [-H_{22}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0)k_{e22}^* + H_{20}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0)k_2^1]^{-1} \\
&\quad \cdot H_{2j}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), 0), \quad i, j = 0, 1.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

- Das asymptotisch stabile Grenzschichtteilsystem:

$$\begin{aligned}
\mu_2 \dot{\hat{z}}_{12}(t) &= \hat{z}_{22}(t), \\
\mu_2 \dot{\hat{z}}_{22}(t) &= [-H_{22}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), 0)k_{e22}^* + H_{20}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), 0)k_2^1] \hat{z}_{12}(t) \\
&\quad + H_{20}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 z_{11}(t), \mu_2^2 z_{12}(t))k_2^2 z_{22}(t),
\end{aligned} \tag{5.15}$$

wobei  $\hat{z}_{i2}(t)$  ( $i = 1, 2$ ) den schnellen Teil von  $z_{i2}(t)$  bezeichnen.

Nach Kokotovic u. a. (1986) ergeben sich

$$\begin{aligned}
x_{i0}(t) &= \bar{x}_{i0}(t) + \mathbf{O}(\varepsilon_2), \\
z_{i1}(t) &= \bar{z}_{i1}(t) + \mathbf{O}(\varepsilon_2), \\
z_{i2}(t) &= \bar{z}_{i2}(t) + \hat{z}_{i2}(t) + \mathbf{O}(\varepsilon_2), \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Dabei gilt  $\varepsilon_2 = \mu_2/\mu_1$ .

4. Ermittlung eines Vektors  $\mathbf{k}_1 = [k_1^1 \quad k_1^2]$ , so daß das  $\mu_1$ -Zeitskala Grenzschichtteilsystem des durch den Regler

$$\tau_1^1(t) = \mathbf{k}_1 \begin{bmatrix} \bar{z}_{11}(t) \\ \bar{z}_{21}(t) \end{bmatrix} + \tau_1^0(t) \tag{5.17}$$

geschlossenen Systems (5.12) asymptotisch stabil ist. Dabei ist  $\tau_1^0(t)$  die Stellgröße für das  $\mu_1$ -Zeitskala quasistationäre Teilsystem des durch (5.17) geschlossenen Systems (5.12). Die Berechnung von  $\mathbf{k}_1$  verläuft analog der Berechnung von  $\mathbf{k}_2$ .

5. Durch Einsetzen von (5.17) in (5.12) folgt

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_{10}(t) &= \bar{x}_{20}(t), \\
\dot{\hat{x}}_{20}(t) &= \bar{f}_0(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), \bar{x}_{20}(t), \mu_1 \bar{z}_{21}(t)) - \bar{H}_{01}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t))k_{e11}^* \bar{z}_{11}(t) \\
&\quad + \bar{H}_{00}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t)) [k_1^1 \bar{z}_{11}(t) + k_1^2 \bar{z}_{12}(t)] \\
&\quad + \bar{H}_{00}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t))\tau_1^0(t), \\
\mu_1 \dot{\hat{z}}_{11}(t) &= \bar{z}_{21}(t), \\
\mu_1 \dot{\hat{z}}_{21}(t) &= \bar{f}_1(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t), \bar{x}_{20}(t), \mu_1 \bar{z}_{21}(t)) - \bar{H}_{11}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t))k_{e11}^* \bar{z}_{11}(t) \\
&\quad + \bar{H}_{10}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t)) [k_1^1 \bar{z}_{11}(t) + k_1^2 \bar{z}_{12}(t)] \\
&\quad + \bar{H}_{10}(\boldsymbol{\sigma}_0, \mu_1^2 \bar{z}_{11}(t))\tau_1^0(t).
\end{aligned} \tag{5.18}$$

6. Da das Grenzschichtteilsystem des Systems (5.18) asymptotisch stabil ist, ist  $-\bar{H}_{11}(\boldsymbol{\sigma}_0, 0)k_{e11}^* + \bar{H}_{10}(\boldsymbol{\sigma}_0, 0)k_1^1$  nicht gleich Null. Deshalb läßt sich das System (5.18) durch Setzen von  $\mu_1 = 0$  in die folgenden zwei Teilsysteme zerlegen:

- Das quasistationäre Teilsystem:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_{10}(t) &= \bar{x}_{20}(t), \\ \dot{\bar{x}}_{20}(t) &= \bar{H}_{00}(\boldsymbol{\sigma}_0)\tau_1^0(t),\end{aligned}\tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}\bar{z}_{11}(t) &= -[-\bar{H}_{11}(\boldsymbol{\sigma}_0, 0)k_{e11}^* + \bar{H}_{10}(\boldsymbol{\sigma}_0, 0)k_1^1]^{-1} \bar{H}_{10}(\boldsymbol{\sigma}_0, 0)\tau_1^0(t), \\ \bar{z}_{21}(t) &= 0.\end{aligned}\tag{5.20}$$

Dabei werden die Beziehungen  $h_0(\boldsymbol{\sigma}_0, 0, 0, \dot{\theta}(t), 0, 0) = 0$  und  $h_i(\boldsymbol{\sigma}_0, 0, 0, \dot{\theta}(t)) = 0$  ( $i = 1, 2$ ) verwendet.  $\bar{x}_{i0}(t)$  und  $\bar{z}_{i1}(t)$  ( $i = 1, 2$ ) sind der langsame Teil von  $\bar{x}_{i0}(t)$  bzw.  $\bar{z}_{i1}(t)$ , und

$$\begin{aligned}\bar{H}_{00}(\boldsymbol{\sigma}_0) &= \bar{H}_{00}(\boldsymbol{\sigma}_0, 0) - [-\bar{H}_{01}(\boldsymbol{\sigma}_0, 0)k_{e11}^* + \bar{H}_{00}(\boldsymbol{\sigma}_0, 0)k_1^1] \\ &\quad \cdot [-\bar{H}_{11}(\boldsymbol{\sigma}_0, 0)k_{e11}^* + \bar{H}_{10}(\boldsymbol{\sigma}_0, 0)k_1^1]^{-1} \bar{H}_{10}(\boldsymbol{\sigma}_0, 0).\end{aligned}\tag{5.21}$$

- Das asymptotisch stabile Grenzschichtteilsystem:

$$\begin{aligned}\mu_1 \dot{\hat{z}}_{11}(t) &= \hat{z}_{12}(t), \\ \mu_1 \dot{\hat{z}}_{21}(t) &= [-\bar{H}_{11}(\boldsymbol{\sigma}_0, 0)k_{e11}^* + \bar{H}_{10}(\boldsymbol{\sigma}_0, 0)k_1^1] \hat{z}_{11}(t) \\ &\quad + \bar{H}_{10}(\boldsymbol{\sigma}_0, 0)k_1^2 \hat{z}_{12}(t),\end{aligned}\tag{5.22}$$

wobei  $\hat{z}_{1i}(t)$  ( $i = 1, 2$ ) die schnellen Teile von  $\bar{z}_{1i}(t)$  bezeichnen.

Nach Kokotovic u. a. (1986) gilt

$$\begin{aligned}\bar{x}_{i0}(t) &= \bar{x}_{i0}(t) + \mathbf{O}(\mu_1), \\ \bar{z}_{i1}(t) &= \bar{z}_{i1}(t) + \hat{z}_{i1}(t) + \mathbf{O}(\mu_1), \quad i = 1, 2.\end{aligned}\tag{5.23}$$

7. Entwurf eines robusten Folgeregler für das starre Untersystem.

Damit das Gelenk des Roboters eine vorgegebene Bahn  $\theta_1^d(t)$  verfolgt, wird  $\tau_1^0(t)$  als

$$\tau_1^0(t) = \frac{1}{b_0} \ddot{\theta}_1^d(t) + \mathbf{k}_0 \begin{bmatrix} \bar{x}_{10}(t) - \theta_1^d(t) \\ \bar{x}_{20}(t) - \dot{\theta}_1^d(t) \end{bmatrix}\tag{5.24}$$

gewählt. Zur Berechnung des Vektors  $\mathbf{k}_0$  kann die Riccati-Gleichung-Methode ebenfalls verwendet werden. Daraus folgt  $\mathbf{k}_0 = -\alpha_0 \mathbf{b}_0^T \mathbf{P}_0$ . Dabei ist  $\alpha_0$  ein positiver Reglerparameter und  $\mathbf{P}_0$  ist die positiv definite, symmetrische Lösung der algebraischen Riccatingleichung

$$\mathbf{P}_0 \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0^T \mathbf{P}_0 - 2\alpha_0(1 - r_0) \mathbf{P}_0 \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_0^T \mathbf{P}_0 + \mathbf{Q}_0 = 0\tag{5.25}$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.26)$$

$b_0$  ist der nominale Wert von  $\bar{H}_{00}(\boldsymbol{\sigma}_0)$ .  $r_0$  bezeichnet die Grenze von  $\frac{\Delta b_0(\boldsymbol{\sigma}_0)}{b_0}$ .  $\Delta b_0(\boldsymbol{\sigma}_0)$  ist die Abweichung von  $\bar{H}_{00}(\boldsymbol{\sigma}_0)$  von seinem nominalen Wert. Das heißt

$$\begin{cases} \bar{H}_{00}(\boldsymbol{\sigma}_0) = b_0 + \Delta b_0(\boldsymbol{\sigma}_0) \\ \max_{\boldsymbol{\sigma}_0 \in \Xi_0} \left| \frac{\Delta b_0(\boldsymbol{\sigma}_0)}{b_0} \right| \leq r_0 \end{cases} \quad (5.27)$$

$b_0$  kann durch Verwendung der von Osman und Roberts (1991 und 1995) und Wang und Wend (1997a) vorgestellten Methode berechnet werden.

8. Ende.

**Bemerkung 5.1:** Das folgende Iterationsverfahren kann zur Bestimmung der Grenze von  $\bar{\delta}_{11}(t)$  verwendet werden:

1. Wahl der Anfangswerte als  $[\delta_{11min}, \delta_{11max}]$ .
2. Berechnung der Reglerparameter.
3. Simulationen des geschlossenen Systems für alle mögliche  $\boldsymbol{\sigma}_0$ . Wenn  $\delta_{11}(t)$  immer im Intervall  $[\delta_{11min}, \delta_{11max}]$  liegt, Ende; sonst  
wenn  $\min(\delta_{11}(t)) < \delta_{11min}$ , setze  $\delta_{11min} = \min(\delta_{11}(t))$   
wenn  $\max(\delta_{11}(t)) > \delta_{11max}$ , setze  $\delta_{11max} = \max(\delta_{11}(t))$   
gehe zum Punkt 2.

Aus (5.24), (5.17) und (5.1) ergibt sich der Gesamtregler zu:

$$\tau_1(t) = \frac{1}{b_0} \ddot{\theta}_1^d(t) + \mathbf{k}_0 \begin{bmatrix} x_{10}(t) - \theta_1^d(t) \\ x_{20}(t) - \dot{\theta}_1^d(t) \end{bmatrix} + \mathbf{k}_1 \begin{bmatrix} z_{11}(t) \\ z_{21}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{k}_2 \begin{bmatrix} z_{12}(t) \\ z_{22}(t) \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Für das mit (5.28) geregelte Robotersystem (4.6) gilt der Satz:

**Satz 5.1:** Wenn die  $\mathbf{k}_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) so gewählt werden, daß die folgenden Forderungen erfüllt werden:

- Die Teilsysteme (5.15), (5.22) und das mit (5.24) geregelte System (5.19) sind asymptotisch stabil.
- Die Zeitskalen des offenen Gesamtsystems werden beim über (5.28) geschlossenen System beibehalten.

Dann existieren  $\mu_i^* > 0$  ( $i = 1, 2$ ) und für alle  $\mu_i \in (0, \mu_i^*]$  ist das über (5.28) geschlossene System (4.6) asymptotisch stabil.  $\square$

Der Beweis verläuft analog dem Beweis von Satz 5.1 in Wang (1998a).

## 6 Simulationsergebnisse

Das im vorangegangenen Abschnitt entwickelte Reglerentwurfsverfahren wird mit Hilfe von Simulationen des betrachteten einachsigen planaren elastischen Roboters verifiziert. Die physikalischen Parameter des Roboters ergeben sich nach De Luca und Siciliano (1993b) zu:

$$\begin{aligned}
 l_1 &= 0,5 \text{ m}, \\
 \rho_1 &= 1,0 \text{ kg/m}, \\
 (EI)_1 &= 10 \text{ N}\cdot\text{m}^2, \\
 J_{h1} &= 0,1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \\
 J_p &= 0,0005 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \\
 m_p &\text{ ändert sich im Intervall } [0,05 \text{ kg}, 0,15 \text{ kg}] .
 \end{aligned}$$

Die übrigen Parameter im Modell des elastischen Roboters lassen sich berechnen zu:

$$\begin{aligned}
 \omega_{11} &= 44,4745 \text{ rad/s}, \\
 \omega_{12} &= 278,7167 \text{ rad/s}, \\
 \phi_{11}(l_1) &= 2, \\
 \phi_{12}(l_1) &= -2, \\
 \phi'_{11}(l_1) &= 5,506, \\
 \phi'_{12}(l_1) &= -19,1231.
 \end{aligned}$$

Für den Entwurf des robusten Reglers wird der nominale Wert von  $m_p$  zu 0,1 kg gesetzt. Somit lassen sich  $\mu_1 = 0,0238$  und  $\mu_2 = 0,0046$  berechnen, wenn System (4.1) um den Arbeitspunkt  $[\theta_1(t), \delta_{11}(t), \delta_{12}(t), \dot{\theta}_1(t), \dot{\delta}_{11}(t), \dot{\delta}_{12}(t)] = [0, 0, 0, 0, 0, 0]$  und  $\tau_1(t) = 0$  linearisiert wird.

Zur Bestimmung der Reglerparameter wird angenommen, daß  $\delta_{11}(t)$  auf das Intervall  $[-0,05, 0,05]$  beschränkt sei. Daraus ergeben sich  $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1,0084 & 0 \end{bmatrix}$  und  $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,3939 \end{bmatrix}$ . Mit  $s_2 = 0,1610$ ,  $r_2 = 0,0215$ ,  $\alpha_2 = 45$  und  $\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,97092 \end{bmatrix}$  wird  $\mathbf{k}_2 = [4,0244 \quad 5,7296]$  berechnet.

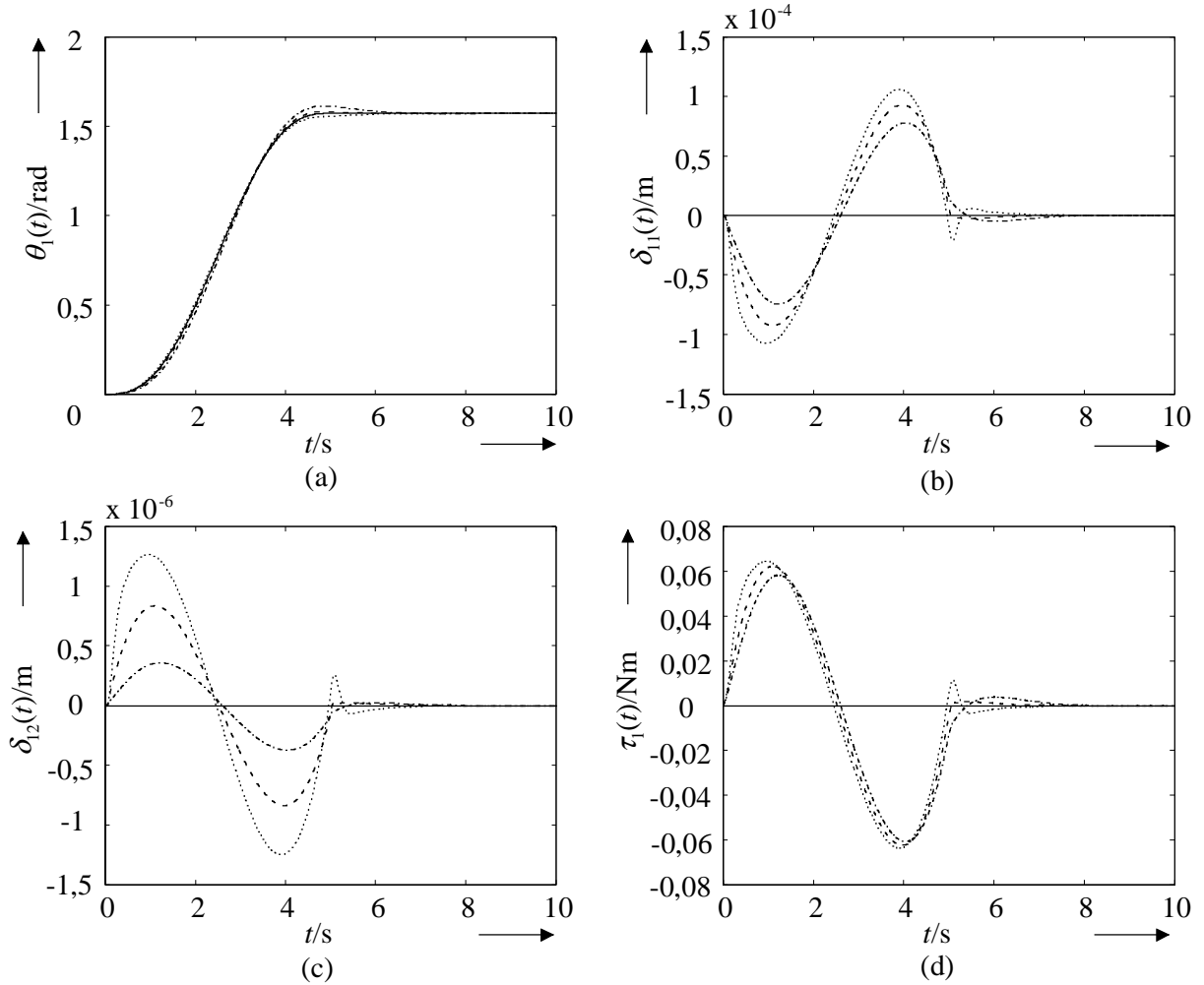
Mit diesem Wert von  $\mathbf{k}_2$  folgt  $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,4729 & 0 \end{bmatrix}$  und  $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1,0192 \end{bmatrix}$ . Wenn  $s_1 = 0,3975$ ,  $r_1 = 0,0494$ ,  $\alpha_1 = 3$  und  $\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0,12 & 0 \\ 0 & 0,08 \end{bmatrix}$  angenommen werden, läßt sich  $\mathbf{k}_1 = [1,2352 \quad 1,2272]$  berechnen.

Nehmen  $\mathbf{k}_1$  und  $\mathbf{k}_2$  die soeben bestimmten Werte an, ergibt sich  $\mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4,1201 \end{bmatrix}$ .



Die Wahl von  $r_0 = 0,4037$ ,  $\alpha_0 = 1,8$  und  $\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} 0,955 & 0 \\ 0 & 0,4485 \end{bmatrix}$  ergibt für den Rückführvektor  $\mathbf{k}_0$  den Wert  $\mathbf{k}_0 = [-1,2006 \quad -1,0797]$ .

Um die Robustheit des geregelten Systems gegenüber der Änderung der Masse der Nutzlast zu verifizieren, wird das geregelte System mit drei verschiedenen Massen der Nutzlast: (0,05 kg, 0,1 kg bzw. 0,15 kg) simuliert. Bei den Simulationen ist der verwendete Regler für die drei verschiedenen Fälle identisch.



**Bild 6.1:** (a) Position des Gelenks  $\theta_1(t)$ ; (b) Elastische Koordinate  $\delta_{11}(t)$ ; (c) Elastische Koordinate  $\delta_{12}(t)$ ; (d) Moment des Motors  $\tau_1(t)$ . (—) Sollbahn; (—·)  $m_p = 0,05\text{kg}$ ; (- -)  $m_p = 0,1\text{kg}$ ; (···)  $m_p = 0,15\text{kg}$ .

Im Bild (6.1) werden die Simulationsergebnisse mit der Sollbahn des Gelenkwinkels

$$\theta_1^d(t) = \begin{cases} \left(6\frac{t^5}{5^5} - 15\frac{t^4}{5^4} + 10\frac{t^3}{5^3}\right) \frac{\pi}{2} & \text{für } t \leq 5, \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } t > 5 \end{cases} \quad (6.1)$$

dargestellt.

Aus Bild (6.1) ist zu erkennen, daß der durch Verwendung des vorgestellten Verfahrens resultierende Regler starke Robustheit gegenüber der Veränderlichkeit der Massen der Nutzlast hat. Für die drei verschiedenen Massen der Nutzlast können die Gelenkwinkel des geregelten Roboters der vorgegebenen Bahn mit hoher Genauigkeit folgen. Gleichzeitig werden die Anteile der elastischen Schwingungen mit den Eigenfrequenzen der Arme sehr gut gedämpft. Außerdem hat die Änderung der Masse der Nutzlast einen geringen Einfluß auf die Verallgemeinerten Koordinaten und das Stellmoment des geregelten Roboters. Die Schwingungen der beiden elastischen Koordinaten sind entgegengesetzt.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Bei elastischen Robotern handelt es sich normalerweise um ein System mit Multizeit-skalen und Parameterunsicherheiten. Obwohl die Multizeitskalen-Singular-Perturbation-Methode verwendet werden kann, um dieses System in ordnungsreduzierte Teilsysteme zu zerlegen, lassen sich die resultierenden Grenzschichtteilsysteme nicht durch die Rückführung der Zustandsvariablen der Grenzschichtteilsysteme stabilisieren, weil wegen der Unsicherheiten die Zustandsvariablen der Grenzschichtteilsysteme nicht aus den elastischen Koordinaten berechnet werden können. Die vorliegende Arbeit enthält neue Ergebnisse zur robusten Regelung einachsiger elastischer Roboter, die auf einer Kombination des Multizeitenskalen-Singular-Perturbation-Verfahrens und der Riccati-Gleichungsmethode basiert. Im Gegensatz zum Standardverlauf des Reglerentwurfs mittels Singular-Perturbation-Methode stabilisiert das vorgestellte Verfahren das entsprechende Grenzschichtteilsystem vor der Systemdekomposition. Simulationsergebnisse zeigen, daß der durch Verwendung des vorgestellten Verfahrens resultierende Regler starke Robustheit gegenüber der Veränderlichkeit der Masse der Nutzlast hat.

Für zukünftige Arbeiten sind folgende Themen und Aufgabenstellungen interessant:

- Diese Arbeit setzt voraus, daß alle Zustandsgrößen des betrachteten Robotersystems für die Rückführung zur Verfügung stehen. Bei der praktischen Anwendung ist jedoch die Geschwindigkeit der Deformation eines elastischen Gliedes aus technischen Gründen nicht meßbar. Deshalb erscheint es hier sinnvoll, einen robusten Zustandsbeobachter mittels der Singular-Perturbation-Methode zu entwerfen.
- Die Übertragbarkeit der in dieser Arbeit vorgestellten Regelungskonzepte auf mehrachsige elastische Roboter sollte untersucht werden. Es ist auch notwendig, das vorgestellte Verfahren zu erweitern, um die Unsicherheiten aus den Gelenkreibungen und der Strukturdämpfung bearbeiten zu können.

Der Verfasser dankt dem DAAD für seine Unterstützung.

## 8 Literaturverzeichnis

- Aoustin, Y., C. Chevallereau, A. Glumineau und C. H. Moog.** 1994. Experimental results for the end-effector control of a single flexible robotic arm. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 2. 371–381.
- Barmish, B. R. und G. Leitmann.** 1982. On ultimate boundedness control of uncertain systems in the absence of matching assumptions. *IEEE Transactions on Automatic Control* 27. 153–158.
- Bayo, E.** 1987. A finite-element approach to control the end-point motion of a single-link flexible robot. *Journal of Robotic Systems* 4. 63–75.
- Bayo, E., P. Papadopoulos, J. Stubbe und M. A. Serna.** 1989. Inverse dynamics and kinematics of multi-link elastic robots: An iterative frequency domain approach. *The International Journal of Robotics Research* 8. 49–62.
- Bernzen, W.** 1998. Vibration control of flexible robots – theoretical and experimental results. *Proceedings of IFAC Conference on System Structure and Control*. Nantes, Frankreich. 537–542.
- Book, W. J., O. Maizza-Neto und D. E. Whitney.** 1975. Feedback control of two beam, two joint systems with distributed flexibility. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 97. 424–431.
- Book, W. J.** 1993. Controlled motion in an elastic world. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 115. 252–261.
- Bremer, H. und F. Pfeiffer.** 1995. Experiments with flexible manipulators. *Control Eng. Practice* 3. 1331–1338.
- Burke, S. E. und J. E. Hubbard.** 1988. Distributed actuator control design for flexible beams. *Automatica* 24. 619–627.
- Cannon, R. H. und E. Schmitz.** 1984. Initial experiments on the end-point control of a flexible one-link robot. *The International Journal of Robotics Research* 3. 62–75.
- Carusone, J., K. S. Buchan und G. M. T. D’Eleuterio.** 1993. Experiments in end-effector tracking control for structurally flexible space manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 9. 553–560.
- Castelazo, I. A. und H. Lee.** 1990. Nonlinear compensation for flexible manipulators. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 112. 62–68.

- Cetinkunt, S.** und **W. J. Book.** 1990. Performance limitations of joint variable-feedback controllers due to manipulator structural flexibility. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 6. 219–231.
- Cetinkunt, S.** und **S. Wu.** 1992. Discrete-time tip position control of a flexible one arm robot. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 114. 428–435.
- Chang, P.-M.** und **S. Jayasuriya.** 1995. An evaluation of several controller synthesis methodologies using a rotating flexible beam as a test bed. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 117. 360–373.
- Chen, Y. H.** 1986. On the deterministic performance of uncertain dynamical systems. *Int. J. Control* 43. 1557–1579.
- Chen, Y. H.** und **G. Leitmann.** 1987. Robustness of uncertain systems in the absence of matching assumptions. *Int. J. Control* 45. 1527–1542.
- Cordes, J.** 1992. *Robuste Regelung eines elastischen Teleskoparmroboters*. Braunschweig: Vieweg.
- Corless, M., F. Garofalo** und **L. Glielmo.** 1989. Nonlinear stabilization of a class of singularly perturbed uncertain systems. *Nonlinear Control Systems Design*, hg. von A. Isidori. 189–193. Oxford: Pergamon Press.
- Corless, M., F. Garofalo** und **L. Glielmo.** 1993. New results on composite control of singularly perturbed uncertain linear systems. *Automatica* 29. 387–400.
- Corless, M. J.** und **G. Leitmann.** 1981. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 26. 1139–1144.
- De Luca, A., P. Lucibello** und **G. Ulivi.** 1989. Inversion techniques for trajectory control of flexible robot arms. *Journal of Robotic Systems* 6. 325–344.
- De Luca, A.** und **S. Panzieri.** 1994. An iterative scheme for learning gravity compensation in flexible robot arms. *Automatica* 30. 993–1002.
- De Luca, A.** und **B. Siciliano.** 1989. Trajectory control of a non-linear one-link flexible arm. *Int. J. Control* 50. 1699–1715.
- De Luca, A.** und **B. Siciliano.** 1993a. Inversion-based nonlinear control of robot arms with flexible links. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 16. 1169–1176.
- De Luca, A.** und **B. Siciliano.** 1993b. Regulation of flexible arms under gravity. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 9. 463–467.

- Fabritz, N., G. Buch** und **P. Kortmann**. 1995. Fuzzy-Regelungsstrategien zur Schwingungsdämpfung eines elastischen Manipulators. *Automatisierungstechnik* 43. 379–384.
- Garcia-Benitez, E., S. Yurkovich** und **K. M. Passino**. 1993. Rule-based supervisory control of a two-link flexible manipulator. *Journal of Intelligent and Robotic Systems* 7. 195–213.
- Garofalo, F.** und **Gleitmann**. 1990. Nonlinear composite control of a class of nominally linear singularly perturbed uncertain systems. *Deterministic Control of Uncertain Systems*, hg. von A. S. I. Zinober. 269–288. London: IEE.
- Garofalo, F.** und **G. Leitmann**. 1988. A composite controller ensuring ultimate boundedness for a class of singularly perturbed uncertain systems. *Dynamics and Stability of Systems* 3. 135–145.
- Geniele, H., R. V. Patel** und **K. Khorasani**. 1997. End-point control of a flexible-link manipulator: Theory and experiments. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 5. 556–570.
- Gross, E.** und **M. Tomizuka**. 1994. Experimental flexible beam tip tracking control with a truncated series approximation to uncancelable inverse dynamics. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 2. 382–391.
- Gutman, S.** 1979. Uncertain dynamical systems – a Lyapunov min-max approach. *IEEE Transactions on Automatic Control* 24. 437–443.
- Hastings, G. G.** und **W. J. Book**. 1985. Experiments in optimal control of a flexible arm. *Proceedings of the American Control Conference*. New York. 728–729.
- Jiang, Z. W., S. Chonan** und **J. Tani**. 1992. Tracking control of a miniature flexible arm using piezoelectric bimorph cells. *The International Journal of Robotics Research* 11. 260–267.
- Khorrami, F.** und **S. Zheng**. 1992. An inner/outer loop controller for rigid-flexible manipulators. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 114. 580–587.
- Khorrami, F.** und **S. Jain**. 1993. Nonlinear control with end-point acceleration feedback for a two-link flexible manipulator: Experimental results. *Journal of Robotic Systems* 10. 505–530.
- Khorrami, F., S. Jain** und **A. Tzes**. 1995. Experimental results on adaptive nonlinear control and input preshaping for multi-link flexible manipulators. *Automatica* 31. 83–97.

- Koivo, A. J.** und **K. S. Lee**. 1992. Self-tuning control of a two-link manipulator with a flexible forearm. *The International Journal of Robotics Research* 11. 383–395.
- Kokotovic, P., H. K. Khalil** und **J. O'Reilly**. 1986. *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. New York: Academic Press.
- Kotnik, P. T., S. Yurkovich** und **U. Özgnüner**. 1988. Acceleration feedback for control of a flexible manipulator arm. *Journal of Robotic Systems* 5. 181–196.
- Kwon, D.-S.** und **W. J. Book**. 1994. A time-domain inverse dynamic tracking control of a single-link flexible manipulator. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 116. 193–200.
- Ladde, G. S.** und **D. D. Siljak**. 1983. Multiparameter singular perturbations of linear systems with multiple time scales. *Automatica* 14. 385–394.
- Lammerts, I. M. M., F. E. Veldpaus, M. J. G. Van de Molengraft** und **J. J. Kok**. 1995. Adaptive computed reference computed torque control of flexible robots. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 117. 31–36.
- Landau, I. D., J. Langer, D. Rey** und **J. Barnier**. 1996. Robust control of a 360° flexible arm using the combined pole placement/sensitivity function shaping method. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 4. 369–383.
- Leitmann, G.** 1979. Guaranteed asymptotic stability for some linear systems with bounded uncertainties. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 101. 212–216.
- Leitmann, G.** 1981. On the efficacy of nonlinear control in uncertain linear systems. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 102. 95–102.
- Lucibello, P.** und **M. D. Di Benedetto**. 1993. Output tracking for a nonlinear flexible arm. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 115. 78–85.
- Luo, Z. H.** 1993. Direct strain feedback control of flexible robot arms: New theoretical and experimental results. *IEEE Transactions on Automatic Control* 38. 1610–1622.
- Luo, Z. H.** und **B. Z. Guo**. 1997. Shear force feedback control of a single-link flexible robot with a revolute joint. *IEEE Transactions on Automatic Control* 42. 53–65.
- Moudgal, V. G., W. A. Kwong, K. M. Passino** und **S. Yurkovich**. 1995. Fuzzy learning control for a flexible-link robot. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 3. 199–210.

- Moudgal, V. G., K. M. Passino und S. Yurkovich.** 1994. Rule-based control for a flexible-link robot. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 2. 392–405.
- Nathan, P. J. und S. N. Singh.** 1991. Sliding mode control and elastic mode stabilization of a robotic arm with flexible links. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 113. 669–676.
- Nathan, P. J. und S. N. Singh.** 1992. Nonlinear ultimate boundedness control and stabilization of a flexible robotic arm. *Journal of Robotic Systems* 9. 301–326.
- Nicosia, S., P. Tomei und A. Tornambe.** 1989. Hamiltonian description and dynamic control of flexible robots. *Journal of Robotic Systems* 6. 345–361.
- Osman, J. H. S. und P. D. Roberts.** 1991. A class of decentralized tracking controller for robot manipulators. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part 1, Journal of Systems and Control Engineering* 205. 141–150.
- Osman, J. H. S. und P. D. Roberts.** 1995. A two-level control strategy for robot manipulators. *Int. J. Control* 61. 1201–1222.
- Parker, G. G., D. J. Segalman, R. D. Robinett und D. J. Inman.** 1996. Decentralized sliding mode control for flexible link robots. *Journal of Intelligent and Robotic Systems* 17. 61–79.
- Petersen, I. R. und C. V. Hollot.** 1986. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. *Automatica* 22. 397–411.
- Pfeiffer, F.** 1989. A feedforward decoupling concept for the control of elastic robots. *Journal of Robotic Systems* 6. 407–416.
- Pota, H. R.** 1990. Finite-element/Lagrange modelling and control of a flexible robot arm. *Preprints of 11th IFAC World Congress*. Tallinn, Estonia. 239–243.
- Sakawa, Y., F. Masuno und S. Fukushima.** 1985. Modeling and feedback control of a flexible arm. *Journal of Robotic Systems* 2. 453–472.
- Schmitendorf, W. E.** 1988. Designing stabilizing controllers for uncertain systems using the Riccati equation approach. *IEEE Transactions on Automatic Control* 33. 376–379.
- Schoenwald, D. A. und U. Özgüner.** 1996. Control of flexible manipulators via singular perturbations and distributed vibration damping. *Dynamic and Control* 6. 5–32.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme*. München: Oldenbourg.
- Siciliano, B. und W. J. Book.** 1988. A singular perturbation approach to control of lightweight flexible manipulators. *The International Journal of Robotics Research* 7(4). 79–90.



- Singh, S. N.** und **A. A. Schy.** 1986a. Control of elastic robotic systems by nonlinear inversion and modal damping. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 108. 180–189.
- Singh, S. N.** und **A. A. Schy.** 1986b. Elastic robot control: Nonlinear inversion and linear stabilization. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* AES-22. 340–347.
- Takahashi, K.** und **I. Yamada.** 1994. Neural-network based learning control of flexible mechanism with application to a single-link flexible arm. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 116. 792–795.
- Tokhi, M. O.** und **A. K. M. Azad.** 1996. Control of flexible manipulator systems. *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part I: Journal of Systems and Control Engineering* 210. 113–130.
- Wang, J.-Q.** und **H.-D. Wend.** 1997a. Robust decentralized control of robot manipulators. *International Journal of Systems Science.* (Angenommener Beitrag).
- Wang, J.** 1998a. *Ein robuster Regler zur Schwingungsdämpfung elastischer Roboter mittels Polvorgabe.* Forschungsbericht Nr. 9/98. MSRT. Universität Duisburg.
- Wang, J.** 1998b. *Modellbildung elastischer Roboter und Eigenwertanalyse.* Forschungsbericht Nr. 7/98. MSRT. Universität Duisburg.
- Wang, J.** 1998c. *Multiparameter-Singular-Perturbation-Methode zur Regelung von Robotern mit elastischen Armen.* Forschungsbericht Nr. 5/98. MSRT. Universität Duisburg.
- Yigit, A. S.** 1994. On the stability of PD control for a two-link rigid-flexible manipulator. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 116. 208–215.
- Yim, W.** und **S. N. Singh.** 1995. Inverse force and motion control of constrained elastic robots. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 117. 374–383.
- Yuan, B.-S., W. J. Book** und **B. Siciliano.** 1989. Direct adaptive control of a one-link flexible arm with tracking. *Journal of Robotic Systems* 6. 663–680.
- Yuan, K.** und **J. T. Jang.** 1994. Control of slew maneuver of a flexible arm involving large elastic deflections. *Proceedings of the Asian Control Conference.* Tokyo. 789–792.
- Zaad, K. H.** und **K. Khorasani.** 1996. Control of non-minimum phase singularly perturbed systems with application to flexible-link manipulators. *International Journal of Control* 63. 679–701.