

Erweiterter Algorithmus zur differentialalgebraischen Störgrößenentkopplung

Markus Bröcker und Jan Polzer

Forschungsbericht Nr. 9/99

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Dieser Forschungsbericht befaßt sich mit einem wesentlichen systemtheoretischen Aspekt, der Störgrößenentkopplung. Dabei dient als mathematische Grundlage die differentialalgebraische Methodik. Ein von M. Senger entwickelter Algorithmus zur Störgrößenentkopplung ist nur für Polynomsysteme gültig. Dieser Bericht stellt einen Algorithmus vor, welcher die analysierbare Systemklasse auf die der rationalen Systeme erweitert. Dabei behandelt der Algorithmus sowohl den Aspekt der Störgrößenentkopplbarkeit als auch den der Reglersynthese. Die Differentialalgebra ist nur für rationale Systeme zulässig. Um die Analyse und Berechnung des Regelgesetzes auch für analytische Systeme durchführen zu können, wird eine geeignete Systemtransformation verwendet.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	II
1 Einleitung	1
2 Störgrößentkopplung von Polynomsystemen	3
2.1 Buchberger-Algorithmus	7
2.2 Algorithmus zur exakten Störgrößentkopplung	9
3 Erweiterung der Störgrößentkopplung auf rationale Systeme	16
4 Untersuchung analytischer Systeme auf Störgrößentkoppelbarkeit	23
5 Zusammenfassung und Ausblick	28
6 Literatur	30
Anhang	32
A Differentialalgebraische Grundbegriffe	32

Nomenklatur

Abkürzungen

ALS	Analytisches System mit linear eingehender Steuerung
AS	Analytisches System
Σ	System
Σ^0	ungestörtes System

Algebraische Strukturen

I	Ideal eines kommutativen Ringes
k	Körper
$k\langle \mathbf{x} \rangle$	Differentieller Körper der rationalen Funktionen in $x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots$ mit Koeffizienten aus dem Grundkörper k
$k\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle$	Differentieller Körper der rationalen Funktionen in $u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots$ und $y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots$ mit Koeffizienten aus dem Grundkörper k
R	Kommutativer Ring
$R\{\mathbf{x}\}$	Kommutativer Ring der differentiellen Polynome in \mathbf{x}

Logische Verknüpfungen

\forall	Allquantor
\in	Element von
\wedge, \vee	Konjunktion, Disjunktion

Matrizen, Vektoren, Vektorräume

$\mathcal{E}_k(\bar{\mathcal{E}}_k)$	Durch $\{d\mathbf{y}, \dots, d\mathbf{y}^{(k)}\}$ aufgespannter Vektorraum (des gestörten Systems)
$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{s}(t))$	Driftterm eines AS mit Störgrößen
$\tilde{\mathbf{g}}_i, \tilde{\tilde{\mathbf{g}}}_i$	Vektorfeld, bestehend aus den Polynomen der Gröbner-Basis GB/\overline{GB}
$\mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{s}(t))$	Ausgangsvektor eines AS mit Störgrößen
$\mathbf{J}_k(\bar{\mathbf{J}}_k)$	Jakobi-Matrix (des gestörten Systems)
$\mathbf{N}_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u})$	Normalform der i -ten Ausgangsableitung
$\mathbf{r}_k(\mathbf{x}(t), \mathbf{s}(t))$	Vektor der bis zum k -ten Iterationsschritt nach \mathbf{u} aufgelösten Bedingungen
$\hat{\mathbf{r}}_k(\mathbf{x}(t))$	Vektor der bis zum k -ten Iterationsschritt nach \mathbf{s} aufgelösten Bedingungen
$\mathbf{s}(t)$	Vektor der Störgrößen
$\mathbf{u}(t)$	Vektor der Eingangsgrößen
$\mathbf{v}(t)$	Vektor der neuen Eingangsgrößen für den Kompensator
$\bar{\mathbf{w}}(t)$	Vektor der Eingangs- und Störgrößen

$\mathbf{x}(t)$	Zustandsvektor
$\mathbf{y}(t)$	Vektor der Ausgangsgrößen
$\tilde{\mathbf{y}}(t)$	Vektor der Ausgangsgrößen mit den eingesetzten Bedingungen für \mathbf{u} aus \mathbb{U}_k
$\bar{\mathbf{y}}(t)$	Vektor der Ausgangsgrößen mit den eingesetzten Bedingungen für \mathbf{u} und \mathbf{s} aus $\bar{\mathbb{U}}_k$
${}_j\boldsymbol{\alpha}$	Multigrad

Mengen

\emptyset	Leere Menge
$\langle f_1, \dots, f_m \rangle$	Das von f_1, \dots, f_m erzeugte Ideal
$C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$	Menge aller glatten Funktionen, die \mathbb{R} in \mathbb{R}^m abbilden
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{N}_0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{U}	Menge der zulässigen Funktionen für \mathbf{u}
$\tilde{\mathbb{U}}$	Stellgrößenhilfsmenge für \mathbf{u}
$\bar{\mathbb{U}}$	Menge der zulässigen Funktionen für \mathbf{u} und \mathbf{s}
$\tilde{\bar{\mathbb{U}}}$	Stellgrößenhilfsmenge für \mathbf{u}, \mathbf{s}

Operatoren und Funktionen

∂	Differentiation
$d(\cdot)$	Kähler-Differential
diff. trg	Differentieller Transzendenzgrad
dim	Dimension eines Vektorraumes
$\exp(\cdot)$	Exponentialfunktion
GB (\overline{GB})	Gröbner-Basis (des gestörten Systems)
$lc(f)$	Führender Koeffizient des Polynoms f
$lcm(\cdot)$	Kleinstes gemeinsames Vielfaches der Operanden
$lm(f)$	Führendes Monom des Polynoms f
$lt(f)$	Führender Term des Polynoms f
rang	Rang einer Matrix
rem	Rest einer mehrdimensionalen Polynomdivision
$S(f_1, f_2)$	S-Polynom der Polynome f_1, f_2
trg	Transzendenzgrad
\rightarrow, \mapsto	Abbildung auf
/	Körpererweiterung, Polynomdivision
\	Differenzmenge
\cap, \cup	Schnitt, Vereinigung von Mengen
\subset	Echte Teilmenge
\prec	Ordnungsrelation, Monomordnung

$(\cdot)^{(k)}$	k -te zeitliche Ableitung
$[\cdot]^T$	Transponierte Größe

Skalare Größen

f	Funktion
f_i	Polynom
g_i	Element einer Gröbner-Basis GB
$\tilde{g}_l, \tilde{\tilde{g}}_l$	Element des Vektorfeldes $\tilde{\mathbf{g}}_i, \tilde{\tilde{\mathbf{g}}}_i$
m	Anzahl der Eingangsgrößen
m_i	Monom
n	Anzahl der Zustände
p	Anzahl der Ausgänge
q	Anzahl der Störgrößen
S_{\max}	Transzendenzbasis
$s_i(t)$	Störgröße
t	Zeit
$u_i(t)$	Stellgröße
$v_i(t)$	Neue Eingangsgröße
$x_i(t)$	Zustandsvariable
$y_i(t)$	Regelgröße
ρ_i	Anzahl der Eliminationsideale für \mathbf{u} (Bestimmung aus den Ausgangsableitungen der Ordnung $\leq i$)
$\bar{\rho}_i$	Anzahl der Eliminationsideale für \mathbf{u} und \mathbf{s} (Bestimmung aus den Ausgangsableitungen der Ordnung $\leq i$)
ρ^*	Differentieller Rang des ungestörten Systems
ρ_s^*	Differentieller Rang des gestörten Systems

1 Einleitung

In der Praxis treten sehr häufig *Störgrößen* bei Systemen auf. Störgrößen können allgemein betrachtet jede physikalische, chemische und/oder biologische Größe sein, die den Systemausgang unerwünscht beeinflussen. Bei technischen Systemen sind Beispiele aus der Praxis – wie z. B. der Robotik, den Großmanipulatoren und der Fahrzeugtechnik – aufzuführen. Bei Robotern wirken je nach Handhabungstätigkeit (z. B. Schweißen, Transport von Gußpfannen) am Endeffektor Störgrößen auf die Trajektorienregelung ein. Zusätzlich zu diesen Störgrößen können bei Großmanipulatoren, die Handhabungssysteme mit sehr großer Reichweite darstellen, durch Elastizitäten hervorgerufene Strukturschwingungen auftreten. Im Fahrbetrieb von Kraftfahrzeugen spielen Störungen wie Windkräfte und Fahrbahnunebenheiten eine wichtige Rolle.

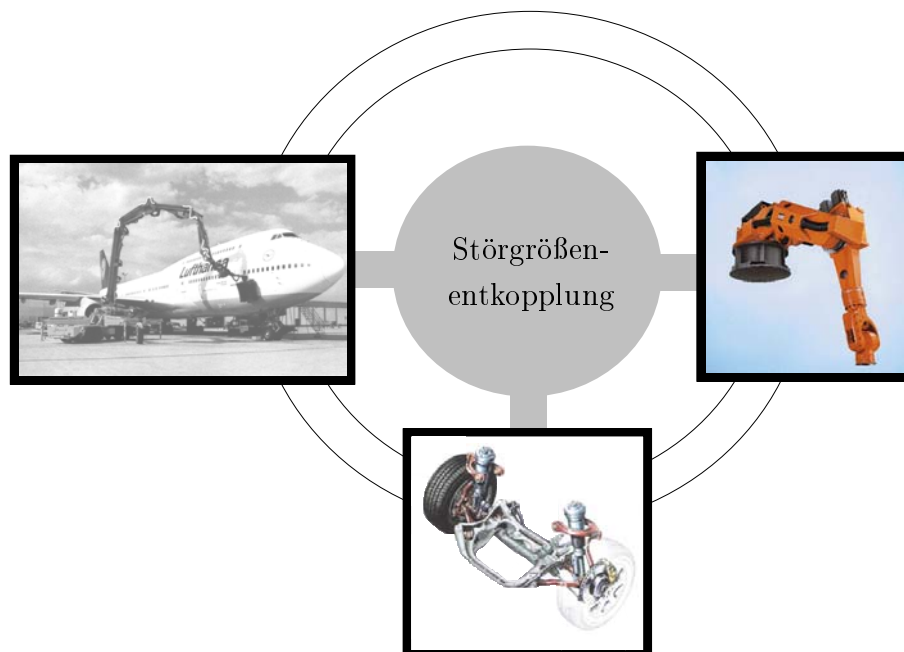


Bild 1.1: Anwendungsgebiete der Störgrößenentkopplung

Bei diesen Praxisbeispielen (vgl. Bild 1.1)¹ ist eine *Störgrößenentkopplung* sinnvoll und wünschenswert, da sich durch eine separate Betrachtung des Einflusses der Störgrößen die Regelungsproblematik erheblich reduziert. Unter einer Störgrößenentkopplung ist somit zu verstehen, daß die Ausgänge eines Systems unabhängig von den Störgrößen sind.

Für die Beschreibung des Ursache-/Wirkungsverhaltens dynamischer Systeme dienen sehr häufig nichtlineare Differentialgleichungssysteme. Zur Lösung der Problematik Störgrößenentkopplung existieren diverse Ansätze, die auf verschiedenen mathematischen Methoden und Theorien basieren. In dieser Arbeit konzentriert sich die Betrachtung auf den nichtlinearen Ansatz der *Differentialalgebra* (Ritt 1950, Fliess 1987). In der Differentialalgebra

¹ Bildquellen: Skywash (<http://www.sfb291.uni-duisburg.de/forschung/experimentalsysteme.html>), PKW-Achse (Freudenberg), Roboter (http://www.kuka.com/web/rd_deut/index.html)

besteht die Grundidee darin, Methoden und Eigenschaften der klassischen Algebra für algebraische Differentialgleichungen aufzubereiten und zu erweitern. Es zeigt sich in diesem Bericht, daß die differentialalgebraische Störgrößenentkopplung Aussagen über die Störgrößenentkoppelbarkeit und einen Algorithmus zur entsprechenden Reglersynthese liefert.

Der Bericht gliedert sich wie folgt: Der zweite Abschnitt stellt die Grundlagen des von Senger (1999) entwickelten und auf differentialalgebraischer Methodik aufbauenden Algorithmus vor. Dieser Algorithmus berechnet mit Hilfe von Gröbner-Basen das störgrößenentkoppelnde Regelgesetz und ist nur für Polynomsysteme gültig, die eine Unterklasse der rationalen Systeme darstellen. Daher findet im dritten Abschnitt eine Erweiterung des Algorithmus auf rationale Systeme statt, die neben Polynomen nun auch rationale Funktionen enthalten. Um auch analytische Systeme mit dem erweiterten Algorithmus behandeln zu können, wird eine geeignete Systemtransformation im vierten Abschnitt in den Algorithmus integriert. Des weiteren untersucht der vierte Abschnitt die Bedingung der differentialalgebraischen Störgrößenentkoppelbarkeit. Eine Zusammenfassung der Methodik der differentialalgebraischen Störgrößenentkopplung und ein Ausblick bilden im fünften Abschnitt den Abschluß dieses Forschungsberichtes.

2 Störgrößentkopplung von Polynomsystemen

Zunächst sei die *differentialalgebraische Störgrößentkopplung* ohne Beschränkung der Systemklassen auf Polynomsysteme betrachtet. Dabei erlaubt die Differentialalgebra grundsätzlich die Betrachtung analytischer Systeme (AS). Einzige Einschränkung hierbei ist, daß in dem AS keine nicht-rationalen Funktionen enthalten sein dürfen (wie z. B. $\sin(x)$, \sqrt{x}). Nach differentialalgebraischer Sichtweise ist zunächst ein *System* (Def. A.14) als endlich generierte differentielle Körpererweiterung über einem Grundkörper definiert. Folglich besteht noch keine Aussage über Zustands-, Ein- und Ausgangsgrößen. Diese Formulierung ist erst durch den Begriff der *Dynamik* (Def. A.15) festgelegt. In Form eines Zustandsmodells ist die Dynamik eines Systems in der Differentialalgebra also durch ein AS

$$\Sigma_{\text{AS}} \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{s}(t)) & , \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n & , \quad \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m & , \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{s}(t)) & , \quad \mathbf{s}(t) \in \mathbb{R}^q & , \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p & , \end{aligned} \quad (2.1)$$

mit der Störgröße $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_q(t)]^T$ beschreibbar. Entsprechend folgt mit $\mathbf{s}(t) \equiv \mathbf{0}$ das ungestörte System

$$\Sigma_{\text{AS}}^0 \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{s}(t))|_{\mathbf{s}(t) \equiv \mathbf{0}} & , \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n & , \quad \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m & , \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{s}(t))|_{\mathbf{s}(t) \equiv \mathbf{0}} & , \quad \mathbf{s}(t) \in \mathbb{R}^q & , \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p & . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Die Beschränkung der Systemklassen auf Polynomsysteme ermöglicht die Berechnung von Gröbner-Basen (Gröbner 1949). Der Algorithmus zur *differentialalgebraischen Störgrößentkopplung* von Senger (1999) nutzt diese Gröbner-Basen. Im wesentlichen besteht der Algorithmus aus der Ermittlung eines Kompensators, gegeben durch das Rückführgesetz in dem Zustand $\mathbf{x}(t)$ und einem neuen Eingang $\mathbf{v}(t)$. Dieser Kompensator ist ähnlich dem Prinzip der *exakten Linearisierung* (Isidori 1995, Schwarz 1991, Schwarz 1999, Nijmeijer und van der Schaft 1990) ausgelegt, das heißt dem Systemmodell (der Regelstrecke) vorgeschaltet. Die Stellgröße $\mathbf{u}(t)$ des Kompensators soll dann bewirken, daß der Systemausgang $\mathbf{y}(t)$ unabhängig von der Störgröße $\mathbf{s}(t)$ ist. Der Kompensator linearisiert das System exakt und zwingt diesem das Ersatzsystemverhalten einer Integratorkette auf (Senger 1999). Des weiteren läßt sich der Kompensator zur Störgrößentkopplung als differentielle Körpererweiterung der Form $k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{s} \rangle / k\langle \mathbf{v}, \mathbf{s} \rangle$ nach Senger (1999) darstellen und ist in Bild 2.1 enthalten. Durch Hinzunahme eines linearen Regelgesetzes für das linearisierte Ersatzsystem ist dann mittels Polvorgabe ein gewünschtes Systemverhalten zu erzielen. Ein Vorteil der Methode von Senger (1999) ist, daß für die Störgrößentkopplung der Kompensator nicht nach statischer oder dynamischer Art bezüglich der Berechnungsgrundlage des Kompensatorgesetzes unterschieden werden muß. Bei der differentialalgebraischen dynamischen Zustandsrückführung sind lediglich zusätzliche Zustandsvariablen $\mathbf{z}(t)$ in dem Kompensator für die Dynamik zu berücksichtigen (Senger 1999).

Ein wesentlicher Bestandteil des Algorithmus zur Störgrößentkopplung ist die Berechnung (reduzierter) *Gröbner-Basen* (Senger 1997). Diese Gröbner-Basen sind ein mathematisches Hilfswerkzeug zum Lösen von nichtlinearen (*Polynom-*) Gleichungen (vgl.

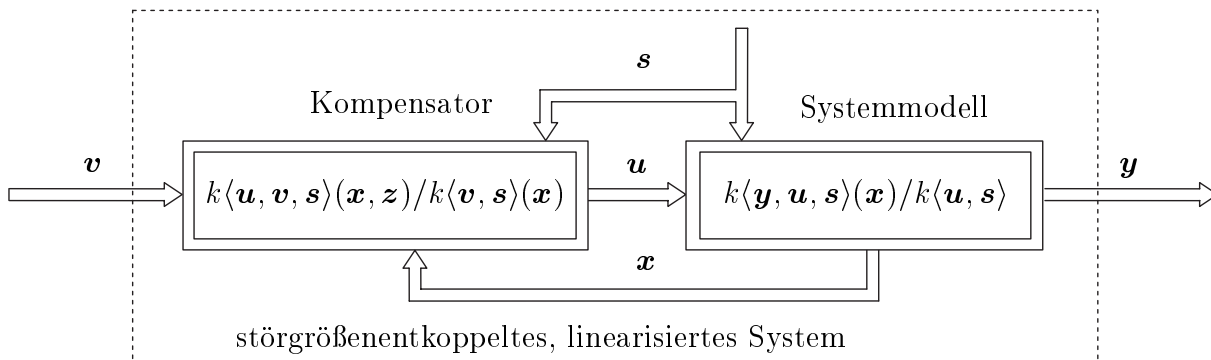


Bild 2.1: Exakte differentialalgebraische Störgrößenentkopplung

Definition A.18). Durch die Berechnung von Gröbner-Basen ist die Betrachtung der Systemklassen also auf die Klasse der *Polynomsysteme* beschränkt. Es lassen sich zwei *Gröbner-Basen* – die (Standard-) Gröbner-Basis und die reduzierte Gröbner-Basis – unterscheiden. Diese definieren sich durch:

Definition 2.1 (*Standard-*) *Gröbner-Basis* (Jirstrand 1998)

Eine endliche Teilmenge $GB = \{g_1; \dots; g_n\}$ eines von den Polynomen f_1, \dots, f_m erzeugten Ideals I heißt *Gröbner-Basis*, wenn

$$\langle \text{lt}(g_1), \dots, \text{lt}(g_n) \rangle = \langle \{\text{lt}(f) | f \in I\} \rangle,$$

das heißt wenn jeder führende Term $\text{lt}(f)$ (vgl. Definition A.19) für $f \in I$ einen Teiler aus der Menge $\{\text{lt}(g_1), \dots, \text{lt}(g_n)\}$ hat. □

Definition 2.2 *Reduzierte Gröbner-Basis* (Jirstrand 1998)

Die Gröbner-Basis $GB = \{g_1; \dots; g_n\}$ eines Ideals $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ heißt *reduzierte Gröbner-Basis*, wenn gilt:

- (i) $\text{lc}(g_i) = 1 \quad \forall g_i \in GB$, worin 1 das Einselement der Ringmultiplikation darstellt, und
- (ii) kein Monom m_i aus $g_j \in GB$ hat einen Teiler unter den führenden Termen $\{\text{lt}(g_1), \dots, \text{lt}(g_n)\} \setminus \{m_i\}$. □

Zur Berechnung einer Gröbner-Basis ist die Kenntnis über die Monomordnung eines Polynoms, sowie die Durchführung mehrdimensionaler Polynomdivisionen unerlässlich. Daher sind vorab diese zusätzlichen mathematischen Begriffe zu erläutern. Ein Monom ist folgenderweise definiert:

Definition 2.3 *Monom* (Jirstrand 1998)

Ein *Monom* m in den Variablen x_1, \dots, x_n ist ein Produkt

$$m = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad ,$$

mit $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ und der Bedingung: Es existiert ein $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $\alpha_i \neq 0$. □

Für eine mehrdimensionale Polynomdivision ist eine Festlegung der Ordnung der Terme der Polynome – also der Monomordnung – unabdingbar. Auch hängt das Ergebnis von dieser Monomordnung ab. Es seien ${}_i\alpha := [{}_i\alpha_1, \dots, {}_i\alpha_n]$, ${}_i\alpha_j \in \mathbb{N}_0$ die Vektoren der Exponenten der Monome (vgl. Definition 2.3) $m_i = x_1^{i\alpha_1} x_2^{i\alpha_2} \dots x_n^{i\alpha_n}$. Die ${}_i\alpha$ werden auch *Multigrade* genannt.

Definition 2.4 *Monomordnung* (Forsman 1992)

Es seien ${}_j\alpha$ Multigrade. Eine *Monomordnung* \prec ist eine Anordnung, die folgende Bedingungen erfüllt:

$$\left. \begin{array}{l} {}_i\alpha_j \geq 0 \\ {}_1\alpha \prec {}_2\alpha \Rightarrow {}_1\alpha + {}_i\alpha \prec {}_2\alpha + {}_i\alpha \end{array} \right\} \forall i, j \in \mathbb{N} \quad . \quad \square$$

Nach Pauer und Pfeifhofer (1988) sowie Fröberg (1998) existieren verschiedene Monomordnungen zur Berechnung von mehrdimensionalen Polynomdivisionen und Gröbner-Basen (z. B. strikt lexikographisch, gestuft lexikographisch). In den folgenden Anwendungen kommt nur die strikt lexikographische Anordnung zum Tragen, die sich wie folgt definiert (Pauer und Pfeifhofer 1988, Fröberg 1998):

Definition 2.5: *Strikt lexikographische Monomordnung*

Es seien m_1, m_2 Monome mit den Multigraden ${}_1\alpha, {}_2\alpha$. Eine *strikt lexikographische Monomordnung* ${}_1\alpha \prec {}_2\alpha$ und damit $m_1 \prec m_2$ ist eine Anordnung, die der Bedingung genügt:

$${}_1\alpha \prec {}_2\alpha \Leftrightarrow {}_1\alpha_1 = {}_2\alpha_1 ; \dots ; {}_1\alpha_k = {}_2\alpha_k ; {}_1\alpha_{k+1} > {}_2\alpha_{k+1} \quad , \text{ für } k \in \mathbb{N}_0 \quad . \quad \square$$

Mit anderen Worten bedeutet $m_1 \prec m_2$ („ m_1 ist vorrangig vor m_2 “ gelesen), daß der erste gefundene Exponent eines Monoms größer als der Exponent des zweiten Monoms sein muß. Die bis dahin verglichenen Exponenten sind gleichen Wertes. Im folgenden ist mit lexikographischer Monomordnung immer eine strikt lexikographische Monomordnung gemeint.

Beispiel 2.6 (Senger 1999)

Für die Monome $m_1 = x_1^2 x_2^5$, $m_2 = x_1 x_2^2 x_3$, $m_3 = x_1 x_2^2 x_3^7$ gilt bei lexikographischer Monomordnung $x_1 \prec x_2 \prec x_3$:

$$m_1 \prec m_3 \prec m_2 \quad . \quad \square$$

Die eindimensionale Polynomdivision ist allgemein bekannt. Anders verhält es sich da bei der *mehrdimensionalen Polynomdivision*. Für den mehrdimensionalen Fall ist eine Verallgemeinerung der Polynomdivision einzuführen. Bei der mehrdimensionalen Polynomdivision $f/\{f_1, \dots, f_m\}$ ist ein Polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ durch $f = h_1 f_1 + \dots + h_m f_m + r$ mit $h_i f_i \in I$ für ein Ideal $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ (vgl. Definition A.3) darzustellen, wobei r der Rest der Polynomdivision ist. Ähnlich wie bei dem eindimensionalen Fall ist sukzessiv

zu versuchen, den führenden Term $\text{lt}(f)$ von f (vgl. Definition A.19) durch Subtraktion eines Terms zu eliminieren. Der Subtrahend $a_i \cdot \text{lt}(f_i) \cdot m_i$ stellt dabei das Produkt aus einem führenden Term $\text{lt}(f_i)$ von f_1, \dots, f_m , einem Monom $m_i \in R[x_1, \dots, x_n]$ und einem Koeffizienten a_i dar. Ist der führende Term $\text{lt}(f^*)$ des Ergebnisses der Subtraktion durch keinen der führenden Terme von f_i , $i = 1, \dots, m$ teilbar, so wird $\text{lt}(f^*)$ zu dem Rest addiert. Das folgende Beispiel verdeutlicht die Vorgehensweise.

Beispiel 2.7 (Jirstrand 1998, Senger 1999)

Es sei $f = x_1^2 x_2 + x_2^2$ und $f_1 = x_1 x_2 - 1$ sowie $f_2 = x_2 - 1$. Zudem werde die lexikographische Monomordnung $x_1 \prec x_2$ verwendet. Dann folgt für den ersten Schritt:

$$\begin{aligned} & f \ / \ \{f_1, f_2\} &= \{h_1, h_2, r\} \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{l} (x_1^2 x_2 + x_2^2) \ / \ \{(x_1 x_2 - 1), (x_2 - 1)\} \\ \underline{-(x_1^2 x_2 - x_1)} \\ x_1 + x_2^2 \end{array} &= \{(x_1 + \dots), (\dots), (x_1 + \dots)\} \\ & \Rightarrow r_1 = x_1 \end{aligned}$$

Im ersten Schritt wird folglich von f der Term $x_1 \cdot f_1$ subtrahiert und x_1 dem Polynom h_1 zugeschlagen. Da der führende Term x_1 des Ergebnisses der Subtraktion nicht durch die führenden Terme $x_1 x_2$ und x_2 von f_1 und f_2 teilbar ist, wird x_1 dem Rest in Form von r_1 zugeschlagen ($r = \sum_i r_i$). Der zweite Schritt lautet:

$$\begin{aligned} & (x_1^2 x_2 + x_2^2) \ / \ \{(x_1 x_2 - 1), (x_2 - 1)\} &= \{(x_1 + \dots), (x_2 + \dots), (x_1 + \dots)\} \\ & \vdots \\ & \begin{array}{l} x_1 + x_2^2 \\ \underline{-(x_2^2 - x_2 + r_1)} \\ x_2 \end{array} \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wird also $x_2 \cdot f_2 + r_1$ subtrahiert und x_2 dem Polynom h_2 hinzugefügt, wonach x_2 übrig bleibt. Der Term x_2 ist wiederum durch den führenden Term von f_2 teilbar. Deshalb wird im dritten Schritt,

$$\begin{aligned} & (x_1^2 x_2 + x_2^2) \ / \ \{(x_1 x_2 - 1), (x_2 - 1)\} &= \{(x_1), (x_2 + 1), (x_1 + 1)\} \\ & \vdots \\ & \begin{array}{l} x_2 \\ \underline{-(x_2 - 1)} \\ 1 \end{array} &\Rightarrow r_2 = 1 \\ & \begin{array}{l} \underline{-r_2} \\ 0 \end{array} \end{aligned}$$

$1 \cdot f_2$ von x_2 subtrahiert, was bedeutet, daß 1 dem Polynom h_2 hinzuzufügen ist. Als Ergebnis der Subtraktion dieses dritten Schritts ergibt sich die Konstante 1, die nicht mehr durch einen führenden Term von f_1 oder f_2 teilbar ist, und somit zu dem Rest r in Form des Partialrestes r_2 addiert wird. Es gilt damit: $f = h_1 f_1 + h_2 f_2 + r = x_1(x_1 x_2 - 1) + (x_2 + 1)(x_2 - 1) + x_1 + 1$. \square

2.1 Buchberger-Algorithmus

Grundlegend für die Berechnung einer (Standard-) Gröbner-Basis ist der *Buchberger Algorithmus*. Die Idee des Algorithmus ist, die Menge der das Ideal erzeugenden Polynome so zu erweitern, daß als Ergebnis zunächst eine (Standard-) Gröbner-Basis vorliegt. Durch Hinzufügen von Resten der Division der sogenannten S-Polynome zu den bis dahin ermittelten erzeugenden Polynomen eines Ideals läßt sich diese Erweiterung praktizieren. Die S-Polynome sind folgendermaßen definiert:

Definition 2.8: S-Polynom (Buchberger 1970, Buchberger 1985)

Es seien $f_1, f_2 \in R[x_1, \dots, x_n]$ zwei Polynome. Das S-Polynom $S(f_1, f_2)$ von f_1, f_2 wird durch die Vorschrift

$$S(f_1, f_2) = \frac{\text{lcm}(\text{lm}(f_1), \text{lm}(f_2))}{\text{lt}(f_1)} \cdot f_1 - \frac{\text{lcm}(\text{lm}(f_1), \text{lm}(f_2))}{\text{lt}(f_2)} \cdot f_2$$

gebildet. Der Operator lcm bedeutet darin das kleinste gemeinsame Vielfache (nach dem englischen least common multiple) der in Klammern nachgestellten Operanden. \square

Des weiteren gilt der Satz:

Satz 2.9 (Cox u. a. 1992)

Es sei $I = \langle f_1, \dots, f_n \rangle = \langle F \rangle$ ein von den Polynomen $\{f_1, \dots, f_n\} = F$ erzeugtes Ideal. Dann gilt:

$$F = GB(I) \quad \Leftrightarrow \quad \text{rem}(S(f_i, f_j), F) = 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \quad . \quad \square$$

Darin bezeichnet der Operator „rem“ den Rest einer mehrdimensionalen Polynomdivision. Damit ist überprüfbar, ob $\{f_1, \dots, f_n\}$ eine Gröbner-Basis des Ideals $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ ist.

Neben der Möglichkeit zur Überprüfung der Idealbasis führt Satz 2.9 auf den Kern von *Buchbergers Algorithmus*. Der Algorithmus berechnet zunächst alle S-Polynome $S(f_i, f_j)$ und ihre Reste $\text{rem}(S(f_i, f_j), F)$ für alle i, j , bis ein Rest ungleich Null ist. Durch Hinzufügen dieser Reste zu der Menge F der Erzeugendenpolynome lassen sich nun im nächsten Schritt erneut die S-Polynome für die erweiterte Menge F_{Neu} berechnen. Das Abbruchkriterium des Algorithmus ist erfüllt, wenn alle Reste sich zu $\text{rem}(S(f_i, f_j), F_{\text{Neu}}) = 0$ ergeben.

Daß dieser Algorithmus wirklich das Abbruchkriterium erreicht, hat Buchberger (1970)/ Buchberger (1985) gezeigt. Die bei Erfüllung des Abbruchkriteriums ermittelte Menge der erzeugenden Polynome ist dann die (Standard-) Gröbner-Basis. Wenn diese Gröbner-Basis existiert, ist die Bestimmung der reduzierten Gröbner-Basis recht einfach. Sie ergibt sich durch Überprüfung der einzelnen Polynome der (Standard-) Gröbner-Basis auf lineare Abhängigkeit zueinander. Das heißt, wenn sich ein Polynom durch Linearkombination der anderen Polynome darstellen läßt, kann die Menge der erzeugenden Polynome um dieses

Polynom reduziert werden. Daher sind nochmals mehrdimensionale Polynomdivisionen durchzuführen.

Zum besseren Verständnis sei im folgenden Beispiel (in Anlehnung an Senger 1999) die Berechnung der (Standard-) Gröbner-Basis nach dem *Buchberger Algorithmus* und anschließend das Ermitteln der reduzierten Gröbner-Basis ausführlich durchgeführt.

Beispiel 2.10

Es seien die erzeugenden Polynome $F = \{f_1, f_2\}$ eines Ideals gegeben als

$$\begin{aligned} f_1 &= x_2^2 - 1 \quad \text{und} \\ f_2 &= x_1x_2 - 1 \quad , \end{aligned}$$

und eine lexikographische Monomordnung $x_1 \prec x_2$ zur Berechnung der Gröbner-Basis vorausgesetzt. Das einzig mögliche S-Polynom ergibt sich zu

$$\begin{aligned} S(f_1, f_2) &= \frac{\text{lcm}(\text{lm}(x_2^2 - 1), \text{lm}(x_1x_2 - 1))}{\text{lt}(x_2^2 - 1)} \cdot (x_2^2 - 1) \\ &\quad - \frac{\text{lcm}(\text{lm}(x_2^2 - 1), \text{lm}(x_1x_2 - 1))}{\text{lt}(x_1x_2 - 1)} \cdot (x_1x_2 - 1) \\ &= \frac{\text{lcm}(x_2^2, x_1x_2)}{x_2^2} \cdot (x_2^2 - 1) - \frac{\text{lcm}(x_2^2, x_1x_2)}{x_1x_2} \cdot (x_1x_2 - 1) \\ &= \frac{x_1x_2^2}{x_2^2} \cdot (x_2^2 - 1) - \frac{x_1x_2^2}{x_1x_2} \cdot (x_1x_2 - 1) \\ &= x_1x_2^2 - x_1 - (x_1x_2^2 - x_2) \\ &= -x_1 + x_2 \quad . \end{aligned}$$

Für die Polynomdivision folgt:

$$\begin{aligned} S(f_1, f_2) &/ \{f_1, f_2\} &= \{h_1, h_2, r\} \\ \Leftrightarrow (-x_1 + x_2) &/ \{(x_2^2 - 1), (x_1x_2 - 1)\} &= \{0, 0, -x_1 + x_2\} \\ \frac{-(-x_1 + x_2)}{0} &\Rightarrow r = -x_1 + x_2 & \end{aligned}$$

Es gilt also $\text{rem}(S(f_1, f_2), F) \neq 0$, und somit folgt, daß F keine (Standard-) Gröbner-Basis darstellt und der Rest $r = -x_1 + x_2$ als neue Polynomfunktion – f_3 genannt – dem neuen Polynomsystem F_{Neu} zu addieren ist:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_2^2 - 1 \quad , \\ f_2 &= x_1x_2 - 1 \quad \text{und} \\ f_3 &= -x_1 + x_2 \quad . \end{aligned}$$

In einem nächsten Schritt berechnen sich die beiden S-Polynome $S(f_1, f_3)$ und $S(f_2, f_3)$ zu:

$$\begin{aligned} S(f_1, f_3) &= -x_1 + x_2^3 \quad \text{und} \\ S(f_2, f_3) &= (-1 + x_2^2)x_1 \quad . \end{aligned}$$

Es sind nun zwei Polynomdivisionen für je ein S-Polynom durchzuführen. Diese ergeben die beiden Reste $r_1 = r_2 = 0$:

$$\begin{aligned} S(f_1, f_3) / \{f_1, f_2, f_3\} &= \{h_1, h_2, h_3, r_1\} \\ \Leftrightarrow (-x_1 + x_2^3) / \{(x_2^2 - 1), (x_1x_2 - 1), (-x_1 + x_2)\} &= \{x_2, 0, 1, 0\} \\ \frac{-(x_2(x_2^2 - 1) - x_1 + x_2)}{0} &\Rightarrow r_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(f_2, f_3) / \{f_1, f_2, f_3\} &= \{h_1, h_2, h_3, r_2\} \\ \Leftrightarrow (x_1x_2^2 - x_1) / \{(x_2^2 - 1), (x_1x_2 - 1), (-x_1 + x_2)\} &= \{x_1, 0, 0, 0\} \\ \frac{-(x_1(x_2^2 - 1))}{0} &\Rightarrow r_2 = 0 \end{aligned}$$

Da beide S-Polynome Linearkombinationen in F_{Neu} sind – also $\text{rem}(S(f_1, f_3), F_{\text{Neu}}) = 0$ und $\text{rem}(S(f_2, f_3), F_{\text{Neu}}) = 0$ ist, läßt sich die (Standard-) Gröbner-Basis angeben:

$$GB = \{x_2^2 - 1; x_1x_2 - 1; -x_1 + x_2\} = \{g_1; g_2; g_3\} \quad .$$

Die reduzierte Gröbner-Basis ist nun durch erneute Polynomdivision der Funktionen $\{g_1; g_2; g_3\}$ untereinander zu erhalten:

$$\begin{aligned} g_1 / \{g_2, g_3\} &= \{h_1, h_2, r\} \\ \Leftrightarrow (x_2^2 - 1) / \{(x_1x_2 - 1), (-x_1 + x_2)\} &= \{1, x_2, 0\} \\ \frac{-(x_1x_2 - 1 + x_2(-x_1 + x_2))}{0} &\Rightarrow r = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2 / g_3 &= \{h_1, r\} \\ \Leftrightarrow (x_1x_2 - 1) / (-x_1 + x_2) &= \{x_1, x_1^2 - 1\} \\ \frac{-(x_1(-x_1 + x_2) + x_1^2 - 1)}{0} &\Rightarrow r = x_1^2 - 1 \end{aligned}$$

Die Funktion g_1 läßt sich als Linearkombination aus g_2 und g_3 darstellen und daher kann diese Funktion zu Null reduziert werden. Bei der zweiten Polynomdivision ist der Rest $r \neq 0$, so daß die reduzierte Gröbner-Basis angegeben werden kann:

$$GB_{\text{red}} = \{g_3; r\} = \{x_2 - x_1; x_1^2 - 1\} \quad .$$

□

2.2 Algorithmus zur exakten Störgrößenentkopplung

Nach Einführung der mathematischen Grundlagen erfolgt nun in diesem Abschnitt die Präsentation des Algorithmus zur Störgrößenentkopplung von Polynomsystemen. Zwei Aspekte sind für den Algorithmus von Bedeutung: die Überprüfung der Störgrößenentkoppelbarkeit sowie die darauf folgende Reglersynthese. Für die Überprüfung der Störgrößenentkoppelbarkeit hat eine Berechnung des differentialalgebraischen Rangs ρ_s^*

(vgl. Definition A.16) des gestörten Systems nach Gl. (2.1) sowie des Rangs ρ^* (vgl. Definition A.17) des ungestörten Systems nach Gl. (2.2) zu erfolgen. Es muß nämlich nach Satz A.22 $\rho_s^* \leq \rho^*$ sein, damit das System störgrößenentkoppelbar ist. Die Berechnung des differentialalgebraischen Rangs kann nach der Methode der Berechnung der Kählerdifferenziale (vgl. Definition A.20 / A.21) und anschließender Rangberechnung erfolgen (Johnson 1969). Dieses Verfahren ist jedoch sehr rechenintensiv.

Da in dem Algorithmus die Gröbner-Basen GB_i mit der Monomordnung $u_1(t) \prec u_2(t) \prec \dots \prec u_m(t) \prec x_1(t) \prec x_2(t) \prec \dots \prec x_n(t)$ und \overline{GB}_i mit der Monomordnung $u_1(t) \prec u_2(t) \prec \dots \prec u_m(t) \prec s_1(t) \prec s_2(t) \prec \dots \prec s_q(t) \prec x_1(t) \prec x_2(t) \prec \dots \prec x_n(t)$ berechnet werden, sind beide differentialalgebraischen Ränge ρ^* und ρ_s^* leicht aus diesen zu ermitteln, wie der folgende Algorithmus verdeutlicht. Zur besseren Übersicht ist in dem folgenden Algorithmus und den beiden anschließenden Beispielen die zeitliche Abhängigkeit der Zustände $\mathbf{x}(t)$, Eingänge $\mathbf{u}(t)$, Störgrößen $\mathbf{s}(t)$ und Ausgänge $\mathbf{y}(t)$ nicht dargestellt.

Algorithmus 2.1: Berechnung des störentkoppelnden Kompensators (Senger 1999)

Schritt 1:

- 1.1: Berechnung der (reduzierten) Gröbner-Basis GB_0 der Systemausgänge in Normalform: $\mathbf{N}_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \mathbf{y}$. Die Gröbner-Basis GB_0 stellt eine Menge von l Polynomen dar: $GB_0 = \{g_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{y}), \dots, g_l(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{y})\}$. Diese Menge von Polynomen läßt sich als Vektor umschreiben zu $\tilde{\mathbf{g}}_0 := [g_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{y}), \dots, g_l(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{y})]^T \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$. Es gelte zunächst $\mathbb{U}_0 := C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ die Menge aller möglichen Stellgrößen. Es sei $\mathbf{r}_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{s}(t))$ die Lösung des Gleichungssystems $\tilde{\mathbf{g}}_0 = \mathbf{0}$. Dann definiert sich eine Stellgrößenhilfsmenge $\tilde{\mathbb{U}}_1 := \{\mathbf{u} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) | \mathbf{u}(t) = \mathbf{r}_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{s}(t))\}$ als die Menge der möglichen Eliminationsideale (vgl. Satz A.23 und Beispiel A.24) für \mathbf{u} aus GB_0 . Die neue Menge der Eliminationsideale bildet sich durch

$$\mathbb{U}_1 := \begin{cases} \mathbb{U}_0 \cap \tilde{\mathbb{U}}_1 & , \text{ wenn } \tilde{\mathbb{U}}_1 \neq \emptyset \\ \mathbb{U}_0 & , \text{ wenn } \tilde{\mathbb{U}}_1 = \emptyset \end{cases} .$$

Da im ersten Schritt keine Bedingungen für \mathbf{u} gefunden werden können, lautet die Menge $\tilde{\mathbb{U}}_1 = \emptyset$ und somit $\mathbb{U}_1 := \mathbb{U}_0$.

Analog dazu enthalte die Gröbner-Basis \overline{GB}_0 die Polynome ebenfalls in Normalform mit $\overline{GB}_0 = \{\overline{g}_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{y}), \dots, \overline{g}_l(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{y})\}$. Die Menge \overline{GB}_0 ist umschreibbar als Vektor $\tilde{\overline{\mathbf{g}}}_0 := [\overline{g}_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{y}), \dots, \overline{g}_l(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{y})]^T \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$. Es seien $\mathbf{r}_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{s}(t))$ die Lösung des Gleichungssystems $\tilde{\overline{\mathbf{g}}}_0 = \mathbf{0}$ nach \mathbf{u} und $\hat{\mathbf{r}}_1(\mathbf{x}(t))$ die Bedingungen für \mathbf{s} dabei. Die Stellgrößenhilfsmenge der Gröbner-Basis \overline{GB}_0 ist definiert durch $\tilde{\overline{\mathbb{U}}}_1 := \{\mathbf{u}, \mathbf{s} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) | \mathbf{u}(t) = \mathbf{r}_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{s}(t)), \mathbf{s}(t) = \hat{\mathbf{r}}_1(\mathbf{x}(t))\}$. Dabei sei $\bar{\rho}_0$ die Anzahl der möglichen Eliminationsideale für \mathbf{u}, \mathbf{s} aus \overline{GB}_0 . Die neue Menge der Eliminationsideale für \overline{GB}_0 bildet sich durch

$$\overline{\mathbb{U}}_1 := \begin{cases} \mathbb{U}_0 \cap \tilde{\overline{\mathbb{U}}}_1 & , \text{ wenn } \tilde{\overline{\mathbb{U}}}_1 \neq \emptyset \\ \mathbb{U}_0 & , \text{ wenn } \tilde{\overline{\mathbb{U}}}_1 = \emptyset \end{cases} .$$

1.2: Bestimmung der ersten Ableitungen der Ausgänge: $\dot{\mathbf{y}} = \frac{d\mathbf{y}}{dt}$ und $\dot{\mathbf{y}} := \frac{d\mathbf{y}}{dt} \Big|_{\mathbf{u}, \mathbf{s} \in \bar{\mathcal{U}}_1}$.

1.3: Berechnung der Gröbner-Basen GB_1 und \overline{GB}_1 der Ausgangsableitungen $\dot{\mathbf{y}}$ und $\dot{\mathbf{y}}|_{\mathbf{u}, \mathbf{s} \in \bar{\mathcal{U}}_1}$ in Normalform $\mathbf{N}_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}) = \dot{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}) - \dot{\mathbf{y}}$. Umschreiben der Gröbner-Basen in die Vektorform $\tilde{\mathbf{g}}_1$ und $\tilde{\bar{\mathbf{g}}}_1$ (vgl. Schritt 1.1). Es sei ρ_1 die Anzahl der möglichen Eliminationsideale für \mathbf{u} aus GB_1 und $\bar{\rho}_1$ die Anzahl der Eliminationsideale für \mathbf{u}, \mathbf{s} aus \overline{GB}_1 . Wenn $\bar{\rho}_0 + \bar{\rho}_1 > \rho^*$ ist, dann ist $\rho_s^* > \rho^*$ und damit das System nicht störentkoppelbar.

Wenn $\bar{\rho}_0 + \bar{\rho}_1 \leq \rho^*$ ist, dann folgt ein weiterer Schritt.

Schritt k , $k \geq 2$:

$k.1$: Werden die bis zum k -ten Schritt aus $\tilde{\mathbf{g}}_{k-1}$ durch Elimination gefundenen Bedingungen für \mathbf{u} in der Menge

$$\tilde{\mathcal{U}}_k := \{\mathbf{u} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \mid \mathbf{u}(t) = \mathbf{r}_k(\mathbf{x}(t), \mathbf{s}(t))\}$$

zusammengefaßt, dann gilt:

$$\mathcal{U}_k := \begin{cases} \mathcal{U}_{k-1} \cap \tilde{\mathcal{U}}_k & , \text{ wenn } \tilde{\mathcal{U}}_k \neq \emptyset \\ \mathcal{U}_{k-1} & , \text{ wenn } \tilde{\mathcal{U}}_k = \emptyset \end{cases} .$$

Analog dazu enthalte $\tilde{\bar{\mathcal{U}}}_k$ mit

$$\tilde{\bar{\mathcal{U}}}_k := \{\mathbf{u}, \mathbf{s} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \mid \mathbf{u}(t) = \mathbf{r}_k(\mathbf{x}(t), \mathbf{s}(t)), \mathbf{s}(t) = \hat{\mathbf{r}}_k(\mathbf{x}(t))\}$$

die bis zum k -ten Schritt aus $\tilde{\bar{\mathbf{g}}}_{k-1}$ durch Elimination gefundenen Bedingungen für \mathbf{u}, \mathbf{s} . Somit folgt:

$$\bar{\mathcal{U}}_k := \begin{cases} \bar{\mathcal{U}}_{k-1} \cap \tilde{\bar{\mathcal{U}}}_k & , \text{ wenn } \tilde{\bar{\mathcal{U}}}_k \neq \emptyset \\ \bar{\mathcal{U}}_{k-1} & , \text{ wenn } \tilde{\bar{\mathcal{U}}}_k = \emptyset \end{cases} .$$

$k.2$: Einsetzen der gefundenen Beziehungen aus \mathcal{U}_k bzw. $\bar{\mathcal{U}}_k$ und Berechnung der nächsten Ableitung der Ausgänge:

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(k)} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{y}^{(k-1)} \Big|_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_k} \right) , \quad \bar{\mathbf{y}}^{(k)} = \frac{d}{dt} \left(\bar{\mathbf{y}}^{(k-1)} \Big|_{\mathbf{u}, \mathbf{s} \in \bar{\mathcal{U}}_k} \right) .$$

$k.3$: Berechnung der Gröbner-Basen GB_k und \overline{GB}_k von $\tilde{\mathbf{y}}^{(k)}|_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_k}$ bzw. $\bar{\mathbf{y}}^{(k)}|_{\mathbf{u}, \mathbf{s} \in \bar{\mathcal{U}}_k}$ in Normalform $\mathbf{N}_k(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}) - \mathbf{y}^{(k)}$. Umschreiben der Gröbner-Basen in die Vektorform $\tilde{\mathbf{g}}_k$ und $\tilde{\bar{\mathbf{g}}}_k$ (vgl. Schritt 1.1). Es sei ρ_k die Anzahl der möglichen Eliminationsideale für \mathbf{u} aus GB_k und $\bar{\rho}_k$ die Anzahl der möglichen Eliminationsideale für \mathbf{u}, \mathbf{s} aus \overline{GB}_k . Wenn gilt: $\bar{\rho}_k^* = \sum_{i=0}^k \bar{\rho}_i > \rho^*$ oder wenn der n -te Schritt abgearbeitet ist, endet der Algorithmus, andernfalls folgt ein weiterer Schritt.

Es muß ρ^* des ungestörten Systems entweder vorab bekannt sein, oder in dem Algorithmus durch $\rho^* = \sum_{i=1}^n \rho_i$ mitberechnet werden. Ist $\bar{\rho}_k^* \leq \rho^*$, dann ist das System störgrößenentkoppelbar und die entkoppelnde Stellgröße ergibt sich zu $\mathbf{u} \in \mathbb{U}_k$. Darin werden die in \mathbf{u} enthaltenen höchsten Ausgangsableitungen $y_i^{(j)}$ ($i = 1, \dots, p$ und $j = 1, \dots, k-1$) durch die neuen Eingänge v_i substituiert und alle niedrigeren Ableitungen durch die zusätzlichen Zustandsvariablen \mathbf{z} als Repräsentanten der Kompensatordynamik ersetzt (vgl. Senger 1999). Liefert der Algorithmus das Ergebnis $\bar{\rho}_k^* > \rho^*$, so ist das Störsignal nicht durch eine Zustandsrückführung entkoppelbar. \square

Um ein besseres Verständnis für die Arbeitsweise des Algorithmus zu erhalten, sind zwei Beispiele aufgeführt:

Beispiel 2.11 (Senger 1999)

Es sei folgendes System mit den Eingängen $u_1(t)$, $u_2(t)$, der Störgröße $s(t)$ und den drei Ausgängen $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ betrachtet:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 + x_5 \\ x_6^2 + u_1 \\ x_4^2 u_1 u_2 \\ x_7 \\ s^3 \\ u_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Zur Berechnung der Gröbner-Basen gelte die lexikographische Monomordnung $u_1 \prec u_2 \prec s \prec x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec x_4 \prec x_5 \prec x_6 \prec x_7$. Dann folgt für den Algorithmus:

Schritt 1:

1.1:

$$\mathbf{N}_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - y_1 \\ x_1 x_2 - y_2 \\ x_2 - y_3 \end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow GB_0 = \overline{GB}_0 = \{x_1 + x_2 - y_1; x_1 x_2 - y_2; x_2 - y_3\}$, und damit $\tilde{\mathbf{g}}_0 = \tilde{\mathbf{g}}_0 := [x_1 + x_2 - y_1, x_1 x_2 - y_2, x_2 - y_3]^T \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$ bzw. $\mathbf{r}_1 = \hat{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{0}$.

$\tilde{\mathbb{U}}_1 = \tilde{\bar{\mathbb{U}}}_1 = \emptyset \Rightarrow \mathbb{U}_1 = \bar{\mathbb{U}}_1 = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, $\bar{\rho}_0 = 0$.

1.2:

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \dot{\mathbf{y}} = \left. \frac{d\mathbf{y}}{dt} \right|_{\mathbf{u}, \mathbf{s} \in \bar{\mathbb{U}}_1} = \begin{bmatrix} x_3 + x_4 + x_5 \\ x_2 x_3 + x_1(x_4 + x_5) \\ x_4 + x_5 \end{bmatrix}.$$

1.3:

$$\mathbf{N}_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}) = \dot{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}) - \dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} x_3 + x_4 + x_5 - \dot{y}_1 \\ x_2 x_3 + x_1(x_4 + x_5) - \dot{y}_2 \\ x_4 + x_5 - \dot{y}_3 \end{bmatrix}.$$

Für die Gröbner-Basen GB_1 und \overline{GB}_1 von $\dot{\mathbf{y}}$ bzw. $\dot{\mathbf{y}}|_{\mathbf{u}, \mathbf{s} \in \overline{\mathbf{U}}_1}$ in Normalform ergibt sich: $GB_1 = \overline{GB}_1 = \{x_4 + x_5 - \dot{y}_3 ; x_3 - \dot{y}_1 + \dot{y}_3 ; -\dot{y}_3 x_1 + \dot{y}_2 + (\dot{y}_3 - \dot{y}_1)x_2\}$. Aus den umgeschriebenen Vektorfunktionen $\tilde{\mathbf{g}}_1 = \tilde{\overline{\mathbf{g}}}_1 = [x_4 + x_5 - \dot{y}_3, x_3 - \dot{y}_1 + \dot{y}_3, -\dot{y}_3 x_1 + \dot{y}_2 + (\dot{y}_3 - \dot{y}_1)x_2]^T \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$ der Gröbner-Basen kann kein Eingang eliminiert werden ($\mathbf{r}_2 = \hat{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{0}$), so daß folgt: $\rho_1 = \bar{\rho}_1 = 0$.

Schritt 2:

$$2.1: \tilde{\mathbf{U}}_2 = \tilde{\overline{\mathbf{U}}}_2 = \emptyset \quad \Rightarrow \mathbf{U}_2 = \overline{\mathbf{U}}_2 = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \quad .$$

$$2.2: \quad \ddot{\mathbf{y}} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{y}}|_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}_2} \right) = \ddot{\mathbf{y}} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{y}}|_{\mathbf{u}, \mathbf{s} \in \overline{\mathbf{U}}_2} \right) \\ = \begin{bmatrix} x_6^2 + x_7 + x_4^2 u_1 u_2 + u_1 \\ 2x_3(x_4 + x_5) + x_2(x_6^2 + u_1) + x_1(x_7 + x_4^2 u_1 u_2) \\ x_7 + x_4^2 u_1 u_2 \end{bmatrix} \quad .$$

$$2.3: \quad \mathbf{N}_2(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}) = \ddot{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}) - \ddot{\mathbf{y}} \\ = \begin{bmatrix} x_6^2 + x_7 + x_4^2 u_1 u_2 + u_1 - \ddot{y}_1 \\ 2x_3(x_4 + x_5) + x_2(x_6^2 + u_1) + x_1(x_7 + x_4^2 u_1 u_2) - \ddot{y}_2 \\ x_7 + x_4^2 u_1 u_2 - \ddot{y}_3 \end{bmatrix} \quad .$$

Die Gröbner-Basen GB_2 und \overline{GB}_2 von $\ddot{\mathbf{y}}|_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}_2}$ bzw. $\ddot{\mathbf{y}}|_{\mathbf{u}, \mathbf{s} \in \overline{\mathbf{U}}_2}$ in Normalform lauten:

$$GB_2 = \overline{GB}_2 = \{u_1 u_2 x_4^2 + x_7 - \ddot{y}_3 ; x_6^2 + u_1 - \ddot{y}_1 + \ddot{y}_3 ; \\ 2x_3 x_4 + (\ddot{y}_1 - \ddot{y}_3)x_2 + 2x_3 x_5 + \ddot{y}_3 x_1 - \ddot{y}_2\} \quad .$$

Aus den umgeschriebenen Vektorfunktionen $\tilde{\mathbf{g}}_2 = \tilde{\overline{\mathbf{g}}}_2 = [u_1 u_2 x_4^2 + x_7 - \ddot{y}_3, x_6^2 + u_1 - \ddot{y}_1 + \ddot{y}_3, 2x_3 x_4 + (\ddot{y}_1 - \ddot{y}_3)x_2 + 2x_3 x_5 + \ddot{y}_3 x_1 - \ddot{y}_2]^T \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$ der Gröbner-Basen GB_2 und \overline{GB}_2 lassen sich zwei funktionelle Zusammenhänge für u_1, u_2 durch

$$\mathbf{r}_3 = \hat{\mathbf{r}}_3 = \begin{bmatrix} -x_6^2 + \ddot{y}_1 - \ddot{y}_3 \\ -x_7 + \ddot{y}_3 \\ \frac{-x_7 + \ddot{y}_3}{x_4^2(-x_6^2 + \ddot{y}_1 - \ddot{y}_3)} \end{bmatrix}$$

ermitteln, so daß gilt: $\rho_2 = 2 = m = \rho^*$. Wegen $GB_2 = \overline{GB}_2$ gilt zudem: $\bar{\rho}_2 = 2$.

Schritt 3:

$$3.1: \tilde{\mathbf{U}}_3 = \left\{ \mathbf{u} \mid u_1 = -x_6^2 + \ddot{y}_1 - \ddot{y}_3, u_2 = \frac{-x_7 + \ddot{y}_3}{x_4^2(-x_6^2 + \ddot{y}_1 - \ddot{y}_3)} \right\}, \\ \tilde{\overline{\mathbf{U}}}_3 = \left\{ \mathbf{u}, \mathbf{s} \mid u_1 = -x_6^2 + \ddot{y}_1 - \ddot{y}_3, u_2 = \frac{-x_7 + \ddot{y}_3}{x_4^2(-x_6^2 + \ddot{y}_1 - \ddot{y}_3)} \right\}. \\ \Rightarrow \mathbf{U}_3 = \tilde{\mathbf{U}}_3, \text{ da } \mathbf{U}_2 \cap \tilde{\mathbf{U}}_3 \quad (\tilde{\mathbf{U}}_3 \neq \emptyset) \\ \Rightarrow \overline{\mathbf{U}}_3 = \tilde{\overline{\mathbf{U}}}_3, \text{ da } \overline{\mathbf{U}}_2 \cap \tilde{\overline{\mathbf{U}}}_3 \quad (\tilde{\overline{\mathbf{U}}}_3 \neq \emptyset) \quad .$$

$$3.2: \tilde{\mathbf{y}}^{(3)} = \frac{d}{dt}(\ddot{\mathbf{y}}|_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}_3}) = \bar{\mathbf{y}}^{(3)} = \frac{d}{dt}(\ddot{\mathbf{y}}|_{\mathbf{u}, \mathbf{s} \in \bar{\mathbb{U}}_3}) = [0 \quad g^*(\mathbf{x}) \quad 0]^T .$$

Das Polynom $g^*(\mathbf{x})$ ist aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht explizit angegeben und enthält nur Terme, die bei weiterem Ableiten keine neuen Beziehungen für weitere (Stör- und Stellgrößen-)Eingänge liefern können.

3.3: Da in weiteren Ableitungen somit kein Eingang auftauchen kann und des weiteren $\sum_{i=1}^n \rho_i = 2 = \min\{m, p\} = \rho^*$ sowie $\sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i = \rho_s^* = 2$ gilt, endet der Algorithmus.

Folglich ist $\rho_s^* \leq \rho^*$ erfüllt und das Störsignal kann mittels statischer Zustandsrückführung entkoppelt werden. Die Stellgröße ergibt sich aus $\mathbf{u} \in \mathbb{U}_3$ mit der Substitution $\ddot{y}_1 = v_1$, $\ddot{y}_3 = v_2$ zu

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) = \begin{bmatrix} -x_6^2 + v_1 - v_2 \\ -x_7 + v_2 \\ \frac{-x_7 + v_2}{x_4^2(-x_6^2 + v_1 - v_2)} \end{bmatrix} .$$

Das linearisierte und störentkoppelte Ersatzsystem lautet:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 + x_5 \\ v_1 - v_2 \\ -x_7 + v_2 \\ x_7 \\ s^3 \\ -x_6 + v_1 - v_2 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} .$$

□

In diesem Beispiel ist die Messung der Störgröße $s(t)$ nicht nötig. Das zweite Beispiel zeigt, daß gemessene Störgrößen für das Kompensatorgesetz aber auch unabdingbar sein können.

Beispiel 2.12

Es sei folgendes System mit den Eingängen $u_1(t)$, $u_2(t)$, den Störgrößen $s_1(t)$, $s_2(t)$ und den beiden Ausgängen $y_1(t)$, $y_2(t)$ betrachtet:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 u_2 s_2 + u_2 \\ x_3^2 + s_1 s_2 - s_1^2 \\ x_2 s_1 + u_1 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix} .$$

Zur Berechnung der Gröbner-Basen gelte die lexikographische Monomordnung $u_1 \prec u_2 \prec s_1 \prec s_2 \prec x_1 \prec x_2 \prec x_3$. Die einzelnen Schritte im Algorithmus sind:

Schritt 1:

$$1.1: \mathbf{N}_0(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_3 - y_1 \\ x_1 + x_3 - y_2 \end{bmatrix} .$$

$\Rightarrow GB_0 = \overline{GB}_0 = \{x_3 - y_1 ; x_1 + x_3 - y_2\}$, und damit

$\tilde{\mathbf{g}}_0 = \tilde{\mathbf{g}}_0 := [x_3 - y_1, x_1 + x_3 - y_2]^T \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$ bzw. $\mathbf{r}_1 = \hat{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{0}$.

$\tilde{\mathbb{U}}_1 = \bar{\mathbb{U}}_1 = \emptyset \Rightarrow \mathbb{U}_1 = \bar{\mathbb{U}}_1 = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, $\bar{\rho}_0 = 0$.

$$1.2: \quad \dot{\mathbf{y}} = \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \dot{\mathbf{y}} = \left. \frac{d\mathbf{y}}{dt} \right|_{\mathbf{u}, \mathbf{s} \in \bar{\mathbb{U}}_1} = \begin{bmatrix} x_2 s_1 + u_1 \\ x_1 u_2 s_2 + x_2 s_1 + u_1 + u_2 \end{bmatrix} .$$

$$1.3: \quad \mathbf{N}_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}) = \dot{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}) - \dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} x_2 s_1 + u_1 - \dot{y}_1 \\ x_1 u_2 s_2 + u_2 - \dot{y}_2 + \dot{y}_1 \end{bmatrix} .$$

Für die Gröbner-Basen GB_1 und \overline{GB}_1 von $\dot{\mathbf{y}}$ bzw. $\dot{\mathbf{y}}|_{\mathbf{u}, \mathbf{s} \in \bar{\mathbb{U}}_1}$ in Normalform ergibt sich:

$$GB_1 = \overline{GB}_1 = \{x_2 s_1 + u_1 - \dot{y}_1 ; x_1 u_2 s_2 + u_2 - \dot{y}_2 + \dot{y}_1\} .$$

Aus den umgeschriebenen Vektorfunktionen $\tilde{\mathbf{g}}_1 = \tilde{\tilde{\mathbf{g}}}_1 = [x_2 s_1 + u_1 - \dot{y}_1, x_1 u_2 s_2 + u_2 - \dot{y}_2 + \dot{y}_1]^T \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$ der Gröbner-Basen lassen sich zwei Eingänge u_1 und u_2 durch

$$\mathbf{r}_2 = \hat{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 - x_2 s_1 \\ \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{x_1 s_2 + 1} \end{bmatrix}$$

eliminieren, so daß gilt: $\rho_1 = 2 = m = \rho^*$. Wegen $GB_1 = \overline{GB}_1$ gilt zudem: $\bar{\rho}_1 = 2$.

Schritt 2:

$$2.1: \quad \tilde{\mathbb{U}}_2 = \left\{ \mathbf{u} \mid u_1 = \dot{y}_1 - x_2 s_1, u_2 = \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{x_1 s_2 + 1} \right\} ,$$

$$\tilde{\tilde{\mathbb{U}}}_2 = \left\{ \mathbf{u}, \mathbf{s} \mid u_1 = \dot{y}_1 - x_2 s_1, u_2 = \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{x_1 s_2 + 1} \right\} .$$

$$\Rightarrow \mathbb{U}_2 = \tilde{\mathbb{U}}_2, \text{ da } \mathbb{U}_1 \cap \tilde{\mathbb{U}}_2 \quad (\tilde{\mathbb{U}}_2 \neq \emptyset)$$

$$\Rightarrow \bar{\mathbb{U}}_2 = \tilde{\tilde{\mathbb{U}}}_2, \text{ da } \bar{\mathbb{U}}_1 \cap \tilde{\tilde{\mathbb{U}}}_2 \quad (\tilde{\tilde{\mathbb{U}}}_2 \neq \emptyset) .$$

2.2: $\ddot{\mathbf{y}} = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{y}}|_{\mathbf{u} \in \mathbb{U}_2}) = \ddot{\mathbf{y}} = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{y}}|_{\mathbf{u}, \mathbf{s} \in \bar{\mathbb{U}}_2}) = [0 \quad g^*(\mathbf{x}) \quad 0]^T$. Das Polynom $g^*(\mathbf{x})$ ist aus Gründen der Übersichtlichkeit wie im vorherigen Beispiel nicht explizit angegeben und enthält nur Terme, die bei weiterem Ableiten keine neuen Beziehungen für weitere (Stör- und Stellgrößen-)Eingänge liefern können.

2.3: Da in weiteren Ableitungen somit kein Eingang auftauchen kann und des weiteren $\sum_{i=1}^n \rho_i = 2 = \min\{m, p\} = \rho^*$ sowie $\sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i = \rho_s^* = 2$ gilt, endet der Algorithmus.

Folglich ist $\rho_s^* \leq \rho^*$ erfüllt und die Systemausgänge können mittels statischer Zustandsrückführung durch Messung der Störsignale $s_1(t)$ und $s_2(t)$ von diesen entkoppelt werden. Die Stellgröße ergibt sich aus $\mathbf{u} \in \mathbb{U}_2$ mit der Substitution $\dot{y}_1 = v_1, \dot{y}_2 = v_2$ zu

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), \mathbf{s}(t), \mathbf{v}(t)) = \begin{bmatrix} v_1 - x_2 s_1 \\ \frac{v_2 - v_1}{x_1 s_2 + 1} \end{bmatrix} .$$

Als Ergebnis gilt für das Ersatzsystem:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} v_2 - v_1 \\ x_3^2 + s_1 s_2 - s_1^2 \\ v_1 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix} .$$

□

3 Erweiterung der Störgrößentkopplung auf rationale Systeme

Abschnitt 2 stellt einen differentialalgebraischen Ansatz zur Störgrößentkopplung dar. Nach diesem Ansatz ist ein Algorithmus mittels Berechnung von Gröbner-Basen von Senger (1999) verwirklicht worden, so daß dieser auf Polynomsysteme beschränkt ist. Aufbauend auf dem Algorithmus 2.1 findet in diesem Abschnitt eine Erweiterung auf zunächst ausschließlich gebrochen-rationale (bzw. rationale) Funktionen im Zustandsmodell statt. Die Notation der zeitlichen Abhängigkeit der Zustände $\mathbf{x}(t)$, Eingänge $\mathbf{u}(t)$, Störgrößen $\mathbf{s}(t)$ und Ausgänge $\mathbf{y}(t)$ ist in dem Algorithmus und den Beispielen im folgenden Abschnitt zur besseren Übersicht weggelassen.

Der Kern des Algorithmus 2.1 für Polynomsysteme bleibt bei dem Algorithmus zur Störgrößentkopplung für (*gebrochen-*) *rationale Systeme* erhalten. Es ist also, zunächst durch Bestimmung der differentialalgebraischen Ränge ρ_s^* des gestörten und ρ^* des ungestörten Systems, die Bedingung der Störgrößentkoppelbarkeit $\rho_s^* \leq \rho^*$ zu überprüfen.

Im Unterschied zum Algorithmus 2.1 kann bei rationalen Systemen der differentialalgebraische Rang nicht im Algorithmus mit Hilfe der gefundenen Eliminationsideale der ermittelten Gröbner-Basen „mitgezählt“ werden. Daher sind die differentialalgebraischen Ränge ρ_s^* und ρ^* *a priori* zu berechnen. Ein geeignetes Verfahren zur Berechnung dieser differentialalgebraischen Ränge geben Di Benedetto u. a. (1989) und Wey (1996) an. Dieses Verfahren besticht durch den Vorteil gegenüber der Berechnung mittels Kählerdifferenziale, daß das partielle Ableiten der zeitlichen Ableitungen der Systemausgänge nicht nach den Zustandsvariablen des Systems durchzuführen ist und sich somit der Aufwand in der Rangbestimmung erheblich reduziert. Trotzdem ist die Bestimmung der differentialalgebraischen Ränge immer noch sehr aufwendig.

Das Ermitteln des Kompensatorgesetzes erfolgt dann sukzessiv durch Umschreiben der zeitlichen Ableitungen der Systemausgänge $\mathbf{y}^{(l)}$ in die Normalform $\mathbf{N}_l(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u})$ und Bestimmung der nach den Systemeingängen $\mathbf{u}(t)$ aufgelösten Bedingungen, die in der Menge \mathbb{U}_l in einer Iterationsschleife festzuhalten sind. Diese Systemeingänge entsprechen schließlich dem Regelgesetz des Kompensators (der Regelstrecke vorgeschaltet).

Der Algorithmus zur Störgrößentkopplung für (*gebrochen-*) *rationale Systeme* ist im folgenden detailliert aufgeführt:

Algorithmus 3.1: Störkoppelnder Kompensator für rationale Systeme

Schritt 1:

Vereinfachung des Zustandsmodells durch:

- Gleichnamig machen der rationalen Funktionen,
- Faktorisieren rationaler Funktionen,

- Expansion rationaler Funktionen,
- Partialbruchzerlegung und
- mehrdimensionale Polynomdivision.

Schritt 2:

Berechnung der ersten n zeitlichen Ableitungen der Ausgänge:

$$\dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(n)} \quad .$$

Schritt 3:

3.1: Bestimmung des differentialalgebraischen Rangs ρ_s^* des gestörten Systems der Form (2.1) durch Berechnung der Dimension $\dim \bar{\mathcal{E}}_k$ der gewöhnlichen (nichtdifferentialen) Vektorräume bzw. Rangbestimmung der Jakobimatrizen $\bar{\mathbf{J}}_k$:

$$\begin{aligned} \dim \bar{\mathcal{E}}_k &= n + \text{rang } \bar{\mathbf{J}}_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k-1)}, \mathbf{s}, \dots, \mathbf{s}^{(k-1)}) \\ &= n + \text{rang} \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \bar{\mathbf{w}}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \ddot{\mathbf{y}}}{\partial \bar{\mathbf{w}}} & \frac{\partial \ddot{\mathbf{y}}}{\partial \dot{\bar{\mathbf{w}}}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial \bar{\mathbf{w}}} & \frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial \dot{\bar{\mathbf{w}}}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial \bar{\mathbf{w}}^{(k-1)}} \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

$$\text{mit } \bar{\mathbf{J}}_0 = \mathbf{0}, k = 1, \dots, n \text{ und } \bar{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} .$$

$$\Rightarrow \rho_s^* = \dim \bar{\mathcal{E}}_n - \dim \bar{\mathcal{E}}_{n-1} \quad .$$

3.2: Bestimmung des differentialalgebraischen Rangs ρ^* des ungestörten Systems der Form (2.2) durch Berechnung der Dimension $\dim \mathcal{E}_k$ der gewöhnlichen (nichtdifferentialen) Vektorräume bzw. Rangbestimmung der Jakobimatrizen \mathbf{J}_k (Di Benedetto u. a. 1989, Wey 1996):

$$\dim \mathcal{E}_k = n + \text{rang } \mathbf{J}_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k-1)}) \quad ; \quad k = 1, \dots, n \quad ; \quad \mathbf{J}_0 = \mathbf{0}$$

$$= n + \text{rang} \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{u}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \ddot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \ddot{\mathbf{y}}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial \mathbf{u}^{(k-1)}} \end{bmatrix} .$$

$$\Rightarrow \rho^* = \dim \mathcal{E}_n - \dim \mathcal{E}_{n-1} \quad .$$

3.3: Gilt die Bedingung $\rho_s^* \leq \rho^*$, ist das System störgrößenentkoppelbar und es beginnt die Berechnung des Kompensators.

Schritt 4:

4.1: Umschreiben der ersten zeitlichen Ableitung der Ausgänge $\dot{\mathbf{y}}$ in die Normalform $\mathbf{N}_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}) = \dot{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}) - \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$. Es sei zunächst $\mathbb{U}_0 := C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ die Menge aller möglichen Stellgrößen. Dann definiert sich die Stellgrößenhilfsmenge

$$\tilde{\mathbb{U}}_1 := \{\mathbf{u} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \mid \mathbf{u}(t) = \mathbf{r}_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{s}(t))\}$$

als die Menge der durch Auflösen des Gleichungssystems

$$\mathbf{N}_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{0} \tag{3.1}$$

gefundenen Bedingungen für \mathbf{u} . Dabei bezeichnet $\mathbf{r}_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{s}(t))$ die Lösung dieses Gleichungssystems (3.1). Die Menge der möglichen Stellgrößen schränkt sich durch

$$\mathbb{U}_1 := \begin{cases} \mathbb{U}_0 \cap \tilde{\mathbb{U}}_1 & , \text{ wenn } \tilde{\mathbb{U}}_1 \neq \emptyset \\ \mathbb{U}_0 & , \text{ wenn } \tilde{\mathbb{U}}_1 = \emptyset \end{cases}$$

weiter ein.

4.2: Wenn in diesem Schritt die Anzahl der ermittelten Stellgrößen der Menge \mathbb{U}_1 nicht mit der Anzahl der Eingänge \mathbf{u} übereinstimmt, erfolgt die Berechnung der verbleibenden Bedingungen in dem nächsten Schritt k .

Schritt k , $k \geq 5$: Es sei $l := k - 3$.

$k.1$: Fallunterscheidung:

- a) Gilt $2 \leq l \leq n$, dann ist keine Berechnung der l -ten zeitlichen Ableitung der Ausgänge notwendig, da diese schon in Schritt 2 berechnet worden sind.
- b) Gilt $l > n$, dann ist die Berechnung der l -ten zeitlichen Ableitung der Ausgänge erforderlich.

$k.2$: Umschreiben der l -ten zeitlichen Ableitung der Ausgänge

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(l)} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{y}^{(l-1)} \Big|_{\mathbf{u}, \mathbf{s} \in \mathbb{U}_l} \right)$$

in die Normalform $\mathbf{N}_l(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{h}^{(l)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}) - \mathbf{y}^{(l)} = \mathbf{0}$. Die Stellgrößenhilfsmenge als die Menge der durch Auflösen gefundenen Bedingungen für \mathbf{u} aus $\mathbf{N}_l(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u})$ lautet:

$$\tilde{\mathbb{U}}_l := \{\mathbf{u} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \mid \mathbf{u}(t) = \mathbf{r}_l(\mathbf{x}(t), \mathbf{s}(t))\} \quad .$$

Die Menge \mathbb{U}_l bildet sich dann durch:

$$\mathbb{U}_l := \begin{cases} \mathbb{U}_{l-1} \cap \tilde{\mathbb{U}}_l & , \text{ wenn } \tilde{\mathbb{U}}_l \neq \emptyset \\ \mathbb{U}_{l-1} & , \text{ wenn } \tilde{\mathbb{U}}_l = \emptyset \end{cases} .$$

k.3: Wenn die Anzahl der durch Auflösen erhaltenen Ausdrücke aus \mathbb{U}_l mindestens gleich der Anzahl m der Systemeingänge oder der n -te Schritt abgearbeitet ist, endet der Algorithmus. Weiterhin muß das Gleichungssystem eindeutig lösbar sein. Ansonsten erfolgt ein weiterer Iterationsschritt – der Schritt *k.1*.

Die das System störentkoppelnde Stellgröße ergibt sich zu $\mathbf{u} \in \mathbb{U}_l$. Die in \mathbf{u} enthaltenen höchsten Ausgangsableitungen $y_i^{(j)}$ ($i = 1, \dots, p$ und $j = 1, \dots, l$) sind durch die neuen Eingänge v_i zu substituieren und alle niedrigeren Ableitungen sind durch die zusätzlichen Zustandsvariablen \mathbf{z} als Repräsentanten der Kompensatordynamik zu ersetzen. Liefert der Algorithmus das Ergebnis $\rho_s^* > \rho^*$, so ist das Störsignal nicht durch eine Zustandsrückführung entkoppelbar. \square

Das folgende Beispiel veranschaulicht den Algorithmus, wobei im Schritt 3 auf eine detaillierte Ausführung der Ermittlung der differentialalgebraischen Ränge ρ_s^* und ρ^* auf Grund der Komplexität der Jakobimatrizen zu verzichten ist:

Beispiel 3.1

Es sei folgendes System mit den Eingängen $u_1(t)$, $u_2(t)$, der Störgröße $s(t)$ und den beiden Ausgängen $y_1(t)$, $y_2(t)$ betrachtet:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{(x_1 x_3^2 - x_1 u_1 x_2 + x_2 x_3^2 - u_1 x_2^2)s}{x_1 x_3^2 - x_1 u_1 x_2 + x_2 x_3^2 - u_1 x_2^2} + u_2 \\ x_3 - u_1 u_2 \\ x_2 + u_1 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} . \quad (3.2)$$

Schritt 1:

Durch Umformen in die Normalform bzw. Faktorisieren der rationalen Funktion in der ersten Zustandsgleichung und anschließendem Kürzen läßt sich das Zustandsmodell simplifizieren:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{(x_1 + x_2)s}{x_2^2 - u_1} + u_2 \\ x_3 - u_1 u_2 \\ x_2 + u_1 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} .$$

Schritt 2:

Berechnung der ersten $n = 3$ zeitlichen Ableitungen der Ausgänge:

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{(x_1 + x_2)s}{x_2^2 - u_1} + u_2 - x_3 + u_1 u_2 \\ x_2 + u_1 \end{bmatrix} , \text{ und}$$

$$\ddot{\mathbf{y}} = \frac{d\dot{\mathbf{y}}}{dt} = \begin{bmatrix} *_{1} - x_2 - u_1 + \dot{u}_1 u_2 + u_1 \dot{u}_2 + \dot{u}_2 \\ x_3 - u_1 u_2 + \dot{u}_1 \end{bmatrix}, \text{ wobei}$$

$$*_{1} = \frac{\left(\left(\frac{(x_1 + x_2)s}{x_2^2 - u_1} + u_2 + x_3 - u_1 u_2 \right) s - (x_1 + x_2)\dot{s} \right) (x_2^2 - u_1)}{(x_2^2 - u_1)^2}$$

$$- \frac{(x_1 + x_2)s(2x_2(x_3 - u_2 u_1) - \dot{u}_1)}{(x_2^2 - u_1)^2}$$

entspricht. Auf eine Darstellung von $\mathbf{y}^{(3)} = \frac{d\ddot{\mathbf{y}}}{dt}$ wird wegen der Komplexität verzichtet.

Schritt 3:

3.1: Bestimmung des differentialalgebraischen Rangs ρ_s^* des gestörten Systems durch Berechnung der Dimension $\dim \bar{\mathcal{E}}_k$ der gewöhnlichen (nichtdifferentiellen) Vektorräume bzw. Rangbestimmung der Jakobimatrizen $\bar{\mathbf{J}}_k$ ($k = 1, \dots, n$):

$$\begin{aligned} \dim \bar{\mathcal{E}}_1 &= n + \text{rang } \bar{\mathbf{J}}_1 = 3 + 2 = 5 \quad , \\ \dim \bar{\mathcal{E}}_2 &= n + \text{rang } \bar{\mathbf{J}}_2 = 3 + 4 = 7 \quad , \\ \dim \bar{\mathcal{E}}_3 &= n + \text{rang } \bar{\mathbf{J}}_3 = 3 + 6 = 9 \quad , \\ \Rightarrow \rho_s^* &= \dim \bar{\mathcal{E}}_3 - \dim \bar{\mathcal{E}}_2 = 9 - 7 = 2 \quad . \end{aligned}$$

3.2: Einsetzen der Störgröße $s(t) = 0$ in dem Zustandsmodell nach Gl. (3.2) liefert das ungestörte System. Bestimmung des differentialalgebraischen Rangs ρ des ungestörten Systems durch Berechnung der Dimension $\dim \mathcal{E}_k$ der gewöhnlichen (nichtdifferentiellen) Vektorräume bzw. Rangbestimmung der Jakobimatrizen \mathbf{J}_k ($k = 1, \dots, n$):

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{E}_1 &= n + \text{rang } \mathbf{J}_1 = 3 + 2 = 5 \quad , \\ \dim \mathcal{E}_2 &= n + \text{rang } \mathbf{J}_2 = 3 + 4 = 7 \quad , \\ \dim \mathcal{E}_3 &= n + \text{rang } \mathbf{J}_3 = 3 + 6 = 9 \quad , \\ \Rightarrow \rho^* &= \dim \mathcal{E}_3 - \dim \mathcal{E}_2 = 9 - 7 = 2 \quad . \end{aligned}$$

3.3: Somit ist die Bedingung $\rho_s^* \leq \rho^*$ erfüllt und es läßt sich die störentkoppelnde Rückführung mit Schritt 4 berechnen.

Schritt 4:

4.1: Durch Umschreiben der ersten zeitlichen Ableitung der Ausgänge $\dot{\mathbf{y}}$ in die Normalform $\mathbf{N}_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{u}) = \dot{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \dot{\mathbf{y}}$

$$\mathbf{N}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{(x_1 + x_2)s}{x_2^2 - u_1} + u_2 - x_3 + u_1 u_2 - \dot{y}_1 \\ x_2 + u_1 - \dot{y}_2 \end{bmatrix} \quad \text{und}$$

Auflösen des eindeutigen Gleichungssystems nach den Systemeingängen läßt sich die Menge

$$\mathbb{U}_1 = \left\{ \mathbf{u} \mid \begin{aligned} u_1 &= -x_2 + \dot{y}_2, \\ u_2 &= \frac{x_1 s + x_2 s - x_2^2 x_3 - x_2 x_3 + x_3 \dot{y}_2 - x_2^2 \dot{y}_1 - x_2 \dot{y}_1 + \dot{y}_1 \dot{y}_2}{-x_2 + x_2^3 + \dot{y}_2 - 2x_2 \dot{y}_2 - x_2^2 \dot{y}_2 + \dot{y}_2^2} \end{aligned} \right\}$$

wegen $\mathbb{U}_1 := \mathbb{U}_0 \cap \tilde{\mathbb{U}}_1$ angeben.

4.2: Die Anzahl der durch Auflösen erhaltenen Ausdrücke aus \mathbb{U}_1 entspricht genau der Anzahl $m = 2$ der Systemeingänge und das Gleichungssystem für u_1 und u_2 ist eindeutig lösbar. Daher endet der Algorithmus.

Mit der Substitution der Ausgangsableitungen \dot{y}_1, \dot{y}_2 durch die neuen Eingänge v_1, v_2 läßt sich das Kompensatorgesetz angeben:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), s(t), \mathbf{v}(t)) = \left[\begin{array}{c} -x_2 + v_2 \\ \frac{x_1 s + x_2 s - x_2^2 x_3 - x_3 x_2 + x_3 v_2 - x_2^2 v_1 - x_2 v_1 + v_1 v_2}{-x_2 + x_2^3 + v_2 - 2x_2 v_2 - x_2^2 v_2 + v_2^2} \end{array} \right] .$$

Das Ersatzsystem lautet:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} *_{1} \\ *_{2} \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \text{mit} \quad (3.3)$$

$$*_{1} = \frac{s x_2^2 - v_1 x_2^2 - x_3 x_2^2 + s x_1 x_2 - s x_2 v_2 - v_1 x_2 - x_3 x_2 + x_3 v_2 + v_1 v_2 - s x_1 v_2}{(-v_2 - 1 + x_2)(x_2^2 + x_2 - v_2)}$$

und

$$*_{2} = \frac{-x_3 x_2 + x_3 v_2 + s x_1 x_2 + s x_2^2 - x_3 x_2^2 - v_1 x_2^3 - v_1 x_2^2 + 2 v_1 x_2 v_2}{(-v_2 - 1 + x_2)(x_2^2 + x_2 - v_2)} + \frac{-s x_1 v_2 - s x_2 v_2 + v_1 x_2^2 v_2 - v_1 v_2^2}{(-v_2 - 1 + x_2)(x_2^2 + x_2 - v_2)} .$$

Da dieses Ersatzsystem nicht in linearisierter Form vorliegt, ist ein Nachweis, daß das System störentkoppelt ist, nicht trivial. Das Ersatzsystem ist dann störentkoppelt, wenn alle partiellen zeitlichen Ausgangsableitungen $\frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial s}$ mit $k \in \mathbb{N}$ unabhängig von der Störgröße sind. Daß das Ersatzsystem nach Gl. (3.3) tatsächlich störentkoppelt ist, zeigt daher die folgende Berechnung der partiellen zeitlichen Ausgangsableitungen:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} *_{1} - *_{2} \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial s} = 0 \quad ,$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{y}} &= \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \ddot{\mathbf{y}}}{\partial s} = 0 \quad , \\ &\vdots \\ \mathbf{y}^{(k)} &= \begin{bmatrix} v_1^{(k)} \\ v_2^{(k)} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial s} = 0 \quad , \quad k \in \mathbb{N} \quad . \end{aligned}$$

Alle partiellen Ausgangsableitungen sind unabhängig von der Störgröße $s(t)$ und somit ist der Beweis, daß das System störentkoppelt ist, erbracht. \square

4 Untersuchung analytischer Systeme auf Störgrößenentkoppelbarkeit

Die Methodik der Differentialalgebra ist auf rationale Systeme beschränkt. Die physikalische Modellbildung führt oft auf nichtlineare Differentialgleichungssysteme, die durch *analytische Systeme (AS)* bzw. durch *analytische Systeme mit linear eingehender Steuerung (ALS)* beschreibbar sind. Daher ist es zweckmäßig, das nicht-rationale Originalsystem durch eine geeignete Systemtransformation in ein rationales Ersatzsystem zu überführen. Die Grundidee der Transformation durch Substitution der nicht-rationalen Teilfunktionen mittels neuer Zustandsvariablen und anschließender Zustandserweiterung sowie ein Ersatzsystemalgorithmus zur automatisierten Anwendung ist in Polzer (1998) detailliert beschrieben. Die Anwendung dieser Transformation und der Ersatzsystemalgorithmus ist in Polzer (1998) allerdings nur für ALS durchgeführt. Um aus einem AS ein ALS zu erhalten, besteht zwar die Möglichkeit einer weiteren Transformation. Da aber dieser Abschnitt analytische Systeme betrachtet, wird eine Transformation auf alle aus technischer Sicht relevanten nicht-rationalen Funktionen des Originalsystems, die sich in eine Taylor-Reihe entwickeln lassen, übertragen. Der Kern der Ermittlung des störgekoppelnden Kompensators für AS schließt an den Algorithmus 3.1 für (gebrochen-) rationale Systeme an. Dieser ist lediglich durch die Systemtransformation vor dem ersten Schritt und eventuell einer anschließenden Resubstitution der nicht-rationalen Teilfunktionen im Kompensatorgesetz zu modifizieren. Folgendes Beispiel verdeutlicht die Vorgehensweise der Systemtransformation und Berechnung des störgrößenentkoppelnden Kompensatorgesetzes:

Beispiel 4.1

Es sei folgendes analytische System mit den Eingängen $u_1(t)$, $u_2(t)$, der Störgröße $s(t)$ und den Ausgängen $y_1(t)$, $y_2(t)$ betrachtet:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 s + u_1 \\ \exp(x_2) + \frac{x_1 - u_2}{u_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Die nicht-rationale Teilfunktion in dem Originalzustandsmodell lautet

$$x_3 := r_1(x_2) = \exp(x_2)$$

und deren zeitliche Ableitung

$$\dot{x}_3 := \frac{d}{dt} r_1(x_2) = \dot{x}_2 \exp(x_2) = x_3^2 + x_3 \frac{x_1 - u_2}{u_1}.$$

Somit läßt sich das System in die transformierte Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 s + u_1 \\ x_3 + \frac{x_1 - u_2}{u_1} \\ x_3^2 + x_3 \frac{x_1 - u_2}{u_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

umschreiben. Durch Überprüfung mit dem Algorithmus 3.1 ergeben sich die differentialalgebraischen Ränge für das Ersatzsystem zu $\rho_s^* = \rho^* = 2$, so daß mit dem Algorithmus 3.1 für den störgrößenentkoppelnden Kompensator folgt:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), s(t), \mathbf{v}(t)) = \begin{bmatrix} -x_1 - x_2 s + v_1 + v_2 \\ x_1 - x_1 x_3 - x_2 x_3 s + (x_3 - v_2)v_1 + (x_1 + x_3 + x_2 s)v_2 - v_2^2 \end{bmatrix}.$$

Das linearisierte und störentkoppelte System lautet somit:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} v_1 + v_2 \\ v_2 \\ x_3 v_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad \square$$

In Bild 4.1 ist das Ablaufdiagramm zur differentialalgebraischen Störgrößenentkopplung für die verschiedenen Systemklassen aufgeführt. Nach Vorlage einer geeigneten Systembeschreibung ist gegebenenfalls eine Systemtransformation durchzuführen. Anschließend entscheidet der Ablauf, ob der Algorithmus 2.1 für *Polynomsysteme* oder der Algorithmus 3.1 für (*gebrochen-*) *rationale Systeme* zu wählen ist. Der entsprechende Algorithmus liefert, wenn die Bedingung $\rho_s^* \leq \rho^*$ erfüllt ist, das störentkoppelnde Kompensatorgesetz.

Eine Besonderheit für die Überprüfung der Bedingung $\rho_s^* \leq \rho^*$ der differentialalgebraischen Ränge des gestörten und ungestörten Systems zeigt sich, wenn die Störgrößen $\mathbf{s}(t)$ in mindestens einer Zustandsgleichung des Systems multiplikativ mit den Eingangs- und Zustandsgrößen $\mathbf{u}(t)$ und $\mathbf{x}(t)$ derart verknüpft sind, daß beim Einsetzen von $\mathbf{s}(t) = \mathbf{0}$ die entsprechende Zustandsgleichung Null ist. Bei Berechnung der beiden differentialalgebraischen Ränge ist dann die Bedingung $\rho_s^* \leq \rho^*$ nicht mehr erfüllt, obwohl nach beiden Algorithmen 2.1 und 3.1 ein Kompensatorgesetz für das System auffindbar ist. Einzige Bedingung für die Gültigkeit des Kompensatorgesetzes ist, daß die Störgrößen $\mathbf{s}(t) \neq \mathbf{0}$ sein müssen, was in der Praxis durchaus seine Gültigkeit hat. Dies bedeutet, daß in diesem Spezialfall die Bedingung $\rho_s^* \leq \rho^*$ ein hinreichendes, aber kein notwendiges Kriterium ist. Gegenstand weiterer Untersuchungen sollte daher sein, andere Spezialfälle zu analysieren und eine Bedingung zu finden, die auch diese Fälle abdeckt. Das nächste Beispiel legt die Problematik dieser Besonderheit für ein Polynomsystem dar. Des weiteren ist in diesem Beispiel auch die Berechnung der beiden differentialalgebraischen Ränge ρ_s^* und ρ^* mit Hilfe der Jakobimatrizenberechnung explizit aufgeführt, da bei einem solchen Polynomsystem die Jakobimatrizen eine darstellbare Komplexität besitzen.

Beispiel 4.2

Es sei folgendes (Polynom-)System mit den Eingängen $u_1(t)$, $u_2(t)$, der Störgröße $s(t)$ und den drei Ausgängen $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ gegeben:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} (x_1^2 + u_2)s \\ x_3 - u_1 \\ x_2^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

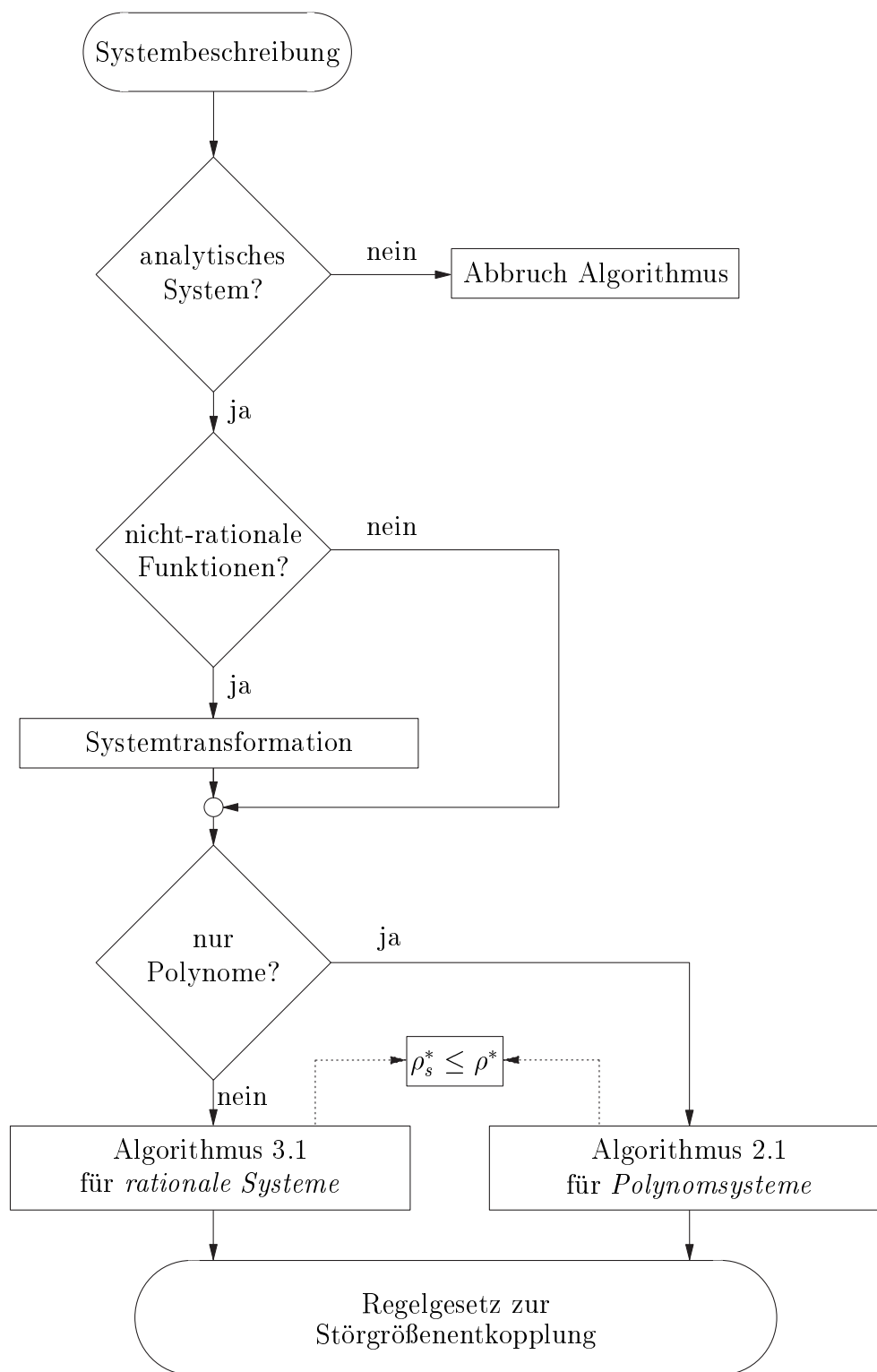


Bild 4.1: Ablaufdiagramm zur differentialalgebraischen Störgrößenentkopplung mit Orientierung nach Systemklassen

Zunächst ist die Bedingung $\rho_s^* \leq \rho^*$ zu überprüfen. Der erste Schritt behandelt daher die Bestimmung von ρ_s^* . Die Jakobimatrizen $\bar{\mathbf{J}}_k$ ($k = 1, \dots, n$) des gestörten Systems

berechnen sich zu

$$\bar{\mathbf{J}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & s & x_1^2 + u_2 \\ -1 & 2s & 2x_1^2 + 2u_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{J}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & s & x_1^2 + u_2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2s & 2x_1^2 + 2u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_1s^2 + \dot{s} & 4x_1(x_1^2 + u_2)s + \dot{u}_2 & 1 & s & x_1^2 + u_2 \\ 0 & 4x_1s^2 + 2\dot{s} & 8x_1(x_1^2 + u_2)s + 2\dot{u}_2 & -1 & 2s & 2x_1^2 + 2u_2 \\ -2x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{J}}_3 = \left[\begin{array}{cccccc|ccc} & & & \bar{\mathbf{J}}_2 & & & & & \mathbf{0} \\ 2x_2 & *_{1} & *_{2} & 0 & 2\dot{s} + 2x_1s^2 & *_{3} & 1 & s & x_1^2 + u_2 \\ -2x_2 & *_{4} & *_{5} & 0 & 4\dot{s} + 4x_1s^2 & *_{6} & -1 & 2s & 2x_1^2 + 2u_2 \\ -4x_3 + 4u_1 & 0 & 0 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

mit den Abkürzungen

$$*_{1} = 4x_1s\dot{s} + (6x_1^2s^2 + 2s^2u_2 + 2(x_1^2 + u_2)s^2 + 2x_1\dot{s})s + \ddot{s},$$

$$*_{2} = (2x_1^3 + 2x_1u_2)\dot{s} + (12x_1^2(x_1^2 + u_2)s + 4(x_1^2 + u_2)su_2 + 2x_1\dot{u}_2)s + 2x_1^3\dot{s} \\ + 6x_1^2(x_1^2 + u_2)s^2 + 2(x_1^2 + u_2)s^2u_2 + 2x_1\dot{u}_2s + 2x_1u_2\dot{s} + \ddot{u}_2 + 2x_1(x_1^2 + u_2)\dot{s},$$

$$*_{3} = 2x_1^3s + 2x_1su_2 + 2\dot{u}_2 + (2x_1^3 + 2x_1u_2)s + 2x_1(x_1^2 + u_2)s,$$

$$*_{4} = 8x_1s\dot{s} + 2(6x_1^2s^2 + 2s^2u_2 + 2(x_1^2 + u_2)s^2 + 2x_1\dot{s})s + 2\ddot{s},$$

$$*_{5} = 2(2x_1^3 + 2x_1u_2)\dot{s} + 2(12x_1^2(x_1^2 + u_2)s + 4(x_1^2 + u_2)su_2 + 2x_1\dot{u}_2)s \\ + 12x_1^2(x_1^2 + u_2)s^2 + 4x_1^3\dot{s} + 4(x_1^2 + u_2)s^2u_2 + 4x_1\dot{u}_2s + 4x_1u_2\dot{s} + 2\ddot{u}_2 \\ + 4x_1(x_1^2 + u_2)\dot{s},$$

$$*_{6} = 4x_1^3s + 4x_1su_2 + 4\dot{u}_2 + 2(2x_1^3 + 2x_1u_2)s + 4x_1(x_1^2 + u_2)s.$$

Somit ist der differentialalgebraische Rang ρ_s^* des gestörten Systems bestimmt durch

$$\dim \bar{\mathcal{E}}_1 = n + \text{rang } \bar{\mathbf{J}}_1 = 3 + 2 = 5,$$

$$\dim \bar{\mathcal{E}}_2 = n + \text{rang } \bar{\mathbf{J}}_2 = 3 + 4 = 7,$$

$$\dim \bar{\mathcal{E}}_3 = n + \text{rang } \bar{\mathbf{J}}_3 = 3 + 6 = 9,$$

$$\Rightarrow \rho_s^* = \dim \bar{\mathcal{E}}_3 - \dim \bar{\mathcal{E}}_2 = 9 - 7 = 2.$$

Durch Ersetzen der Störgröße $s(t) = 0$ in dem Zustandsmodell und gleichermaßen Bestimmung der Jakobimatrizen

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2x_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2x_2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -4x_3 + 4u_1 & 0 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

folgt für den differentialalgebraischen Rang ρ^* des ungestörten Systems:

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{E}_1 &= n + \text{rang } \mathbf{J}_1 = 3 + 1 = 4, \\ \dim \mathcal{E}_2 &= n + \text{rang } \mathbf{J}_2 = 3 + 2 = 5, \\ \dim \mathcal{E}_3 &= n + \text{rang } \mathbf{J}_3 = 3 + 3 = 6, \\ \Rightarrow \rho^* &= \dim \mathcal{E}_3 - \dim \mathcal{E}_2 = 6 - 5 = 1. \end{aligned}$$

Damit ist die Bedingung $\rho_s^* \leq \rho^*$ nicht erfüllt. Dennoch läßt sich ein Kompensatorgesetz zur Störgrößenentkopplung mit dem Algorithmus 3.1 finden

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), s(t), \mathbf{v}(t)) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 + x_3 \\ -\frac{3x_1^2s - v_1 - v_2}{3s} \end{bmatrix}$$

und das linearisierte und störentkoppelte System angeben:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(v_2 - v_1) \\ \frac{1}{3}(v_2 - 2v_1) \\ x_2^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

□

5 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Bericht findet eine Erweiterung des Algorithmus von Senger (1999) zur differentialalgebraischen Störgrößenentkopplung statt. Neben der Fähigkeit über die Störgrößenentkoppelbarkeit nichtlinearer Mehrgrößensysteme zu entscheiden, berechnet der erweiterte Algorithmus auch für die Klassen der (*gebrochen-*) *rationalen* und *analytischen Systeme* das störgrößenentkoppelnde Regelgesetz. Diese Tatsache bleibt bisher dem von Senger (1999) entwickelten Algorithmus durch die Berechnungsgrundlage der Gröbner-Basen verwehrt.

Im Unterschied zum Algorithmus für Polynomsysteme erfordert der hier vorgestellte Algorithmus eine apriori Überprüfung der Störgrößenentkoppelbarkeit. Denn als charakteristische Kenngrößen für diese Überprüfbarkeit ist die Berechnung der beiden differentialalgebraischen Ränge des gestörten und ungestörten Systems notwendig. Durch die Erweiterung auf rationale Systeme ist kein „Mitzählen“ der differentialalgebraischen Ränge durch die Gröbner-Basen-Berechnung wie im Algorithmus von Senger (1999) möglich. Aufgrund dessen sind die beiden Ränge explizit durch Jakobimatrizenberechnung und anschließende Rangbestimmung zu ermitteln.

Damit die Betrachtung der Systemklasse der *analytischen (nicht-rationalen) Systeme* zulässig ist, führt eine Systemtransformation, die in Polzer (1998) für ALS ausführlich beschrieben ist, auf ein rationales Ersatzsystem. Diese Vorgehensweise wird auch auf AS übertragen. Die Systemtransformation substituiert alle aus technischer Sicht relevanten nicht-rationalen Funktionen durch neue Zustandsvariablen, so daß das entstehende Ersatzsystem ausschließlich aus (*gebrochen-*) rationalen Funktionen besteht. Auf dieses ist wiederum der neu entwickelte Algorithmus anzuwenden.

Einige Vorteile des erweiterten Algorithmus zur Störgrößenentkopplung sind:

- Anwendbarkeit auf nichtlineare Mehrgrößensysteme unterschiedlicher Anzahl von Ein- und Ausgängen,
- Behandlung von Systemen mit mehreren Störgrößen und
- Berechnung des Regelgesetzes für rationale und analytische Systeme.

Gegenstand weiterer Untersuchungen sollte die systematische Erforschung der differentialalgebraischen Bedingung der Störgrößenentkoppelbarkeit $\rho_s^* \leq \rho^*$ sein. Diese Bedingung ist zwar hinreichend jedoch nicht notwendig. In der Arbeit findet sich ein Beispiel, welches die angegebene Bedingung nicht erfüllt, für das aber trotzdem ein störgrößenentkoppelnder Kompensator ermittelbar ist. In diesem Bericht ist der Fall für das ungestörte System untersucht worden, bei dem alle Störgrößen gleichzeitig Null sind. Ob der Sachverhalt, daß einzelne Störgrößen Null und gleichzeitig andere Störgrößen ungleich Null sein können, eine Veränderung des Algorithmus erfordert, sollte ebenfalls

zukünftig betrachtet werden. Des weiteren ist auch die Möglichkeit im Hinblick des großen Rechenaufwands gegeben, anstelle der Berechnung der beiden differentialalgebraischen Ränge ρ_s^* des gestörten und ρ^* des ungestörten Systems die Graphentheorie (Wey 1996, Senger 1996) zum Analysezweck einzusetzen.

6 Literatur

- Buchberger, B.** 1970. Ein algorithmisches Kriterium für die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems. *Aequationes Mathematicae* 4. 374–383.
- Buchberger, B.** 1985. Gröbner bases: an algorithmic method in polynomial ideal theory. *Multidimensional Systems Theory: Progress, Directions and Open Problems in Multidimensional Systems*, hg. von N. K. Bose. 184–229. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Cox, D., J. Little und D. O’Shea.** 1992. *Ideals, Varieties and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. New York: Springer.
- Di Benedetto, M. D., J. W. Grizzle und C. H. Moog.** 1989. Rank invariants of nonlinear systems. *SIAM J. Control* 27(3). 658–672.
- Fliess, M.** 1986a. A new approach to the structure at infinity of nonlinear systems. *Systems Control Lett.* 7(5). 419–421.
- Fliess, M.** 1986b. Nonlinear control theory and differential algebra. *Modeling and Adaptive Control*, hg. von C. I. Byrnes und A. Kurszanski. *Lecture Notes in Control and Information Science*. 105. Berlin: Springer.
- Fliess, M.** 1987. Nonlinear control theory and differential algebra: Some illustrative examples. *Proc. 10th IFAC World Congress*. München. 114–118.
- Fliess, M. und S. T. Glad.** 1993. An algebraic approach to linear and nonlinear control. *Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications*, hg. von H. L. Trentelmann und J. C. Willems. *Progress in Systems and Control Theory*. 14. 223–267. Boston/USA: Birkhäuser.
- Forsman, K.** 1992. *Elementary Aspects of Constructive Commutative Algebra*. Technical Report LiTH-ISY-I-1395. Department of Electrical Engineering, Linköping University. S-581 83 Linköping. Schweden.
- Fortell, H.** 1995. *Algebraic Approaches to Normal Forms and Zero Dynamics*. Dissertation. Department of Electrical Engineering, Linköping University, Schweden.
- Fröberg, R.** 1998. An introduction to Gröbner bases. *Pure and Applied Mathematics*. Chichester, England: John Wiley & Sons, Ltd.
- Gröbner, W.** 1949. *Moderne Algebraische Geometrie*. Wien/Österreich: Springer.
- Isidori, A.** 1995. *Nonlinear Control Systems*. 3. Auflage. Berlin: Springer.

- Jirstrand, M.** 1998. *Constructive Methods for Inequality Constraints in Control*. Dissertation. Department of Electrical Engineering, Linköping University, Schweden.
- Johnson, J.** 1969. Kähler differentials and differential algebra. *Annals of Mathematics* 89. 92–98.
- Korn, G. A.** und **T. M. Korn.** 1968. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. New York/USA: McGraw-Hill.
- Lemmen, M.** 1998. *Über Relative und dynamische Systeme*. VDI Fortschritt-Berichte. Reihe 8. 711. Düsseldorf: VDI.
- Meyberg, K.** 1976. *Algebra*. München: Hanser.
- Nijmeijer, H.** und **A. J. van der Schaft.** 1990. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. New York/USA: Springer.
- Pauer, F.** und **M. Pfeifhofer.** 1988. The theory of Gröbner bases. *L'Enseignement Mathématique* 34. 215–232.
- Polzer, J.** 1998. *Erweiterte Anwendbarkeit differentialalgebraischer Analysemethoden durch die Nutzung von Ersatzsystemen*. Forschungsbericht 10/98. MSRT. Universität Duisburg.
- Ritt, J. F.** 1950. *Differential Algebra*. New York/USA: Amer. Math. Soc.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme – Systemtheoretische Grundlagen*. München: Oldenbourg.
- Schwarz, H.** 1999. *Einführung in die Systemtheorie nichtlinearer Regelungen*. Aachen: Shaker.
- Senger, M.** 1996. *Zur Störgrößenentkopplung nichtlinearer Mehrgrößensysteme*. Forschungsbericht 16/96. MSRT. Universität Duisburg.
- Senger, M.** 1997. *Gröbner-Basen – Ein algebraisches Werkzeug zur Auswertung differentialalgebraischer Kriterien bei der Synthese nichtlinearer Regelungsgesetze*. Forschungsbericht 6/97. MSRT. Universität Duisburg.
- Senger, M.** 1999. *Algebraische Formulierung und Lösung zentraler systemtheoretischer Aufgaben*. VDI Fortschritt-Berichte. Reihe 8. 770. Düsseldorf: VDI.
- Sharp, R. Y.** 1990. *Steps in commutative algebra*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Wey, T.** 1996. *Ein graphentheoretischer Ansatz zur strukturellen Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme*. VDI Fortschritt-Berichte. Reihe 8. 556. Düsseldorf: VDI.

A Differentialalgebraische Grundbegriffe

Definition A.1 *Körper* (Meyberg 1976, Wey 1996)

Ein *Körper* ist ein Verknüpfungsgebilde $(K, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge K und den beiden Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + : K \times K &\rightarrow K \\ (a, b) &\mapsto a + b \quad (\text{„Addition“}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cdot : K \times K &\rightarrow K \\ (a, b) &\mapsto ab \quad (\text{„Multiplikation“}) \end{aligned} \quad ,$$

so daß die folgenden Axiome erfüllt sind:

- Gesetze der Addition

1. *Assoziativität*: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.
2. *Kommutativität*: Für alle $a, b \in K$ gilt: $a + b = b + a$.
3. *Neutrales Element*: Für jedes $a \in K$ gibt es ein Element $0 \in K$, so daß gilt: $a + 0 = a$.
4. *Inverses Element*: Zu jedem $a \in K$ gibt es ein Element $-a \in K$ mit $a + (-a) = 0$.

- Gesetze der Multiplikation

5. *Assoziativität*: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $a(bc) = (ab)c$.
6. *Kommutativität*: Für alle $a, b \in K$ gilt: $ab = ba$.
7. *Neutrales Element*: Für jedes $a \in K$ gilt: $1a = a$.
8. *Inverses Element*: Zu jedem $a \in K \setminus \{0\}$ gibt es ein $a^{-1} \in K$ mit $a^{-1}a = 1$.

- Distributivgesetz

9. Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $a(b + c) = ab + ac$. □

Definition A.2 *Polynomring* (Senger 1999)

Ein (kommutativer) *Polynomring* in den Variablen x_1, \dots, x_n wird durch die Menge der Polynome in x_1, \dots, x_n mit Koeffizienten aus einem Ring R gebildet. Dieser Polynomring trägt die Bezeichnung $R[x_1, \dots, x_n]$, oder kurz: $R[\mathbf{x}]$. □

Definition A.3 *Ideal* (Sharp 1990)

Es sei R ein (kommutativer) Ring. Eine Teilmenge $I \subset R$ des Ringes heißt *Ideal*, wenn folgende Rechenregeln gelten:

i) $I \neq \emptyset$,

ii) $a, b \in I \Rightarrow a + b \in I$,

iii) $r \in R, a \in I \Rightarrow ar \in I$. □

Definition A.4 *Körpererweiterung* (Meyberg 1976)

Ist k ein Teilkörper oder Unterkörper von K , so wird K *Körpererweiterung* oder *Erweiterungskörper* genannt. Dieser Sachverhalt wird durch die Notation K/k gekennzeichnet. □

Definition A.5 *Algebraische Abhängigkeit, Transzendenz* (Wey 1996, Senger 1999)

Es sei K/k eine Körpererweiterung und $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \nu \in K$. ν heißt *algebraisch abhängig* von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ über k oder *k -algebraisch abhängig* von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, wenn ν algebraisch über $k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ist, d. h. wenn eine algebraische Gleichung $P(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \nu) = 0$ existiert, wobei P ein Polynom in $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \nu$ mit Koeffizienten aus k darstellt. Existiert ein solches Polynom nicht, so heißt ν *algebraisch unabhängig* oder *transzendent*. □

Definition A.6 *Transzendenzbasis* (Wey 1996)

Eine *Transzendenzbasis* S_{\max} der Körpererweiterung K/k bezeichnet eine bezüglich der Elementenanzahl *maximale* k -algebraisch unabhängige Teilmenge von K . Folgenden Bedingungen genügen die Elemente von S_{\max} :

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sind transzendent über k ,
- für jedes $\alpha \in K$ ist die Menge $\{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ k -algebraisch abhängig. □

Definition A.7 *Transzendenzgrad* (Wey 1996)

Die für eine Körpererweiterung K/k charakteristische Anzahl an Elementen der Transzendenzbasis S_{\max} definiert den sogenannten *Transzendenzgrad*:

$$\text{trg } K/k = \begin{cases} n & , \text{ falls } S_{\max} \text{ } n \text{ Elemente besitzt} \\ \infty & , \text{ falls } S_{\max} \text{ eine unendliche Menge ist} \end{cases} . \quad \square$$

Definition A.8 *Differentiation* (Jirstrand 1998)

Es sei R ein Ring. Eine *Differentiation* wird durch eine Abbildung $\partial: R \rightarrow R$ folgendermaßen charakterisiert: Für alle $x, y \in R$ gilt:

$$\begin{aligned} \partial(x + y) &= \partial x + \partial y \\ \partial(xy) &= (\partial x)y + x(\partial y) . \end{aligned} \quad \square$$

Definition A.9 *Differentieller (Polynom-)Ring* (Senger 1999, Fliess 1987)

Ein Ring R heißt *differentieller Ring*, wenn eine Differentiation ∂ in R definiert ist und das Ergebnis Element aus R ist. Weiterhin bezeichnet $R\{x_1, \dots, x_n\}$, oder kurz $R\{\mathbf{x}\}$, den *differentiellen Polynomring* in den Variablen x_1, \dots, x_n . □

Definition A.10 *Differentieller Körper* (Senger 1999, Fliess 1987)

Ein Körper k heißt *differentieller Körper*, wenn eine Differentiation ∂ in k definiert ist und das Ergebnis Element aus k ist. Weiterhin wird ein differentieller Körper, der durch die meromorphen Funktionen² in den Variablen x_1, \dots, x_n mit Koeffizienten aus k erzeugt wird, als $k\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ oder kurz $k\langle \mathbf{x} \rangle$ notiert. \square

Definition A.11 *Differentielle Körpererweiterung* (Fortell 1995)

Ist k ein Teilkörper oder Unterkörper eines differentiellen Körpers K , so wird K analog zu Definition A.4 *differentielle Körpererweiterung* oder *differentieller Erweiterungskörper* genannt. Der Sachverhalt, daß K Körpererweiterung von k ist, wird durch die Notation K/k gekennzeichnet. \square

Definition A.12 *Differentiell algebraische Abhängigkeit* (Fortell 1995)

Es sei K/k eine differentielle Körpererweiterung und $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \nu \in K$. Es heißt ν *differentiell algebraisch abhängig* von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ über k , wenn ν differentiell algebraisch über $k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn eine algebraische Differentialgleichung $P(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \nu) = 0$ existiert, wobei P ein Polynom in $\alpha_1^{(i_1)}, \dots, \alpha_n^{(i_n)}, \nu^{(l)}$ mit $i_1, \dots, i_n, l \in \mathbb{N}_0$ und Koeffizienten aus k darstellt. Existiert ein solches Polynom nicht, so heißt ν *differentiell transzendent*. \square

Definition A.13 *Differentieller Transzendenzgrad* (Fortell 1995)

Es sei K/k eine differentielle Körpererweiterung und L eine Teilmenge von K derart, daß alle Elemente aus L voneinander differentiell unabhängig über k sind. Die maximal mögliche Anzahl von Elementen in L heißt *differentieller Transzendenzgrad* $\text{diff. trg } K/k$. Es heißt L dann *differentielle Transzendenzbasis* von K/k . \square

Definition A.14 *System* (Fliess und Glad 1993)

Es sei k ein differentieller Grundkörper. Dann ist ein *System* definiert als eine endlich generierte differentielle Körpererweiterung K/k . \square

Definition A.15 *Dynamik* (Fliess und Glad 1993)

Es sei $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_m]^T$ ein Systemeingangsvektor. Dann ist die *Dynamik* eines Systems L/k eine endlich erzeugte differentiell algebraische Körpererweiterung $L/k\langle \mathbf{u} \rangle$. Demzufolge erfüllt der differentielle Transzendenzgrad dieser Erweiterung die Bedingung $\text{diff. trg } L/k\langle \mathbf{u} \rangle = 0$. Ein Ausgang des zugehörigen Systems ist eine endliche Menge von Elementen y_1, \dots, y_p aus L . Entsprechend existiert eine Menge $\{x_1, \dots, x_n\} \subset L$, welche eine (nichtdifferentielle) Transzendenzbasis der Dynamik $L/k\langle \mathbf{u} \rangle$ ist und die Rolle eines verallgemeinerten Zustands übernimmt. \square

² Eine Funktion heißt genau dann *meromorph* über einer Region, wenn die einzigen Singularitäten Pole sind und die Anzahl der Singularitäten endlich ist. Eine global meromorphe Funktion ist eine rational algebraische Funktion, die als Quotient zweier Polynome dargestellt werden kann (Korn und Korn 1968).

Definition A.16 *Differentialalgebraischer Rang* ρ_s^* (Fliess 1986a, Senger 1999)

Es sei $k\langle \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{s} \rangle / k\langle \mathbf{u}, \mathbf{s} \rangle$ ein gestörtes System. Dann ist der *differentialalgebraische Rang* ρ_s^* des gestörten Systems gegeben zu:

$$\rho_s^* = \text{diff. trg } k\langle \mathbf{y} \rangle / k$$

und für ρ_s^* gilt: $\rho_s^* \leq \min\{m + q, p\}$. □

Definition A.17 *Differentialalgebraischer Rang* ρ^* (Fliess 1986a, Fliess 1986b)

Es sei $k\langle \mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle / k\langle \mathbf{u} \rangle$ ein ungestörtes System. Dann ist der *differentialalgebraische Rang* ρ^* dieses Systems durch den differentiellen Transzendenzgrad der Ausgangsableitungen über k gegeben:

$$\rho^* = \text{diff. trg } k\langle \mathbf{y} \rangle / k$$

und für ρ^* gilt: $\rho^* \leq \min\{m, p\}$. □

Definition A.18 *Polynom* (Fortell 1995)

Ein *Polynom* p in den Variablen x_1, \dots, x_n über den Ring R ist eine endliche Linearkombination von Monomen m_i :

$$p = \sum_i a_i m_i \quad ,$$

mit den Koeffizienten $a_i \in R$. □

Definition A.19 *führendes Monom, führender Koeffizient, führender Term* (Senger 1999)

- In einem Polynom $f = \sum_i a_i \mathbf{x}^i$ ist das am höchsten einzuordnende Monom das *führende Monom* von f „lm“, (nach dem englischen leading monomial) genannt.
- Der Koeffizient a_i des führenden Monoms von f ist der *führende Koeffizient* von f „lc“, (nach dem englischen leading coefficient) genannt.
- Das Produkt $a_i m_i = a_i \mathbf{x}^i$ aus führendem Koeffizient und führendem Monom eines Polynoms f ist der *führende Term* von f „lt“, (nach dem englischen leading term) genannt. □

Definition A.20 *Kähler-Differential des gestörten Systems* (Senger 1999)

Das Kähler-Differential $dy_j^{(k)}$ einer Ausgangsableitung $y_j^{(k)}$ mit $k \leq n$ des gestörten Systems berechnet sich zu:

$$dy_j^{(k)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_j^{(k)}}{\partial x_i} dx_i + \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_j^{(k)}}{\partial u_i^{(l)}} du_i^{(l)} + \sum_{l=0}^k \sum_{i=1}^q \frac{\partial h_j^{(k)}}{\partial s_i^{(l)}} ds_i^{(l)}$$
□

Definition A.21 *Kähler-Differential des ungestörten Systems* (Johnson 1969)

Das Kähler-Differential $dy_j^{(k)}$ einer Ausgangsableitung $y_j^{(k)}$ mit $k \leq n$ des ungestörten Systems berechnet sich zu:

$$dy_j^{(k)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_j^{(k)}}{\partial x_i} dx_i + \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_j^{(k)}}{\partial u_i^{(l)}} du_i^{(l)} \quad , \quad j = 1, \dots, p \quad . \quad \square$$

Satz A.22 (Senger 1999)

Der Ausgang \mathbf{y} eines analytischen Systems kann genau dann von dem Störsignal \mathbf{s} entkoppelt werden, wenn gilt:

$$\rho_s^* = \text{diff. trg } k\langle \mathbf{y}, \mathbf{s} \rangle / k\langle \mathbf{s} \rangle \quad . \quad \square$$

Satz A.23 (Buchberger 1985)

Es sei $I \subset R[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal aus dem Polynomring $R[x_1, \dots, x_n]$ und $GB(I)$ die Gröbner-Basis von I bezüglich der lexikographischen Monomordnung $x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_n$. Dann gilt für alle $r \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$I \cap R[x_1, \dots, x_r] = \langle GB(I) \cap R[x_1, \dots, x_r] \rangle \quad .$$

Dies bedeutet, daß das „ r -te Eliminationsideal“ (Buchberger 1985) $\langle GB(I) \cap R[x_1, \dots, x_r] \rangle$ durch diejenigen Polynome in GB erzeugt wird, die nur von den r (in GB auftretenden) Variablen abhängen, welche den höchsten Rang innerhalb der Monomordnung besitzen. □

Beispiel A.24 *Eliminationsideal* (Senger 1999)

Es seien die erzeugenden Polynome F eines Ideals gegeben als

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 x_2 + 1 \quad , \\ f_2 &= 3x_1 x_2 x_3 - x_2 x_3 + x_3 \quad \text{und} \\ f_3 &= x_1 + 4x_2 x_3 + 4 \quad , \end{aligned}$$

und eine lexikographische Monomordnung $x_1 \prec x_2 \prec x_3$ zur Berechnung der Gröbner-Basis vorausgesetzt. Die Gröbner-Basis des von F erzeugten Ideals berechnet sich zu:

$$GB = \{-x_1 + 8x_3 - 4 ; 2x_1 + 4x_2 + 7 ; 2x_1^2 + 7x_1 - 4\} = \{g_1; g_2; g_3\} \quad .$$

Die Aussage von Satz A.23 bedeutet nun, daß alle Polynome aus GB , die nur von x_1 abhängen, also $\{2x_1^2 + 7x_1 - 4\}$, das 1. Eliminationsideal erzeugen. Alle Polynome aus GB , die nur von x_1 und x_2 abhängen, also $\{2x_1^2 + 7x_1 - 4; 2x_1 + 4x_2 + 7\}$, erzeugen das 2. Eliminationsideal usw. Schreibt man die Elemente einer Eliminationsbasis untereinander und setzt sie gleich null, so ergibt sich die bekannte Dreiecksform, die durch Rückwärtssubstitution in bewährter Manier zur Lösung von Gleichungssystemen genutzt werden kann. Es kann leicht überprüft werden, daß die Lösung von $g_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, auch die Gleichungen $f_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, erfüllt. Die Nullstellen sind also identisch. □