

Zur differentialgeometrischen Störgrößenentkopplung nichtlinearer Systeme

Markus Bröcker

Forschungsbericht Nr. 3/2000

Mess-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Dieser Forschungsbericht stellt einen für die Regelungstechnik bedeutenden Aspekt – die Störgrößenentkopplung – für nichtlineare Systeme vor. Hierfür dient als mathematische Grundlage die Differentialgeometrie. Die differentialgeometrische Methodik liefert zum Einen die Aussage über die Störgrößenentkoppelbarkeit quadratischer Ein- und Mehrgrößensysteme, und zum Anderen die Berechnung eines störentkoppelnden Kompensatorgesetzes. Beispiele verdeutlichen die theoretische Vorgehensweise. Abschließend wird die differentialgeometrische Untersuchung der Störgrößenentkoppelbarkeit auf einen Differentialzylinder angewandt. Das mathematische Systemmodell des Zylinders lässt sich dabei zu einem analytischen System mit linear eingehender Steuerung vereinfachen.

Gerhard-Mercator-Universität Duisburg
Mess-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	II
1 Einleitung	1
2 Störgrößenentkopplung von SISO-Systemen	2
2.1 Exakte Linearisierung	2
2.2 Störgrößenentkopplung	6
3 Störgrößenentkopplung von MIMO-Systemen	10
4 Anwendungsbeispiel: Differentialzylinder	16
5 Zusammenfassung und Ausblick	19
6 Literatur	20
Anhang	21
A Definition der Lie-Ableitung	21
B Systemmodell für den Differentialzylinder	22

Formelzeichen und Bezeichnungen

Abkürzungen

ALS	Analytisches System mit linear eingehender Steuerung
CAS	Computer Algebra System
MIMO	Multiple Input – Multiple Output
NSAS	Nonlinear Systems Analysis and Synthesis
SISO	Single Input – Single Output
Σ	System

Logische Verknüpfungen

\forall	Allquantor
\in	Element von

Matrizen, Vektoren, Vektorräume

$\mathbf{A}(\mathbf{x}(t))$	Entkopplungsmatrix eines ALS
$\mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$	Vektor des Zustandsregelgesetzes der nichtlinearen Rückführung (ALS)
$\mathbf{b}(\mathbf{x}(t))$	Vektor der Vorkompensation der Eingänge der statischen nichtlinearen Rückführung (ALS)
$\mathbf{c}(\mathbf{x}(t))$	Vektor der Vorkompensation der Störgröße der nichtlinearen Rückführung (ALS)
$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$	Driftterm eines ALS
$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t))$	Eingangsvektor eines SISO-ALS
$\mathbf{g}_i(\mathbf{x}(t))$	Eingangsvektor eines MIMO-ALS bezüglich des Eingangs u_i
$\mathbf{G}(\mathbf{x}(t))$	Eingangsmatrix eines MIMO-ALS
$\mathbf{h}(\mathbf{x}(t))$	Ausgangsvektor eines MIMO-ALS
$\mathbf{p}(\mathbf{x}(t))$	Eingangsvektor der Störgröße eines ALS
r	Relativer (Vektor-) Grad
r_s	Relativer (Vektor-) Grad der Störgröße
$\mathbf{u}(t)$	Vektor der Eingangsgrößen
$\mathbf{v}(t)$	Vektor der neuen Eingangsgrößen für den Kompensator
$\mathbf{x}(t)$	Zustandsvektor
\mathbf{x}_0	Vektor der Anfangsbedingungen
$\mathbf{y}(t)$	Vektor der Ausgangsgrößen
$\mathbf{z}(t)$	Zustandsvektor nach der Zustandstransformation bei der exakten Linearisierung
α	Parametervektor der linearen Zustandsrückführung der exakten Linearisierung

Mengen

\mathbb{N} Menge der natürlichen Zahlen

Indizes

0 Arbeitspunkt, Gleichgewichtslage
 A, B Anschluß der Zylinderkammer A, B
 F Führung
 Fl Fluid
 ges Gesamt
 i, j, k, l Laufindizes
 max Maximal
 N Nenngröße
 S Störung
 Zyl Zylinder

Operatoren und Funktionen

∂ partielle Ableitung
 det Determinante einer Matrix
 $\exp(\cdot)$ Exponentialfunktion
 $G(s)$ Zeitkontinuierliche Übertragungsfunktion
 $\mathbf{H}(s)$ Zeitkontinuierliche Übertragungsmatrix
 $L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x})$ Lie-Ableitung entlang des Vektorfeldes \mathbf{f}
 $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x})$ Lie-Ableitung entlang des Vektorfeldes \mathbf{f} und danach entlang \mathbf{g}
 $L_{\mathbf{f}}^k\lambda(\mathbf{x})$ k -fache Lie-Ableitung entlang des Vektorfeldes \mathbf{f}
 $\log(\cdot)$ Logarithmusfunktion
 $\min(\cdot)$ Minimumoperator
 rang Rang einer Matrix
 $\text{sign}(\cdot)$ Signumfunktion: $\text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & , \text{für } x > 0, \\ 0 & , \text{für } x = 0, \\ -1 & , \text{für } x < 0. \end{cases}$
 $|\cdot|$ Betrag

Skalare Größen

A_K [m²] Kolbenfläche des Differentialzylinders
 A_R [m²] Kolbenringfläche des Zylinders
 $a(\mathbf{x}(t))$ Zustandsregelgesetz der statischen nichtlinearen Zustandsrückführung
 B_V [m³/(s $\sqrt{\text{Pa}}$)] Durchflussbeiwert

$b(\mathbf{x}(t))$		Vorkompensation des Eingangs der statischen nichtlinearen Zustandsrückführung
c_H	[m/s]	Exponentialkoeffizient der Haftreibung
$c(\mathbf{x}(t))$		Vorkompensation der Störgröße der statischen nichtlinearen Zustandsrückführung
D_V	[-]	Dämpfung des Ventils
E'_{FI}	[Pa]	Ersatzkompressionsmodul des Fluids
E_{FI}	[Pa]	Elastizitätsmodul des Fluids
F_C	[N]	Coulomb'sche Reibkraft
F_H	[N]	Haftreibungskraft
$F_S(t)$	[N]	Störkraft
F_{Offset}	[N]	Offsetkraft der Reibkraft
F_R	[N]	Reibkraft
f_V	[Ns/m]	Koeffizient der viskosen Reibung
H	[m]	Hub des Zylinders
$h(\mathbf{x}(t))$		Ausgangsfunktion eines SISO-ALS
K_V	[-]	Ventilverstärkung
$m_{ges}(t)$	[kg]	Gesamte beschleunigte Masse
m_{ges}^*	[kg]	Masse des Kolbens, sowie der Kolbenstangen
$p_A(t), p_B(t)$	[Pa]	Druck am Arbeitsanschluss A bzw. B
p_{max}	[Pa]	Maximaler Betriebsdruck
p_T	[Pa]	Tankdruck
p_0	[Pa]	Versorgungsdruck
$Q_A(t), Q_B(t)$	[m ³ /s]	Volumenstrom am Anschluss A bzw. B des Zylinders
Q_N	[m ³ /s]	Nennvolumenstrom des Ventils
r		Relativer Grad
r_S		Relativer Grad der Störgröße
r_i		Elemente des relativen (Vektor-) Grades
$r_{S,i}$		Elemente des relativen (Vektor-) Grades der Störgröße
s		Komplexe Variable der zeitkontinuierlichen Übertragungsfunktion
$s(t)$	[-]	Störgröße (allgemein)
t	[s]	Zeit
$U(t)$	[-]	Normierte Ventilansteuerspannung
u_{max}	[V]	Maximale Ventilansteuerspannung
$u(t)$	[-]	Stellgröße (allgemein)
$u(t)$	[V]	Ventilansteuerspannung
V_{LA}	[m ³]	Leitungs- und Totvolumen (A)
V_{LB}	[m ³]	Leitungs- und Totvolumen (B)
$v(t)$	[-]	Neue Eingangsgröße (allgemein)
$w(t)$	[-]	Führungsgröße (allgemein)
$x_i(t)$	[-]	Zustandsvariable

$y(t)$	[-]	Regelgröße (allgemein)
$y_{\text{Ventil}}(t)$	[m]	Position des Steuerkolbens
$y_{\text{Zyl}}(t)$	[m]	Position des Zylinderkolbens
$\dot{y}_{\text{Zyl}}(t)$	[m/s]	Geschwindigkeit des Zylinderkolbens
$\ddot{y}_{\text{Zyl}}(t)$	[m/s ²]	Beschleunigung des Zylinderkolbens
y_{max}	[m]	Nennhub des Steuerkolbens (Ventil)
α_i	[-]	Elemente des Parametervektors α der exakten SISO-Linearisierung
α_j^i	[-]	Parameter des linearen Regelgesetzes der exakten MIMO-Linearisierung
Δp_{N}	[Pa]	Nenndruckabfall am Ventil
ρ_{Fl}	[kg/m ³]	Fluiddichte
φ	[-]	Flächenverhältnis
ω_{V}	[1/s]	Eigenfrequenz des Ventils

1 Einleitung

In der Regelungstechnik sind in den vergangenen Jahren auf Grund der hohen Praxisrelevanz verschiedenste Lösungsansätze zur *Störgrößenentkopplung nichtlinearer Systeme* entstanden. Unter der Störgrößenentkopplung ist das Ziel zu verstehen, mit Hilfe eines Regelgesetzes die Systemausgänge unabhängig von den Störgrößen zu machen. Die Lösungsansätze beruhen dabei auf differierenden mathematischen Verfahren. Grundsätzlich sind zwei Kategorien unterscheidbar – der modellfreie Soft-Computing-Ansatz (Fuzzy Control, Neuronale Netze) und die auf mathematischen Modellen basierenden Ansätze (Differentialgeometrie, Differentialalgebra).

Gegenstand der Untersuchungen in diesem Forschungsbericht zur Störgrößenentkoppelbarkeit und Auslegung eines nichtlinearen störentkoppelnden Regelgesetzes ist der differentialgeometrische Ansatz (Nijmeijer und van der Schaft 1990, Isidori 1995, Schwarz 1999). In der *Differentialgeometrie* sind eine Vielzahl an Ideen und Methoden aus dem Bereich der linearen Systemtheorie übernommen und auf nichtlineare Systeme übertragen worden. Das Grundprinzip der Störgrößenentkopplung baut auf dem Prinzip der *exakten Linearisierung* auf. Hierbei überführt ein nichtlineares Regelgesetz das nichtlineare System in ein lineares Ersatzsystem. Dieses lineare Ersatzsystem ist dann mit Hilfe von konventionellen linearen Methoden der Systemtheorie behandelbar.

In diesem Bericht findet die Anwendung auf ein für die Praxis wichtiges technisches System – dem System Differentialzylinder-Proportionalventil – statt. An diesem System wird mit Hilfe der hinlänglich bekannten differentialgeometrischen Methodik erstmalig deutlich, dass der Differentialzylinder unabhängig von der Messung der Störkraft, die auf den Zylinder wirkt, nicht störgrößenentkoppelbar ist. Als Basis für diese Aussage dient ein nichtlineares mathematisches Systemmodell, welches kein analytisches System ist. Eine neuartige ALS-Modifikation liefert jedoch aus dem bekannten Modell ein ALS. Für dieses ALS ist die Aussage, dass die Störgröße nicht entkoppelbar ist, nachweisbar.

Der Forschungsbericht unterteilt sich im Einzelnen wie folgt: Abschnitt 2 stellt die Grundlagen sowie wichtige Systemkenngrößen der Differentialgeometrie für Eingrößensysteme (SISO-Systeme) vor. Da die Störgrößenentkopplung auf dem Prinzip der exakten Linearisierung basiert, sind beide Sachverhalte in Abschnitt 2 unterteilt. In Abschnitt 3 erfolgt die Erweiterung der Störgrößenentkopplung auf quadratische Mehrgrößensysteme (MIMO-Systeme). Beispiele verdeutlichen in Abschnitt 2 und Abschnitt 3 die Vorgehensweise. Ein Differentialzylinder dient als Anwendungsbeispiel in Abschnitt 4 für die differentialgeometrische Methodik zur Untersuchung der Störgrößenentkoppelbarkeit. Hierfür existiert ein mathematisches Modell, das in ein analytisches Modell überführt werden kann.

Eine Zusammenfassung der differentialgeometrischen Störgrößenentkopplung und ein Ausblick auf weitere Untersuchungsmöglichkeiten bilden in Abschnitt 5 den Abschluss dieses Berichtes.

2 Störgrößenentkopplung von SISO-Systemen

Unter dem Begriff der Störgrößenentkopplung ist das Ziel zu verstehen, dass mit Hilfe eines Regelgesetzes (dem Kompensator) die Systemausgänge unabhängig von den Störgrößen sind. Da für das regelungstechnische Gebiet der Störgrößenentkopplung verschiedene Ansatzmöglichkeiten zur Lösung existieren, stellt dieser Forschungsbericht die Grundbegriffe der Differentialgeometrie (Nijmeijer und van der Schaft 1990, Isidori 1995, Schwarz 1999) und das auf diesem mathematischen Ansatz basierende Regelungskonzept vor.

Die *differentialgeometrische Störgrößenentkopplung* ist auf Systeme mit gleicher Anzahl an Ein- und Ausgängen beschränkt. Ein Vorteil dieses Ansatzes ist jedoch, dass sich ALS der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{G}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) + \mathbf{p}(\mathbf{x}(t))s(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t))\end{aligned}\tag{2.1}$$

behandeln lassen. Nach der Methodik von Isidori (1995) ist dabei die Störgröße immer als skalare Größe festgelegt. Als Vertiefung sind zu den theoretischen Zusammenhängen der Störgrößenentkopplung Berechnungsbeispiele angegeben. Für die Berechnung der Beispiele findet zum Teil das auf dem CAS MAPLE[®] (Waterloo Maple Inc. 1997) aufbauende Softwarepaket NSAS (Lemmen u. a. 1995) Anwendung. Da sich in der Praxis Systeme häufig als SISO-Systeme darstellen lassen, behandelt dieser Abschnitt den Fall gesondert. Abschnitt 2.1 stellt eine kurze Einführung in die *exakte Linearisierung* dar, die für die Störgrößenentkopplung von SISO- und MIMO-Systemen die Grundlage bildet. Abschließend ist in Abschnitt 2.2 die Anwendung der Störgrößenentkopplung an SISO-Systemen behandelt.

2.1 Exakte Linearisierung

Die Störgrößenentkopplung von SISO-/MIMO-Systemen basiert bei der differentialgeometrischen Methodik auf dem Prinzip der *exakten Linearisierung*. Deshalb ist zunächst ein kurzer Überblick über die Grundlagen der *exakten Linearisierung* gegeben. Das Grundprinzip der exakten Linearisierung ist es, ein nichtlineares System mit einer nichtlinearen Koordinatentransformation und einem nichtlinearen Rückführgesetz *exakt* in ein lineares Ersatzsystem zu überführen. Dieses System ist dann mit den aus der linearen Regelungstheorie (z. B. Schwarz 1969) bekannten Methoden weiter zu behandeln. Prinzipiell lässt sich zwischen *exakter Zustandslinearisierung* und *exakter Ein-/Ausgangslinearisierung* unterscheiden. Bei der exakten Zustandslinearisierung wird der Einfluss des Eingangs auf die Zustände linearisiert, während die exakte Ein-/Ausgangslinearisierung das nichtlineare System in ein System überführt, welches lediglich lineares Verhalten zwischen Eingang und Ausgang zeigt, dessen Verhalten also durch eine lineare Übertragungsfunktion charakterisiert ist. Beide Vorgehensweisen sind anwendbar auf die Klasse der ALS, deren

Elemente die folgende Form im Fall der Eingrößenbetrachtung besitzen (Schwarz 1999):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))u(t) \\ y(t) &= h(\mathbf{x}(t)) \quad .\end{aligned}\tag{2.2}$$

Ausgangspunkt für die Überlegungen zur exakten Linearisierung ist der relative Grad r eines nichtlinearen Systems, der mit Hilfe von Lie-Operatoren, die im Anhang A erläutert sind, folgendermaßen definiert ist:

Definition 2.1 (Isidori 1995)

Das System (2.2) hat den relativen Grad r im Punkt \mathbf{x}_0 , wenn gilt:

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^k h(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \text{ in einer Umgebung von } \mathbf{x}_0 \text{ und } 0 < k < r - 1, \\ \text{(ii)} \quad L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-1} h(\mathbf{x}_0) &\neq 0 \quad .\end{aligned}\quad \square$$

Anschaulich gesprochen, entspricht der relative Grad genau der Anzahl der benötigten zeitlichen Ableitungen des Ausgangs $y(t)$, bis der Eingang $u(t)$ explizit auftritt. Der relative Grad bei linearen Systemen (in diesem Fall auch Differenzengrad genannt) entspricht der Anzahl der Nullstellen des Systems im Unendlichen.

Mit Hilfe des relativen Grades lassen sich die Bedingungen für eine exakte Linearisierung formulieren: Ein System ist exakt zustandslinearisierbar, wenn es den relativen Grad $r = n$ besitzt, wobei n die Ordnung des Zustandsmodells repräsentiert. Besitzt es einen relativen Grad von $r < n$, so ist es ein-/ausgangslinearierbar, wenn die verbleibende Nulldynamik stabil ist. Die Vorgehensweise bei der exakten Zustandslinearisierung besteht aus zwei Schritten:

1. Einer Koordinatentransformation auf die nichtlineare Regelungsnormalform und
2. der Berechnung einer nichtlinearen Zustandsrückführung.

Ein neuer Zustandsvektor \mathbf{z} mit

$$z_i := L_{\mathbf{f}}^{i-1} h(\mathbf{x}) \quad , \quad \text{für } i = 1, \dots, n\tag{2.3}$$

überführt ein System der Form (2.2) mit dem relativen Grad $r = n$ in die nichtlineare Regelungsnormalform:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1}(t) &= z_n(t) \\ \dot{z}_n(t) &= b(\mathbf{z}(t)) + a(\mathbf{z}(t))u(t) \quad , \\ y(t) &= z_1(t) \quad .\end{aligned}\tag{2.4}$$

Hierbei treten die im System enthaltenen Nichtlinearitäten nur noch in der n -ten Koordinate auf. Zur Kompensation dieser Nichtlinearitäten eignet sich eine Zustandsrückführung der Form

$$u(\mathbf{z}(t)) = \frac{-b(\mathbf{z}(t)) + v(t)}{a(\mathbf{z}(t))} . \quad (2.5)$$

Dabei stellt v den neuen Eingang der Strecke dar. In Originalkoordinaten hat diese Rückführung die Form:

$$u(\mathbf{x}(t), v(t)) = \frac{-L_{\mathbf{f}}^n h(\mathbf{x}(t)) + v(t)}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{n-1} h(\mathbf{x}(t))} . \quad (2.6)$$

Daraus resultiert ein System, wie in Bild 2.1 dargestellt, in Form einer Integratorkette mit den Zustandsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1}(t) &= z_n(t) \\ \dot{z}_n(t) &= v(t) \\ y(t) &= z_1(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

und der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s^n} . \quad (2.8)$$

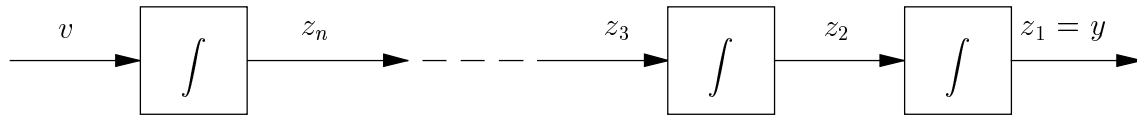


Bild 2.1: Exakt zustandslinearisiertes System (mit $r = n$)

Da das Integratorsystem nach Gl. (2.7) nicht stabil und robust gegenüber Parameterunsicherheiten ist, findet nun ein weiteres *lineares* Regelgesetz der Form

$$u^*(t) = -\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{z}(t) + K v(t) , \quad (2.9)$$

Verwendung, mit dem es möglich ist z. B. über Eigenwertfestlegung dem System ein gewünschtes Führungs- und/oder Störverhalten aufzuprägen. Unter Berücksichtigung des linearisierenden Regelgesetzes nach Gl. (2.6) folgt durch Einsetzen von $u^*(t)$ aus Gl. (2.9) für $v(t)$ in Gl. (2.6) als Regelgesetz in Originalkoordinaten:

$$u(\mathbf{x}(t), v(t)) = \frac{K v(t) - L_{\mathbf{f}}^n h(\mathbf{x}(t)) - \sum_{k=1}^n \alpha_{k-1} L_{\mathbf{f}}^{k-1} h(\mathbf{x}(t))}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{n-1} h(\mathbf{x}(t))} . \quad (2.10)$$

Dieses Regelgesetz verleiht dem gegebenen ALS ein gewünschtes lineares Systemverhalten mit vorgegebener Dynamik. Als lineares Ersatzsystem folgt für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{K}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0} \quad (2.11)$$

des geschlossenen Regelkreises nach Bild 2.2.

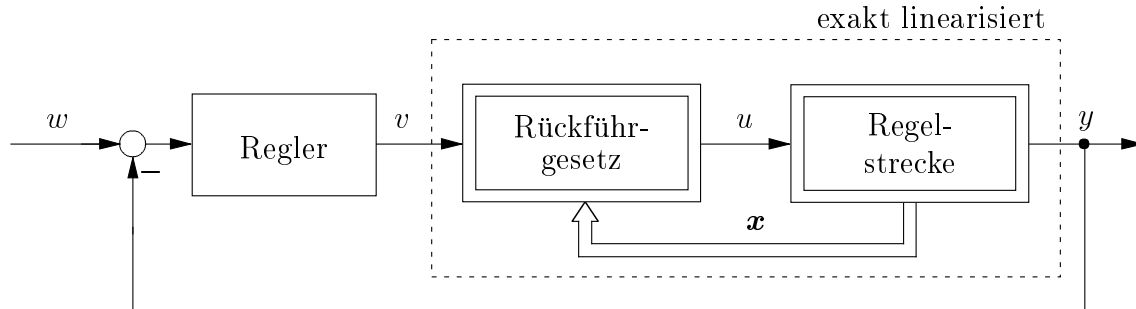


Bild 2.2: Exakte Zustandslinearisierung mit zusätzlichem linearem Regler

Bei der *exakten Ein-/Ausganglinearisierung* hat das System (2.2) einen relativen Grad $r < n$. Dieses System lässt sich nach einer Koordinatentransformation in die Form

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1}(t) &= z_r(t) \\ \dot{z}_r(t) &= b(\mathbf{z}(t)) + a(\mathbf{z}(t))u(t) \\ \dot{z}_{r+1}(t) &= q_{r+1}(\mathbf{z}(t)) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n(t) &= q_n(\mathbf{z}(t)) \\ y(t) &= z_1(t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

überführen.

Satz 2.2 (Allgöwer und Gilles 1993)

Wenn für das System (2.2) die folgenden Bedingungen

1. das System besitzt einen wohldefinierten relativen Grad und
2. das System ist minimalphasig,

gelten, dann lässt sich ebenso wie bei der *exakten Zustandslinearisierung* mit dem Regelgesetz nach Gl. (2.6) bzw. nach Gl. (2.10) ein lineares I_n - bzw. PT_n -Ersatzsystem finden, welches das Ein-/Ausgangverhalten repräsentiert. \square

Die zweite Voraussetzung in Satz 2.2 entspricht nach Schwarz (1999) dabei der Forderung nach einer stabilen Nulldynamik.

2.2 Störgrößenentkopplung

Für die Störgrößenentkopplung von SISO-Systemen besitzt das in Abschnitt 2.1 behandelte ALS nach Gl. (2.2) einen weiteren (unerwünschten) Eingang – die Störgröße $s(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))u(t) + \mathbf{p}(\mathbf{x}(t))s(t) \\ y(t) &= h(\mathbf{x}(t)) \quad .\end{aligned}\tag{2.13}$$

Parallel zu der Definition (2.2) des relativen Grades r lässt sich ein relativer Grad r_S der Störgröße angeben:

Definition 2.3 (Isidori 1995)

Das System (2.13) hat den relativen Grad r_S der Störgröße im Punkt \mathbf{x}_0 , wenn gilt:

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad L_{\mathbf{p}}L_{\mathbf{f}}^k h(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \text{ in einer Umgebung von } \mathbf{x}_0 \text{ und } 0 < k < r_S - 1, \\ \text{(ii)} \quad L_{\mathbf{p}}L_{\mathbf{f}}^{r_S-1} h(\mathbf{x}_0) &\neq 0 \quad .\end{aligned}\quad \square$$

Im Folgenden ist zu untersuchen, unter welcher Bedingung mit dem allgemein gehaltenen Regelgesetz der *exakten Linearisierung*

$$u(\mathbf{x}(t), v(t)) = a(\mathbf{x}(t)) + b(\mathbf{x}(t))v(t)\tag{2.14}$$

der Ausgang $y(t)$ des Systems von der Störgröße entkoppelbar ist. Hierfür ist das System wieder in die nichtlineare Regelungsnormalform zu transformieren. Die erste Zustandsgleichung lautet dann

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= \frac{dz_1}{dt} = \left(\frac{\partial z_1}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ &= L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}(t)) + L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}(t))u(t) + L_{\mathbf{p}}h(\mathbf{x}(t))s(t) \\ &= L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}(t)) = z_2(t) \quad ,\end{aligned}\tag{2.15}$$

da die Terme $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})$ und $L_{\mathbf{p}}h(\mathbf{x})$ nach Def. (2.2) bzw. Def. (2.3) gleich Null sind. Das Gleiche gilt auch für die Zustandsgleichungen bis zur $(r-1)$ -ten Ordnung:

$$\begin{aligned}\dot{z}_2(t) &= z_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1}(t) &= z_r(t) \quad .\end{aligned}\tag{2.16}$$

Für \dot{z}_r gilt des Weiteren $\dot{z}_r(t) = L_{\mathbf{f}}^r h(\mathbf{x}(t)) + L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-1}h(\mathbf{x}(t))u(t)$, wobei für den Fall $r_S > r$ der Term weiterhin $L_{\mathbf{p}}L_{\mathbf{f}}^{r-1}h(\mathbf{x}(t)) = 0$ ist. Die ersten r Gleichungen sind also genau identisch mit denen des ungestörten Systems. Lediglich die verbleibenden $n-r$ Gleichungen sind von der Störgröße abhängig. Das System lässt sich umschreiben zu:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_r(t) &= d(\xi, \eta) + e(\xi, \eta)u(t) \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) + k(\xi, \eta)s(t) \\ y(t) &= z_1(t) \quad .\end{aligned}\tag{2.17}$$

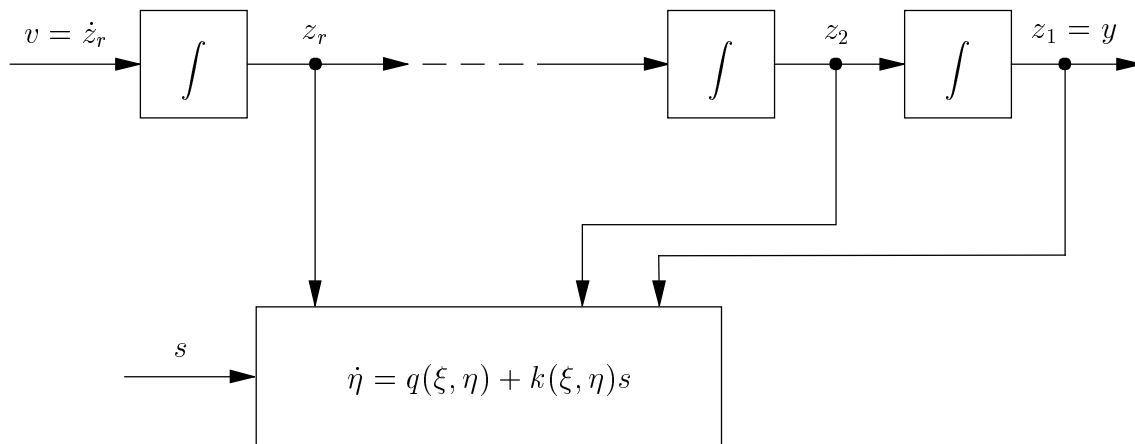


Bild 2.3: Störgrößenentkoppeltes System

Durch Verwendung der statischen Zustandsrückführung

$$u(t) = -\frac{d(\xi, \eta)}{e(\xi, \eta)} + \frac{v(t)}{e(\xi, \eta)} \quad (2.18)$$

geht das System (2.17) über in

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1}(t) &= z_r(t) \\ \dot{z}_r(t) &= v(t) \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) + k(\xi, \eta)s(t) \\ y(t) &= z_1(t) \quad , \end{aligned} \quad (2.19)$$

bei dem der Ausgang $y(t)$ nun unabhängig von der Störgröße $s(t)$ ist. Das entkoppelte System ist in Bild 2.3 dargestellt. Die Angabe des statischen Rückführungsgesetzes in Originalkoordinaten $\mathbf{x}(t)$ erfolgt im folgenden Satz.

Satz 2.4 (Isidori 1995, Schwarz 1999)

Das System (2.13) habe den relativen Grad r im Punkt \mathbf{x}_0 .

- (i) Das Problem, eine Zustandsrückführung nach Gl. (2.14) zu finden, die den Systemausgang $y(t)$ von der Störgröße $s(t)$ entkoppelt, ist dann und nur dann lösbar, wenn

$$\mathbf{L}_p \mathbf{L}_f^k h(\mathbf{x}) = 0 \quad , \forall \mathbf{x} \text{ in einer Umgebung von } \mathbf{x}_0 \text{ und } 0 < k < r - 1 \quad (2.20)$$

gilt.

- (ii) Gilt Gl. (2.20) – also $r_S > r$ – dann lautet die Lösung:

$$u(\mathbf{x}(t), v(t)) = \frac{v(t) - \mathbf{L}_f^r h(\mathbf{x}(t))}{\mathbf{L}_g \mathbf{L}_f^{r-1} h(\mathbf{x}(t))} \quad (2.21) \quad \square$$

Durch die Erweiterung um das *lineare* Regelgesetz nach Gl. (2.9) ist auch bei der Störgrößentkopplung mit dem Rückführgesetz

$$u(\mathbf{x}(t), v(t)) = \frac{Kv(t) - L_{\mathbf{f}}^r h(\mathbf{x}(t)) - \sum_{k=1}^r \alpha_{k-1} L_{\mathbf{f}}^{k-1} h(\mathbf{x}(t))}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{r-1} h(\mathbf{x}(t))} . \quad (2.22)$$

das System (2.13) in ein PT_n -Ersatzsystem überführbar. Für dieses Rückführgesetz ist keine Messung der Störgröße nötig. Eine abgeschwächte Forderung für die Störgrößentkopplung, diesmal mit Messung der Störgröße ergibt sich aus:

Satz 2.5 (Isidori 1995)

Das System (2.13) habe den relativen Grad r im Punkt \mathbf{x}_0 .

(i) Das Problem, eine Zustandsrückführung nach der Gleichung

$$u(\mathbf{x}(t), s(t), v(t)) = a(\mathbf{x}(t)) + b(\mathbf{x}(t))v(t) + c(\mathbf{x}(t))s(t) \quad , \quad (2.23)$$

mit

$$c(\mathbf{x}) = -\frac{L_{\mathbf{p}} L_{\mathbf{f}}^{r-1} h(\mathbf{x})}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{r-1} h(\mathbf{x})} \quad (2.24)$$

zu finden, die den Systemausgang $y(t)$ von der gemessenen Störgröße $s(t)$ entkoppelt, ist dann und nur dann lösbar, wenn

$$L_{\mathbf{p}} L_{\mathbf{f}}^k h(\mathbf{x}) = 0 \quad , \quad \forall \mathbf{x} \text{ in einer Umgebung von } \mathbf{x}_0 \text{ und } 0 < k < r - 2 \quad (2.25)$$

gilt.

(ii) Gilt Gl. (2.25) – also $r_S \geq r$ – dann lautet die Lösung:

$$u(\mathbf{x}(t), s(t), v(t)) = \frac{v(t) - L_{\mathbf{f}}^r h(\mathbf{x}(t)) - L_{\mathbf{p}} L_{\mathbf{f}}^{r-1} h(\mathbf{x}(t)) s(t)}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{r-1} h(\mathbf{x}(t))} . \quad (2.26) \quad \square$$

Das um das *lineare* Regelgesetz erweiterte Rückführgesetz lautet dann:

$$u(\mathbf{x}(t), s(t), v(t)) = \frac{Kv(t) - L_{\mathbf{f}}^r h(\mathbf{x}(t)) - \sum_{k=1}^r \alpha_{k-1} L_{\mathbf{f}}^{k-1} h(\mathbf{x}(t)) - L_{\mathbf{p}} L_{\mathbf{f}}^{r-1} h(\mathbf{x}(t)) s(t)}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{r-1} h(\mathbf{x}(t))} . \quad (2.27)$$

Folgendes Beispiel verdeutlicht die Vorgehensweise der differentialgeometrischen Störgrößentkopplung von einem SISO-System:

Beispiel 2.6

Es sei folgendes ALS mit dem Eingang $u(t)$, der Störgröße $s(t)$ und dem Ausgang $y(t)$ betrachtet:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} x_3^2 x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{f}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{g}(\mathbf{x})} u + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{p}(\mathbf{x})} s, \\ y &= x_1 + x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Mit

$$L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^0 h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_3 \neq 0$$

folgt, dass unter der Bedingung $x_1 \neq -0,5x_3$ der relative Grad $r = 1$ ist. Des Weiteren gilt

$$L_{\mathbf{p}} L_{\mathbf{f}}^0 h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{p}} h(\mathbf{x}) = 1 + x_1 \neq 0.$$

Daher ergibt sich für den relativen Grad der Störgröße $r_s = 1$ (für $x_1 \neq -1$) und somit $r = r_s$. Damit ist für das System ein Rückführgesetz nach Gl. (2.26) auszulegen, wobei die Störgröße $s(t)$ zu messen ist:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}(t), s(t), v(t)) &= \frac{v(t) - L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}(t)) - L_{\mathbf{p}} h(\mathbf{x}(t)) s(t)}{L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x}(t))} \\ &= \frac{v - (x_3^2 x_1 + 2x_2 + x_1 x_2 - x_3 + x_1) - (1 + x_1)s}{2x_1 + x_3}. \end{aligned}$$

Als Ergebnis resultiert ein Integratorsystem nach Gl. (2.8) mit der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{1}{s}$. Wenn als Ersatzsystem ein PT₁-System erwünscht ist, so ist das Rückführgesetz

$$u(\mathbf{x}(t), s(t), v(t)) = \frac{v(t) - L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}(t)) - \alpha_0 h(\mathbf{x}(t)) - L_{\mathbf{p}} h(\mathbf{x}(t)) s(t)}{L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x}(t))}$$

nach Gl. (2.27) zu verwenden und es gilt somit:

$$u(\mathbf{x}, s, v) = \frac{v - x_3^2 x_1 - 2x_2 - x_1 x_2 + x_3 - x_1 - \alpha_0(x_1 + x_2 + x_3) - (1 + x_1)s}{2x_1 + x_3}.$$

□

3 Störgrößenentkopplung von MIMO-Systemen

Aufbauend auf Abschnitt 2 sollen nun MIMO-Systeme mit gleicher Anzahl von Ein- und Ausgängen sowie einer Störgröße betrachtet werden. Diese lassen sich durch das Zustandsmodell

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x}(t))u_i(t) + \mathbf{p}(\mathbf{x}(t))s(t) \\ y_1(t) &= h_1(\mathbf{x}(t)) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= h_m(\mathbf{x}(t))\end{aligned}\tag{3.1}$$

beschreiben. Ähnlich wie bei den SISO-Systemen ist für die Störgrößenentkopplung der relative (Vektor-) Grad eine wichtige Systemkenngröße. Dieser ist folgendermaßen definiert:

Definition 3.1 (Isidori 1995, Schwarz 1999)

Ein MIMO-ALS (3.1) besitzt den relativen (Vektor-) Grad $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_m]$ im Punkt \mathbf{x}_0 , wenn gilt:

- (i) $L_{\mathbf{g}_j} L_{\mathbf{f}}^k h_i(\mathbf{x}) = 0$, $\forall \mathbf{x}$ in einer Umgebung von \mathbf{x}_0
sowie $((1 \leq j \leq m) \wedge (0 < k < r_i - 1) \wedge (1 \leq i \leq m))$,
mit $r_i = \min\{l | L_{\mathbf{g}_j} L_{\mathbf{f}}^{l-1} h_i(\mathbf{x}) \neq 0\}$; $\{i, j\} = 1, 2, \dots, m$.
Für die einzelnen r_i gilt: $1 \leq r_i \leq n - m$, $i = 1, 2, \dots, m$.

- (ii) Die Entkopplungsmatrix $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ist regulär $\forall \mathbf{x}$ in einer Umgebung von \mathbf{x}_0 , d. h. es gilt: $\det(\mathbf{A}(\mathbf{x}_0)) \neq 0$. \square

Die Komponenten des relativen (Vektor-) Grades r_i geben darüber hinaus die minimale Anzahl der zeitlichen Ableitungen für das Ausgangssignal $y_i(t)$, ($i = 1, \dots, p$) an, bei der eine der Eingangsgrößen $u_j(t)$, ($j = 1, \dots, m$; $i \neq j$) erstmalig explizit auftritt. Die Entkopplungsmatrix $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ist gegeben durch:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & L_{\mathbf{g}_2} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_2-1} h_2(\mathbf{x}) & L_{\mathbf{g}_2} L_{\mathbf{f}}^{r_2-1} h_2(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_2-1} h_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & L_{\mathbf{g}_2} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} .\tag{3.2}$$

In Anlehnung an die Störgrößenentkopplung von SISO-Systemen, bei der das Rückführgesetz auf dem Prinzip der *exakten Linearisierung* aufbaut, ist für die Störgrößenentkopplung von MIMO-Systemen die Entkopplung der Ausgänge $y_j(t)$ von den Eingängen $u_i(t)$ von entscheidender Bedeutung. Die Störgrößenentkopplung definiert sich für MIMO-Systeme durch:

Satz 3.2 (Isidori 1995)

Das System (3.1) besitze den relativen (Vektor-) Grad $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_m]$ im Punkt \mathbf{x}_0 . Das Problem, eine Zustandsrückführung nach der Gleichung

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), v(t)) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{b}(\mathbf{x}(t))\mathbf{v}(t) ,\tag{3.3}$$

mit dem Vektor

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) := -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} L_{\mathbf{f}}^{r_1} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{f}}^{r_2} h_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{r_m} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

und der Matrix

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) := \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \quad (3.5)$$

zu finden, welche die Systemausgänge $y_j(t)$ von der Störgröße $s(t)$ entkoppeln, ist dann und nur dann lösbar, wenn gilt:

$$L_{\mathbf{p}} L_{\mathbf{f}}^k h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad , \forall ((0 < k < r_i - 1) \wedge (1 \leq i \leq m)) \quad . \quad (3.6)$$

□

Mit Verwendung der Störgröße als Messsignal ergibt sich die abgeschwächte Forderung:

Satz 3.3 (Isidori 1995)

Das System (3.1) habe den relativen (Vektor-) Grad $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_m]$ im Punkt \mathbf{x}_0 . Das Problem, eine Zustandsrückführung nach der Gleichung

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), s(t), v(t)) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{b}(\mathbf{x}(t))\mathbf{v}(t) + \mathbf{c}(\mathbf{x}(t))s(t) \quad , \quad (3.7)$$

mit

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) := -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} L_{\mathbf{f}}^{r_1} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{f}}^{r_2} h_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{r_m} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) := \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \quad (3.9)$$

und dem Vektor

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) := -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} L_{\mathbf{p}} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{p}} L_{\mathbf{f}}^{r_2-1} h_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{p}} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

zu finden, welche die Systemausgänge $y_j(t)$ von der gemessenen Störgröße $s(t)$ entkoppeln, ist dann und nur dann lösbar, wenn gilt:

$$L_{\mathbf{p}} L_{\mathbf{f}}^k h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad , \forall ((0 < k < r_i - 2) \wedge (1 \leq i \leq m)) \quad . \quad (3.11)$$

□

Die Bedingungen nach Gl. (3.6) und Gl. (3.11) entsprechen – in Anlehnung an die Bedingungen bei SISO-Systemen – der Forderung, dass für den relativen (Vektor-) Grad der Störgröße $\mathbf{r}_S = [r_{S,1}, \dots, r_{S,m}]$ gelten muss: $r_{S,i} > r_i$ bzw. $r_{S,i} \geq r_i$, ($i = 1, \dots, m$). Der relative (Vektor-) Grad der Störgröße \mathbf{r}_S berechnet sich nach Gl. (3.6). Beide Rückführgesetze überführen das System (3.1) in ein lineares Ersatzsystem, welches das Verhalten zwischen den Eingängen $u_i(t)$ und den Ausgängen $y_j(t)$ so verändert, dass jeder Ausgang $y_j(t)$ nur noch durch eine Integratorkette der Dimension r_j von dem neuen Eingang $v_j(t)$ abhängt.

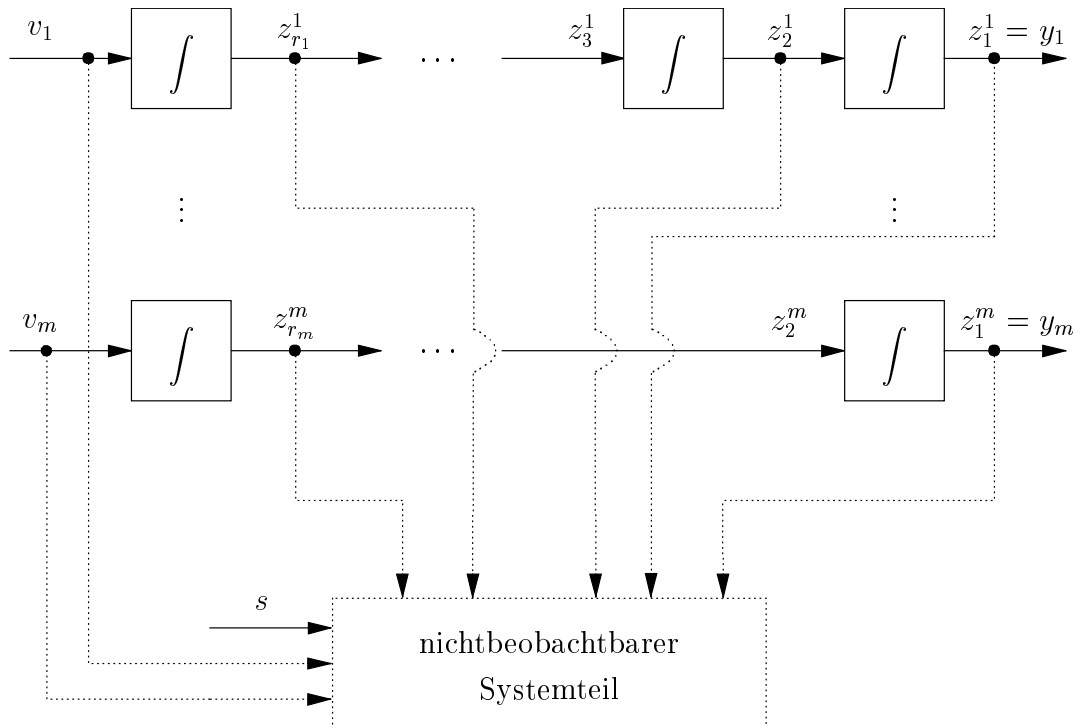


Bild 3.1: Exakt entkoppeltes System mit nichtbeobachtbarem Systemteil

Damit die Entkopplung – wie in Bild 3.1 dargestellt – mit völliger Sicherheit funktioniert und die Störgröße keinen Einfluss mehr auf die Dynamik des Systems besitzt, muss die Bedingung

$$r_1 + r_2 + \dots + r_m = n \quad (3.12)$$

erfüllt sein, wobei r_i die Elemente des relativen (Vektor-) Grades sind und n der Systemordnung entspricht. Wenn Gl. (3.12) nicht gilt, dann hat das linearisierte System einen zusätzlichen nichtbeobachtbaren Systemteil. Das lineare Ersatzsystem ist charakterisiert

durch die Übertragungsmatrix

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{r_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^{r_2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{s^{r_m}} \end{bmatrix} . \quad (3.13)$$

Durch Erweiterung um die *linearen* Regelgesetze

$$v_i = -\alpha_0^i h_i(\mathbf{x}) - \alpha_1^i L_{\mathbf{f}} h_i(\mathbf{x}) - \dots - \alpha_{r_i-1}^i L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) + K_i \bar{v}_i \quad ; i = 1, 2, \dots, m \quad (3.14)$$

lassen sich m PT $_n$ -Ersatzsysteme erzeugen, welche die Übertragungsmatrix der Form

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} \frac{K_1}{d_1(s)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{K_2}{d_2(s)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{K_m}{d_m(s)} \end{bmatrix} , \quad (3.15)$$

mit

$$d_i(s) = \alpha_0^i + \alpha_1^i s + \dots + \alpha_{r_i-1}^i s^{r_i-1} + s^{r_i} \quad (3.16)$$

bilden. Abschließend findet die Theorie der Störgrößenentkopplung von MIMO-Systemen in einem Beispiel praktische Anwendung:

Beispiel 3.4

Es sei folgendes ALS mit den Eingängen $u_1(t)$, $u_2(t)$, der Störgröße $s(t)$ und den beiden Ausgängen $y_1(t)$, $y_2(t)$ gegeben:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} x_2^2 \\ -x_1 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{f}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{g}_1(\mathbf{x})} u_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -x_1^2 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{g}_2(\mathbf{x})} u_2 + \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{p}(\mathbf{x})} s \quad , \\ y_1 &= x_2 \quad , \\ y_2 &= x_1 \quad . \end{aligned}$$

Mit

$$L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^0 h_1(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{g}_1} h_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \neq 0$$

für $x_1 \neq -x_2$ und

$$L_{\mathbf{g}_2} L_{\mathbf{f}}^0 h_1(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{g}_2} h_1(\mathbf{x}) = -x_1^2 \neq 0$$

für $x_1 \neq 0$ folgt, dass das erste Element des relativen (Vektor-) Grades $r_1 = \min\{1, 1\} = 1$ ist. Für r_2 gilt

$$L_{g_1} L_f^0 h_2(\mathbf{x}) = L_{g_1} h_2(\mathbf{x}) = x_2 \neq 0$$

mit $x_2 \neq 0$ und

$$L_{g_2} L_f^0 h_2(\mathbf{x}) = L_{g_2} h_2(\mathbf{x}) = 0$$

bzw.

$$L_{g_2} L_f h_2(\mathbf{x}) = -2x_1^2 x_2 \neq 0 \quad ,$$

so dass $r_2 = \min\{1, 2\} = 1$ und der relative (Vektor-) Grad $\mathbf{r} = [1, 1]$ ist. Des Weiteren gilt

$$L_p L_f^0 h_1(\mathbf{x}) = L_p h_1(\mathbf{x}) = 0$$

bzw.

$$L_p L_f h_1(\mathbf{x}) = -x_1 \neq 0$$

und

$$L_p L_f^0 h_2(\mathbf{x}) = L_p h_2(\mathbf{x}) = x_1 \neq 0 \quad .$$

Daraus folgt, dass der relative (Vektor-) Grad der Störgröße \mathbf{r}_S sich zu $\mathbf{r}_S = [2, 1]$ zusammensetzt. Die Bedingung nach Satz 3.3 $r_{S,i} \geq r_i$, ($i = 1, 2$) ist somit erfüllt und es kann das Rückführgesetz nach Gl. (3.7) mit gemessener Störgröße $s(t)$ Anwendung finden:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), s(t), v(t)) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{b}(\mathbf{x}(t))\mathbf{v}(t) + \mathbf{c}(\mathbf{x}(t))s(t) \quad .$$

Die Entkopplungsmatrix $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ berechnet sich durch:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_1} h_1(\mathbf{x}) & L_{g_2} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{g_1} h_2(\mathbf{x}) & L_{g_2} h_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & -x_1^2 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Für die Matrix $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})$ folgt

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{x_2} \\ -\frac{1}{x_1^2} & \frac{x_1 + x_2}{x_1^2 x_2} \end{bmatrix} \quad .$$

Daraus lassen sich die beiden Vektoren

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -x_2 \\ -\frac{x_1 + x_1 x_2 + x_2^2}{x_1^2} \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{x_2} \\ -\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \end{bmatrix}$$

ermitteln. Das gesamte Rückführgesetz lautet folglich:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), s(t), v(t)) = \begin{bmatrix} \frac{v_2}{x_2} - x_2 - \frac{x_1}{x_2} s \\ -\frac{v_1 x_2 - v_2 x_1 - v_2 x_2 + x_1 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^3}{x_1^2 x_2} - \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} s \end{bmatrix} .$$

Das lineare Ersatzsystem besteht somit aus jeweils einem Integrator und ist charakterisiert durch die Übertragungsmatrix nach Gl. (3.13) der Form

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} .$$

□

4 Anwendungsbeispiel: Differentialzylinder

Gegenstand der Untersuchung in diesem Abschnitt ist die Überprüfung der Realisierbarkeit der in den Abschnitten 2 und 3 hergeleiteten Störgrößenentkopplung für einen Differentialzylinder. Neben dem Zylinder ist auch ein Proportionalventil Bestandteil des Systemmodells. Bei dem physikalischen Modell handelt es sich um ein SISO-System mit dem Systemeingang der normierten Ventilansteuerspannung U , dem Ausgang der Zylinderkolbenposition y_{Zy1} und der Kraft F_S als Störgröße.

Für verschiedene Anwendungen beschreibt ein Systemmodell 4. Ordnung (Vereinfachung des Modells 6. Ordnung) – wie im Anhang B hergeleitet – ausreichend das reale Systemverhalten des Differentialzylinders mit Ventil (Ruppert 1982, Hinz 1993, Bröcker 1999):

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_{Zy1} &= \dot{x}_1 = x_2 \\
 \ddot{y}_{Zy1} &= \dot{x}_2 = \frac{1}{m_{\text{ges}}(x_1)} \left(\left(x_3 - \frac{x_4}{\varphi} \right) A_K - F_R(x_2) - F_S \right) \\
 \dot{p}_A &= \dot{x}_3 = \frac{E'_{F1}(x_3)}{V_A(x_1)} (-A_K x_2 + Q_A(x_3) K_V U) \\
 \dot{p}_B &= \dot{x}_4 = \frac{E'_{F1}(x_4)}{V_B(x_1)} \left(\frac{A_K}{\varphi} x_2 + Q_B(x_4) K_V U \right)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

mit den Volumenströmen

$$Q_A(x_3) = \begin{cases} B_V \sqrt{|p_0 - x_3|} \operatorname{sign}(p_0 - x_3) & , \text{ für } U \geq 0 \\ B_V \sqrt{|x_3 - p_T|} \operatorname{sign}(x_3 - p_T) & , \text{ für } U < 0 \end{cases} \quad \text{und} \tag{4.2}$$

$$Q_B(x_4) = \begin{cases} -B_V \sqrt{|x_4 - p_T|} \operatorname{sign}(x_4 - p_T) & , \text{ für } U \geq 0 \\ -B_V \sqrt{|p_0 - x_4|} \operatorname{sign}(p_0 - x_4) & , \text{ für } U < 0 \end{cases} . \tag{4.3}$$

Die Zustände entsprechen den physikalischen Größen

$$\begin{aligned}
 x_1 = y_{Zy1} & \quad \text{Position des Zylinderkolbens [m],} \\
 x_2 = \dot{y}_{Zy1} & \quad \text{Geschwindigkeit des Zylinderkolbens [ms}^{-1}\text{],} \\
 x_3 = p_A & \quad \text{Druck in der Zylinderkammer A [Pa],} \\
 x_4 = p_B & \quad \text{Druck in der Zylinderkammer B [Pa].}
 \end{aligned}$$

Dieses SISO-System ist jedoch kein analytisches System und somit für die Untersuchung auf Störgrößenentkoppelbarkeit ungeeignet, da in dem Zustandsmodell die unstetigen Funktionen $\operatorname{sign}(\cdot)$ und $|\cdot|$ enthalten sind. Bei Betrachtung eingeschränkter Druckbereiche, d. h.

$$p_T \leq x_3 \leq p_0 \tag{4.4}$$

und

$$p_T \leq x_4 \leq p_0 \tag{4.5}$$

und zusätzlicher Fallunterscheidung der Ventilansteuerspannung $U \geq 0$ und $U < 0$ fallen die unstetigen Funktionen jedoch weg und somit ist durchaus ein analytisches System angebar. Für $U \geq 0$ folgt

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m_{\text{ges}}(x_1)} \left(\left(x_3 - \frac{x_4}{\varphi} \right) A_K - F_R(x_2) - F_S \right) \\ \dot{x}_3 &= \frac{E'_{\text{Fl}}(x_3)}{V_A(x_1)} (-A_K x_2 + B_V K_V \sqrt{p_0 - x_3} U) \\ \dot{x}_4 &= \frac{E'_{\text{Fl}}(x_4)}{V_B(x_1)} \left(\frac{A_K}{\varphi} x_2 - B_V K_V \sqrt{x_4 - p_T} U \right)\end{aligned}\tag{4.6}$$

mit $F_R(x_2) = f_V x_2 + \left(F_C + F_H \exp\left(-\frac{x_2}{c_h}\right) \right) + F_{\text{Offset}}$. Dementsprechend gilt für $U < 0$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m_{\text{ges}}(x_1)} \left(\left(x_3 - \frac{x_4}{\varphi} \right) A_K - F_R(x_2) - F_S \right) \\ \dot{x}_3 &= \frac{E'_{\text{Fl}}(x_3)}{V_A(x_1)} (-A_K x_2 + B_V K_V \sqrt{x_3 - p_T} U) \\ \dot{x}_4 &= \frac{E'_{\text{Fl}}(x_4)}{V_B(x_1)} \left(\frac{A_K}{\varphi} x_2 - B_V K_V \sqrt{p_0 - x_4} U \right) .\end{aligned}\tag{4.7}$$

mit $F_R(x_2) = f_V x_2 + \left(F_C + F_H \exp\left(\frac{x_2}{c_h}\right) \right) + F_{\text{Offset}}$. Dieses SISO-System ist nun auf Störkoppelbarkeit nach dem differentialgeometrischen Ansatz (Def. 2.4 und Def. 2.5) nach der Gl. (2.25) zu prüfen:

$$L_{\mathbf{p}} L_{\mathbf{f}}^0 h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{p}} h(\mathbf{x}) = 0 \quad ,\tag{4.8}$$

$$L_{\mathbf{p}} L_{\mathbf{f}}^1 h(\mathbf{x}) = -\frac{1}{m_{\text{ges}}(x_1)} \neq 0 \quad .\tag{4.9}$$

Damit ergibt sich für den relativen Grad der Störgröße $r_S = 2$. Der relative Grad r berechnet sich durch

$$L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^0 h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x}) = 0 \quad ,\tag{4.10}$$

$$L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^1 h(\mathbf{x}) = 0 \quad ,\tag{4.11}$$

$$L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^2 h(\mathbf{x}) \neq 0\tag{4.12}$$

zu $r = 3$. Somit gilt $r > r_S$ und das System ist auch nicht durch Messung der Störkraft F_S mittels statischem Rückführgesetz störkoppelbar. Diese Tatsache ist auch begründbar dadurch, dass „die Störgröße den Systemausgang schneller als der Systemeingang den Systemausgang erreicht“ (Commault u. a. 1991). Analytisch lässt sich diese Aussage

nach Moog und Xia (1997) herleiten. Dabei müssen die partiellen Ableitungen nach der Störgröße der zeitlichen Ausgangsableitungen die Bedingung

$$\frac{\partial y^{(k)}}{\partial s} = 0 \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (4.13)$$

erfüllen. Für die zweite zeitliche Ausgangsableitung gilt

$$\frac{\partial \ddot{y}_{\text{Zyl}}}{\partial F_{\text{S}}} = -\frac{1}{m_{\text{ges}}(x_1)} \neq 0 \quad (4.14)$$

und somit beeinflusst die Störkraft F_{S} immer früher den Systemausgang y_{Zyl} als die Ventiltension U . Gegenstand weiterer Untersuchungen sollte daher sein, ein Regelgesetz für den Differentialzylinder zu finden, welches die Störkraft des Systems zumindest unterdrückt.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Dieser Bericht gibt einen Überblick über die Vorgehensweise der differentialgeometrischen Störgrößenentkopplung. Die Störgrößenentkopplung basiert auf dem Prinzip der exakten Linearisierung. Dies bedeutet, dass ein nichtlineares Regelgesetz das nichtlineare System in ein lineares Ersatzsystem überführt. Dieses Ersatzsystem ist mit Hilfe linearer Regelungstheorie behandelbar. Die charakteristischen Kenngrößen relativer (Vektor-) Grad r und relativer (Vektor-) Grad der Störgröße r_s liefern eine Aussage darüber, ob ein System störentkoppelbar ist oder nicht. Bei Einhaltung der Bedingung für Störgrößenentkoppelbarkeit lässt sich ein nichtlineares Kompensatorgesetz automatisiert berechnen. Beispiele verdeutlichen hierbei die Vorgehensweise zur Berechnung des störentkoppelnden Kompensatorgesetzes.

Der differentialgeometrische Ansatz ist auf *analytische Systeme mit linear eingehender Steuerung (ALS)* anwendbar. Diese Systemklasse ist für viele Systeme in der Praxis bezüglich des dynamischen Verhaltens repräsentativ. Allerdings ist die Betrachtung nur für quadratische Mehrgrößensysteme, d. h. für Systeme mit gleicher Anzahl von Ein- und Ausgängen zulässig. Ebenso kann nur eine Störgröße modelliert werden bzw. sind die Störungen zu einer einzigen Störgröße zusammenzufassen.

Ein Anwendungsbeispiel untersucht die Störgrößenentkopplung des komplexen nichtlinearen SISO-Systems Differentialzylinder-Proportionalventil. Es liegt ein mathematisches Modell 4. Ordnung für dieses System vor und durch Betrachtung eingeschränkter Druckbereiche und einer zusätzlichen Fallunterscheidung für verschiedene Ventilspannungen, lässt sich das System in ein ALS überführen. Für dieses ALS ergibt die differentialgeometrische Untersuchung, dass der Differentialzylinder auch nicht durch Messung der Störkraft, die auf den Zylinderkolben wirkt, mittels statischem Rückführgesetz störentkoppelbar ist.

Gegenstand weiterer Untersuchungen sollte daher die Erforschung eines störgrößenvermindernden Regelgesetzes für den Differentialzylinder sein. Damit würde der Zylinder zwar nicht unabhängig von der Störkraft, deren Auswirkung aber folglich vermindert sein.

6 Literatur

- Allgöwer, F.** und **E. D. Gilles.** 1993. Nichtlinearer Reglerentwurf auf der Grundlage exakter Linearisierungstechniken. *VDI/VDE-GMA Aussprachetag „Nichtlineare Regelung – Methoden, Werkzeuge, Anwendungen“*. *VDI-Bericht*. 1026. 209–226. Düsseldorf: VDI.
- Bröcker, M.** 1999. *Untersuchungen zur Störgrößenentkopplung*. Diplomarbeit. MSRT. Universität Duisburg. (unveröffentlicht).
- Commault, C., J. M. Dion** und **A. Perez.** 1991. Disturbance rejection for structured systems. *IEEE Trans. Automat. Control* 36(7). 884–887.
- Hinz, D.** 1993. *Dynamisches Verhalten der Ventil-Differentialzylinderschaltung bei angehobenem Tankdruck*. Diplomarbeit. MSRT. Universität Duisburg. (unveröffentlicht).
- Isidori, A.** 1995. *Nonlinear Control Systems*. 3. Auflage. Berlin: Springer.
- Lee, K. I.** 1977. *Dynamisches Verhalten der Steuerkette Servoventil-Motor-Last*. Dissertation. IHP. RWTH Aachen.
- Lemmen, M., T. Wey** und **M. Jelali.** 1995. *NSAS – ein Computer-Algebra-Paket zur Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme*. Forschungsbericht 20/95. MSRT. Universität Duisburg.
- Moog, C. H.** und **X. Xia.** 1997. Preliminary results on output feedback disturbance decoupling of nonlinear systems. *Proc. European Control Conference*. Brüssel/Belgien. Confer. ID 779.
- Nijmeijer, H.** und **A. J. van der Schaft.** 1990. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. New York/USA: Springer.
- Ruppert, M.** 1982. *Reglersynthese mit Hilfe der mehrgliedrigen Evolutionsstrategie*. *VDI Fortschritt-Berichte. Reihe 8*. 51. Düsseldorf: VDI.
- Schwarz, H.** 1969. *Einführung in die moderne Systemtheorie. Theorie geregelter Systeme*. 4. Braunschweig: Vieweg.
- Schwarz, H.** 1999. *Einführung in die Systemtheorie nichtlinearer Regelungen*. Aachen: Shaker.
- Waterloo Maple Inc.** 1997. *Maple V, Release 5 - Notes*. Waterloo.

A Definition der Lie-Ableitung

Die Lie-Ableitung ist eine im Rahmen der Differentialgeometrie häufig benutzte Operation, um die Empfindlichkeit einer Funktion λ von den Koordinaten \mathbf{x} in Richtung eines Vektorfeldes \mathbf{f} darzustellen. Sie stellt somit die Ableitung einer skalaren Funktion entlang eines Vektorfeldes dar und verwendet als Argumente eine reellwertige Funktion λ und ein Vektorfeld \mathbf{f} .

Es sei λ eine skalare Funktion und \mathbf{f} ein Vektorfeld der Dimension n , dann ist die Lie-Ableitung von λ entlang \mathbf{f} definiert zu:

$$L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}) := \frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial\lambda}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial\lambda}{\partial x_n} \right] \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} . \quad (\text{A.1})$$

Die Ableitung als Ergebnis ist wiederum eine skalare Funktion. Die wiederholte Lie-Ableitung ist auch möglich. Bei einer Lie-Ableitung von λ entlang \mathbf{f} und danach entlang \mathbf{g} ergibt sich:

$$L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}) := \frac{\partial L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right] \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} . \quad (\text{A.2})$$

Für die k -fache Ableitung von λ entlang eines Vektorfeldes \mathbf{f} ergibt sich eine rekursive Darstellung:

$$L_{\mathbf{f}}^k\lambda(\mathbf{x}) := \frac{\partial L_{\mathbf{f}}^{k-1}\lambda(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial L_{\mathbf{f}}^{k-1}\lambda(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial L_{\mathbf{f}}^{k-1}\lambda(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right] \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} . \quad (\text{A.3})$$

B Systemmodell für den Differentialzylinder

In diesem Abschnitt ist die Herleitung eines analytischen Zustandsmodells 4. Ordnung für das System Differentialzylinder–Proportionalventil aufgeführt.

Die Regelstrecke besteht aus einem Differentialzylinder, einem Proportionalventil und einer Pumpe (vgl. Bild B.1).

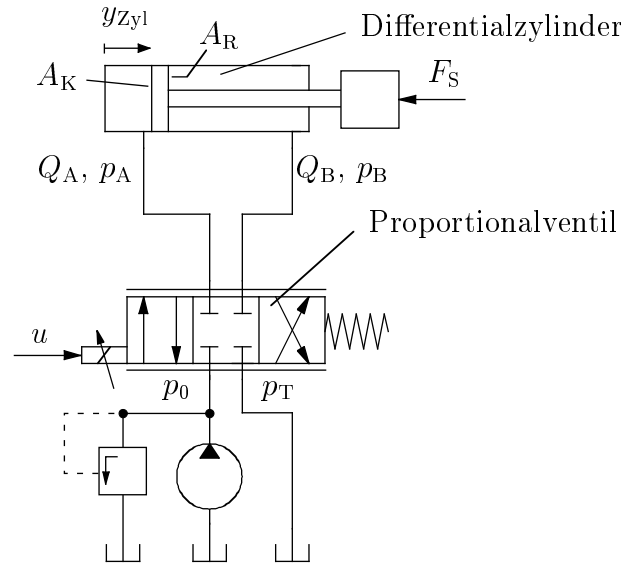


Bild B.1: System Differentialzylinder–Proportionalventil

Die Pumpe sei als ideale Druckquelle angenommen, so dass diese einen konstanten Versorgungsdruck p_0 hat und keine Schwankungs- und Pulsationseinflüsse auftreten. Das Ventil, welches als 4/3-Wegeventil ausgeführt ist, stellt das Stellglied dar und dient zur Steuerung der Ölvolumenströme Q_A und Q_B . Die Steuerkolbenposition y_{Ventil} und damit die Schaltstellung ist spannungsproportional angesteuert, so dass die Zylinderkammern mit den Drücken p_0 und p_T verbunden sind. Der Zylinder dient als Energiewandler, da er den entstehenden Druckunterschied am Kolben des Zylinders in eine Horizontalbewegung umwandelt. Die Regelstrecke weist hochgradig nichtlineares Verhalten auf, wobei als wesentliche Nichtlinearität des Ventils die geometrische Überdeckung der Steuerschieberkanten und die nichtlineare Durchflusskennlinie zu nennen sind. Bei dem Differentialzylinder ist die druckabhängige Ölkompensibilität in Verbindung mit den Elastizitäten der Rohr- und Zylinderwandungen zu erwähnen. Die Abhängigkeit der Ölsäulen in den Zylinderkammern von der Kolbenposition (unterschiedliche „Ölfedern“) und die geschwindigkeitsabhängigen Reibungskräfte sind weitere Nichtlinearitäten. Außerdem existiert bei dem Differentialzylinder im Gegensatz zum Gleichgangzylinder eine geometrische Nichtlinearität, die auf die unterschiedlichen Wirkflächen zurückzuführen ist und sich beim Ein- und Ausfahren bemerkbar macht. Prinzipiell ist ein Ventil ein hydraulisches System mit komplexer Dynamik. Moderne Ventile mit integrierter elektronischer Rückführung

sind jedoch mit guter Näherung als PT₂- oder PT₃-System approximierbar. Mit den vereinfachenden Annahmen, dass

- die Ansprechempfindlichkeit und Hysterese beim Ventil vernachlässigbar ist,
- das Ventil eine Nullüberdeckung besitzt und
- im Ventil nur viskose Reibung auftreten darf,

ist das Ventil vereinfacht als PT₂-System modellierbar. Die Kenndaten sind dem gemessenen Frequenzgang (Bode-Diagramm) vom Hersteller entnommen. Weiterhin sind

- die Leckölverluste,
- die Leitungsdynamik vernachlässigbar sowie
- der Druck in den Rücklaufleitungen p_T als konstant angenommen.

Das Zustandsmodell besteht aus sechs nichtlinearen Differentialgleichungen. Die Zustände des Systems sind

$x_1 = y_{Zyl}$	Position des Zylinderkolbens,
$x_2 = \dot{y}_{Zyl}$	Geschwindigkeit des Zylinderkolbens,
$x_3 = p_A$	Druck in der Zylinderkammer A,
$x_4 = p_B$	Druck in der Zylinderkammer B,
$x_5 = y_{Ventil}$	Position des Steuerkolbens im Ventil und
$x_6 = \dot{y}_{Ventil}$	Geschwindigkeit des Steuerkolbens im Ventil.

Mit diesen Zuständen lassen sich aus Kräfte- und Massenbilanzen sowie Bernoulli'sche Gleichungen die nichtlinearen Zustandsdifferentialgleichungen des Systems bestimmen. Die Bilanzierung basiert auf den Bezeichnungen und der Vorzeichenkonvention im Bild B.1. Das Differentialgleichungssystem 6. Ordnung lautet nach Ruppert (1982) und Hinz (1993):

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_{Zyl} &= \dot{x}_1 = x_2 \\
 \ddot{y}_{Zyl} &= \dot{x}_2 = \frac{1}{m_{ges}(x_1)} \left(\left(x_3 - \frac{x_4}{\varphi} \right) A_K - F_R(x_2) - F_S \right) \\
 \dot{p}_A &= \dot{x}_3 = \frac{E'_{FI}(x_3)}{V_A(x_1)} (-A_K x_2 + Q_A(x_3, x_5)) \\
 \dot{p}_B &= \dot{x}_4 = \frac{E'_{FI}(x_4)}{V_B(x_1)} \left(\frac{A_K}{\varphi} x_2 + Q_B(x_4, x_5) \right) \\
 \dot{y}_{Ventil} &= \dot{x}_5 = x_6 \\
 \ddot{y}_{Ventil} &= \dot{x}_6 = \omega_V^2 \left(K_V U - \frac{2D_V}{\omega_V} x_6 - x_5 \right) .
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Die ersten vier Gleichungen beschreiben die Dynamik des Zylinders, während die beiden letzten die Dynamik des Ventils repräsentieren. Da für das Ventil als Systemmodell ein PT₂-System Verwendung findet, sind

$$U = \frac{u}{u_{\max}} \quad \text{und} \quad x_5 = \frac{y_{\text{Ventil}}}{y_{\max}} \quad (\text{B.2})$$

dimensionslos und es gilt die Normierung $-1 \leq U \leq 1$, $-1 \leq x_5 \leq 1$. Die gesamte bewegte Masse m_{ges} setzt sich zusammen aus der Last, der Masse des Kolbens und der Kolbenstange – zusammengefasst in der Konstante m_{ges}^* – sowie den Ölmassen:

$$m_{\text{ges}}(x_1) = m_{\text{ges}}^* + \rho_{\text{Fl}}(V_{\text{A}}(x_1) + V_{\text{B}}(x_1)) \quad (\text{B.3})$$

Die Ölvolumina $V_{\text{A}}(x_1)$ und $V_{\text{B}}(x_1)$ setzen sich zusammen aus dem Volumen des Öls in den Zylinderkammern und dem Ölvolumen in den Leitungen (V_{LA} , V_{LB}):

$$V_{\text{A}}(x_1) = V_{\text{LA}} + x_1 A_{\text{K}} \quad , \quad (\text{B.4})$$

$$V_{\text{B}}(x_1) = V_{\text{LB}} + (H - x_1) \frac{A_{\text{K}}}{\varphi} \quad . \quad (\text{B.5})$$

Die Reibkraft F_{R} besteht aus den drei Anteilen viskose, Coulomb'sche Reibung und Haftreibung. Die Reibung ist durch die sogenannte „Stribeck-Kurve“ approximierbar:

$$F_{\text{R}}(x_2) = f_{\text{V}} x_2 + \text{sign}(x_2) \left(F_{\text{C}} + F_{\text{H}} \exp\left(-\frac{|x_2|}{c_{\text{h}}}\right) \right) + F_{\text{Offset}} \quad . \quad (\text{B.6})$$

Die Volumenströme Q_{A} und Q_{B} berechnen sich in Abhängigkeit des Vorzeichens der Ventilkolbenstellung x_5 zu

$$Q_{\text{A}}(x_3, x_5) = \begin{cases} B_{\text{V}} x_5 \sqrt{|p_0 - x_3|} \text{sign}(p_0 - x_3) & , \text{ für } x_5 \geq 0 \\ B_{\text{V}} x_5 \sqrt{|x_3 - p_{\text{T}}|} \text{sign}(x_3 - p_{\text{T}}) & , \text{ für } x_5 < 0 \end{cases} \quad , \quad (\text{B.7})$$

$$Q_{\text{B}}(x_4, x_5) = \begin{cases} -B_{\text{V}} x_5 \sqrt{|x_4 - p_{\text{T}}|} \text{sign}(x_4 - p_{\text{T}}) & , \text{ für } x_5 \geq 0 \\ -B_{\text{V}} x_5 \sqrt{|p_0 - x_4|} \text{sign}(p_0 - x_4) & , \text{ für } x_5 < 0 \end{cases} \quad , \quad (\text{B.8})$$

mit dem Durchflussbeiwert B_{V} , der sich aus dem Nenndurchfluss Q_{N} , der Nenndruckdifferenz Δp_{N} und der maximalen Position des Steuerkolbens im Ventil $x_{5,\max}$ wie folgt ergibt:

$$B_{\text{V}} = \frac{Q_{\text{N}}}{x_{5,\max} \sqrt{0,5 \Delta p_{\text{N}}}} \quad . \quad (\text{B.9})$$

Auf Grund der Normierung der Differentialgleichung des Ventils ist $x_{5,\max}$ dimensionslos. Bei Betrachtung des von Lufteinschlüssen, von der Temperatur und besonders vom Druck abhängigen Ersatzkompressionsmoduls E'_{Fl} gilt nach Lee (1977):

$$E'_{\text{Fl}}(p) = \frac{E_{\text{Fl}}}{2} \log \left(100 \left(0,9 \frac{p}{p_{\max}} + 0,03 \right) \right) \quad . \quad (\text{B.10})$$

Für Ventile mit einer um ein bis zwei Größenordnungen schnelleren Dynamik als die des Zylinders ist die Vereinfachung des Ventils als P-Glied mit der proportionalen Verstärkung K_V zulässig. Somit ergibt sich aus einem Zustandsmodell 6. Ordnung folgendes Modell 4. Ordnung:

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_{Zy1} &= \dot{x}_1 = x_2 \\
 \ddot{y}_{Zy1} &= \dot{x}_2 = \frac{1}{m_{\text{ges}}(x_1)} \left(\left(x_3 - \frac{x_4}{\varphi} \right) A_K - F_R(x_2) - F_S \right) \\
 \dot{p}_A &= \dot{x}_3 = \frac{E'_{F1}(x_3)}{V_A(x_1)} (-A_K x_2 + Q_A(x_3) K_V U) \\
 \dot{p}_B &= \dot{x}_4 = \frac{E'_{F1}(x_4)}{V_B(x_1)} \left(\frac{A_K}{\varphi} x_2 + Q_B(x_4) K_V U \right)
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

mit den Volumenströmen

$$Q_A(x_3) = \begin{cases} B_V \sqrt{|p_0 - x_3|} \operatorname{sign}(p_0 - x_3) & , \text{ für } U \geq 0 \\ B_V \sqrt{|x_3 - p_T|} \operatorname{sign}(x_3 - p_T) & , \text{ für } U < 0 \end{cases} \quad \text{und} \tag{B.12}$$

$$Q_B(x_4) = \begin{cases} -B_V \sqrt{|x_4 - p_T|} \operatorname{sign}(x_4 - p_T) & , \text{ für } U \geq 0 \\ -B_V \sqrt{|p_0 - x_4|} \operatorname{sign}(p_0 - x_4) & , \text{ für } U < 0 \end{cases} . \tag{B.13}$$