

Berechnung der Nulldynamik eines inversen Pendels mit unterschiedlichen mathematischen Theorien

Jan Polzer

Forschungsbericht Nr. 01/00

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Die Struktureigenschaft Nulldynamik läßt sich mit unterschiedlichen mathematischen Ansätzen berechnen. In diesem Bericht geht es um die Berechnung der Nulldynamik eines inversen Pendels mit differentialgeometrischen und differentialalgebraischen Methoden. Es findet eine Gegenüberstellung der einzelnen Ergebnisse untereinander sowie eine Gegenüberstellung mit Messungen an einem Prüfstand statt.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	II
1 Einleitung	1
2 Definitionen der Nulldynamik	2
3 Modellbeschreibung eines inversen Pendels	4
4 Differentialgeometrische Berechnung der Nulldynamik	7
5 Differentialalgebraische Berechnung der Nulldynamik	8
5.1 Differentialalgebraischer Nulldynamikalgorithmus	8
5.2 Inverses Pendel mit eindimensionalem Systemausgang	13
5.3 Inverses Pendel mit zweidimensionalem Systemausgang	18
6 Ergebnisanalyse	25
6.1 Gegenüberstellung der Nulldynamiken	25
6.2 Messungen am Versuchsträger	26
7 Zusammenfassung	28
8 Literaturverzeichnis	29
Anhang	31
A Funktionsklassen und die Notation der Ausgangssignableitung	31
B Grundlegende Begriffe der Algebra	33
C Grundlegende Begriffe der Differentialalgebra	36
D Modellbildung des inversen Pendels	39

Nomenklatur

Abkürzungen

ALS	Analytisches System mit linear eingehender Steuerung
AS	Analytisches System
CAS	Computer-Algebra-System
Σ	System

Skalare und vektorwertige Größen

a	Abstand zwischen Dreh- und Schwerpunkt des inversen Pendels
$\mathbf{a}(\mathbf{x})$	Drift eines ALS (Vektorfeld)
${}^1\mathbf{a}({}^1\mathbf{x})$	Drift eines transformierten ALS
$\mathbf{B}(\mathbf{x})$	Eingangsmatrix eines ALS
${}^1\mathbf{B}({}^1\mathbf{x})$	Eingangsmatrix eines transformierten ALS
$\mathbf{c}(\mathbf{x})$	Ausgangsfunktion eines ALS (Vektorfeld)
$c(\mathbf{x})$	Skalarwertige Ausgangsfunktion
${}^1\mathbf{c}({}^1\mathbf{x})$	Ausgangsfunktion eines transformierten ALS (Vektorfeld)
$\mathbf{c}^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k-1)})$	k -te zeitliche Ableitung des Systemausgangs
$\tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k-1)})$	$\mathbf{c}^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k-1)})$ restringiert auf \mathcal{U}_{k-1} und \mathcal{M}_{k-1}
$\mathbf{f}^*(\mathbf{x})$	Nulldynamikvektorfeld eines ALS
$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$	Skalarwertige rationale Funktion
f_{R}	Koeffizient der Reibkraft
F_{r}	Geschwindigkeitsabhängige Reibkraft
g	Schwerkraft
g_i	Skalarwertige Hilfsfunktion
i, j, k, \tilde{k}, l	Indizes
J	Massenträgheitsmoment bez. des Drehpunktes
K_1	Drehmomentkonstante
K_2	EMK-Konstante
$K_{\text{R}}, K_{\text{k}}, K_0, K_{\text{e}}$	Reibkennlinienparameter
K_v, K_{φ}, K_x	Verstärkungsfaktoren
m	Dimension des Eingangsvektors, Gesamtmasse des inversen Pendels
m_{p}	Masse des Pendels
m_{w}	Masse des Schlittens
M_{R}	Geschwindigkeitsabhängiges Reibmoment
n	Dimension des Zustandsvektors $\mathbf{x}(t)$
p	Dimension des Ausgangsvektors $\mathbf{y}(t)$
R_a	Konstante des Elektromotors
r_k	Rang der Matrix $\mathbf{L}_{\mathbf{B}}\mathbf{c}_k(\mathbf{x})$ für \mathbf{x} aus \mathcal{M}_k^c
$\mathbf{r}(\mathbf{x})$	Hilfsfunktion, die \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m abbildet
r_0	Radius der Seiltrommel des inversen Pendels

t	Zeit
$\mathbf{u}(t)$	Stellgrößenvektor
$u(t)$	Stellgröße
$\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$	Ausgangssignalnullende Zustandsrückführung
$\mathbf{x}(t)$	Zustandsvektor des Systems
$x(t)$	Skalare Zustandsvariable, Schlittenposition
$\mathbf{y}(t), y(t)$	Systemausgangsvektor, skalarer Systemausgang
$\varphi(t)$	Pendelwinkel
δ_k	Gesamtanzahl der benötigten Hilfsfunktionen im k -ten Iterationsschritt des Systemtransformationalgorithmus

Mengen

\emptyset	Leere Menge
$C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$	Menge aller glatten Funktionen, die \mathbb{R} in \mathbb{R}^m abbilden
$\mathcal{I}_k, \tilde{\mathcal{I}}_k, \mathcal{J}_k, \hat{\mathcal{J}}_k$	Indexmengen
$K(\mathbf{x})$	Ring der Polynome in den Variablen \mathbf{x} mit Koeffizienten aus dem Grundkörper K
$K\{\mathbf{x}\}$	Menge der differentiellen Polynome in den Variablen \mathbf{x} mit Koeffizienten aus dem Grundkörper K
$K\langle\mathbf{x}\rangle$	Körper der in \mathbf{x} differentiell rationalen Funktionen mit Koeffizienten aus dem Grundkörper K
$\mathcal{M}_k, \tilde{\mathcal{M}}_k, \bar{\mathcal{M}}_k$	Teilmengen des \mathbb{R}^n
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen inklusive „0“
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}[\mathbf{x}]$	Körper der in \mathbf{x} rationalen Funktionen mit Koeffizienten aus dem Grundkörper \mathbb{R}
$\mathbb{R}\langle\mathbf{u}, \mathbf{y}\rangle[\mathbf{x}]$	Körper der in \mathbf{u}, \mathbf{y} differentiell rationalen und in \mathbf{x} rationalen Funktionen mit Koeffizienten aus dem Grundkörper \mathbb{R}
$\mathcal{U}_k, \mathcal{U}_k$	Teilmengen von $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$

Operatoren

$\mathbf{J}(\mathbf{f}, \mathbf{x})$	Jakobimatrix der Funktion \mathbf{f} an der Stelle \mathbf{x}
$\text{Rang}(\cdot)$	Rang
\forall	Für alle
\subset	Teilmenge oder gleich
\cup	Vereinigung von Mengen
\cap	Schnitt von Mengen
$/$	Körpererweiterung
\setminus	Reduktion von Mengen
$[\cdot]^T$	Transponierte zu $[\cdot]$
$(\cdot)^{(k)}$	k -te zeitliche Ableitung von (\cdot)

1 Einleitung

Für den Begriff *Nulldynamik* gibt es in der Literatur unterschiedliche Definitionen. Die einzelnen Ansätze beschreiben zwar die gleiche Systemeigenschaft, nutzen aber verschiedenartige Ansätze bzw. Terminologien. Die jeweiligen Ansätzen liefern mehrere Berechnungsmöglichkeiten der Nulldynamik. In diesem Bericht geht es um die Berechnung der Nulldynamik mit unterschiedlichen mathematischen Ansätzen. Analysegegenstand ist hierbei ein inverses Pendel. Die differentialgeometrische Untersuchung baut auf den Ergebnissen eines früheren Forschungsberichtes (Polzer 1999b) auf, in dem sich die Berechnung der Nulldynamik eines inversen Pendels mit dem Algorithmus von Isidori (1995) findet. Der Systemausgang besteht dabei lediglich aus dem Pendelwinkel. Diese Nulldynamik wird dem Ergebnis des differentialalgebraischen Nulldynamikalgorithmus von Polzer (1999a) gegenübergestellt. Aus den Ergebnissen lassen sich Schlüsse über die Stabilität der Nulldynamik ziehen. Eine Erweiterung des Systemausgangs liefert eine andere Nulldynamik und somit auch ein ggf. anderes Stabilitätsverhalten. Deshalb stellt in einem nächsten Schritt ein Modell mit erweitertem Systemausgang (bestehend aus Pendelwinkel und Schlittenposition) den Gegenstand der Untersuchung dar. Das dynamische Verhalten der Nulldynamik läßt sich auch am Versuchsträger messen und wird den theoretischen Ergebnisse gegenübergestellt.

Der Bericht ist folgendermaßen gegliedert: Zunächst beschreibt Abschnitt 2 die verwendeten Definitionen des Begriffs *Nulldynamik*. Analyseobjekt ist ein inverses Pendel, daher findet sich im Abschnitt 3 die differentialgeometrische und die differentialalgebraische Modellbeschreibung des Versuchsträgers. Der vierte Abschnitt gibt die Ergebnisse des Forschungsberichtes Polzer (1999b), d. h. die differentialgeometrisch berechnete Nulldynamik wieder. Demgegenüber erfolgt eine differentialalgebraische Berechnung der Nulldynamik im fünften Abschnitt. Grundlage der Analyse in diesem Abschnitt ist zum einen das inverse Pendel mit eindimensionalem Systemausgang, zum anderen das erweiterte Modell mit zweidimensionalem Ausgang. Die Gegenüberstellung der ermittelten Ergebnisse und der Vergleich mit den Messungen am Versuchsträger findet im sechsten Abschnitt statt. Der Bericht schließt mit einer Zusammenfassung.

2 Definitionen der Nulldynamik

In der Literatur finden sich unterschiedliche Definitionen des Begriffs *Nulldynamik*. Zwar beschreiben alle Definitionen die gleiche Systemeigenschaft, aber die verwendete Terminologie unterscheidet sich sehr.

Definition 2.1: (Schwarz 1991) Der durch Zustandsrückführung unbeobachtbar zu machende Systemteil heißt **Nulldynamik** des Systems. \square

Die nachfolgende Definition von Isidori (1995) schließt die Definition 2.1 ein, wenn auch ein scheinbar anderer Grundgedanke Verwendung findet. Bei dem Ansatz ist es wichtig, diejenigen Anfangswerte aufzufinden, zu denen Stellgrößen existieren, die einen Systemausgang identisch null bewirken. Das System, eingeschränkt auf diese Anfangswerte und diese Stellgrößen, liefert dann die Nulldynamik. Mit differentialgeometrischen Begriffen läßt sich der Sachverhalt durch folgende Definition ausdrücken:

Definition 2.2: Nulldynamik (differentialgeometrisch) (Isidori 1995, Byrnes und Isidori 1989: S. 438)

Existiert eine Teilmannigfaltigkeit \mathcal{Z}^* des Zustandsraumes mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{Z}^*$,
2. in jedem Punkt $\mathbf{x} \in \mathcal{Z}^*$ existiert eine eindeutige Stellgröße $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}(t)) =: \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ derart, daß $\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ tangential zu \mathcal{Z}^* ist,
3. \mathcal{Z}^* ist maximal bez. der Eigenschaften 1. und 2. .

Ist $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ ferner eine glatte Funktion in \mathbf{x} , dann wird \mathcal{Z}^* **Nulldynamikmannigfaltigkeit** genannt. Das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \quad , \mathbf{x} \in \mathcal{Z}^* \quad (2.1)$$

wird als **Nulldynamik** des Systems (A.1) bezeichnet. Die Funktion $\mathbf{f}^*(\mathbf{x})$ heißt **Nulldynamikvektorfeld**. \square

Es ist zum gegenwärtigen Zeitpunkt keine differentialalgebraische Definition der Nulldynamik aus der Literatur bekannt. Meist wird eine differentialgeometrische Definition zugrunde gelegt. Eine Formulierung der Grundidee von Isidori (1995), die keine differentialgeometrischen Begriffe enthält, kann wie folgt aussehen:

Definition 2.3: Nulldynamik (differentialalgebraisch) (Polzer 1999a: S. 6)

Existiert eine Teilmenge $\mathcal{Z}^* \subset \mathbb{R}^n$ des Zustandsraumes mit den Eigenschaften:

1. $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{Z}^*$, und

2. es existiert zu jedem $\boldsymbol{x} \in \mathcal{Z}^*$ ein Stellgrößenvektor $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}(t)) =: \boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ derart, daß

$$\frac{d^k}{dt^k} \boldsymbol{y}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq t_0, k \in \mathbb{N}_0 \quad (2.2)$$

ist und

3. $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})$ ist eine glatte Funktion in \boldsymbol{x} ,

dann wird \mathcal{Z}^* **Nullkern**, das System

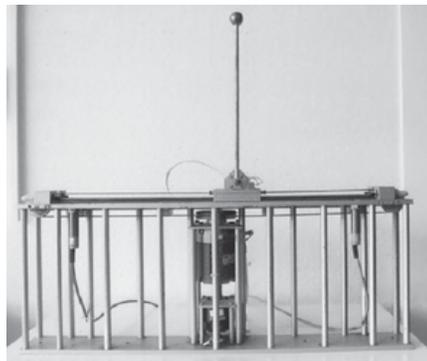
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}) \quad , \boldsymbol{x} \in \mathcal{Z}^* \quad (2.3)$$

die **Nulldynamik** des Systems, die Funktion $\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x})$ **Nulldynamikvektorfeld** und $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})$ **ausgangssignalnullende Zustandsrückführung** genannt. \square

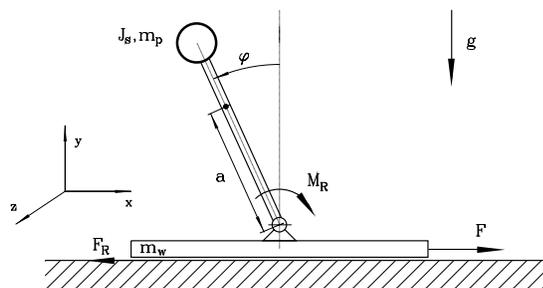
Die differentialgeometrische Definition 2.2 liefert eine, wenn sie denn existiert, eindeutig bestimmte Nulldynamik, im Gegensatz zur Definition 2.3. Stimmt die Zahl der Systemeingänge nicht mit der Zahl der Systemausgänge überein, so kann es mehrere Mengen \mathcal{Z}^* und Stellgrößen $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}(t)) =: \boldsymbol{u}(t)$ geben, die die Definition 2.3 erfüllen.

3 Modellbeschreibung eines inversen Pendels

Im Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik der Gerhard-Mercator-Universität Duisburg existiert der Versuchsstand *Inverses Pendel* (vgl. Bild 3.1(a)). In dem schematischen Versuchsaufbau (Bild 3.1(b)) sind die auftretenden physikalischen Kräfte eingetragen. Das inverse Pendel ist ein instabiles System, d. h. ohne eine Regelung der



(a) Versuchsträger



(b) Schematischer Versuchsaufbau

Bild 3.1: Inverses Pendel

Schlittenposition kippt die Pendelstange nach unten. Um das Pendel aufrecht zu halten, läßt sich der Schlitten, an dem der Pendelfußpunkt angebracht ist, in einer Dimension (d. h. nach links und rechts) verfahren. Die Ansteuerung des Elektromotors zur Positionierung des Schlittens erfolgt über einen PC. Aus diesem Grund ist es möglich, die unterschiedlichsten Regelungskonzepte mit relativ geringem Aufwand umzusetzen. Der Winkel und die Schlittenposition lassen sich direkt messen und weiterverarbeiten. Die Analyse der Nulldynamik soll sich zunächst auf ein System beziehen, bei dem lediglich der Pendelwinkel die zu regelnde Größe darstellt. Enthält der Systemausgang neben dem Pendelwinkel auch noch die Schlittenposition, ist der Nulldynamikalgorithmus von Isidori (1995) nicht mehr anwendbar. Mit dem differentialalgebraischen Algorithmus von Polzer (1999a) ist es nun möglich, die Nulldynamik zu berechnen.

Das inverse Pendel läßt sich, wie im Anhang D hergeleitet, durch ein Zustandsmodell

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t))u(t) & \mathbf{x}(t) &\in \mathbb{R}^4, u(t) \in \mathbb{R} \\ y(t) &= c(\mathbf{x}(t)) & y(t) &\in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.1)$$

beschreiben. Die Zustandsvariablen repräsentieren im Einzelnen:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) && \text{Schlittenposition,} \\ x_2(t) &= \dot{x}(t) && \text{Schlittengeschwindigkeit,} \\ x_3(t) &= \varphi(t) && \text{Pendelwinkel und} \\ x_4(t) &= \dot{\varphi}(t) && \text{Winkelgeschwindigkeit} \end{aligned}$$

Des weiteren sind

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) := \left[\begin{array}{c} x_2 \\ \frac{-\frac{J K_1 K_2 x_2}{Ra r_0^2 m_P^2 a^2} - \frac{J F_r(x_2)}{m_P^2 a^2} - \frac{f_R x_4 \cos(x_3)}{m_P a} + g \cos(x_3) \sin(x_3) - \frac{J x_4^2 \sin(x_3)}{m_P a}}{\frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2} \\ x_4 \\ \frac{-\frac{f_R x_4}{m_P^2 a^2} - \frac{K_1 K_2 x_2 \cos(x_3)}{Ra r_0^2 m_P a} - \frac{\cos(x_3) F_r(x_2)}{m_P a} - x_4^2 \cos(x_3) \sin(x_3) + \frac{g \sin(x_3)}{m_P a}}{\frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2} \end{array} \right],$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) := \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{J K_1}{Ra r_0 m_P^2 a^2 \left(\frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2 \right)} \\ 0 \\ \frac{K_1 \cos(x_3)}{Ra r_0 m_P a \left(\frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2 \right)} \end{array} \right] \quad \text{und} \quad (3.2)$$

$$c(\mathbf{x}(t)) := x_3(t).$$

Um den differentialalgebraischen Algorithmus von Polzer (1999a) anwenden zu können, muß das System zuerst, wie in Polzer (1998) beschrieben, derart transformiert werden, daß $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ und $c(\mathbf{x})$ rationale Funktionen in \mathbf{x} sind. In Polzer (1998) findet sich eine ausführliche Herleitung bzw. Berechnung des hier angegebenen Ersatzsystems:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^1\dot{\mathbf{x}} = {}^1\mathbf{a}({}^1\mathbf{x}) + {}^1\mathbf{B}({}^1\mathbf{x})u, \quad {}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{4+2}, u \in \mathbb{R} \\ y = {}^1\mathbf{c}({}^1\mathbf{x}), \quad y \in \mathbb{R}^1 \end{array} \right\} =: \Sigma_1 \quad (3.3)$$

mit

$${}^1\mathbf{a}({}^1\mathbf{x}) := \left[\begin{array}{c} {}^1x_2 \\ \frac{\frac{J K_1 K_2}{{}^1x_2} - \frac{J F_R({}^1x_2)}{m_P^2 a^2} - \frac{f_R}{{}^1x_4} \frac{{}^1x_6}{{}^1x_5} + g}{{}^1x_6} - \frac{J}{{}^1x_4^2} \frac{{}^1x_5}{{}^1x_6}}{\frac{J}{m_P^2 a^2} - {}^1x_6^2} \\ {}^1x_4 \\ \frac{\frac{f_R}{{}^1x_4} - \frac{K_1 K_2}{{}^1x_2} \frac{{}^1x_6}{{}^1x_5} - \frac{{}^1x_6 F_R({}^1x_2)}{{}^1x_4} - \frac{{}^1x_4^2}{{}^1x_6} \frac{{}^1x_5}{{}^1x_6} + \frac{g}{{}^1x_4}}{\frac{J}{m_P^2 a^2} - {}^1x_6^2}} \\ {}^1x_6 \frac{{}^1x_4}{{}^1x_5} \\ - {}^1x_5 \frac{{}^1x_4}{{}^1x_6} \end{array} \right],$$

$${}^1\mathbf{B}({}^1\mathbf{x}) := \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{J K_1}{Ra r_0 m_P^2 a^2 \left(\frac{J}{m_P^2 a^2} - {}^1x_6^2 \right)} \\ 0 \\ \frac{K_1 \frac{{}^1x_6}{{}^1x_5}}{Ra r_0 m_P a \left(\frac{J}{m_P^2 a^2} - {}^1x_6^2 \right)} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \quad \text{und}$$

$${}^1\mathbf{c}({}^1\mathbf{x}) := {}^1x_3.$$

Führt man die Reibkraft $F_R({}^1x_2)$ als nicht näher bestimmte Funktion mit, besteht das System ${}^1\Sigma$ aus rationalen Funktionen in ${}^1\mathbf{x}$. Es ließe sich zunächst auch voraussetzen, daß $F_R({}^1x_2)$ eine rationale Funktion sein soll, was in diesem Beispiel aber eine untergeordnete Bedeutung hat, da keine Ableitungen von F_R in dem differentialalgebraischen Nulldynamikalgorithmus auftreten.

4 Differentialgeometrische Berechnung der Nulldynamik

Der Nulldynamikalgorithmus von Isidori (1995) setzt die gleiche Anzahl an Systemein- und -ausgängen voraus. Aus diesem Grund darf der Systemausgang lediglich eindimensional sein. Eine sinnvolle Wahl für den Systemausgang stellt der Pendelwinkel x_3 dar. Die Berechnung und Analyse der Nulldynamik eines inversen Pendels mit dem Algorithmus von Isidori (1995) ist in Polzer (1999b) ausführlich dargelegt. Des Weiteren ist eine Analyse des Systemmodells mit zweidimensionalem Ausgang mit diesem Algorithmus nicht möglich.

Wie in Polzer (1999b) beschrieben, ergibt sich als Nulldynamikzustandsmannigfaltigkeit \mathcal{Z}^* des Systems (3.1)

$$\mathcal{Z}^* = \mathcal{M}_1^c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_4 \mid x_3 = 0, x_4 = 0\} . \quad (4.1)$$

Die ausgangssignalnullende Zustandsrückführung $u^*(\mathbf{x}(t)) =: \mathbf{u}(t)$ erhält man in diesem Fall als Lösung von

$$\begin{aligned} & \left(L_{\mathbf{a}}c_1(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{B}}c_1(\mathbf{x})u \right) \Big|_{\mathbf{x} \in \mathcal{Z}^*} = 0 . \\ \Rightarrow & \left[\begin{array}{c} 0 \\ -\frac{K_1 K_2 x_2}{R a r_0^2 m_P a} - \frac{F_r(x_2)}{m_P a} \\ \frac{J}{m_P^2 a^2} - 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{K_1 m_P a}{R a r_0 (m_p^2 a^2 - J)} \end{array} \right] u = 0 . \\ \Rightarrow & u^*(\mathbf{x}) = \frac{K_1 K_2 x_2 + F_r(x_2) R a r_0^2}{K_1 r_0} . \end{aligned} \quad (4.2)$$

Durch

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}) := \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}^*(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{Z}^* \quad (4.3)$$

bestimmt sich die Nulldynamik zu

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_4 \mid x_3 = 0, x_4 = 0\} . \quad (4.4)$$

5 Differentialalgebraische Berechnung der Nulldynamik

Ist der differentialgeometrische Nulldynamikalgorithmus von Isidori (1995) aufgrund un erfüllter Voraussetzungen nicht anwendbar, bilden differentialalgebraische Methoden oft eine Alternative. Dabei sind dann zur Systembeschreibung lediglich polynomiale oder rationale Funktionen zugelassen. Da in dem Modell (3.3) des inversen Pendels auch rationale Funktionen enthalten sind, scheiden die Nulldynamikalgorithmen von Senger und Riege (1997) und Fortell (1995) zur Analyse aus. Im folgenden soll der differentialalgebraische Nulldynamikalgorithmus von Polzer (1999a) zum Tragen kommen, welcher zunächst kurz wiedergegeben wird.

5.1 Differentialalgebraischer Nulldynamikalgorithmus

Der in Polzer (1999a) eingeführte Nulldynamikalgorithmus durchläuft nach einem Initialisierungsschritt iterativ die Schritte $k.1$ bis $k.3$ so lange, bis die in $k.3$ ($k \in \mathbb{N}$) angegebene Abbruchbedingung erfüllt ist:

Initialisierungsschritt 0:

0.1 Definiere $\mathcal{U}_0 := C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ und bestimme die Menge $\mathcal{M}_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$.

Iterationsschritt $k \geq 1$:

$k.1$ Setze einen Stellgrößenvektor \mathbf{u} aus \mathcal{U}_{k-1} in die $(k-1)$ -te Ausgangssignalableitung ein, und leite diese anschließend erneut nach der Zeit ab. Dieser Vorgang ist so zu verstehen, daß alle u_i , ($i \in \{1, \dots, m\}$), für die eine Funktionsvorschrift bereits ermittelt wurde, durch diese in der $(k-1)$ -ten Ausgangssignalableitung zu ersetzen sind. Alle anderen u_j bleiben als noch freie zeitabhängige Funktionen bestehen.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{c}^{(k-1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k-2)})|_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{k-1}}) = \left(\frac{\partial \mathbf{c}^{(k-1)}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}) + \sum_{i=0}^{k-2} \frac{\partial \mathbf{c}^{(k-1)}}{\partial \mathbf{u}^{(i)}} \mathbf{u}^{(i+1)} \right) \Big|_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{k-1}}. \quad (5.1)$$

$k.2a$ Die k -te Ausgangssignalableitung mit $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{k-1}$ von (5.1) wird auf \mathcal{M}_{k-1} restringiert. Anschließend sind alle Elemente $c_i^{(k)}|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{k-1}, \mathbf{u} \in \mathcal{U}_{k-1}}$ ($i = 1, \dots, p$) auf ihre algebraische Abhängigkeit über $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$ hin zu überprüfen. Die daraus resultierenden Bedingungen für die Anfangswerte und die Stellgrößen schränken die Mengen \mathcal{M}_{k-1} und \mathcal{U}_{k-1} weiter ein. Diese eingeschränkten Mengen wiederum definieren \mathcal{M}_k und \mathcal{U}_k . Setze dafür

$$\tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k-1)}) := \left[\frac{d}{dt}(\mathbf{c}^{(k-1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k-2)})|_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{k-1}}) \right] \Big|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{k-1}}. \quad (5.2)$$

Dabei hängt $\tilde{\mathbf{c}}$ nach Polzer (1999a: Satz 4.3) formal nicht von den zeitlichen Ableitungen der Stellgröße ab, d.h. es existiert eine Darstellung

$$\tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k-1)}) = [f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \dots, f_p(\mathbf{x}, \mathbf{u})]^T \quad (5.3)$$

mit rationalen Funktionen f_1, \dots, f_p .

Bestimme des weiteren die Menge aller Indizes $\{i_1, \dots, i_l\} =: \mathcal{I}_k$, für die

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \text{ algebraisch abhängig über } \mathbb{R}[\mathbf{x}] \quad \forall i \in \mathcal{I}_k \quad (5.4)$$

ist. Anschließend wird die Menge aller Indizes $\{j_1, \dots, j_{\tilde{k}}\} =: \mathcal{J}_k$, für welche

$$f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \text{ algebraisch unabhängig über } \mathbb{R}[\mathbf{x}] \quad \forall j \in \mathcal{J}_k \quad (5.5)$$

ist, ermittelt. Es sei angemerkt, daß die Aussagen

$$\begin{aligned} \tilde{k}, l &\leq p, \\ \mathcal{I}_k \cup \mathcal{J}_k &= \{1, \dots, p\} \quad \text{und} \\ \mathcal{I}_k \cap \mathcal{J}_k &= \emptyset \end{aligned} \quad (5.6)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gelten.

k.2b Ist die Indexmenge \mathcal{I}_k leer, so existieren in diesem Schritt keine Funktionen, die über $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$ algebraisch abhängig sind. Deshalb kommen in diesem Teilschritt keine Bedingungen für die Menge der Anfangswerte hinzu. Aus diesem Grund ergibt sich

$$\tilde{\mathcal{M}}_k := \mathcal{M}_{k-1}. \quad (5.7)$$

Fahre im Fall einer leeren Indexmenge \mathcal{I}_k mit dem Schritt *k.2c* fort.

Ist die Indexmenge \mathcal{I}_k nicht leer, müssen die Nullstellen der über $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$ algebraisch abhängigen Funktionen f_i , ($i \in \mathcal{I}_k$) berechnet werden, d.h. die Gleichungen

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, \quad i \in \mathcal{I}_k \quad (5.8)$$

sind nach \mathbf{x} aufzulösen, und die gefundenen Nullstellen definieren die Menge

$$\tilde{\mathcal{M}}_k := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, \quad i \in \mathcal{I}_k \right\}. \quad (5.9)$$

Da $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ für $i \in \mathcal{I}_k$ algebraisch abhängig über $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$ ist, hängt f_i nicht explizit von \mathbf{u} ab. Falls das Gleichungssystem (5.8) unterbestimmt ist, ist der komplette Algorithmus mehrfach anzuwenden. Es muß dann jeweils eine andere Lösung von (5.8) an dieser Stelle Verwendung finden.

k.2c Sollte eine der Indexmengen \mathcal{I}_k oder \mathcal{J}_k leer sein oder $\tilde{\mathcal{M}}_k = \mathbb{R}^n$ gelten, so kann dieser Teilschritt übersprungen werden.

Die Menge \mathcal{M}_{k-1} stellt die Menge der zulässigen Anfangswerte dar, die eine *Nullung* der Ableitungen des Systemausgangs bis zur Stufe $k - 1$ ermöglichen. Diese Menge von Anfangswerten schränkt sich durch $\tilde{\mathcal{M}}_k$ ggf. weiter ein. Die Restriktion von f_j ($j \in \mathcal{J}_k$) auf $\tilde{\mathcal{M}}_k$ kann dazu führen, daß die im vorherigen Schritt noch transzendenten Funktionen nicht mehr algebraisch unabhängig über $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$ sind. Es ist jetzt möglich, daß \mathcal{J}_k auch Indizes von über $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$ algebraisch abhängigen Funktionen enthält. Aus diesem Grund ist es notwendig, die Indexteilmenge $\tilde{\mathcal{I}}_k \subset \mathcal{J}_k$, für die

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{M}}_k} \text{ algebraisch abhängig über } \mathbb{R}[\mathbf{x}] \quad \forall i \in \tilde{\mathcal{I}}_k \quad (5.10)$$

ist, zu ermitteln.

Falls die Indexteilmenge $\tilde{\mathcal{I}}_k$ leer ist, fahre mit Schritt *k.2d* fort.

Ansonsten sind wie im Schritt *k.2b* wieder die Gleichungen

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{M}}_k} = 0 \quad i \in \tilde{\mathcal{I}}_k \quad (5.11)$$

nach \mathbf{x} aufzulösen. Diese Lösungen definieren eine weitere Hilfsmenge $\bar{\mathcal{M}}_k$ durch

$$\bar{\mathcal{M}}_k := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{M}}_k} = 0, i \in \tilde{\mathcal{I}}_k \right\}. \quad (5.12)$$

Die Hilfsmenge $\tilde{\mathcal{M}}_k$ aus (5.9) erfährt durch

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{M}}_k &:= \bar{\mathcal{M}}_k \cap \tilde{\mathcal{M}}_k, \\ \tilde{\mathcal{M}}_k &:= \hat{\mathcal{M}}_k \end{aligned} \quad (5.13)$$

eine weitere Einschränkung. Im Falle eines unterbestimmten Gleichungssystems (5.11) ist wie im Schritt *k.2b* zu verfahren.

Da $\tilde{\mathcal{I}}_k$ nicht leer ist, enthält \mathcal{J}_k auch Indizes von Funktionen f_i ($i \in \tilde{\mathcal{I}}_k$), die über $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$ algebraisch abhängig sind. Daher erfolgt eine Reduzierung der Indexmenge \mathcal{J}_k durch

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{J}}_k &:= \mathcal{J}_k \setminus \tilde{\mathcal{I}}_k, \\ \mathcal{J}_k &:= \hat{\mathcal{J}}_k, \end{aligned} \quad (5.14)$$

um wieder zu gewährleisten, daß \mathcal{J}_k nur die Indizes der Funktionen $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{M}}_k}$ enthält, die über $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$ algebraisch unabhängig sind.

Eine Wiederholung von diesem Teilschritt *k.2c* ist so lange notwendig, bis $\tilde{\mathcal{I}}_k$ die leere Menge ergibt.

k.2d Ist die Menge \mathcal{J}_k leer, so existieren keine über $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$ algebraisch unabhängigen Funktionen, und somit sind auch keine neuen Bedingungen für den Stellgrößenvektor ermittelbar. In diesem Fall ändert sich die Menge der Stellgrößenfunktionen nicht:

$$\mathcal{U}_k := \mathcal{U}_{k-1} . \quad (5.15)$$

Falls \mathcal{J}_k die leere Menge repräsentiert, fahre mit *k.2e* fort.

Die Nullstellen der über $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$ algebraisch unabhängigen Funktionen f_j ($j \in \mathcal{J}_k$) ergeben Anforderungen an den Stellgrößenvektor durch das Auflösen der Gleichungen

$$f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{k-1} \cap \check{\mathcal{M}}_k} = 0, \quad j \in \mathcal{J}_k \quad (5.16)$$

nach \mathbf{u} . Die gefundenen Lösungen von Gl. (5.16) können von \mathbf{x} abhängen. Sofern Lösungen von Gl. (5.16) existieren, ist die Definition einer Hilfsfunktion $\mathbf{r} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch

$$f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{k-1} \cap \check{\mathcal{M}}_k} = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{u} = \mathbf{r}(\mathbf{x}), \quad j \in \mathcal{J}_k \quad (5.17)$$

immer möglich. Liefert Gl. (5.16) ein unterbestimmtes Gleichungssystem, ergeben sich mehrere Möglichkeiten für die Wahl der Funktion $\mathbf{r}(\mathbf{x})$. Eine mehrfache Anwendung des kompletten Algorithmus ist dann erforderlich, wobei an dieser Stelle jeweils eine andere Lösung von (5.16) zur Bestimmung von $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ zu wählen ist. Ist das Gleichungssystem (5.16) aufgrund einer Überbestimmtheit nicht lösbar, so läßt sich dieses Problem durch weitere Bedingungen an die Anfangswerte lösen. Dazu ist es erforderlich, eine Hilfsmenge $\check{\mathcal{M}}_k \subset \mathbb{R}^n$ derart zu wählen, daß

$$f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{k-1} \cap \check{\mathcal{M}}_k \cap \check{\mathcal{M}}_k} = 0, \quad j \in \mathcal{J}_k \quad (5.18)$$

nach \mathbf{u} aufgelöst werden kann. Wie eben beschrieben, definieren die Lösungen für \mathbf{u} die Hilfsfunktion $\mathbf{r} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Ist diese Vorgehensweise nicht eindeutig, muß der komplette Algorithmus mehrfach durchlaufen werden.

Durch die Hilfsfunktion \mathbf{r} sind weitere Anforderungen an die ausgangssignalnullende Stellgröße spezifizierbar:

$$\check{\mathcal{U}}_k := \left\{ \mathbf{u} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \mid \mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(\mathbf{x}(t)) \right\}. \quad (5.19)$$

Die Menge der möglichen Stellgrößen \mathcal{U}_k schränkt sich ggf. damit weiter ein:

$$\mathcal{U}_k := \mathcal{U}_{k-1} \cap \check{\mathcal{U}}_k . \quad (5.20)$$

k.2e Die Menge der Anfangswerte \mathcal{M}_k erfährt durch

$$\mathcal{M}_k := \mathcal{M}_{k-1} \cap \tilde{\mathcal{M}}_k , \quad (5.21)$$

bzw. falls (5.16) überbestimmt ist, via

$$\mathcal{M}_k := \mathcal{M}_{k-1} \cap \tilde{\mathcal{M}}_k \cap \check{\mathcal{M}}_k , \quad (5.22)$$

eine weitere Einschränkung.

k.3 Als Abbruchbedingung ist es zulässig, die Bedingung

$$\mathcal{M}_k \stackrel{!}{=} \mathcal{M}_{k-1} \quad (5.23)$$

zu überprüfen (Polzer 1999a:Satz 4.2), d. h. der Algorithmus terminiert, sobald in einem Iterationsschritt keine neuen Bedingungen für die Anfangswerte hinzugekommen sind. Im Falle einer Ungültigkeit von Gl. (5.23) fährt man mit Schritt $k.1$ fort.

Ist die Abbruchbedingung (5.23) erfüllt, sind alle Elemente der Nulldynamik bekannt. Bei der Bestimmung des Nullkerns \mathcal{Z}^* müssen zwei Fälle unterschieden werden, zum einen der Fall, daß das analysierte System ein Ersatzsystem (vgl. Polzer (1998)) ist, zum anderen, ob ein unverändertes ‘‘Originalsystem‘‘ den Gegenstand der Untersuchung darstellt. Im Falle eines Ersatzsystems sind die Anfangswerte der ‘‘neuen‘‘ Zustandsgrößen bereits festgelegt und schränken daher den Nullkern \mathcal{Z}^* weiter ein. Dies geschieht folgendermaßen:

Es sei σ die Anzahl der ‘‘neuen‘‘ Zustandsgrößen des ‘‘Originalsystems‘‘ (vgl. Polzer (1998: S. 4)). Ferner repräsentiere \tilde{n} die ‘‘ursprüngliche‘‘ Dimension des Zustandsmodells (dabei gilt: $n = \sigma + \tilde{n}$). Die Berechnung der Anfangswerte erfolgt nun über die zum Ersatzsystem gehörende Substitution (vgl. Polzer (1998: S. 7))

$$x_{\tilde{n}+j}(t) := r_j(x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad , \quad j = 1, \dots, \sigma \quad (5.24)$$

durch

$$\begin{aligned} x_{\tilde{n}+j}(t_0) &= r_j(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) \quad , \quad j = 1, \dots, \sigma \\ &=: x_{\tilde{n}+j,0} . \end{aligned} \quad (5.25)$$

Die Menge der zulässigen Anfangswerte schränkt sich in diesem Fall über

$$\check{\mathcal{M}}_k := \mathcal{M}_k \cap \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_{\tilde{n}+j} = x_{\tilde{n}+j,0} \quad , \quad j = 1, \dots, \sigma \} \quad (5.26)$$

weiter ein.

Im Falle eines Ersatzsystems ergibt sich damit der Nullkern \mathcal{Z}^* zu

$$\mathcal{Z}^* := \check{\mathcal{M}}_k , \quad (5.27)$$

ansonsten erfolgt die Festlegung des Nullkerns durch

$$\mathcal{Z}^* := \mathcal{M}_k . \quad (5.28)$$

Die Ausgangssignalnullende Zustandsrückführung $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}(t)) =: \mathbf{u}(t)$ ist ein Element der Menge \mathcal{U}_k :

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}_k . \quad (5.29)$$

Diese Größen liefern das Nulldynamikvektorfeld $\mathbf{f}^*(\mathbf{x})$ durch

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{x} \in \mathcal{Z}^* , \quad (5.30)$$

woraus sich direkt die Nulldynamik des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{x} \in \mathcal{Z}^* \quad (5.31)$$

ergibt. □

5.2 Inverses Pendel mit eindimensionalem Systemausgang

In diesem Abschnitt erfolgt die Berechnung der Nulldynamik eines inversen Pendels mit dem Pendelwinkel als Ausgang durch den differentialalgebraischen Nulldynamikalgorithmus.

Der Algorithmus startet mit einem Initialisierungsschritt, welcher zu den beiden Mengen

$$\mathcal{U}_0 := C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \quad \text{und} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 &:= \{ {}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_1} \mid {}^1c(\mathbf{x}) = 0 \} \\ &= \{ {}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid {}^1x_3 = 0 \} \end{aligned} \quad (5.33)$$

führt.

Es folgt der Iterationsschritt 1:

1.1 : \mathcal{U}_0 beinhaltet alle Stellgrößen, die Forderung $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_0$ stellt also keine Einschränkung dar. Die „eingeschränkte“ Ausgangssignalableitung ergibt sich daher zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(c({}^1\mathbf{x})|_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_0}) &= \frac{\partial c}{\partial {}^1\mathbf{x}} (\mathbf{a}({}^1\mathbf{x}) + \mathbf{B}({}^1\mathbf{x})\mathbf{u}) \\ &= {}^1x_4 + 0 \cdot \mathbf{u} . \end{aligned} \quad (5.34)$$

1.2a : Setze

$$\tilde{c}({}^1\mathbf{x}, u) := \left[\frac{d}{dt} c({}^1\mathbf{x}) \right] \Big|_{{}^1\mathbf{x} \in \mathcal{M}_0} = {}^1x_4 =: f_1({}^1\mathbf{x}, u). \quad (5.35)$$

Die Menge aller Indizes $\{i_1, \dots, i_l\} =: \mathcal{I}_1$, für die

$$f_i({}^1\mathbf{x}, u) \text{ algebraisch abhängig über } \mathbb{R}[{}^1\mathbf{x}] \quad \forall i \in \mathcal{I}_1 \quad (5.36)$$

ist, besteht aus einem Element: $\mathcal{I}_1 = \{1\}$. Daraus folgt direkt, daß die Menge aller Indizes $\{j_1, \dots, j_k\} =: \mathcal{J}_1$, für welche

$$f_j({}^1\mathbf{x}, u) \text{ algebraisch unabhängig über } \mathbb{R}[{}^1\mathbf{x}] \quad \forall j \in \mathcal{J}_1 \quad (5.37)$$

ist, leer sein muß, da

$$\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{J}_1 = \{1, \dots, p\} \quad \wedge \quad \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{J}_1 = \emptyset \quad (5.38)$$

immer gilt und nur eine Ausgangsgröße ($p = 1$) existiert.

1.2b : Die Nullstelle der über $\mathbb{R}[{}^1\mathbf{x}]$ algebraisch abhängigen Funktion f_i ($i \in \mathcal{I}_1$) muß berechnet werden, d.h.

$$f_1({}^1\mathbf{x}, u) = {}^1x_4 \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.39)$$

soll gelten. Daraus folgt direkt die Bedingung ${}^1x_4 = 0$. Somit definiert sich $\tilde{\mathcal{M}}_1$ durch

$$\tilde{\mathcal{M}}_1 := \left\{ {}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid f_i({}^1\mathbf{x}, u) = 0, i \in \mathcal{I}_1 \right\} = \left\{ {}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid {}^1x_4 = 0 \right\}. \quad (5.40)$$

1.2c : Die Indexmenge \mathcal{J}_1 ist die leere Menge. Aus diesem Grund kommt der Teilschritt 1.2c nicht zur Anwendung.

1.2d : Da die Indexmenge \mathcal{J}_k leer ist, existieren in diesem Schritt keine Funktionen, die über $\mathbb{R}[{}^1\mathbf{x}]$ algebraisch unabhängig sind, und somit ergeben sich auch keine Bedingungen für den Stellgrößenvektor:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{U}_1 &:= \mathcal{U}_0 \\ &= C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Setze aus diesem Grund den Algorithmus mit dem Schritt 1.2e fort.

1.2e : Durch

$$\mathcal{M}_1 := \mathcal{M}_0 \cap \tilde{\mathcal{M}}_1 = \{ {}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid {}^1x_3 = 0, {}^1x_4 = 0 \} \quad (5.42)$$

schränkt sich die Menge der Anfangswerte \mathcal{M}_1 weiter ein.

1.3 : Die Abbruchbedingung

$$\mathcal{M}_1 \stackrel{!}{=} \mathcal{M}_0 \quad (5.43)$$

ist noch nicht erfüllt, denn

$$\mathcal{M}_1 = \{ {}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid {}^1x_3 = 0, {}^1x_4 = 0 \} \neq \{ {}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid {}^1x_3 = 0 \} = \mathcal{M}_0 . \quad (5.44)$$

Deshalb folgt ein weiterer Iterationsschritt.

2.1 : Da \mathcal{U}_1 immer noch mit der Grundmenge aller Stellgrößen \mathcal{U}_0 übereinstimmt, ergibt sich die zweite eingeschränkte Ausgangssignalableitung zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{c}({}^1\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{u \in \mathcal{U}_1}) &= \frac{d}{dt} {}^1x_4 \\ &= \frac{-\frac{f_R}{}^1x_4}{m_P^2 a^2} - \frac{K_1 K_2}{}^1x_2 {}^1x_6 - \frac{{}^1x_6 F_R({}^1x_2)}{m_P a} - \frac{{}^1x_4^2}{}^1x_6 {}^1x_5 + \frac{g}{}^1x_5}{m_P a} + \\ &\quad \frac{J}{m_P^2 a^2} - {}^1x_6^2 + \\ &\quad + \frac{K_1}{}^1x_6}{Ra r_0 m_P a \left(\frac{J}{m_P^2 a^2} - {}^1x_6^2 \right)} u . \end{aligned} \quad (5.45)$$

2.2a : Setze nun

$$\begin{aligned} \tilde{c}({}^1\mathbf{x}, u, \dot{u}) &:= \left[\frac{d}{dt} (\dot{c}({}^1\mathbf{x}, u, \dot{u})|_{u \in \mathcal{U}_1}) \right] \Big|_{{}^1\mathbf{x} \in \mathcal{M}_1} \\ &= \frac{-\frac{K_1 K_2}{}^1x_2 {}^1x_6 - \frac{{}^1x_6 F_R({}^1x_2)}{m_P a} + \frac{g}{}^1x_5}{m_P a}}{\frac{J}{m_P^2 a^2} - {}^1x_6^2} + \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$+ \frac{K_1}{}^1x_6}{Ra r_0 m_P a \left(\frac{J}{m_P^2 a^2} - {}^1x_6^2 \right)} u \quad (5.47)$$

und

$$\tilde{c}({}^1\mathbf{x}, u, \dot{u}) =: f_1({}^1\mathbf{x}, u) . \quad (5.48)$$

Die Menge aller Indizes $\{i_1, \dots, i_l\} =: \mathcal{I}_2$, für die

$$f_i({}^1\mathbf{x}, u) \text{ algebraisch abhängig über } \mathbb{R}[{}^1\mathbf{x}] \quad \forall i \in \mathcal{I}_2 \quad (5.49)$$

ist, ist leer, da f_1 explizit von u abhängt.

Für die Menge aller Indizes $\{j_1, \dots, j_k\} =: \mathcal{J}_2$, deren zugehörige Funktionen

$$f_j({}^1\mathbf{x}, \mathbf{u}) \text{ algebraisch unabhängig über } \mathbb{R}[{}^1\mathbf{x}] \quad \forall j \in \mathcal{J}_2 \quad (5.50)$$

sind, ergibt sich somit $\mathcal{J}_2 = \{1\}$.

2.2b : Da die Indexmenge \mathcal{I}_2 leer ist, ist es nicht möglich neue Bedingungen für die Anfangswerte zu bestimmen. Es gilt demnach

$$\tilde{\mathcal{M}}_2 := \mathcal{M}_1 . \quad (5.51)$$

Aus diesem Grund folgt direkt der Unterpunkt 2.2c.

2.2c : Da die Indexmenge \mathcal{I}_2 , wie bereits erwähnt, leer ist, fährt der Algorithmus mit dem Teilschritt 2.2d fort.

2.2d : Nun liefert die Indexmenge \mathcal{J}_2 die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} f_j({}^1\mathbf{x}, u)|_{{}^1\mathbf{x} \in \mathcal{M}_1 \cap \tilde{\mathcal{M}}_2}, \quad j \in \mathcal{J}_k = \{1\} \\ \Rightarrow 0 &= \frac{-\frac{K_1 K_2 {}^1x_2 {}^1x_6}{Ra r_0^2 m_P a} - \frac{{}^1x_6 F_R({}^1x_2)}{m_P a} + \frac{g {}^1x_5}{m_P a}}{\frac{J}{m_P^2 a^2} - {}^1x_6^2} + \\ &+ \frac{K_1 {}^1x_6}{Ra r_0 m_P a \left(\frac{J}{m_P^2 a^2} - {}^1x_6^2 \right)} u , \end{aligned} \quad (5.52)$$

welche nach u aufzulösen ist. Als Lösung von (5.52) erhält man

$$u = -\frac{g {}^1x_5 R_a r_0^2 - K_1 K_2 {}^1x_2 {}^1x_6 - {}^1x_6 F_R({}^1x_2) R_a r_0^2}{r_0 {}^1x_6 K_1} . \quad (5.53)$$

Diese Lösung definiert die Hilfsfunktion $r : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_1({}^1\mathbf{x}, u)|_{{}^1\mathbf{x} \in \mathcal{M}_1 \cap \tilde{\mathcal{M}}_2} = 0 \quad \text{für } u = r({}^1\mathbf{x}), \text{ d. h.} \quad (5.54)$$

$$r({}^1\mathbf{x}) := -\frac{g {}^1x_5 R_a r_0^2 - K_1 K_2 {}^1x_2 {}^1x_6 - {}^1x_6 F_R({}^1x_2) R_a r_0^2}{r_0 {}^1x_6 K_1} . \quad (5.55)$$

Jetzt ist eine Anforderung an die Menge der Stellgrößen bekannt:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{U}}_2 &:= \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid u(t) = r({}^1\mathbf{x}(t)) \right\} \\ &= \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \right. \\ &\quad \left. u = -\frac{g {}^1x_5 R_a r_0^2 - K_1 K_2 {}^1x_2 {}^1x_6 - {}^1x_6 F_R({}^1x_2) R_a r_0^2}{r_0 {}^1x_6 K_1} \right\}. \quad (5.56)\end{aligned}$$

Die Menge der ausgangssignalnullenden Stellgrößen schränkt sich durch

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_2 &:= \mathcal{U}_1 \cap \tilde{\mathcal{U}}_2 \\ &= \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \right. \\ &\quad \left. u = -\frac{g {}^1x_5 R_a r_0^2 - K_1 K_2 {}^1x_2 {}^1x_6 - {}^1x_6 F_R({}^1x_2) R_a r_0^2}{r_0 {}^1x_6 K_1} \right\} \quad (5.57)\end{aligned}$$

erstmal ein.

2.2e : Die Menge der Anfangswerte bleibt in diesem Schritt konstant, d.h.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2 &:= \mathcal{M}_1 \cap \tilde{\mathcal{M}}_2 = \mathcal{M}_1 \\ &= \{ {}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid {}^1x_3 = 0, {}^1x_4 = 0 \}. \quad (5.58)\end{aligned}$$

2.3 : Die Abbruchbedingung

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2 &\stackrel{!}{=} \mathcal{M}_1 \\ \Leftrightarrow \{ {}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid {}^1x_3 = 0, {}^1x_4 = 0 \} &\stackrel{!}{=} \{ {}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid {}^1x_3 = 0, {}^1x_4 = 0 \} \quad (5.59)\end{aligned}$$

ist jetzt erfüllt und der Algorithmus terminiert. Die ausgangssignalnullende Zustandsrückführung $u^*(\mathbf{x}(t)) =: u(t)$ stammt aus \mathcal{U}_2 :

$$u^*(\mathbf{x}(t)) = -\frac{g {}^1x_5(t) R_a r_0^2 - K_1 K_2 {}^1x_2(t) {}^1x_6(t) - {}^1x_6(t) F_R({}^1x_2(t)) R_a r_0^2}{r_0 {}^1x_6(t) K_1}. \quad (5.60)$$

Da ein Ersatzsystem zugrunde liegt, ergeben sich noch weitere Bedingungen an die Anfangswerte. Die neuen Zustandsgrößen des Ersatzsystems stammen aus der Definition (Polzer 1998):

$$\begin{aligned}{}^1x_5(t) &= \sin(x_3(t)) \quad \text{und} \\ {}^1x_6(t) &= \cos(x_3(t)).\end{aligned}$$

Daraus resultieren die Anfangswerte der neuen Zustandsgrößen:

$$\begin{aligned}{}^1x_5(0) &= \sin(x_3(0)) = 0 \quad \text{und} \\ {}^1x_6(0) &= \cos(x_3(0)) = 1.\end{aligned}$$

Die Menge der zulässigen Anfangswerte schränkt sich damit weiter ein:

$$\check{\mathcal{M}}_2 := \mathcal{M}_2 \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid {}^1x_5 = 0, {}^1x_6 = 1\} . \quad (5.61)$$

Somit besteht der Nullkern \mathcal{Z}^* aus

$$\mathcal{Z}^* := \check{\mathcal{M}}_2 = \{{}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid {}^1x_3 = 0, {}^1x_4 = 0, {}^1x_5 = 0, {}^1x_6 = 1\} . \quad (5.62)$$

Mit diesen beiden Elementen berechnet man das Nulldynamikvektorfeld über

$$\mathbf{f}^*({}^1\mathbf{x}) = {}^1\mathbf{a}({}^1\mathbf{x}) + {}^1\mathbf{B}({}^1\mathbf{x})u^*({}^1\mathbf{x}) , \quad {}^1\mathbf{x} \in \mathcal{Z}^* . \quad (5.63)$$

Insgesamt nimmt die Nulldynamik

$${}^1\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^*({}^1\mathbf{x}) , \quad {}^1\mathbf{x} \in \mathcal{Z}^* \quad (5.64)$$

die Gestalt

$$\begin{aligned} {}^1\dot{x}_1(t) &= {}^1x_2(t) \\ {}^1\dot{x}_2(t) &= 0 \\ {}^1\dot{x}_3(t) &= 0 \\ {}^1\dot{x}_4(t) &= 0 \\ {}^1\dot{x}_5(t) &= 0 \\ {}^1\dot{x}_6(t) &= 0 \end{aligned} \quad \text{mit } {}^1\mathbf{x} \in \{{}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid {}^1x_3 = 0, {}^1x_4 = 0, {}^1x_5 = 0, {}^1x_6 = 1\} \quad (5.65)$$

an.

□

5.3 Inverses Pendel mit zweidimensionalem Systemausgang

Der Nulldynamikalgorithmus von Isidori (1995) und der Nulldynamikalgorithmus für rationale Systeme liefern beide als Ergebnis eine instabile Nulldynamik, wenn der Systemausgang lediglich aus dem Pendelwinkel besteht. Im folgenden findet eine Erweiterung des Systemausgangs um die Schlittenposition statt. Grundlage ist weiterhin das Modell (3.1) bzw. in transformierter Form (3.3); es kommt lediglich ein zweiter Systemausgang hinzu, d.h.

$${}^1\mathbf{y}(t) = {}^1\mathbf{c}({}^1\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} {}^1x_3(t) \\ {}^1x_1(t) \end{bmatrix} . \quad (5.66)$$

Da nur eine Stellgröße vorhanden ist, läßt sich der Nulldynamikalgorithmus von Isidori (1995) auf diese Problemstellung nicht anwenden, da dort die Anzahl der Systemeingänge mit derjenigen der Systemausgänge übereinstimmen muß. Der differentialalgebraische

Nulldynamikalgorithmus für rationale Systeme weist diese Einschränkung nicht auf, deshalb folgt nun die Berechnung der Nulldynamik des erweiterten Systems mit dem eben genannten Algorithmus.

Der Initialisierungsschritt führt zu den beiden Mengen:

$$\mathcal{U}_0 := C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \quad \text{und} \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 &:= \{ {}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid {}^1\mathbf{c}(\mathbf{x}) = 0 \} \\ &= \{ {}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid {}^1x_3 = 0, {}^1x_1 = 0 \}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Es folgt der Iterationsschritt 1:

1.1 : Für die Stellgröße existieren noch keine Restriktionen. Die Ausgangssignalableitung ergibt sich daher zu

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{c}({}^1\mathbf{x})|_{u \in \mathcal{U}_0}) = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial {}^1\mathbf{x}} (\mathbf{a}({}^1\mathbf{x}) + \mathbf{B}({}^1\mathbf{x})) u = \begin{bmatrix} {}^1x_4 \\ {}^1x_2 \end{bmatrix}. \quad (5.69)$$

1.2a : Setze

$$\tilde{\mathbf{c}}({}^1\mathbf{x}, u) := \frac{d}{dt} [\mathbf{c}({}^1\mathbf{x})]|_{{}^1\mathbf{x} \in \mathcal{M}_0} = \begin{bmatrix} {}^1x_4 \\ {}^1x_2 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} f_1({}^1\mathbf{x}, u) \\ f_2({}^1\mathbf{x}, u) \end{bmatrix}. \quad (5.70)$$

Die Menge aller Indizes $\{i_1, \dots, i_l\} =: \mathcal{I}_1$, für die

$$f_i({}^1\mathbf{x}, u) \text{ algebraisch abhängig über } \mathbb{R}[{}^1\mathbf{x}] \quad \forall i \in \mathcal{I}_1 \quad (5.71)$$

ist, ergibt sich zu $\mathcal{I}_1 = \{1, 2\}$. Daraus folgt direkt, daß die Menge aller Indizes $\{j_1, \dots, j_{\bar{1}}\} =: \mathcal{J}_1$, für welche

$$f_j({}^1\mathbf{x}, u) \text{ algebraisch unabhängig über } \mathbb{R}[{}^1\mathbf{x}] \quad \forall j \in \mathcal{J}_1 \quad (5.72)$$

ist, leer sein muß, da

$$\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{J}_1 = \{1, \dots, p\} \quad \text{und} \quad (5.73)$$

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{J}_1 = \emptyset \quad (5.74)$$

immer gelten und nur zwei Ausgangsgrößen ($p = 2$) existieren.

1.2b : Gesucht sind die Nullstellen der über $\mathbb{R}[^1\mathbf{x}]$ algebraisch abhängigen Funktionen f_i ($i \in \mathcal{I}_1$), d.h.

$$f_1(^1\mathbf{x}, u) = ^1x_4 \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad f_2(^1\mathbf{x}, u) = ^1x_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.75)$$

soll gelten, woraus direkt die Bedingungen $^1x_4 = 0$ und $^1x_2 = 0$ folgen.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_1 &:= \left\{ ^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid f_i(^1\mathbf{x}, u) = 0, i \in \mathcal{I}_1 \right\} \\ &= \left\{ ^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid ^1x_4 = 0, ^1x_2 = 0 \right\}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

1.2c : Die Indexmenge \mathcal{J}_1 ist die leere Menge. Aus diesem Grund kommt der Teilschritt 1.2c nicht zur Anwendung.

1.2d : Da die Indexmenge \mathcal{J}_1 leer ist, existieren in diesem Schritt keine Funktionen, die über $\mathbb{R}[^1\mathbf{x}]$ algebraisch unabhängig sind, und somit ergeben sich auch keine Bedingungen für den Stellgrößenvektor:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{U}_1 &:= \mathcal{U}_0 \\ &= C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \end{aligned} \quad (5.77)$$

Der Rest des Teilschrittes kann daher übersprungen werden, es folgt 1.2e.

1.2e : Da keine Bedingungen für die Stellgröße in diesem Iterationsschritt ermittelt wurden und somit kein überbestimmtes Gleichungssystem für die Bestimmung von u vorliegt, ergibt sich die Menge der Anfangswerte \mathcal{M}_1 durch

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &:= \mathcal{M}_0 \cap \tilde{\mathcal{M}}_1 \\ &= \{ ^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid ^1x_1 = 0, ^1x_2 = 0, ^1x_3 = 0, ^1x_4 = 0 \}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

1.3: Die Abbruchbedingung

$$\mathcal{M}_1 \stackrel{!}{=} \mathcal{M}_0 \quad (5.79)$$

ist noch nicht erfüllt, denn es gilt

$$\{ ^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid ^1x_1 = 0, ^1x_2 = 0, ^1x_3 = 0, ^1x_4 = 0 \} \neq \{ ^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid ^1x_3 = 0, ^1x_1 = 0 \}.$$

Aus diesem Grund folgt ein weiterer Iterationsschritt.

2.1 : \mathcal{U}_1 enthält immer noch alle denkbaren Stellgrößen, aus diesem Grund ergibt sich die zweite Ausgangssignalableitung zu

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{c}}({}^1\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_1}) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} {}^1x_4 \\ {}^1x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1\dot{x}_4 \\ {}^1\dot{x}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.80)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die Terme ${}^1\dot{x}_4$ und ${}^1\dot{x}_2$ an dieser Stelle nicht nochmals niedergeschrieben, sie finden sich im transformierten Zustandsmodell (3.3).

2.2a : Setze nun

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{c}}({}^1\mathbf{x}, u, \dot{u}) &:= \left[\frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{c}}({}^1\mathbf{x}, u, \dot{u})|_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_1}) \right] \Big|_{{}^1\mathbf{x} \in \mathcal{M}_1} = \begin{bmatrix} {}^1\dot{x}_4 \\ {}^1\dot{x}_2 \end{bmatrix} \Big|_{{}^1\mathbf{x} \in \mathcal{M}_1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-{}^1x_6 F_R({}^1x_2)}{m_P a} + \frac{g {}^1x_5}{m_P a} + \frac{K_1 {}^1x_6}{Ra r_0 m_P a \left(\frac{J}{m_P^2 a^2} - {}^1x_6^2 \right)} u \\ \frac{J F_R({}^1x_2)}{m_P^2 a^2} + g {}^1x_6 {}^1x_5 + \frac{J K_1}{Ra r_0 m_P^2 a^2 \left(\frac{J}{m_P^2 a^2} - {}^1x_6^2 \right)} u \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.81)$$

und

$$\tilde{\mathbf{c}}({}^1\mathbf{x}, u, \dot{u}) =: \begin{bmatrix} f_1({}^1\mathbf{x}, u) \\ f_2({}^1\mathbf{x}, u) \end{bmatrix}. \quad (5.82)$$

Die Menge aller Indizes $\{i_1, \dots, i_l\} =: \mathcal{I}_2$, für die

$$f_i({}^1\mathbf{x}, u) \text{ algebraisch abhängig über } \mathbb{R}[{}^1\mathbf{x}] \quad \forall i \in \mathcal{I}_2 \quad (5.83)$$

ist, ist leer.

Für die Menge aller Indizes $\{j_1, \dots, j_2\} =: \mathcal{J}_2$, deren zugehörige Funktionen

$$f_j({}^1\mathbf{x}, u) \text{ algebraisch unabhängig über } \mathbb{R}[{}^1\mathbf{x}] \quad \forall j \in \mathcal{J}_2 \quad (5.84)$$

sind, ergibt sich somit $\mathcal{J}_2 = \{1, 2\}$.

2.2b : Da die Indexmenge \mathcal{I}_2 leer ist, folgt

$$\tilde{\mathcal{M}}_2 := \mathcal{M}_1. \quad (5.85)$$

Fahre mit dem Schritt 2.2c fort.

2.2c : Diesen Teilschritt überspringt man ebenfalls, da die Indexmenge \mathcal{I}_2 leer ist.

2.2d : Die Indexmenge \mathcal{J}_2 ist nicht leer, was die Gleichungen

$$0 \stackrel{!}{=} f_j({}^1\mathbf{x}, u)|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_1 \cap \tilde{\mathcal{M}}_2}, \quad j \in \mathcal{J}_2 = \{1, 2\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{-\frac{{}^1x_6 F_{\mathbb{R}}({}^1x_2)}{m_{\mathbb{P}} a} + \frac{g {}^1x_5}{m_{\mathbb{P}} a}}{\frac{J}{m_{\mathbb{P}}^2 a^2} - {}^1x_6^2} + \frac{K_1 {}^1x_6}{Ra r_0 m_{\mathbb{P}} a \left(\frac{J}{m_{\mathbb{P}}^2 a^2} - {}^1x_6^2\right)} u \\ 0 = \frac{-\frac{J F_{\mathbb{R}}({}^1x_2)}{m_{\mathbb{P}}^2 a^2} + g {}^1x_6 {}^1x_5}{\frac{J}{m_{\mathbb{P}}^2 a^2} - {}^1x_6^2} + \frac{J K_1}{Ra r_0 m_{\mathbb{P}}^2 a^2 \left(\frac{J}{m_{\mathbb{P}}^2 a^2} - {}^1x_6^2\right)} u \end{cases} \quad (5.86)$$

liefert, welche nach u aufzulösen sind. Das Gleichungssystem (5.86) ist überbestimmt. Wähle deshalb $\tilde{\mathcal{M}}_2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid x_5 = 0\}$, denn damit ist

$$0 \stackrel{!}{=} f_j({}^1\mathbf{x}, u)|_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_1 \cap \tilde{\mathcal{M}}_2 \cap \tilde{\mathcal{M}}_2}, \quad j \in \mathcal{J}_2 = \{1, 2\} \quad (5.87)$$

nach u auflösbar.

Als Lösung von (5.87) erhält man

$$u = \frac{F_{\mathbb{R}}({}^1x_2) R_a r_0}{K_1}. \quad (5.88)$$

Diese Lösung definiert die Hilfsfunktion gemäß Gleichung (5.17) $r : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_j({}^1\mathbf{x}, u) = 0 \quad \text{für } u = r({}^1\mathbf{x}) \text{ und } j \in \mathcal{J}_2, \text{ also} \quad (5.89)$$

$$r({}^1\mathbf{x}) := \frac{F_{\mathbb{R}}({}^1x_2) R_a r_0}{K_1}. \quad (5.90)$$

Damit ist eine Restriktion für die Menge der Stellgrößen bekannt:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}_2 &:= \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid u(t) = r({}^1\mathbf{x}(t)) \right\} \\ &= \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid u(t) = \frac{F_{\mathbb{R}}({}^1x_2(t)) R_a r_0}{K_1} \right\}. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Die Menge der Stellgrößen schränkt sich durch

$$\mathcal{U}_2 := \mathcal{U}_1 \cap \tilde{\mathcal{U}}_2 = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid u(t) = \frac{F_{\mathbb{R}}({}^1x_2(t)) R_a r_0}{K_1} \right\} \quad (5.92)$$

erstmal ein.

2.2e : Rein formal gesehen ergibt sich die Menge der Anfangswerte \mathcal{M}_2 durch

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2 &:= \mathcal{M}_1 \cap \tilde{\mathcal{M}}_2 \cap \bar{\mathcal{M}}_2 \\ &= \{ {}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid {}^1x_1 = 0, {}^1x_2 = 0, {}^1x_3 = 0, {}^1x_4 = 0, {}^1x_5 = 0 \} .\end{aligned}\quad (5.93)$$

Berücksichtigt man bereits an dieser Stelle die durch das Ersatzsystem vorgenommene Systemtransformation (${}^1x_5 = \sin({}^1x_3) = 0$), so stellt die Bedingung ${}^1x_5 = 0$ keine weitere Einschränkung der Anfangswerte dar. Es ist also in diesem Fall zulässig, \mathcal{M}_2 durch

$$\mathcal{M}_2 := \mathcal{M}_1 \cap \tilde{\mathcal{M}}_2 = \{ {}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid {}^1x_1 = 0, {}^1x_2 = 0, {}^1x_3 = 0, {}^1x_4 = 0 \} \quad (5.94)$$

zu setzen.

2.3 : Die Abbruchbedingung

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2 &\stackrel{!}{=} \mathcal{M}_1 \\ \Leftrightarrow \{ {}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid {}^1x_1 = 0, {}^1x_2 = 0, {}^1x_3 = 0, {}^1x_4 = 0 \} &\stackrel{!}{=} \\ \{ {}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid {}^1x_1 = 0, {}^1x_2 = 0, {}^1x_3 = 0, {}^1x_4 = 0 \} &\end{aligned}\quad (5.95)$$

ist jetzt erfüllt und der Algorithmus terminiert. Die Berechnung der Anfangswerte der *neuen* Systemzustände 1x_5 und 1x_6 erfolgt über die zum Ersatzsystem gehörende Substitution (bzw. mit $\bar{\mathcal{M}}_2$):

$${}^1x_5(0) := \sin({}^1x_{3,0}) = 0 \quad (5.96)$$

$${}^1x_6(0) := \cos({}^1x_{3,0}) = 1 \quad (5.97)$$

Für den Nullkern \mathcal{Z}^* folgt mit (5.96):

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^* &= \mathcal{M}_2 \\ &= \{ {}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid {}^1x_1 = 0, {}^1x_2 = 0, {}^1x_3 = 0, {}^1x_4 = 0, {}^1x_5 = 0, {}^1x_6 = 0 \}.\end{aligned}\quad (5.98)$$

Ausgangssignalnulldende Zustandsrückführung $u^*(\mathbf{x}(t)) =: u(t)$ ist ein Element der Menge \mathcal{U}_2 :

$$u^*(\mathbf{x}(t)) = \frac{F_R({}^1x_2(t))R_a r_0}{K_1} . \quad (5.99)$$

Diese beiden Elemente liefern das Nulldynamikvektorfeld über

$$\mathbf{f}^*({}^1\mathbf{x}) = {}^1\mathbf{a}({}^1\mathbf{x}) + {}^1\mathbf{B}({}^1\mathbf{x})u^*({}^1\mathbf{x}), \quad {}^1\mathbf{x} \in \mathcal{Z}^* , \quad (5.100)$$

woraus sich die Nulldynamik

$${}^1\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^*({}^1\mathbf{x}) \quad , \quad {}^1\mathbf{x} \in \mathcal{Z}^* \quad (5.101)$$

durch

$$\begin{aligned} {}^1\dot{x}_1(t) &= 0 \\ {}^1\dot{x}_2(t) &= 0 \\ {}^1\dot{x}_3(t) &= 0 & {}^1\mathbf{x} \in \{ {}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid & {}^1x_1 = 0, \quad {}^1x_2 = 0, \quad {}^1x_3 = 0, \\ {}^1\dot{x}_4(t) &= 0 & & {}^1x_4 = 0, \quad {}^1x_5 = 0, \quad {}^1x_6 = 1 \} \\ {}^1\dot{x}_5(t) &= 0 \\ {}^1\dot{x}_6(t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.102)$$

ergibt. Die Gegenüberstellung und Interpretation der gefundenen Ergebnisse erfolgt im nächsten Abschnitt.

□

6 Ergebnisanalyse

Im Mittelpunkt dieses Abschnitts steht die Gegenüberstellung der mit unterschiedlichen mathematischen Ansätzen berechneten Nulldynamiken sowie der Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit den Messungen am Versuchsträger.

6.1 Gegenüberstellung der Nulldynamiken

Der Algorithmus von Isidori (1995) liefert als Nulldynamik des inversen Pendels

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_4 \mid x_3 = 0, x_4 = 0\}, \quad (6.1)$$

welche in den ersten vier Komponenten mit der Nulldynamik des differentialalgebraischen Nulldynamikalgorithmus für rationale Systeme

$$\begin{bmatrix} {}^1\dot{x}_1(t) \\ {}^1\dot{x}_2(t) \\ {}^1\dot{x}_3(t) \\ {}^1\dot{x}_4(t) \\ {}^1\dot{x}_5(t) \\ {}^1\dot{x}_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1x_2(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad {}^1\mathbf{x} \in \{{}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid {}^1x_3 = 0, {}^1x_4 = 0, {}^1x_5 = 0, {}^1x_6 = 1\} \quad (6.2)$$

übereinstimmt. Die zusätzlichen Systemzustände des Ersatzsystems sind stabil. In beiden Fällen ist die Nulldynamik instabil. Diese Instabilität kommt zum Tragen, sobald eine Schlittengeschwindigkeit ungleich Null auftritt. Dann wächst die Schlittenposition (1x_1) linear über alle Grenzen, was sich auch, wie im nächsten Unterabschnitt gezeigt, am Versuchsträger validieren läßt. Die auf unterschiedlichen mathematischen Theorien beruhenden Nulldynamikalgorithmen prognostizieren dasselbe instabile dynamische Verhalten. In dem Systemausgang lediglich den Pendelwinkel zu erfassen, ist somit nicht sinnvoll. Durch eine Erweiterung des Systemausgangs um den Zustand der Schlittenposition ergibt sich eine andere Nulldynamik. Allerdings ist es nicht möglich, diese mit dem Algorithmus von Isidori (1995) zu berechnen. Der Nulldynamikalgorithmus von Polzer (1999a) liefert für den erweiterten Systemausgang die Nulldynamik

$$\begin{bmatrix} {}^1\dot{x}_1(t) \\ {}^1\dot{x}_2(t) \\ {}^1\dot{x}_3(t) \\ {}^1\dot{x}_4(t) \\ {}^1\dot{x}_5(t) \\ {}^1\dot{x}_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad {}^1\mathbf{x} \in \{{}^1\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid {}^1x_1 = 0, {}^1x_2 = 0, {}^1x_3 = 0, \\ {}^1x_4 = 0, {}^1x_5 = 0, {}^1x_6 = 1\}. \quad (6.3)$$

Diese Nulldynamik ist stabil, und eine wichtige Voraussetzung für die Anwendung vieler Regelungskonzepte ist somit erfüllt. Basierend auf dem erweiterten Systemausgang

ist die erfolgreiche Regelung des inversen Pendels mit den unterschiedlichsten Regelungskonzepten möglich. Der nächste Unterabschnitt stellt die Validierung der theoretischen Ergebnisse dar.

6.2 Messungen am Versuchsträger

Zur Messung der „real existierenden Nulldynamik“ des inversen Pendels wird, wie in Bild 6.1 dargestellt, lediglich der Pendelwinkel mit einem PID_{T_1} -Regler geregelt. Entsprechend dem Zustandsmodell (3.1) findet die Schlittenposition im Regelungskonzept keine Berücksichtigung. Ausgehend von der oberen instabilen Ruhelage (Pendelwinkel = 0° und Schlittenposition = 0 cm) stellt sich das über die Nulldynamik vorhergesagte Verhalten, nämlich eine instabile Schlittenposition, die linear über alle Grenzen wächst, in kürzester Zeit ein (vgl. Bild 6.2). Die kurze Zeitspanne der Messung liegt in dem begrenzten Verfahrensweg, der für den Pendelschlitten zur Verfügung steht, begründet (vgl. Bild 3.1(a)).

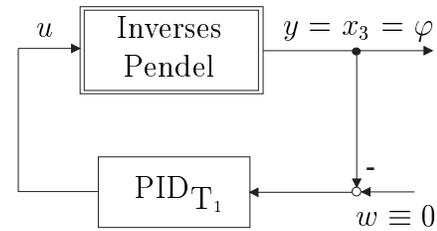


Bild 6.1: Reglerstruktur bei der Messung

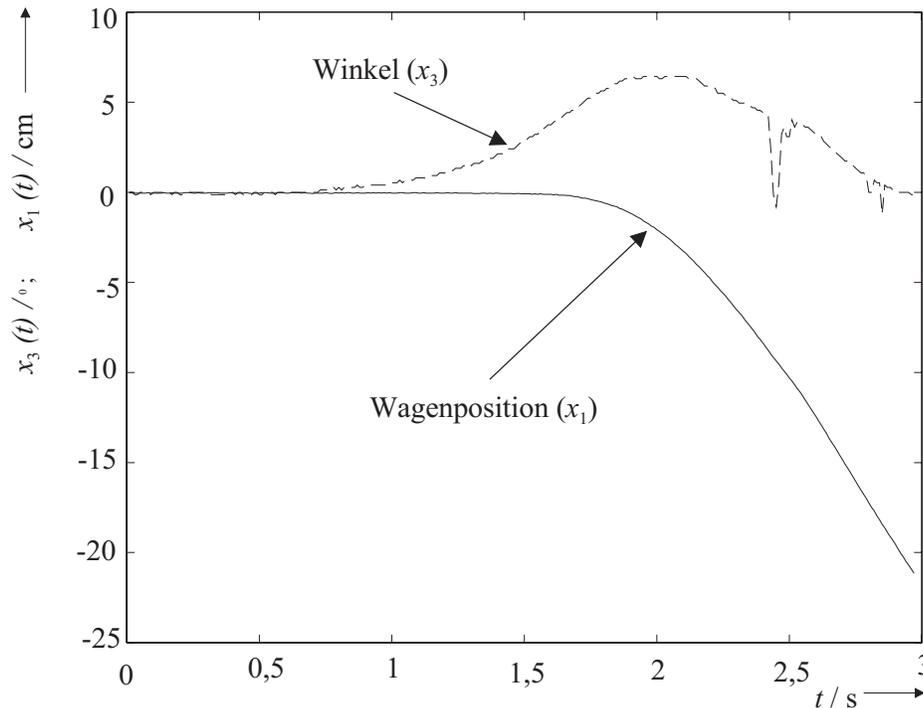


Bild 6.2: Messung am inversen Pendel; Start in der instabilen Ruhelage

Mit einer Anfangsauslenkung (vgl. Bild 6.3) des Pendels stellt sich das instabile Verhalten der Wagenposition sofort ein, wie im Meßplot 6.4 zu sehen ist. Denn die Regelung greift unmittelbar ein, um den Winkelfehler auszuregeln. Dazu muß der Schlitten bewegt werden, womit die Schlittengeschwindigkeit $x_2 \neq 0$ ist. Die Null-dynamikanalyse hat gerade für diesen Fall ($x_2 \neq 0$) eine linear anwachsende Schlittenposition vorhergesagt, was in dem Bild 6.4 sehr gut zu erkennen ist. Das instabile dynamische Verhalten der realen Anlage stimmt also mit dem über die Nulldynamik vorhergesagte Verhalten überein. Aufgrund dieser Instabilität ist es sinnvoll, den Systemausgang um die "Schlittenposition" zu erweitern. Die Nulldynamik des erwei-



Bild 6.3: Start der Messung mit Auslenkung

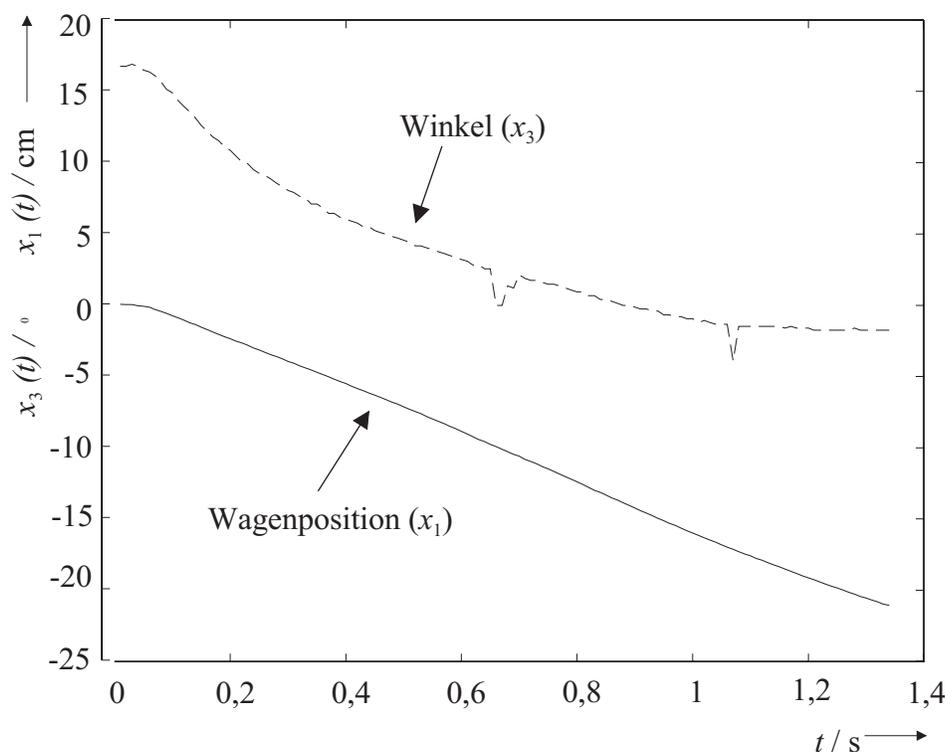


Bild 6.4: Messung am inversen Pendel; Start mit $\varphi = 17^\circ$ Anfangsauslenkung

terten Systems ist stabil. Das erweiterte System läßt sich z. B. durch einen Kaskadenregelkreis (innerer Regelkreis für den Winkel, äußerer Regelkreis für die Schlittenposition) gut stabilisieren. Theorie und Praxis stimmen also auch hier überein.

7 Zusammenfassung

In diesem Bericht geht es um die Ermittlung der Nulldynamik mit unterschiedlichen mathematischen Ansätzen. Die Berechnung der Nulldynamik erfolgt mit dem differentialgeometrischen Algorithmus von Isidori (1995) und dem differentialalgebraischen Nulldynamikalgorithmus von Polzer (1999a). Gegenstand der Analyse ist ein inverses Pendel. Wird bei dem inversen Pendel lediglich eine meßbare Ausgangsgröße (der Pendelwinkel) herangezogen, liefern die Nulldynamikalgorithmen die gleiche instabile Nulldynamik. Diese Instabilität besteht aus einer über alle Grenzen wachsenden Schlittenposition, d. h. stellt ein Pendelwinkel identisch Null das einzige Regelungsziel dar, fährt der Schlitten mit senkrechtem Pendel in den Anschlag der Anlage. Dieses dynamische Verhalten weist auch der Versuchsträger auf, wie Messungen belegen. Theorie und Praxis stimmen hier also überein.

Durch die Erweiterung des Systemausgangs ergibt sich eine neue Nulldynamik und somit ggf. auch ein anderes Stabilitätsverhalten. Eine solche Erweiterung ist normalerweise mit dem Einbau weiterer Meßgeräte verbunden. Der im Fachgebiet vorhandene Versuchsträger bietet die Möglichkeit, neben dem Pendelwinkel auch die Schlittenposition zu messen. Daher besteht der erweiterte Systemausgang aus dem Pendelwinkel und der Schlittenposition. Dieses erweiterte System läßt sich nicht mit dem Algorithmus von Isidori (1995) analysieren, da die Anzahl der Eingänge (einer) nicht mit der Anzahl der Ausgänge (zwei) übereinstimmt. Aus dem differentialalgebraischen Algorithmus von Polzer (1999a) ergibt sich eine stabile Nulldynamik, somit erfüllt das erweiterte System eine wichtige Voraussetzung für die Anwendung vieler Regelungskonzepte. In der Praxis kann man das inverse Pendel mit erweitertem Ausgang durch diverse Regelungskonzepte, z. B. durch einen Kaskadenregelkreis, stabilisieren. Theoretische Vorhersage und praktische Erfahrung stimmen also wieder überein.

8 Literaturverzeichnis

- Byrnes, C. I.** und **A. Isidori.** 1989. New results and examples in nonlinear feedback stabilization. *Systems & Control Letters* 12. 437–442.
- Fliess, M.** 1987. Nonlinear control theory and differential algebra: Some illustrative examples. *Proc. 10th IFAC World Congress*. München. 114–118.
- Fliess, M.** 1988. Nonlinear control theory and differential algebra. *Modeling and Adaptive Control*, hg. von C. I. Byrnes und A. Kurszanski. 135 – 145. Berlin: Springer.
- Fliess, M.** 1989. Automatique et corps différentiels. *Forum Mathematik* 1. 227–238.
- Fortell, H.** 1995. *Algebraic Approaches to Normal Forms and Zero Dynamics*. Dissertation. Linköping-Universität, Schweden.
- Isidori, A.** 1995. *Nonlinear Control Systems*. 3. Auflage. Berlin: Springer.
- Meyberg, K.** 1976. *Algebra Teil 1*. München: Carl Hanser.
- Meyberg, K.** 1980. *Algebra Teil 2*. 2. Auflage. München: Carl Hanser.
- Polzer, J.** 1998. *Erweiterte Anwendbarkeit differentialalgebraischer Analysemethoden durch die Nutzung von Ersatzsystemen*. Forschungsbericht 10/98. MSRT. Universität Duisburg.
- Polzer, J.** 1999a. *Differentialalgebraischer Nulldynamikalgorithmus für Systeme mit rationalen Funktionen*. Forschungsbericht 02/99. MSRT. Universität Duisburg.
- Polzer, J.** 1999b. *Differentialgeometrische Berechnung der Nulldynamik eines inversen Pendels*. Forschungsbericht 06/99. MSRT. Universität Duisburg.
- Ritt, J. F.** 1950. *Differential Algebra*. New York/USA: Amer. Math. Soc.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme – Systemtheoretische Grundlagen*. München: Oldenbourg.
- Schwarz, H.** 1999. *Einführung in die Systemtheorie nichtlinearer Regelungen*. Aachen: Shaker.
- Senger, M.** und **B. Riege.** 1997. *Zur Berechnung der Nulldynamik mit algebraischen Methoden*. Forschungsbericht 14/97. MSRT. Universität Duisburg.
- Sossna, P.** 1990. *Entwurf und Erprobung einer digitalen Zustandsregelung für ein inverses Pendel*. Studienarbeit. MSRT. Universität Duisburg.
- Stöcker, H.** 1993. *Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren*. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch.

-
- Wey, T.** 1992. *Einführung in die Differentialalgebra und ihre Anwendung auf nichtlineare Systeme*. Forschungsbericht 10/92. MSRT. Universität Duisburg.
- Wey, T.** 1996. *Ein graphentheoretischer Ansatz zur strukturellen Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme*. VDI Fortschritt-Berichte. Reihe 8. 556. Düsseldorf: VDI.
- Wey, T.** und **F. Svaricek**. 1995. Analyse und Synthese nichtlinearer Regelungssysteme mittels Differentialalgebra. *Automatisierungstechnik - at* 43(4). 163–173.

A Funktionsklassen und die Notation der Ausgangssignalableitung

Funktionsklassen

In der Arbeit werden glatte, analytische und rationale Funktionen verwendet:

Definition A.1: Glatte Funktionen Isidori (1995:S. 471)

- (i) Es sei A eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f wird **glatt** genannt, wenn alle partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung existieren und stetig sind.
- (ii) Es sei A wieder eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n und $\mathbf{g} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = [g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})]^T$. Die Funktion \mathbf{g} wird **glatt** genannt, wenn alle Funktionen $g_i, (i = 1, \dots, m)$ glatt sind. Die Menge aller glatten Funktionen wird mit C^∞ bezeichnet. \square

Definition A.2: Analytische Funktionen Isidori (1995:S. 471)

- (i) Die Teilmenge A der \mathbb{R}^n sei offen und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f wird **analytisch** genannt, wenn f eine glatte Funktion ist und es für jeden Punkt $\mathbf{x}_0 \in A$ eine Umgebung U derart gibt, daß die Taylorreihe von f für alle $\mathbf{x} \in U$ gegen f konvergiert.
- (ii) Es sei A wieder eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n und $\mathbf{g} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = [g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})]^T$. Die Funktion \mathbf{g} wird **analytisch** genannt, wenn alle Funktionen $g_i, (i = 1, \dots, m)$ analytisch sind. \square

Definition A.3: Rationale Funktionen Stöcker (1993:S. 106)

Funktionen, die sich durch endlich viele Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen in den unabhängigen Variablen \mathbf{x} beschreiben lassen, werden **rationale Funktionen** genannt. \square

Notation der Ausgangssignalableitung

In dem Nulldynamikalgorithmus werden die zeitlichen Ableitungen des Systemausgangs verwendet; hierbei existiert ein formales Problem: Der k -ten zeitlichen Ableitung in der klassischen Notation kann nicht angesehen werden, von welchen Größen sie abhängt. Natürlich hängt $\mathbf{y}^{(k)}(t)$ wie $\mathbf{y}(t)$ letztendlich nur von der Zeit ab, allerdings über die Funktionen $\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)$ bzw. deren zeitliche Ableitungen. Diese Abhängigkeiten in der Ausgangssignalableitung spielen in den Nulldynamikalgorithmen eine entscheidende Rolle. Daher wird eine Notation benötigt, die diese Zusammenhänge verdeutlicht.

Ausgehend von einem ALS

$$\begin{aligned} \Sigma_{ALS} : \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) \quad ; \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}(\mathbf{x}(t)) \quad ; \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n ; \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m ; \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

wird hier die folgende Schreibweise für die Ausgangssignalableitungen eingeführt:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{y}^{(1)}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{c}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= \frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} [\mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t)] \\ &=: \dot{\mathbf{c}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$=: \mathbf{c}^{(1)}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) . \quad (\text{A.3})$$

Mit dieser Schreibweise läßt sich die zweite zeitliche Ableitung $\ddot{\mathbf{y}}(t)$ durch

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{y}}(t) &= \frac{d}{dt}\mathbf{y}^{(1)}(t) = \frac{d}{dt}\dot{\mathbf{y}}(t) = \frac{d}{dt}\dot{\mathbf{c}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ &= \frac{\partial \dot{\mathbf{c}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{\partial \dot{\mathbf{c}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} \dot{\mathbf{u}}(t) \\ &= \frac{\partial \dot{\mathbf{c}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} [\mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t)] + \frac{\partial \dot{\mathbf{c}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} \dot{\mathbf{u}}(t) \\ &=: \ddot{\mathbf{c}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$=: \mathbf{c}^{(2)}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \quad (\text{A.5})$$

ausdrücken. Damit wird zugleich die Funktion $\ddot{\mathbf{c}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t))$ definiert. Generell werden die Funktionsargumente an den Stellen weggelassen, wo es der Übersichtlichkeit dient und keine Verwechslungen zu erwarten sind.

Die soeben eingeführte Schreibweise für die Ausgangssignalableitung kann iterativ fortgesetzt werden, und es folgt für die k -te Ausgangssignalableitung die Schreibweise

$$\mathbf{y}^{(k)} = \frac{d}{dt}\mathbf{y}^{(k-1)} = \frac{d}{dt}\mathbf{c}^{(k-1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k-2)}) \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial \mathbf{c}^{(k-1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k-2)})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \sum_{i=0}^{k-2} \frac{\partial \mathbf{c}^{(k-1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k-2)})}{\partial \mathbf{u}^{(i)}} \dot{\mathbf{u}}^{(i+1)} \\ &= \frac{\partial \mathbf{c}^{(k-1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k-2)})}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}] + \sum_{i=0}^{k-2} \frac{\partial \mathbf{c}^{(k-1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k-2)})}{\partial \mathbf{u}^{(i)}} \dot{\mathbf{u}}^{(i+1)} \\ &=: \mathbf{c}^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k-1)}) . \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

B Grundlegende Begriffe der Algebra

Grundlage für die differentialalgebraischen Nulldynamikalgorithmen bilden sowohl die Algebra als auch die Differentialalgebra. Aus beiden Gebieten werden jedoch nur relativ elementare Begriffe und Zusammenhänge verwendet. Es ist allerdings unerlässlich, die benötigten Begriffe einzuführen. Da die Differentialalgebra auf der Algebra aufbaut, werden in diesem Abschnitt zunächst einige Begriffe der Algebra definiert.

Definition B.1: (Meyberg 1980:S. 19) Ein Paar (H, \circ) , bestehend aus einer nichtleeren Menge H und einer assoziativen inneren Verknüpfung \circ auf H , heißt **Halbgruppe**.

□

Definition B.2: (Meyberg 1980:S. 26)

- (i) Ein Paar (G, \cdot) heißt eine **Gruppe**, wenn gilt:
- (G_1) : (G, \cdot) ist eine Halbgruppe,
 - (G_2) : in G gibt es ein neutrales Element e ,
 - (G_3) : zu jedem $a \in G$ gibt es ein $b \in G$ mit $ba = e$.
- (ii) Eine Gruppe (G, \cdot) heißt **abelsch** oder **kommutativ**, wenn $ab = ba \quad \forall a, b \in G$ gilt.

□

Definition B.3: (Meyberg 1980:S. 105) Ein Tripel $(R, +, \cdot)$, bestehend aus einer nichtleeren Menge R und inneren Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + & : R \times R \rightarrow R, \quad (x, y) \mapsto x + y, \quad (\text{Addition}) \text{ und} \\ \cdot & : R \times R \rightarrow R, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y, \quad (\text{Multiplikation}), \end{aligned}$$

heißt ein **Ring**, wenn gilt:

- (R_1) : $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
- (R_2) : (R, \cdot) ist eine Halbgruppe.
- (R_3) : Für alle $x, y, z \in R$ gelten die Distributivgesetze.

Hierbei stehen üblicherweise 0 für das neutrale Element bez. der Addition und 1 für das neutrale Element bez. der Multiplikation.

□

Definition B.4 (Fortell 1995:S. 74)

- (i) Ein **Körper** K ist ein kommutativer Ring mit Einselement $1 \neq 0$, in dem für alle $a \in K$ mit $a \neq 0$ ein $c \in K$ derart existiert, daß $a \cdot c = 1$ gilt.
- (ii) Als Körper mit **Charakteristik null** wird ein Körper bezeichnet, für den kein $p \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{i=1}^p v = 0, \quad \forall v \in K \tag{B.1}$$

existiert.

□

Definition B.5 (Meyberg 1976:S. 10) Eine nichtleere Teilmenge L eines Körpers K heißt **Unterkörper** von K , wenn L bezüglich der in K gegebenen Operationen selbst ein Körper ist. \square

Definition B.6 (Meyberg 1976:S. 12) Ist L ein Unterkörper des Körpers K , dann heißt K **Körpererweiterung** über L , und wir schreiben (K/L) . \square

Die mehrdimensionalen Polynome seien hier nicht wie in der Algebra sonst üblich eingeführt, sondern so wie bei Fortell (1995). Dieser Ansatz ist wesentlich anschaulicher und für die Nulldynamikuntersuchung völlig hinreichend.

Definition B.7 (Fortell 1995:S. 74) Ein **Monom** m in den Variablen x_1, \dots, x_n ist ein Produkt

$$m(x_1, \dots, x_n) := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n} \quad \text{mit } \alpha_i \in \mathbb{N}_0, i = \{1, \dots, n\}. \quad (\text{B.2})$$

\square

Definition B.8 (Fortell 1995:S. 74) Ein **Polynom** p in den Variablen x_1, \dots, x_n mit Koeffizienten aus einem Ring K ist eine endliche Linearkombination von Monomen:

$$p(x_1, \dots, x_n) := \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}. \quad (\text{B.3})$$

Dabei ist $a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \in K$ und $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ für $i = \{1, \dots, n\}$. \square

Definition B.9 Die Polynome in den Variablen x_1, \dots, x_n bilden über einem kommutativen Ring R mit Einselement ebenfalls einen Ring, welcher durch $R(x_1, \dots, x_n)$ gekennzeichnet wird. \square

Definition B.10 (Meyberg 1976:S. 15) Es sei K/L eine Körpererweiterung.

- (i) Ein Element $a \in K$ heißt **algebraisch** über L , wenn es ein von null verschiedenes Polynom $p \in K(x)$ gibt mit $p(a) = 0$.
- (ii) Ein Element $a \in K$ heißt **transzendent** über L , wenn es nicht algebraisch ist. \square

Definition B.11 (Fortell 1995:S. 75) Es seien $f_1, \dots, f_m \in K$ und K eine Körpererweiterung von L . Die Elemente f_i ($i = 1, \dots, m$) werden **algebraisch abhängig** über L genannt, wenn ein von null verschiedenes Polynom $p \in L(x_1, \dots, x_m)$ mit $p(f_1, \dots, f_m) = 0$ existiert. Ansonsten werden die Elemente f_i ($i = 1, \dots, m$) **algebraisch unabhängig** über L genannt. \square

Definition B.12 (Fortell 1995:S. 76) Es sei K/L eine Körpererweiterung und $U \subset K$ derart gegeben, daß alle Elemente von U über L algebraisch unabhängig sind. Die maximale Anzahl an Elementen, die U unter dieser Bedingung enthalten kann, wird **Transzendenzgrad** von K/L genannt (kurz: **Trg** K/L). Besitzt U die maximal mögliche Anzahl an Elementen, so wird U **Transzendenzbasis** von K/L genannt. Ist $\text{Trg } K/L$ endlich, so wird K/L endlich erzeugt genannt, und falls $\text{Trg } K/L = 0$ ist, so nennt man K/L algebraische Körpererweiterung. \square

Satz B.13 (Meyberg 1976:S. 55) Für jede Körpererweiterung K/L existiert eine Transzendenzbasis B . \square

Satz B.14 (Meyberg 1976:S. 55) Existiert in einer Körpererweiterung K/L eine endliche Transzendenzbasis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, dann hat jede andere Transzendenzbasis ebenfalls n Elemente. \square

Nachdem nun die notwendigsten Begriffe der Algebra eingeführt sind, werden die erforderlichen Elemente der Differentialalgebra erläutert.

C Grundlegende Begriffe der Differentialalgebra

Die Differentialalgebra wurde in den fünfziger Jahren durch den Mathematiker Ritt (1950) mit der Intention begründet, ein Werkzeug zu schaffen, welches die gleiche Rolle für Differentialgleichungen spielt wie die Algebra für algebraische Gleichungen. Mitte der achtziger Jahre wurde von Fliess die Bedeutung der Differentialalgebra für die nichtlineare Kontrolltheorie entdeckt. Seitdem haben sich eine Reihe von Wissenschaftlern mit dieser Thematik beschäftigt, so daß mittlerweile ein umfassender Teil der systemtheoretischen Zusammenhänge bei nichtlinearen Systemen mit Hilfe der Differentialalgebra beschreibbar ist. Für die Nulldynamikalgorithmien werden jedoch nur elementare Begriffe und Zusammenhänge der Differentialalgebra benötigt. Eine ausführlichere Einführung in die Differentialalgebra findet sich z. B. bei Ritt (1950), Fliess (1988), Wey (1992) und Wey und Svaricek (1995). Die Differentialalgebra geht bei der Systembeschreibung von Ein-/Ausgangsdifferentialgleichungen aus, welche rational bez. ihrer Argumente sein müssen. Aus diesen Ein-/Ausgangsdifferentialgleichungen kann ein Zustandsmodell gebildet werden. Bei der physikalischen Modellbildung geht man normalerweise in der umgekehrten Reihenfolge vor. Die notwendigerweise rationalen Ein-/Ausgangsdifferentialgleichungen stellen für die Modelle real existierender Anlagen keine Einschränkung dar, da sie ggf. in ein entsprechendes Modell transformierbar sind (Fliess 1987).

Definition C.1 (Fliess 1987:S. 114) Ein *differentieller Ring* R ist ein kommutativer Ring mit Einselement $1 \neq 0$ und einer Ableitung $\frac{d}{dt} : R \rightarrow R, a \mapsto \frac{da}{dt} = \dot{a}$, für die gilt:

$$\frac{d}{dt}(a + b) = \dot{a} + \dot{b} \in R, \quad \forall a, b \in R \text{ und} \tag{C.1}$$

$$\frac{d}{dt}(ab) = \dot{a}b + a\dot{b} \in R, \quad \forall a, b \in R .$$

□

Definition C.2 (Fliess 1987:S. 114) Ein *differentieller Körper* K ist ein Körper mit einer Ableitung $\frac{d}{dt} : K \rightarrow K, a \mapsto \frac{da}{dt} = \dot{a}$, für die gilt:

$$\frac{d}{dt}(a + b) = \dot{a} + \dot{b} \in K, \quad \forall a, b \in K \text{ und} \tag{C.2}$$

$$\frac{d}{dt}(ab) = \dot{a}b + a\dot{b} \in K, \quad \forall a, b \in K .$$

□

Definition C.3 (Fortell 1995:S. 85) Ist der differentielle Körper L eine Teilmenge des differentiellen Körpers K , so wird K *differentielle Körpererweiterung* von L genannt und mit K/L bezeichnet. □

Definition C.4 (Fortell 1995:S. 85) Es sei ein differentieller Körper K gegeben. Ein **differentielles Polynom** in x mit Koeffizienten aus K ist ein Polynom, das von x, \dot{x}, \dots abhängt. Die Menge aller differentiellen Polynome in x wird mit $K\{x\}$ bezeichnet. Analog hängt ein differentielles Polynom in x_1, \dots, x_m auch von allen zeitlichen Ableitungen der x_i ($i = 1, \dots, m$) ab. \square

Definition C.5 (Fortell 1995:S. 85) Es sei K/L eine differentielle Körpererweiterung. $v \in K$ wird **differentiell algebraisch** über L genannt, wenn ein differentielles Polynom $P \in L\{x\}$ ($\neq 0$) mit der folgenden Form existiert:

$$P(v, \dot{v}, \dots, v^{(i)}) = 0, \quad i \in \mathbb{N}_0. \quad (\text{C.3})$$

Ist v nicht differentiell algebraisch über L , so wird v **differentiell transzendent über L** genannt. \square

Definition C.6 (Fortell 1995:S. 86) Seien $f_1, \dots, f_m \in K$ und K/L eine differentielle Körpererweiterung. Die Elemente f_1, \dots, f_m werden **differentiell algebraisch abhängig** über L genannt, wenn ein von null verschiedenes differentielles Polynom $P \in L\{x_1, \dots, x_m\}$ mit

$$P(f_1, \dot{f}_1, \dots, f_1^{(i_1)}, \dots, f_m, \dot{f}_m, \dots, f_m^{(i_m)}) = 0 \quad i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{C.4})$$

existiert. Ansonsten werden die Elemente f_1, \dots, f_m **differentiell algebraisch unabhängig** über L genannt. \square

Definition C.7 (Fortell 1995:S. 86) Es sei K/L eine differentielle Körpererweiterung und $U \subset K$ derart gegeben, daß alle Elemente von U über L differentiell algebraisch unabhängig sind. Die maximale Anzahl an Elementen, die U unter diesen Bedingungen enthalten kann, wird **differentieller Transzendenzgrad von K/L** genannt (**diff.Trg K/L**). Besitzt U die maximal mögliche Anzahl an Elementen, so wird U **differentielle Transzendenzbasis** von K/L genannt. Ist **diff.Trg K/L** endlich, so wird K/L endlich erzeugt genannt. Gilt **diff.Trg $K/L = 0$** , so nennt man K/L differentiel algebraische Körpererweiterung. \square

Definition C.8 (Fliess 1988:S. 138) Als **differentieller Rang ρ^*** wird der differentielle Transzendenzgrad der differentiellen Körpererweiterung $K\langle \mathbf{y} \rangle / K$ bezeichnet. \square

Bemerkung C.9 Der differentielle Rang ρ^* entspricht gerade der Anzahl der voneinander unabhängigen Ausgangsgrößen y_i ($i = 1, \dots, p$). \square

Satz C.10 (Wey und Svaricek 1995:S. 166) Für den differentielle Rang ρ^* gilt:

$$\rho^* \leq \min(m, p). \quad (\text{C.5})$$

\square

Satz C.11 (Fliess 1988:S. 138) Für lineare zeitinvariante Systeme entspricht der differentielle Rang dem Rang der Übertragungsmatrix. \square

Definition C.12 (Fliess 1989, Wey 1996:S. 14) Ein *nichtlineares Ein-/Ausgangssystem* Σ entspricht einer differentiellen Körpererweiterung $K\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle / K\langle \mathbf{u} \rangle$, die differentiell algebraisch ist. \square

Satz C.13 (Fliess 1988:S. 141) Die minimale Dimension einer Zustandssystembeschreibung n_{min} von einem nichtlinearen Ein-/Ausgangssystem entspricht dem (nichtdifferentiellen) Transzendenzgrad der Körpererweiterung $K\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle / K\langle \mathbf{u} \rangle$.

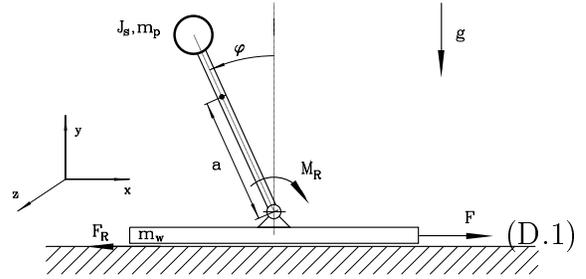
$$n_{min} = \text{Trg}.K\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle / K\langle \mathbf{u} \rangle . \quad (\text{C.6})$$

\square

D Modellbildung des inversen Pendels

Die Bewegungsgleichungen des Wagens mit dem Pendel lassen sich über die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art herleiten. Eine ausführliche Beschreibung dieses Vorgehensweise findet sich u. a. in Sossna (1990).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1, \dots, n \quad ,$$



mit

- n : Anzahl der Freiheitsgrade,
 - T : kinetische Energie des mechanischen Systemanteils,
 - q_j : verallgemeinerte Koordinate und
 - Q_j : verallgemeinerte Kraft bezüglich dieser Koordinate,
- für die gilt:

Bild D.1: Schematischer Versuchsaufbau

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} . \quad (\text{D.2})$$

Dabei ist N die Anzahl der am System angreifenden äußeren Kräfte.

Die kinetische Energie ergibt sich zu

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - m_P a \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 \quad (\text{D.3})$$

mit

$$\begin{aligned} m &= m_w + m_P , \\ J &= m_P a^2 + J_s . \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Insgesamt folgen aus den Lagrangeschen Gleichungen (D.1) die gesuchten Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m \ddot{x}(t) - m_P a (\ddot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) - \dot{\varphi}^2(t) \sin \varphi(t)) &= F(t) - F_R(\dot{x}(t)) , \\ J \ddot{\varphi}(t) - m_P a (\ddot{x}(t) \cos \varphi(t) + g \sin \varphi(t)) &= -M_R(\dot{\varphi}(t)) \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

mit den Konstanten

- $m = m_w + m_P$: gesamte bewegte Masse,
- m_P : Masse des Pendels,
- a : Abstand zwischen Dreh- und Schwerpunkt des Pendels,
- J : Massenträgheitsmoment bezüglich des Drehpunktes sowie
- g : Erdbeschleunigung

und den geschwindigkeitsabhängigen Größen Reibkraft $F_R(\dot{x}(t))$ und Reibmoment $M_R(\dot{\varphi}(t))$.

Die eingehende Kraft $F(t)$ des Seilzuges läßt sich über die Differentialgleichung des Elektromotors

$$F(t) = \frac{K_1}{R_a r_0} u_a(t) - \frac{K_1 K_2}{R_a r_0^2} \dot{x}(t) \quad (\text{D.6})$$

berechnen.

Das Differentialgleichungssystem (D.1) ist mit den Zuständen

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) && \text{Schlittenposition,} \\ x_2(t) &= \dot{x}(t) && \text{Schlittengeschwindigkeit,} \\ x_3(t) &= \varphi(t) && \text{Pendelwinkel und} \\ x_4(t) &= \dot{\varphi}(t) && \text{Winkelgeschwindigkeit} \end{aligned}$$

in das äquivalente System der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t))u(t), & \mathbf{x}(t) &\in \mathbb{R}^4, u(t) \in \mathbb{R}, \\ y(t) &= c(\mathbf{x}(t)), & y(t) &\in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

transformierbar. Die Funktionen $\mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}(t))$ und $c(\mathbf{x}(t))$ in D.7 lauten:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{\frac{J K_1 K_2 x_2}{R_a r_0^2 m_P^2 a^2} - \frac{J F_R(x_2)}{m_P^2 a^2} - \frac{f_R x_4 \cos(x_3)}{m_P a} + g \cos(x_3) \sin(x_3) - \frac{J x_4^2 \sin(x_3)}{m_P a}}{\frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2} \\ x_4 \\ \frac{\frac{f_R x_4}{m_P^2 a^2} - \frac{K_1 K_2 x_2 \cos(x_3)}{R_a r_0^2 m_P a} - \frac{\cos(x_3) F_R(x_2)}{m_P a} - x_4^2 \cos(x_3) \sin(x_3) + \frac{g \sin(x_3)}{m_P a}}{\frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{J K_1}{R_a r_0 m_P^2 a^2 \left(\frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2 \right)} \\ 0 \\ \frac{K_1 \cos(x_3)}{R_a r_0 m_P a \left(\frac{J}{m_P^2 a^2} - \cos(x_3)^2 \right)} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (\text{D.8})$$

$$c(\mathbf{x}(t)) := x_3(t).$$