E I N E   K L A S S I F I Z I E R U N G
V O N
H J E L M S L E V - R I N G E N
U N D
H J E L M S L E V - E B E N E N

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der Naturwissenschaften

der Justus Liebig - Universität Giessen

(Fachbereich Mathematik)

vorgelegt von

Günter Törner

aus Giessen

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG

Die Klassifizierung bzw. Charakterisierung mathematischer Objekte ist ein Ziel jeder mathematischen Theorie. Durch Ordnen einerseits und Konstruieren andererseits versucht man, sich einen möglichst weiten Überblick über die Vielfalt der zur Debatte stehenden Objekte zu verschaffen. Wie etwa die Theorie endlicher projektiver Ebenen oder auch die Gruppentheorie zeigen, wirft schon allein das Studium endlicher Strukturen oft fast unüberwindbare Probleme auf. Die Schwierigkeiten vermehren sich im allgemeinen, wenn man die Endlichkeitsbedingung fallen lässt. Schwächere Endlichkeitsbedingungen, etwa Kettenbedingungen bei Gruppen und Ringen, ermöglichen ein sinnvolles Klassifizieren, jedoch ist es im allgemeinen nicht zu umgehen, dass die Charakterisierungen, d.h. die 'Siebe', gröber werden.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine Möglichkeit der Charakterisierung von geometrischen Objekten, den projektiven Hjelmslev-Ebenen (H-Ebenen), aufzuzeigen. H-Ebenen sind projektive Inzidenzstrukturen, in denen zwei Punkte u.U. mehr als eine Verbindungsgerade bzw. zwei Geraden mehr als einen Schnittpunkt haben. Für desarguessche H-Ebenen hat KLINGENBERG (1955) das Koordinatisierungsproblem gelöst. Es ergeben sich als Koordinatenbereiche Ringe (Hjelmslev-Ringe oder kurz: H-Ringe), deren Links-(Rechts-)Idealverband linear geordnet ist, deren Nullteiler zweiseitig sind und das maximale Ideal bilden. Es hat sich im Laufe der Zeit gezeigt, dass bei den desarguesschen H-Ebenen die Struktur des Idealverbandes des zugehörigen H-Ringes wesentliche geometrische Information enthält. Das belegen Arbeiten von LÜNEBURG [11], ARTMANN [2], DRAKE [4] und BACON [3]. Dabei stand das Studium der uniformen H-Ebenen - im desarguesschen Fall besteht der Idealverband des Koordinatenringes aus genau einem von Null verschiedenen Hauptideal - zeitlich an erster Stelle [11]. Danach folgten die Verallgemeinerungen von ARTMANN und DRAKE auf H-Ebenen, bei denen die Koordinatenbereiche der zugehörigen desarguesschen Strukturen endlich viele Hauptideale besitzen. Es zeigte sich, dass es geometrisch sinnvoll ist, z.B. für eine natürliche Zahl n die H-Ebenen n-ter Stufe [2] als eine Klasse von gleichartigen Strukturen zu behandeln. Unter diesem Gesichtspunkt wären die projektiven Ebenen als eine geschlossene Klasse anzusehen. Offen war bislang die Frage nach einem geeigneten Klassifizierungsmerkmal für H-Ebenen, die nicht in die obigen Schemata passen. Dabei scheint es sinnvoll zu sein, solche Charakterisierungen zu wählen, die für desarguessche H-Ebenen die Struktur des Idealverbandes widerspiegeln. Ein geeignetes Hilfsmittel stellen die in §1 eingeführten Kongruenzrelationen dar. Kongruenzrelationen sind Äquivalenzrelationen auf der Punkt- bzw. Geradenmenge, die im wesentlichen mit den geometrischen Operationen - Verbinden, Schneiden - verträglich sind. Diese sind schon durch die Äquivalenzklasse eines einzigen Punktes bestimmt (1.5). Ferner ist die Menge der Kongruenzrelationen einer H-Ebene linear geordnet (1.7), was die gewünschte Verwandtschaft mit dem Idealverband der desarguesschen Koordinatenbereiche aufzeigt. Als charakteristisches Merkmal einer H-Ebene nehmen wir daher den Ordnungstyp der Menge der Kongruenzrelationen. Eine Untersuchung dieser Menge zeigt ferner, dass gewisse Kongruenzrelationen vor anderen ausgezeichnet sind, wodurch wir, insbesondere wenn die Menge der Kongruenzrelationen unendlich ist, zusätzliche Strukturaussagen erhalten (§2). Damit können wir dann schliesslich in §4 die uniformen H-Ebenen und die von ARTMANN betrachteten H-Ebenen der Höhe n in unser Konzept einordnen. Zuvor müssen wir aber einen Zusammenhang zwischen Morphismen von H-Ebenen und den Kongruenzrelationen herstellen. Wie der Alternativsatz in §1 zeigt, lassen H-Ebenen unter vernünftig erscheinenden Zusatzvoraussetzungen im wesentlichen nur zwei verschiedenartige Morphismenbegriffe zu: nachbarschaftstreue bzw. ferntreue Morphismen. Diese beiden Arten von Morphismen sind naheliegende Verallgemeinerungen der von ARTMANN eingeführten verfeinerten Nachbarschaften [1]. Es stellt sich nun heraus, dass genau die ferntreuen Morphismen Kongruenzrelationen induzieren bzw. von Kongruenzrelationen induziert werden.

Grundlegende Eigenschaften der Kongruenzrelationen, etwa die eindeutige Bestimmtheit durch die Klasse eines Punktes bzw. die lineare Ordnung in der Menge der Kongruenzrelationen, finden ihren Niederschlag in zwei Isomorphiesätzen, die wiederum zusammen mit einem Zerlegungssatz für ferntreue Morphismen die Auszeichnung spezieller Kongruenzrelationen in §2 rechtfertigen.

Um schliesslich unser Konzept im desarguesschen Fall in §6 zu interpretieren, beschäftigen wir uns in §5 zunächst eingehend mit den Eigenschaften von H-Ringen bzw. deren Idealverbände. Der Idealverband eines H-Ringes ist genau dann diskret und endlich, wenn der Ring links-(rechts-)noethersch oder links-(rechts-)artinsch ist. Für H-Ringe sind daher die aufsteigende und die absteigende Kettenbedingung gleichwertig. Die noetherschen H-Ringe besitzen genau ein Primideal. Allgemein gilt für H-Ringe mit genau einem Primideal, dass alle Ideale zweiseitig sind und jedes epimorphe Bild wieder ein H-Ring ist. Die Hauptideale eines solchen Ringes bilden eine linear geordnete archimedische Halbgruppe, die man bekanntlich alle überblickt.

Wenngleich, wie schon oben erwähnt, die Kettenbedingungen für H-Ringe die Klasse der Ringe und damit die der zugehörigen desarguesschen Strukturen stark einengen, gerade aber besonders einfache Objekte beschreiben [2], so erhält man, fordert man die Kettenbedingungen nur für die Menge der Primideale, eine Klasse von Ringen, die ebenfalls vom geometrischen Standpunkt aus interessant sind: jedes ferntreue epimorphe Bild einer H-Ebene über einem solchen H-Ring ist wieder eine H-Ebene.

Um diesen Satz beweisen zu können, benötigen wir einige wesentliche und interessante Aussagen über die Annullatoren in H-Ringen. Dabei stossen wir auf ein bislang ungelöstes Problem von OSOFSKY [13], das sich ihr aus einem gänzlich anderen Zusammenhang stellte.

In §6 schliesslich stellen wir den schon öfters angesprochenen Zusammenhang zwischen den Kongruenzrelationen einer H-Ebene und dem Idealverband des zugehörigen Koordinatenringes her. Die oben erwähnten speziellen Kongruenzrelationen können nun im Idealverband als Annullatorideale bzw. als Primideale gedeutet werden. Damit ist das geometrische Klassifizierungsproblem algebraisiert. So können wir nun über die Abhängigkeit von beweistechnisch notwendigen Zusatzbedingungen an die Kongruenzrelationen in §2 entscheiden. Offene geometrische Probleme lassen sich algebraisch verstehen, während ringtheoretische Eigenschaften in geometrische übersetzt werden können. Schliesslich wird damit die Frage aufgeworfen, inwieweit Eigenschaften des Koordinatenringes, die jetzt über die Ordnungstypen gewisser Mengen von Kongruenzrelationen und damit unabhängig von einer Koordinatisierung formuliert werden können, als Strukturmerkmale für H-Ebenen allgemeingültig sind.

Der letzte Abschnitt (§7) dieser Arbeit enthält ein Konstruktionsverfahren für H-Ringe, das uns eine Reihe von Beispielen bzw. Gegenbeispielen liefert.

Zum Schluss möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. B. Artmann bedanken, der diese Arbeit angeregt, wesentlich gefördert und betreut hat.

VEREINBARUNGEN

Die Mengeninklusion bezeichnen wir mit $\subseteq$, während $A \subset B$ stets $A \subseteq B$ und $A \neq B$ beinhaltet. Für Elemente A,B eines Unterverbandes $\mathcal{L}(V)$ eines Potenzmengenverbandes bedeutet $A \subset B$ stets A ist unterer Nachbar von B in $\mathcal{L}(V)$, d.h. $A \subset X \subseteq B$ und $X \in \mathcal{L}(V)$ hat X = B zur Folge. Wenn Verwechslungen bzgl. einer Grundmenge ausgeschlossen sind, schreiben wir für $A \setminus B$ auch B^c.
Mit $\neg$ kürzen wir die Verneinung von Aussagen ab.
Alle Ringe haben ein neutrales Element der Multiplikation, das auch Einselement aller Unterringe sein soll. Der Begriff 'Ideal' wird als Oberbegriff für Linksideal, Rechtsideal (die verschieden vom Ring sein sollen) verstanden. Daher sprechen wir auch sinngemäss von zweiseitigen Idealen.
Duo-Ringe sind dann nicht notwendig kommutative Ringe, deren sämtliche Ideale zweiseitig sind. Die Multiplikation in einem Körper ist nicht notwendig kommutativ.

§ 1. KONGRUENZRELATIONEN UND MORPHISMEN IN PROJEKTIVEN HJELMSLEV-EBENEN

In diesem ersten Paragraphen werden wir uns mit Kongruenzrelationen und Morphismen in projektiven Hjelmslev-Ebenen beschäftigen. Die Ergebnisse über Kongruenzrelationen werden wir dann in §2 auswerten, während das Resultat des Hauptsatzes über Morphismen uns eine Rechtfertigung gibt, im folgenden eine spezielle Klasse von Morphismen zu untersuchen, die nun ihrerseits in engem Zusammenhang mit den Kongruenzrelationen steht. Da dieser Hauptsatz zeigt, dass unter naheliegenden Voraussetzungen die Morphismen im wesentlichen in zwei Klassen eingeteilt werden können, werden wir ihn oft als Alternativsatz ansprechen.

A. Hauptsätze über Kongruenzrelationen

1.1 Def.: (KLINGENBERG [9,S.100])
Eine Inzidenzstruktur $\mathfrak{H} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, I)$ heisst eine projektive Hjelmslev-Ebene, kurz H-Ebene, wenn $\mathfrak{H}$ folgende drei Axiome erfüllt:

(H1) $\forall P,Q\in\mathfrak{P}\ \exists g\in\mathfrak{G} : P,Q\ I\ g$

(H2) $\forall g,h\in\mathfrak{G}\ \exists P\in\mathfrak{P} : P\ I\ g,h$

Zwei Punkte P,Q von $\mathfrak{H}$ heissen benachbart, in Zeichen $P \circ Q$, wenn es zwei verschiedene Geraden g,h mit $P,Q\ I\ g,h$ gibt. Dual dazu ist $g \circ h$ definiert. Sind Punkte P,Q (Geraden g,h) nicht benachbart, so schreiben wir $P \not\circ Q$ ($g \not\circ h$) und nennen sie oft entfernt (kreuzend)!

(H3) Es gibt eine gewöhnliche projektive Ebene $\mathfrak{P}$ und einen surjektiven Inzidenzmorphismus $\alpha : \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{P}$ mit

$$\alpha P = \alpha Q \iff P \circ Q$$
$$\alpha g = \alpha h \iff g \circ h$$

Nach (H3) sind die Nachbarschaftsrelationen für Punkte und Geraden Äquivalenzrelationen und die Faktorstruktur $\mathfrak{H}/_\circ$ ist eine zu $\mathfrak{P}$ isomorphe projektive Ebene. Wir setzen im folgenden meist $\bar{\mathfrak{H}} = \mathfrak{P}$ und nennen $\bar{\mathfrak{H}}$ das kanonisch homomorphe Bild und die Projektion $\alpha : \mathfrak{H} \to \bar{\mathfrak{H}}$ den kanonischen Homomorphismus von $\mathfrak{H}$.

Bemerkungen: 1. Auf jeder Geraden g gibt es Punkte P, Q, die nicht benachbart sind. Daher können wir jede Gerade mit der Menge der mit ihr inzidierenden Punkte identifizieren, wenn wir die Inzidenzrelation durch die ε-Relation für Mengen interpretieren.

2. $P \circ Q$ und $P \not\circ R \Longrightarrow PR \circ QR$
$g \circ h$ und $g \not\circ k \Longrightarrow g \cap k \circ h \cap k$

3. Wegen 2. lässt sich die Nachbarschaft von Geraden auf die von Punkten zurückführen.
$g \circ h \Longleftrightarrow \forall P\ I\ g\ \exists Q\ I\ h: P \circ Q$ und $\forall P\ I\ h\ \exists\ Q\ I\ g: P \circ Q$

Im folgenden wird sich zeigen, dass Relationen mit ähnlichen Eigenschaften wie die Nachbarschaftsbeziehung (2.,3.) von Bedeutung für die Charakterisierung von H-Ebenen sind. Verbinden und Schneiden sind die Grundoperationen der projektiven Geometrie. Deshalb wird man von Äquivalenzrelationen, welche diese Operationen respektieren, besonders günstige Eigenschaften erwarten. In der H-Geometrie sind natürlich beim Projizieren entsprechende Voraussetzungen zu machen. Verbunden werden nur entfernte Punkte, geschnitten nur kreuzende Geraden. Das veranlasst uns zu folgender Definition:

1.2 Def.: Ist τ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Punkte einer H-Ebene und setzt man für Geraden g,h
$g \tau h \Longleftrightarrow \forall P\ I\ g\ \exists Q\ I\ h: P \tau Q$ und $\forall P\ I\ h\ \exists Q\ I\ g: P \tau Q$,
so heisst τ eine Kongruenzrelation (K-Rel.), wenn gilt:

(K1) $\tau \subseteq \circ$

(K2) $\forall P,Q,R: P \tau Q$ und $P \not\circ R \Longrightarrow PR \tau QR$
$\forall g,h,k: g \tau h$ und $g \not\circ k \Longrightarrow g \cap k \tau h \cap k$
(Invarianz bei Projektionen)

Bemerkungen: 1. Wir setzen wie üblich $P = Q \Longleftrightarrow (P,Q) \varepsilon\, \mathrm{id}$ und entsprechend $P \tau Q \Longleftrightarrow (P,Q) \varepsilon \tau$ und $P \circ Q \Longleftrightarrow (P,Q) \varepsilon \circ$.

2. Da τ Äquivalenzrelation ist, haben wir trivialerweise $\mathrm{id} \subseteq \circ$, also $\mathrm{id} \subseteq \tau \subseteq \circ$.

3. Mit $[P]_\tau$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse des Punktes P bzgl. τ .

1.3 Lemma: Sei $\mathcal{H}$ eine H-Ebene und τ eine K-Rel. Dann gilt:
$\forall P,Q \varepsilon \mathfrak{P}\ \forall\ g,h \varepsilon \mathcal{G}$ mit $P\ I\ g,\ Q\ I\ h$:
$|[P]_\tau \cap g| = |[Q]_\tau \cap h|$.

<u>Beweis</u>: Man überlegt sich, dass man sich auf den Fall $P = Q$, $P \mathrel{I} g,h$ beschränken kann. (K1), (K2) gestatten nun die Konstruktion einer bijektiven Abbildung - Projektion von einem nicht zu P benachbarten Punkt in einer nicht zu g,h benachbarten Richtung - von $[P]_\tau \cap g$ in $[Q]_\tau \cap h$.

1.4 <u>Lemma</u>: Sei τ K-Rel. Dann gilt für kreuzende Geraden g,h und Punkte P,Q,R mit $P \mathrel{I} g,h$ und $Q \mathrel{I} g$, $R \mathrel{I} h$:

$$Q \tau R \Longrightarrow P \tau Q \text{ und } P \tau R.$$

<u>Beweis</u>: Wähle $S \mathrel{I} h$, $S \not\!\! \circ R$. Dann ist $SR = h \tau SQ$. $g \not\!\! \circ h$ impliziert $P \tau Q$ und wegen $Q \tau R$ haben wir $P \tau R$.

Eine wesentliche Aussage liefert nun der folgende Satz. Ein ähnliches Resultat für gewöhnliche projektive Ebenen wurde von ROW [16] bewiesen.

1.5 <u>Satz</u>: In einer H-Ebene ist jede Kongruenzrelation durch den Schnitt einer Äquivalenzklasse eines Punktes mit einer inzierenden Geraden festgelegt.

mit anderen Worten: Sei A Punkt auf g, τ_1, τ_2 K-Rel. und $[A]_{\tau_1} \cap g \subseteq [A]_{\tau_2} \cap g$, so gilt $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Zum Beweis benötigen wir den folgenden Hilfssatz:

1.6 <u>Lemma</u>: In einer H-Ebene ist jede K-Rel. durch die Äquivalenzklasse eines Punktes festgelegt.

<u>Beweis</u>: Wir zeigen: Sei A Punkt in $\mathcal{H}$ und τ_1, τ_2 K-Rel. mit $[A]_{\tau_1} \subseteq [A]_{\tau_2}$, so ist für alle Punkte B stets $[B]_{\tau_1} \subseteq [B]_{\tau_2}$.

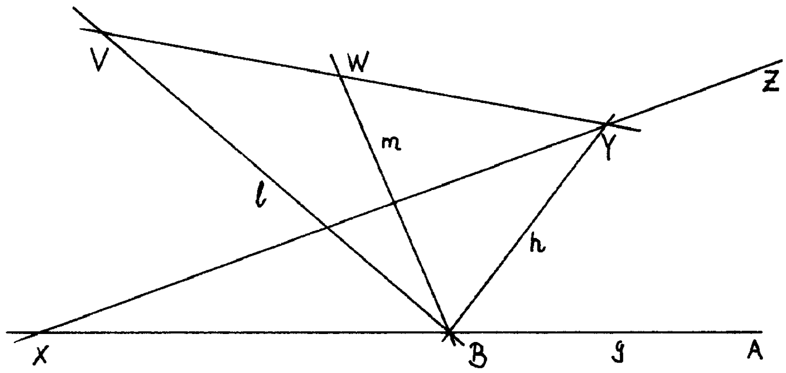

Fig. 1

Es genügt, die Behauptung für Punkte $B \not\!\! \circ A$ zu verifizieren. Ist $|[B]_{\tau_1}| = 1$, so sind wir fertig. Also können wir nun davon ausgehen, dass es einen Punkt $Y \in [B]_{\tau_1}$, verschieden von B, gibt. Mit 1.3 existiert dann auf jeder Geraden g durch B ein solcher Punkt. Sei nun $AB = g$, $Y \in [B]_{\tau_1}$ und $Y \not\mathrel{I} g$. Wir wählen ferner $X \mathrel{I} g$ mit $X \not\!\! \circ A,B$. Sei h eine mit Y und B inzidierende Gerade.

Wegen $X \varnothing Y$ gilt $g = XB \,\tau_1\, XY$. Also ist $XY \cap [A]_{\tau_1} \neq \varnothing$ und wegen $[A]_{\tau_1} \subseteq [A]_{\tau_2}$ muss $XY \cap [A]_{\tau_2} \neq \varnothing$ sein. Somit existiert ein Punkt $Z \; I \; XY$ mit $Z \,\tau_2\, A$ und $Z \varnothing X$. Wegen $XY = XZ$ ist $g \,\tau_2\, XY$.

Fall 1: $h \varnothing g$. Mit (K2) folgt sofort $Y \varepsilon [B]_{\tau_2}$.

Fall 2: $h \circ g$. Wähle $m, l \; I \; B$ mit $m \varnothing l \varnothing g \varnothing m$ und $V \; I \; l$ mit $V \varnothing B$. Setze $W = VY \cap m$. Wegen $Y \varepsilon [B]_{\tau_1}$ gilt $VY \,\tau_1\, l$, also $W \varepsilon [B]_{\tau_2}$. Wegen $m \varnothing g$ ist Fall 1 anwendbar, d.h. $W \varepsilon [B]_{\tau_2}$. Da $W \varnothing V$ ist, gilt $VW = VY \,\tau_2\, l$, daher ist mit $h \varnothing l$ auch $Y \varepsilon [B]_{\tau_2}$. Damit ist für jedes $B \varepsilon \mathcal{P}$ bewiesen: $[B]_{\tau_1} \subseteq [B]_{\tau_2}$.

Mit (K2) überträgt sich das Ergebnis auf Geraden, d.h.

$$\forall g \varepsilon \mathcal{G} : [g]_{\tau_1} \subseteq [g]_{\tau_2}.$$

Mit Hilfe dieses Lemmas lässt sich der Satz nun leicht beweisen.

Beweis von 1.5: Wir zeigen:

$A \; I \; g$ und $[A]_{\tau_1} \cap g \subseteq [A]_{\tau_2} \cap g \implies [A]_{\tau_1} \subseteq [A]_{\tau_2}$.

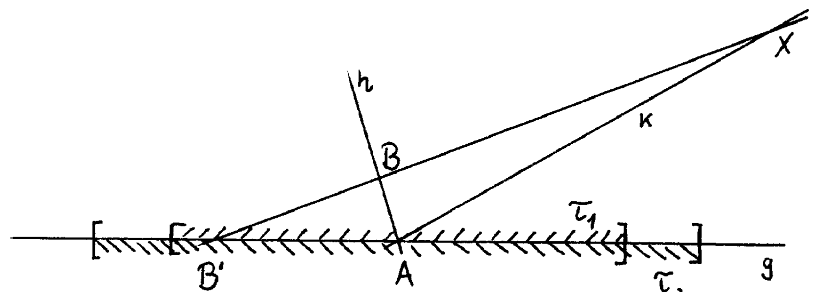

Fig. 2

Ist $|[A]_{\tau_1}| = 1$, so sind wir fertig. Also können wir davon ausgehen, dass wegen 1.3 ein Punkt B mit $B \not{I} \; g$ und $B \varepsilon [A]_{\tau_1}$ existiert.

Sei $h \; I \; A, B$, dann gibt es mindestens eine Gerade $k \; I \; A$ mit $k \varnothing g, h$. Wir wählen $X \; I \; k$, $X \varnothing A$ und erhalten XB, wobei $k = XA \,\tau_1\, XB$ ist. Sei $B' = XB \cap g$. Wegen $k \varnothing g$ ist $B' \,\tau_1\, A$, also $B' \varnothing X$. Da $[A]_{\tau_1} \cap g \subseteq [A]_{\tau_2} \cap g$ und $B' \; I \; g$ ist, sind die Geraden $B'X = BX$ und AX τ_2-kongruent, daher also auch $B \,\tau_2\, A$.

Naheliegend ist nun die Frage nach einer Struktur der Menge der K-Rel. Desarguessche H-Ebenen haben als Koordinatenbereiche H-Ringe (§5), welche Kettenringe sind. Man vermutet, dass Ideale in engem Zusammenhang mit K-Rel. stehen. Dennoch ist es aber erstaunlich, dass wir schon im allgemeinen Fall, d.h. ohne jegliche Voraussetzungen in Form von Schliessungsbedingungen bzw. Transitivitätsaussagen, die lineare Ordnung der K-Rel. nachweisen können.

1.7 <u>Satz</u>: Die Menge der K-Rel. einer H-Ebene ist bzgl. der Inklusion linear geordnet.

<u>Beweis</u>: Mit 1.5 und 1.6 genügt es, die Vergleichbarkeit der Kongruenzklassen von τ_1 bzw. τ_2 bezüglich eines Punktes nachzuweisen. Wir zeigen für $A \in \mathfrak{P}$: $[A]_{\tau_2} \not\subseteq [A]_{\tau_1} \Longrightarrow [A]_{\tau_1} \subseteq [A]_{\tau_2}$.
O.B.d.A. können wir voraussetzen, dass $[A]_{\tau_1}$, $[A]_{\tau_2}$ mehr als einen Punkt enthalten. Sei $X \in [A]_{\tau_2}$ und $X \notin [A]_{\tau_1}$. Wir werden nun feststellen, dass dann

$$\forall Y \in \mathfrak{P}: \; Y \in [A]_{\tau_1} \Longrightarrow Y \in [A]_{\tau_2} \text{ gilt.}$$

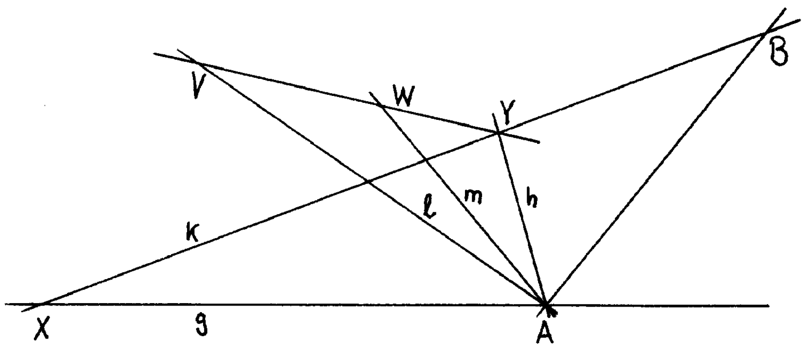

Fig. 3

Sei $g \; I \; A,X$, $h \; I \; A,Y$ und $k \; I \; X,Y$, wobei $Y \in [A]_{\tau_1}$ mit $A \neq Y$ sei. Es ist dann $X \neq Y$, aber $X \circ Y$. Auf k wählen wir einen Punkt $B \emptyset Y$. Wäre nun $k \emptyset g$, dann wäre mit 1.4 stets $X \tau_1 A$, was der Voraussetzung $X \notin [A]_{\tau_1}$ widerspricht. Also ist in jedem Falle $g \circ k$.

<u>Fall 1</u>: $g \emptyset h$. Wegen $g \emptyset h$ ist $h \emptyset k$. $Y = k \cap h = XB \cap h \; \tau_2 \; AB \cap h = A$, aufgrund von (K2) also $Y \in [A]_{\tau_2}$.

<u>Fall 2</u>: $g \circ h$. Wähle $l \; I \; A$, $l \emptyset g$ und $V \emptyset A$ mit $V \; I \; l$. Wegen $h \circ g \circ k$ gibt es $m \emptyset l,g$ mit $A \; I \; m$. Mit $A \tau_1 Y$ folgt $VY \tau_1 l$ und $W = VY \cap m$ ist eindeutig bestimmt. Also ist $W \tau_1 A$. Für $m \emptyset g$, $W \in [A]_{\tau_1}$, $X \notin [A]_{\tau_1}$, $X \in [A]_{\tau_2}$ ist Fall 1 anwendbar, also $W \in [A]_{\tau_2}$.
Nun ist $V \emptyset W$, also $VY \; \tau_2 \; VA = l$ und mit $h \emptyset l$ ist $Y \in [A]_{\tau_2}$. Damit ist bewiesen:

$$[A]_{\tau_2} \not\subseteq [A]_{\tau_1} \Longrightarrow [A]_{\tau_1} \subseteq [A]_{\tau_2}.$$

B. Morphismen von H-Ebenen, Alternativsatz

1.8 Def.: [20,2.1]

Unter einer Hjelmslev-Ebene $(\mathcal{H},\mathfrak{B})$ mit Basisviereck verstehen wir eine projektive H-Ebene mit einem Quadrupel von Punkten $\mathfrak{B} = (P_1,P_2,P_3,E)$ mit der Eigenschaft: $P_1P_2P_3E$ ist ein nicht ausgeartetes Viereck [8,A.3].

Bemerkung: Jede projektive H-Ebene besitzt mindestens ein Basisviereck!

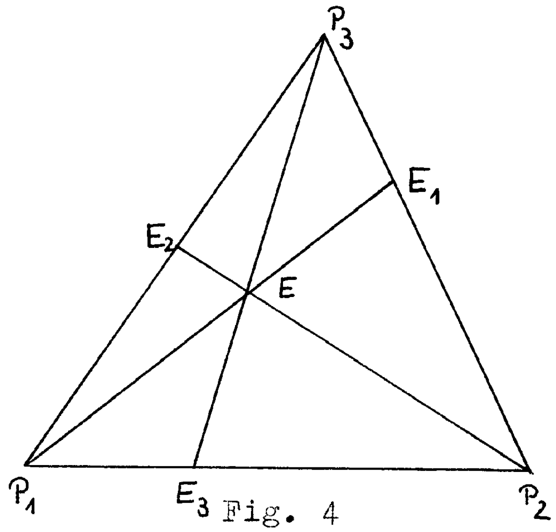

Fig. 4

Zur Koordinatisierung von H-Ebenen ist es nötig, ein Basisviereck auszuzeichnen, das eng mit dem Koordinatenbereich verbunden ist. Will man die geometrischen Abbildungen durch geeignete algebraische Morphismen der Koordinatenbereiche beschreiben, so ist es sinnvoll zu fordern, dass die geometrischen Abbildungen die Basisvierecke respektieren. Daher definieren wir:

1.9 Def.: [20,2.2]

Unter einem basiserhaltenden H-Morphismus zweier H-Ebenen $(\mathcal{H},\mathfrak{B})$, $(\mathcal{H}',\mathfrak{B}')$ verstehen wir eine Punktabbildung φ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\varphi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ ist inzidenzerhaltend.

(2) Sind (P_1,P_2,P_3,E) bzw. (P_1',P_2',P_3',E') die Basisvierecke von $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{H}'$, so gilt:
$\varphi P_i = P_i'$ $(i = 1,2,3)$ und $\varphi E = E'$. Wir schreiben unter diesen Bedingungen: $\varphi: (\mathcal{H},\mathfrak{B}) \longrightarrow (\mathcal{H},\mathfrak{B}')$.

Wie schon in [20] gezeigt ist, lässt sich für desarguessche Ebenen ein solcher basiserhaltender H-Morphismus noch nicht hinreichend einfach durch einen Morphismus der Koordinatenbereiche beschreiben. Daher setzen wir:

1.10 Def.: [20,2.3]

Ein basiserhaltender H-Morphismus φ heisst regulärer H-Morphismus, wenn gilt:

$i, j \varepsilon \{1,2,3\}$ und $X \circ P_i$ und $\varphi X \circ \varphi P_j \Longrightarrow i = j.$

Dies besagt z.B., dass Nachbarn von P_1 durch φ nicht in Nachbarn von $\varphi P_2 = P_2'$ abgebildet werden können.

1.11 Lemma: Sei $E_i = P_i E \cap P_j P_k$ bzw. $E_i' = P_i' E' \cap P_j' P_k'$ mit $i \neq j \neq k \neq i$, $i, j \varepsilon \{1,2,3\}$ und φ ein basiserhaltender H-Morphismus. Dann gilt: $E_i \not\circ P_j, E$ und $\varphi E_i = E_i'$.

Der Beweis ist offensichtlich.

1.12 Satz: Alternativsatz

Seien $(\mathcal{H}, \mathfrak{B}), (\mathcal{H}', \mathfrak{B}')$ H-Ebenen und $\varphi : (\mathcal{H}, \mathfrak{B}) \longrightarrow (\mathcal{H}', \mathfrak{B}')$ ein regulärer H-Morphismus. Dann gilt:

a) $\forall X, Y \varepsilon \mathfrak{P} : X \not\circ Y \Longrightarrow \varphi X \not\circ \varphi Y$

oder

b) $\forall X, Y \varepsilon \mathfrak{P} : X \circ Y \Longrightarrow \varphi X \circ \varphi Y.$

Beweis: 1. Gilt für alle Punkte X,Y: $X \not\circ Y \Longrightarrow \varphi X \not\circ \varphi Y$, dann sind wir fertig.

2. Wir gehen davon aus, dass es Punkte A,B mit

(1) $\quad A \not\circ B$ und $\varphi A \circ \varphi B$

gibt und zeigen: $\forall X, Y \varepsilon \mathfrak{P} : X \circ Y \Longrightarrow \varphi X \circ \varphi Y.$

Wir werden dabei so vorgehen, dass wir in 2.1 den wesentlichen Beweisschritt durchführen, wobei wir von einer speziellen Situation ausgehen. 2.2 bis 2.4 dienen dann lediglich der Herstellung dieser speziellen Lage.

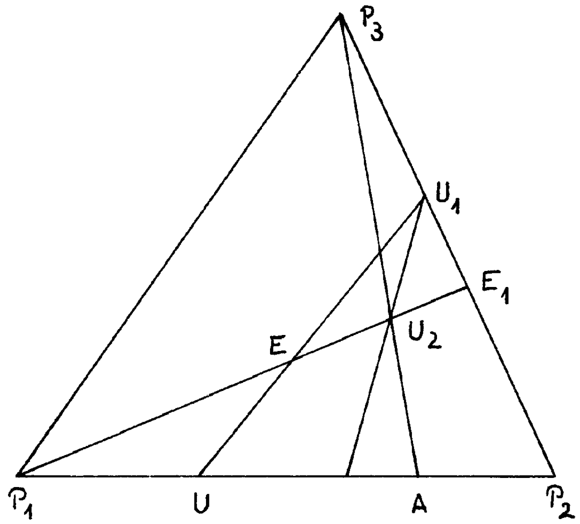

Fig. 5

2.1 Wegen (1) gibt es Punkte A,B mit $A \not\circ B$ und $\varphi A \circ \varphi B$. Wie wir weiter unten (2.2) belegen werden, können wir o.B.d.A. $B = P_2$, $A \; I \; P_1 P_2$ setzen. Dann ist $\varphi A \circ \varphi P_2 = P_2'$, wobei $P_2 \not\circ A$ ist.

Annahme: Es gibt Punkte U,V mit

(2) $\quad U \circ V$ und $\varphi U \not\circ \varphi V.$

Auch hier gehen wir von einer speziellen Lage der Punkte aus, was in (2.4) gerechtfertigt wird. Sei also $V = P_1$, $U \mathrel{I} P_1P_2$, daher $\varphi U \not\circ \varphi P_1$, während $U \circ P_1$ gilt. Wir setzen $U_1 = UE \cap P_2P_3$. Wegen $U \circ P_1$ ist $U_1 \circ E$. Sei $U_2 = AP_3 \cap P_1E$. Wegen $A \not\circ P_2$ ist $U_2 \not\circ E_1$. Sei $W = U_1U \cap P_1P_2$. Dann ist sicher $W \circ P_1$. $\varphi U \not\circ \varphi P_1$ impliziert $\varphi U_1 \not\circ \varphi E_1$ und $\varphi A \circ \varphi P_2$ hat $\varphi U_2 \circ \varphi E_1$ zur Folge. Also ist $\varphi U_1 \varphi U_2 \circ \varphi P_2 \varphi P_3$, d.h. $\varphi W \circ \varphi P_2$. $W \circ P_1$ und $\varphi W \circ \varphi P_2$ stehen aber im Widerspruch zur Voraussetzung, dass φ regulärer H-Morphismus ist. Daher ist die Annahme falsch, d.h. es gilt

$$\forall X, Y \in \mathcal{R} : X \circ Y \implies \varphi X \circ \varphi Y.$$

Die Beweisschritte 2.2 - 2.4 dienen, wie schon oben erwähnt, der Rechtfertigung der speziellen Lage der in (1) bzw. (2) gewählten Punkte.

2.2 Wir zeigen: Es gibt einen Basispunkt P_i ($i \in \{1,2,3\}$) und einen Punkt $A \mathrel{I} P_iP_j$ ($i \neq j$, $j \in \{1,2,3\}$), die (1) erfüllen. Seien nun Q_1, Q_2 Punkte, die, wie in 2. vorausgesetzt, (1) erfüllen. Es gibt mindestens eine Gerade $g = Q_1P_i$, welche nicht zu Q_1Q_2 benachbart ist. Wähle $S \mathrel{I} g$ fern von P_i und Q_1. g kreuzt P_iP_j oder P_iP_k, etwa P_iP_k.

Ist $\varphi S \not\circ \varphi Q_1$, verfahre wie folgt: Ist $\varphi S \not\circ \varphi P_i$ und $\varphi P_iP_k \not\circ \varphi g$, projiziere Q_1 und Q_2 von S auf P_iP_k. Das Bild von Q_1 ist P_i, das von Q_2 sei T. Dann gilt $P_i \not\circ T$ und $\varphi P_i \circ \varphi T$, wobei T auf einer Basisgeraden liegt. Ist $\varphi S \not\circ \varphi P_i$ und $\varphi P_iP_k \circ \varphi g$, so ist, da φ regulärer H-Morphismus ist, sicher $\varphi P_iP_j \not\circ \varphi g$, also $P_iP_j \not\circ g$. Projiziere nun Q_1, Q_2 von S auf P_iP_j. Die Bilder erfüllen dann die gewünschten Bedingungen von 2.2.

Ist $\varphi S \circ \varphi P_i$, so verfahre man wie oben, indem man nun S, P_i von P_j bzw. P_k auf P_iP_k bzw. P_iP_j projiziere, je nachdem ob $\varphi g \circ \varphi P_iP_k$ bzw. $\varphi g \circ \varphi P_iP_j$ oder $g \circ P_iP_k$ bzw. $g \circ P_iP_j$ ist. In allen anderen Fällen wähle P_j als Projektionszentrum. Damit ist die in 2.2 geforderte Situation auf einer Basisgeraden hergestellt.

Ist $\varphi S \circ \varphi Q_1$, so können wir davon ausgehen, dass $\varphi S \not\circ \varphi P_i$ ist, ansonsten betrachte wie oben die Punktepaare (P_i, Q_1) bzw. (P_i, Q_2). Ist $\varphi P_iP_k \not\circ \varphi g$, so projizieren wir S, Q_1 von P_k auf P_iP_j und erhalten auf P_iP_j ein Punktepaar, das (1) erfüllt.

Ist $\varphi P_iP_k \circ \varphi g$, so kann, da φ regulär ist, g nicht zu P_iP_j benachbart sein. In diesem Fall projizieren wir S, Q_1 von P_j

auf P_iP_k.
Wir haben damit auf einer Basisgeraden, etwa auf P_iP_j ein Punktepaar R_1, R_2 gefunden, das (1) erfüllt. Wir müssen nun einen Punkt $A \mathrel{I} P_i, P_j$ finden, der zusammen mit P_i (1) genügt.
Sei o.B.d.A. $R_1 \not\circ P_j$. Ist $\varphi R_1 \circ \varphi P_j$, so sind wir fertig.
Sei also $\varphi R_1 \not\circ \varphi P_j$, $T_1 = R_1P_k \cap EP_j$, dann ist $T_1 \not\circ P_j$, da $R_1 \not\circ P_j$

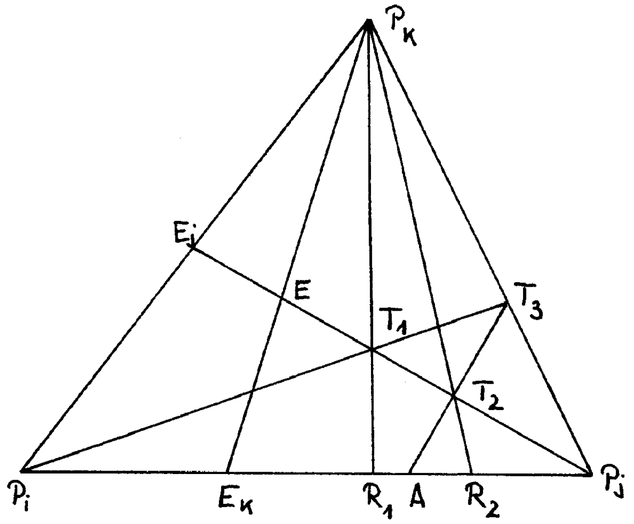

Fig. 6

ist. Sei $T_2 = R_2P_k \cap EP_j$, dann ist $T_1 \not\circ T_2$, da $R_1 \not\circ R_2$ ist. Sei ferner $T_3 = P_iT_1 \cap P_jP_k$. Wegen $T_1 \not\circ P_j$ ist $T_3 \not\circ P_j$. Setze $A = T_3T_2 \cap P_iP_j$. Wäre $P_i \circ A$, so wäre auch $A \circ T_3$, also $T_3 \circ P_j$. Wispruch! Daher ist $A \not\circ P_i$. Mit $\varphi R_1 \not\circ \varphi P_j$ ist $\varphi T_1 \not\circ \varphi P_j$. $\varphi R_1 \circ \varphi R_2$ impliziert $\varphi T_1 \circ \varphi T_2$. Sicher ist wegen $\varphi R_1 \circ \varphi R_2 \not\circ \varphi P_j$ offensichtlich $\varphi T_2 \not\circ T_3$, also $\varphi P_i \varphi T_3 \circ \varphi A \varphi T_3$. Damit haben wir $\varphi P_i \circ \varphi A$ und $P_i \not\circ A$, wie unter 2.2 verlangt.

2.3 Wir zeigen: Gibt es Punkte A, P_i mit $A \mathrel{I} P_iP_j$, die (1) erfüllen, so gibt es auch einen Punkt B mit $B \mathrel{I} P_iP_j$ und $B \not\circ P_j$, aber $\varphi B \circ \varphi P_j$. Da φ regulärer H-Morphismus ist,

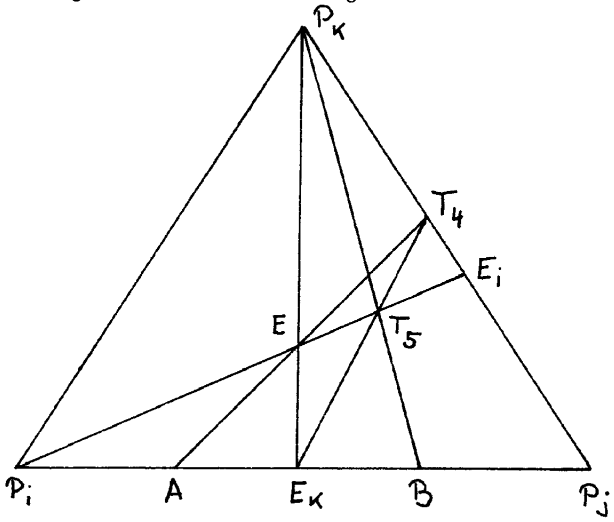

Fig. 7

folgt aus $\varphi A \circ \varphi P_i$ sofort $A \not\circ P_j$. Sei $T_4 = AE \cap P_jP_k$, $T_5 = T_4E_k \cap P_iE_i$ und $B = P_kT_5 \cap P_iP_j$. $A \not\circ P_j$ hat $T_4 \not\circ E_i$ zur Folge. Wäre $T_4 \circ P_j$, so wäre wegen $A \not\circ P_j$ auch $E \circ E_k$. Widerspruch! Wegen $E_k \not\circ P_j$ haben wir dann $T_5 \not\circ E_i$, also $B \not\circ P_j$. Mit $\varphi A \circ \varphi P_i$ folgt $\varphi T_4 \circ \varphi E_i$. Wegen

$\varphi P_i \varphi E_i \varnothing \varphi E_k \varphi T_4$ ist $\varphi T_5 \circ \varphi E_i$, also $\varphi B \circ \varphi P_j$. Damit haben wir 2.3 bewiesen. Man beachte nun, dass durch geeignete Projektionen von A bzw. B an E_1, E_2, E_3 die Situation von 2.2 für alle Basispunkte und für alle Basisgeraden realisiert werden kann.

2.4 Wie man 2.1 entnimmt, gehen wir im Beweis davon aus, dass es Punkte mit (2) gibt. Wir zeigen ähnlich wie in 2.2, dass ein Punkt als Basispunkt gewählt werden kann, während der andere mit einer Basisgerade inzidiert. Seien also U,V Punkte, die (2) erfüllen. Sind $\varphi U, \varphi V$ zu Basispunkten benachbart, also etwa $\varphi U \circ \varphi P_i, \varphi V \circ \varphi P_j$, so folgt aufgrund der Regularität von φ : $U, V \varnothing P_k$. Man projiziere U,V von P_k auf $P_i P_j$ und erhält Punkte U_1, V_1, die (2) erfüllen und mit einer Basisgeraden inzidieren. Ist lediglich etwa $\varphi U \circ \varphi P_i$, so ist sicher $U \circ V \varnothing P_j, P_k$, ferner aber auch $\varphi U, \varphi V \varnothing \varphi P_j, \varphi P_k$. Man wähle dann wieder einen geeigneten Basispunkt aus, so dass die zugehörigen Projektionen U_1, V_1 (2) erfüllen. Entsprechend verfahre man im Falle $\varphi U, \varphi V \varnothing \varphi P_i$ $(i = 1,2,3)$.
Damit haben wir Punkte U_1, V_1 auf einer Basisgeraden, etwa U_1, V_1 I $P_i P_j$, gefunden, wobei $U_1 \circ V_1$ und $\varphi U_1 \varnothing \varphi V_1$ ist. Wir zeigen nun, dass wir einen Punkt Z I P_i, P_j finden können, für den gilt: $P_i \circ Z$ und $\varphi P_i \circ \varphi Z$. Ist einer der Punkte U_1, V_1 zu einem Basispunkt benachbart, etwa $U_1 \circ P_i$, so haben wir $U_1 \circ V_1 \circ P_i$ und wenigstens einer der Punkte $\varphi U_1, \varphi V_1$ ist zu φP_i nicht benachbart, d.h. wir haben die gewünschte Situation.

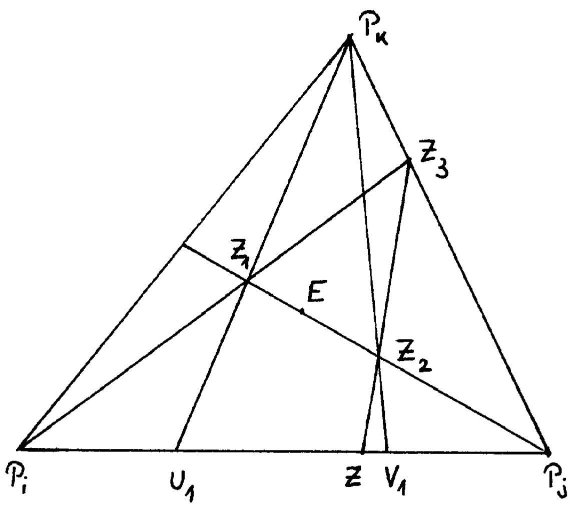

Fig. 8

Sei nun o.B.d.A. $U_1, V_1 \varnothing P_i, P_j$, so setzen wir $Z_1 = EP_j \cap U_1 P_k$, $Z_2 = EP_j \cap V_1 P_k$, $Z_3 = P_i Z_1 \cap P_j P_k$ und $Z = Z_3 Z_2 \cap P_i P_j$. Man beachte, dass alle Schnittpunkte wohldefiniert sind. Es ist $Z_1 \circ Z_2$. Wäre $Z_2 \circ Z_3$, so hätten wir $Z_2 \circ P_j$, was $V_1 \circ P_j$ zur Folge hätte. Widerspruch! Daher ist $P_i \circ Z$.

$\varphi U_1 \varnothing \varphi V_1 \Longrightarrow \varphi Z_1 \varnothing \varphi Z_2$. Da φ regulärer H-Morphismus ist, muss $\varphi Z \varnothing \varphi P_j$ sein. $\varphi Z_3 \circ \varphi P_j$ hätte $\varphi Z_1 \circ \varphi Z_2$ zur Folge. Also ist $\varphi Z_3 \varnothing \varphi P_j$ und damit auch $\varphi Z_2 \varnothing \varphi Z_3$. Daher ist $\varphi Z_3 \varphi Z_1 \varnothing \varphi Z_3 \varphi Z_2$. Wegen $\varphi P_i \varnothing \varphi Z_3$ ist $\varphi P_i \varnothing \varphi Z$, was in 2.4 zu zeigen war.

Damit ist Satz 1.12 bewiesen.

1.13 Folgerung: Gilt unter den Voraussetzungen von 1.12

$$\forall X, Y \in \mathfrak{P} : X \varnothing Y \Longrightarrow \varphi X \varnothing \varphi Y$$

$$(\forall X, Y \in \mathfrak{P} : X \circ Y \Longrightarrow \varphi X \circ \varphi Y),$$

so haben die Geraden in $\mathfrak{H}$ die gleiche Eigenschaft, d.h.

$$\forall g, h \in \mathfrak{G} : g \varnothing h \Longrightarrow \varphi g \varnothing \varphi h$$

$$(\forall g, h \in \mathfrak{G} : g \circ h \Longrightarrow \varphi g \circ \varphi h).$$

Beweis: Sei $\varphi g \circ \varphi h$. Auf g wähle Punkte P, R mit $P \varnothing R$, also $\varphi P \varnothing \varphi R$. Da φ das Basisviereck respektiert, gibt es auf h Punkte Q und S mit $\varphi P \circ \varphi Q$ bzw. $\varphi R \circ \varphi S$. Also gilt $g = PR \circ QR$ und $QR \circ QS = h$. Damit haben wir gezeigt:

$\varphi g \circ \varphi h \Longrightarrow g \circ h$ bzw. $g \varnothing h \Longrightarrow \varphi g \varnothing \varphi h$.

Der Nachweis von $g \circ h \Longrightarrow \varphi g \circ \varphi h$ verläuft ähnlich, wobei man benutzt, dass $\varphi(\mathfrak{H}, \mathfrak{B})$ nicht entartet ist.

§ 2. SPEZIELLE KONGRUENZRELATIONEN UND FAKTORSTRUKTUREN

A. Spezielle Kongruenzrelationen

Nachdem wir oben festgestellt haben, dass die Menge der K-K-Rel. bzgl. der Inklusion linear geordnet ist, werden wir versuchen, weitere Eigenschaften bzw. innere Zusammenhänge der Menge der K-Rel. aufzuzeigen.
Mit $K(\mathcal{H}) = K$ bezeichnen wir im folgenden die Menge der K-Rel. der H-Ebene $\mathcal{H}$.
Wir erinnern uns, dass die Nachbarschaft von $\mathcal{H}$ wie folgt definiert ist:

(3) $\quad P \circ Q \Longleftrightarrow \exists\, g,h \varepsilon \mathcal{G} : g \neq h$ und $P,Q \; I \; g,h.$

Man kann nun (3) so interpretieren, dass zu der K-Rel. id (siehe: $g \neq h$) eine Relation $\circ$ - die Nachbarschaftsrelation - erklärt ist. Das veranlasst uns zu folgender Verallgemeinerung.

2.1 Def.: Für $\tau \varepsilon K(\mathcal{H})$ einer H-Ebene sei

$$P \eta Q \underset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, g,h \varepsilon \mathcal{G} : \neg(g \tau h) \text{ und } P,Q\, \tau\, g,h$$

und

$$g \eta h \underset{def}{\Longleftrightarrow} \forall P \; I \; g \; \exists Q \; I \; h: P \eta Q \text{ und } \forall P \; I \; h \; \exists Q \; I \; g: P \eta Q$$

gesetzt. Ist η Äquivalenzrelation auf der Menge der Punkte und erfüllt η (K2), so heisst η die p-konjugierte Kongruenzrelation von τ und wir schreiben τ^p.

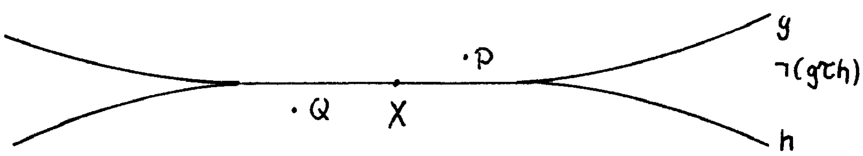

Fig. 9

Bemerkungen: 1. $P \tau g$ wird verstanden als $\exists Q \; I \; g$ mit $P \tau Q$.

2. Mit dem Hinschreiben der p-konjugierten K-Rel. wollen wir schon die Tatsache, dass die Eigenschaften von 2.1 erfüllt sind, vorausgesetzt haben.

3. $id^p = \circ$ und $\circ^p = \circ$.

4. Bei einer H-Ebene n-ter Stufe gilt $(\sim i)^p = o$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $0 < i \leq n$ (siehe 4.5.1).
5. Zur besseren Veranschaulichung verweisen wir auf ein späteres Ergebnis im desarguesschen Fall. Wird einer K-Rel. τ ein Ideal I des H-Ringes R zugeordnet, so entspricht τ^p dem Urbild (Ideal) aller Linksnullteiler des Faktorringes R/I unter der kanonischen Projektion. Dieses Ideal ist vollständig prim, daher die Bezeichnung τ^p.

Für manche Fälle ist es günstig, die Definition in einer unsymmetrischen Darstellung zu benutzen.

2.2 <u>Lemma</u>: $P \tau^p Q \iff \exists g,h \in \mathcal{G} : \neg (g \tau h)$ mit $P,Q \; I \; g$, $P \; I \; h$ und $Q \tau h$.

<u>Beweis</u>:

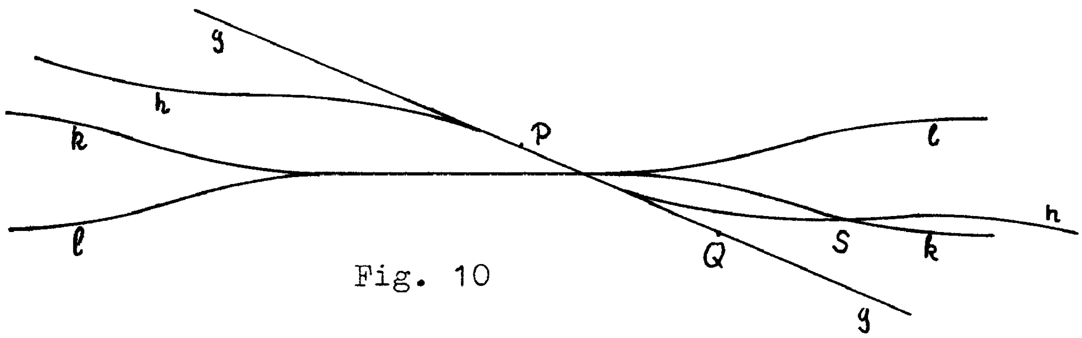

Fig. 10

$\Longrightarrow$ Sei $P \tau^p Q$ und k,l Geraden mit $\neg (k \tau l)$, $P,Q \tau k,l$.
Wir wählen g mit $g \; I \; P,Q$. Es ist $\neg (k \tau g)$ oder $\neg (l \tau g)$, etwa $\neg (k \tau g)$. Sei $S \; I \; k$, $S \not{o} P$. Wir setzen $PS = h$. Dann ist $h \tau k$, also $\neg (g \tau h)$ und $Q \tau h$.
$\Longleftarrow$ klar wegen $X \; I \; m \Longrightarrow X \tau m$.

2.3 <u>Lemma</u>: Für die p-konjugierte K-Rel. von τ gelten folgende Aussagen:

a) τ^p ist K-Rel.

b) $\tau \subseteq \tau^p$.

<u>Beweis</u>: a) Wegen der Voraussetzung - τ^p ist Äquivalenzrelation mit (K2) - muss lediglich noch nachgewiesen werden, dass $\tau^p \subseteq o$ ist. Sei $P \tau^p Q$ und $P \not{o} Q$. O.B.d.A. wählen wir g,h wie in Lemma 2.2. Mit (K2) für τ folgt sofort $g \tau h$. Widerspruch!

b) Mit a) und 1.7 folgt aus der linearen Ordnung in K $\tau \subseteq \tau^p$ oder $\tau^p \subseteq \tau$. Annahme: $\tau^p \subset \tau$. Sei P,Q I g, $h \not\parallel g$, Q I h, X I h mit $X \tau Q$, $\neg(X \tau^p Q)$ und $P \tau^p Q$. Wegen $\tau^p \subset \tau$ ist $P \tau Q$, also $P \tau h$. Ferner gelten $P \tau g$, $X \tau h$, $X \tau g$ und mit $(g \not\parallel h \Longrightarrow \neg(g \tau h))$ folgt $P \tau^p X$, $X \tau^p Q$. Widerspruch!

Folgerungen: 1. $o^p = o$.

2. Sei τ K-Rel. einer H-Ebene $\mathcal{H}$ und $\tau^p = id$. Dann ist $\mathcal{H}$ (gewöhnliche) projektive Ebene, denn: $\tau^p = id \Longrightarrow id \subseteq \tau \subseteq id$, also $\tau = id$. Nun ist $id^p = o$, also $o = id$, d.h. $\mathcal{H}$ ist projektive Ebene.

Für das folgende benötigen wir einige Zusatzbedingungen für p-konjugierte K-Rel.

$(K3)_\eta$: Eine K-Rel. η erfüllt (K3), wenn folgende Aussagen gelten:

$\forall P,Q,R \in \mathfrak{P}: P \eta Q$ und $\neg(P \eta R) \Longrightarrow$
$(\forall g,h \in \mathcal{G}: P,R$ I g, Q,R I $h \Longrightarrow g \eta h)$

$\forall g,h,k \in \mathcal{G}: g \eta h$ und $\neg(g \eta k) \Longrightarrow$
$(\forall P,Q \in \mathfrak{P}: P$ I g,k, Q I $h,k \Longrightarrow P \eta Q)$

2.4 Lemma: Für eine H-Ebene sind folgende Bedingungen äquivalent:

a) Die p-konjugierte K-Rel. τ^p erfüllt (K3).

b) $(\tau^p)^p \underset{def}{=} \tau^{pp} = \tau^p$.

Beweis: a)$\Rightarrow$b). Mit 2.3 wissen wir, dass $\tau^p \subseteq \tau^{pp}$ gilt. Daher zeigen wir: $\tau^{pp} \subseteq \tau^p$. Sei $P \tau^{pp} Q$ und $\neg(g \tau^p h)$ mit $P,Q \; \tau^p \; g,h$. O.B.d.A. können wir P,Q I g und P I h wählen. Wäre $\neg(P \tau^p Q)$, so folgte mit (K3) $g \tau^p h$. Widerspruch!
b)$\Rightarrow$a). Sei g I P,R, h I Q,R, $P \tau^p Q$ und $\neg(P \tau^p R)$. Wäre $\neg(g \tau^p h)$, so wäre $P \tau^{pp} R$ und mit b) $P \tau^p R$. Widerspruch!
Also gilt (K3) für Punkte.
Sei nun $g \tau^p h$ und $\neg(g \tau^p k)$. Sei ferner P I g,k und Q I h,k. Wäre $\neg(P \tau^p Q)$, so existierte wegen $g \tau^p h$ ein Punkt $P' \neq P$ mit P' I g und $P' \tau^p Q$. Da τ^p transitiv ist, kann $\neg(P \tau^p P')$ angenommen werden. Dies hat aber $g \tau^p k$ zur Folge. Widerspruch!
Also gilt (K3) auch für Geraden.

Die beiden Charakterisierungen der Nachbarschaftsrelation (siehe 1.1 bzw. 1.1.3 Bem.) berechtigen zur Frage, ob das Folgende gilt:

$$\boxed{(K4)_{\tau}: \quad g\,\tau^{p}\,h \iff \exists P,Q \in \mathfrak{P}: \neg(P\,\tau\,Q) \text{ und } P,Q\;\tau\;g,h}$$

Dies ist allgemein nicht richtig, desarguessche Ebenen liefern Gegenbeispiele (§7, 7.6.5).

In uniformen H-Ebenen [11] erfüllt die Nachbarschaftsrelation die Bedingung

$$P \circ Q \iff \forall g,h \in \mathfrak{G}: g \circ h,\ P,Q\ I\ g,\ P\ I\ h \Rightarrow Q\ I\ h$$

Das legt folgende Definition nahe:

2.5 Def.: Für $\;\in K$ sei

$$P\,\eta\,Q \overset{}{\underset{def}{\iff}} \forall g,h \in \mathfrak{G}: g\,\tau\,h,\ P,Q\ I\ g,\ P\ I\ h \Rightarrow Q\ I\ h$$

und

$$g\,\eta\,h \underset{def}{\iff} \forall P\ I\ g\ \exists\ Q\ I\ h: P\,\eta\,Q \text{ und } \forall P\ I\ h\ \exists\ Q\ I\ g: P\,\eta\,Q$$

gesetzt. Ist η Äquivalenzrelation auf der Menge der Punkte und erfüllt η (K2), so heisst η die a-konjugierte K-Rel. von τ und wir schreiben τ^{a}.

Bemerkungen: 1. τ^{a} wird nur gebraucht, falls die in 2.5 erklärte Relation Äquivalenzrelation ist und (K2) genügt.

2. Ist τ = id, so gilt für alle Punkte P Q.

3. Ist $\tau \neq$ id, so ist id $\subseteq \tau^{a} \subseteq \circ$, also ist τ^{a} eine K-Rel.

4. Die Relation τ^{a} entspricht in desarguesschen H-Ebenen der zu dem Annullator eines Ideals I gehörigen K-Rel., falls τ I zuzuordnen ist. Näheres siehe in 6.10.

Im weiteren sind die Bedingungen hilfreich:

$(K5)_{\eta}$: Eine K-Rel. η erfüllt (K5), wenn folgende Aussagen gelten:

$$\forall P,Q,R \in \mathfrak{P}: P\,\eta^{a}\,Q \text{ und } \neg(P\,\eta\,R) \Longrightarrow (\forall g,h \in \mathfrak{G}: P,R\ I\ g,\ Q,R\ I\ h \Longrightarrow g\,\eta^{a}\,h)$$

$$\forall g,h,k \in \mathfrak{G}: g\,\eta^{a}\,h \text{ und } \neg(g\,\eta\,k) \Longrightarrow (\forall P,Q \in \mathfrak{P}: P\ I\ g,k,\ Q\ I\ h,k \Longrightarrow P\,\eta^{a}\,Q)$$

$(K6)_\eta$:	Eine K-Rel. η erfüllt (K6), wenn folgende Aussage gilt: $g\,\eta^a\,h \iff \forall P,Q \in \mathfrak{P}: P\,\eta\,Q,\ P\ I\ g,h,\ Q\ I\ g \implies Q\ I\ h$

Lemma 2.6 unterstreicht nun auch formal obige Bemerkung über den Zusammenhang zwischen Annullatoren und den a-konjugierten K-Rel.

2.6 Lemma: a) $\tau_1 \subseteq \tau_2 \implies \tau_2^a \subseteq \tau_1^a$

b) Erfüllt τ die Bedingung (K6), dann gilt $\tau \subseteq (\tau^a)^a \underset{def}{=} \tau^{aa}$

c) Erfüllen τ, τ^a die Bedingung (K6), so gilt $\tau^a = \tau^{aaa}$

Beweis: a) ergibt sich durch direktes Anwenden der Definition.

b) Wir zeigen: $\neg(P\tau^{aa}Q) \implies \neg(P\tau Q)$.

$\neg(P\tau^{aa}Q) \iff \exists$ g,h mit $g\tau^a h$, P,Q I g, P I h und $\neg$(Q I h).

Nun erfüllt τ (K6), während $\neg$(Q I h) ist. Daher muss gelten: $\neg(P\tau Q)$.

c) Mit b) ist $\tau^a \subseteq \tau^{aaa}$, da τ^a (K6) erfüllt. Nun genügt τ (K6), also folgt mit a) aus $\tau \subseteq \tau^{aa}$ sofort $\tau^{aaa} \subseteq \tau^a$, daher $\tau^a = \tau^{aaa}$.

Über Eigenschaften von Kompositionen von p- bzw. a-konjugierten K-Rel. gibt das folgende Lemma Auskunft:

2.7 Lemma: a) $\tau \neq id \implies \tau^a \subseteq \tau^p$.

b) $(id^p)^a \underset{def}{=} id^{pa} = id$ oder $id \subset id^{pa}$, d.h. es gibt keine K-Rel. η mit $id \subset \eta \subset id$.

c) Ist $\tau \neq id$ und erfüllt τ (K4), so gilt $\tau^{pa} \subseteq \tau \subseteq \tau^p$.

d) Erfüllt τ (K4), so gilt $\tau \subset \tau^{pa} \iff \tau = id$ und $\tau \neq \tau^{pa}$.

e) $o^a \neq id \implies id \subset o^a$.

f) $o^{ap} \subseteq o$.

g) Erfüllt τ (K4), dann ist τ^{pa} untere Schranke für alle K-Rel. $\eta \neq id$ mit $\eta^p = \tau^p$.

h) $\tau, \tau^a \neq id \implies \tau^{pa} \subseteq \tau^{ap}$.

i) Erfüllt τ (K6), so gilt $\tau \subseteq \tau^{ap}$.

j) Erfüllt τ^p (K6), dann ist $\tau^p \subseteq \tau^{pap}$.

Beweis: a) Sei $P \tau^{a} Q$. Wähle $g \; I \; P,Q$. Sei $h \not\circ g$, $h \; I \; Q$, $X \; I \; h$, $X \tau Q$. Wegen $\tau \neq id$ kann $X \not\mathrel{I} g$ gewählt werden. Sei $k \; I \; P,X$. $k \tau g \Longrightarrow X = Q$. Widerspruch! Also ist $\neg(k \tau g)$ und mit $P,Q \tau g,k$ ist $P \tau^{\rho} Q$.

b) Sei $id^{\rho a} \neq id$ und η K-Rel. mit $id \subset \eta \subseteq id^{\rho a}$. Seien $P,Q \; I \; g$, $P \tau^{\rho a} Q$, $h \not\circ g$, $h \; I \; Q$, $X \; I \; h$, $X \eta Q$, wobei $X \neq Q$ gewählt werden kann. Sei $k \; I \; P,X$:

Falls $k \circ g$ ist, so erhalten wir wegen $id^{\rho} = \circ$ und $P \tau^{\rho a} Q$, $k \tau^{\rho} g$ sofort $X = Q$. Widerspruch!

Falls $k \not\circ g$ ist, folgt aus $X \eta Q$ offensichtlich $P \eta Q$, also $\tau^{\rho a} \subseteq \eta$.

c) Mit 2.3 ist $\tau \subseteq \tau^{\rho}$. Da $\tau^{\rho a}$ eine K-Rel. ist, gilt mit 1.7 $\tau^{\rho a} \subseteq \tau$ oder $\tau \subseteq \tau^{\rho a}$. Annahme: $\tau \subset \tau^{\rho a}$. Sei $P \neq Q$, $P,Q \; I \; g$, $P \tau Q$, $h \not\circ g$, $Q \; I \; h$, $X \; I \; h$ und $X \tau^{\rho a} Q$, aber $\neg(X \tau Q)$. Sei $k \; I \; P,X$. $k \tau^{\rho} h \Longrightarrow P = Q$. Widerspruch! Also ist $\neg(k \tau^{\rho} h)$. Nun ist $P \tau h$, weil $P \tau Q \; I \; h$. $P \tau k$, weil $P \; I \; k$. $X \tau h$, weil $X \; I \; h$. $X \tau k$, weil $X \; I \; k$. (K4) ergibt $\neg(k \tau^{\rho} h) \Longrightarrow (\forall P,X \in \mathcal{P} : P,X \tau h,k \Rightarrow P \tau X)$. $P \tau X$ und $P \tau Q$ haben $X \tau Q$ zur Folge. Widerspruch! Also gilt: $\tau^{\rho a} \subseteq \tau$.

d) Mit b) und c) ergibt sich d).

e) Man beachte $id^{\rho} = \circ$.

f) Sei $P \circ^{a\rho} Q$. Dann existieren Geraden g,k mit $P,Q \; I \; g$, $P \; I \; k$, $Q \circ^{a} h$ und $\neg(g \circ^{a} k)$. Sei $Q \circ^{a} X$, $X \; I \; k$. Wäre $P \not\circ Q$, so hätten wir, da $\circ^{a}$ K-Rel. ist, $g \circ^{a} k$. Widerspruch! Also ist $\circ^{a\rho} \subseteq \circ$ richtig.

g) Wegen $\eta \neq id$ ist $\eta^{\rho a} \subseteq \eta$ (siehe d)) und $\tau^{\rho} = \eta^{\rho}$, demnach $\tau^{\rho a} \subseteq \eta$.

h) Mit $\tau \neq id$ und a) ist $\tau^{a} \subseteq \tau^{\rho}$. Aufgrund von 2.6 a) erhalten wir $\tau^{\rho a} \subseteq \tau^{aa}$ und wegen $\tau^{a} \neq id$, wiederum mit a), auch $\tau^{\rho a} \subseteq \tau^{aa} \subseteq \tau^{a\rho}$, also $\tau^{\rho a} \subseteq \tau^{a\rho}$.

i) Ist $\tau^{a} = id$, so haben wir $\tau^{a\rho} = \circ$ und sicher $\tau \subseteq \circ$. Sei nun $\tau^{a} \neq id$ betrachtet. Seien $P \tau Q$, $P,Q \; I \; g$, $g \not\circ h$, $X \; I \; h$ und $Q \neq X \tau^{a} Q$. Sei ferner $k \; I \; P,X$. Aus (K6) folgt $g \tau^{a} k$, also $Q = X$. Daher muss $\neg(g \tau^{a} k)$ sein und mit $P,Q \tau^{a} g,k$ erhalten wir $P \tau^{a\rho} Q$.

j) Mit i) folgt $\tau^{\rho} \subseteq \tau^{\rho a \rho}$.

2.8 <u>Lemma</u>: Es sei τ eine K-Rel. einer H-Ebene, deren p-konjugierte K-Rel. τ^p und pa-konjugierte K-Rel. τ^{pa} existieren. Ferner erfülle τ die Bedingung (K4) und τ^p (K6). Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

a) τ^p erfüllt (K5).

b) $\tau^p = \tau^{pap}$.

<u>Beweis</u>: a)$\Rightarrow$b) Mit 2.7 j) bleibt $\tau^{pap} \subseteq \tau^p$ zu zeigen. Ist $\tau = \mathrm{id}$, so gilt $\tau^p = o$ und mit 2.7 f) $\tau^{pap} \subseteq o = \tau^p$. Ist nun $\tau \neq \mathrm{id}$, so weisen wir nach: $\neg(P\tau^p Q) \Longrightarrow \neg(P\tau^{pap}Q)$.

$\neg(P\tau^{pap}Q) \Longleftrightarrow (\forall g,h \in \mathcal{G}: P,Q\,\tau^{pa} g,h \Longrightarrow g\,\tau^{pa} h)$. O.B.d.A. können wir wegen 2.2 von P,Q I g, P I h, $Q\tau^{pa}X$ I h ausgehen und zeigen: $g\,\tau^{pa}h$.

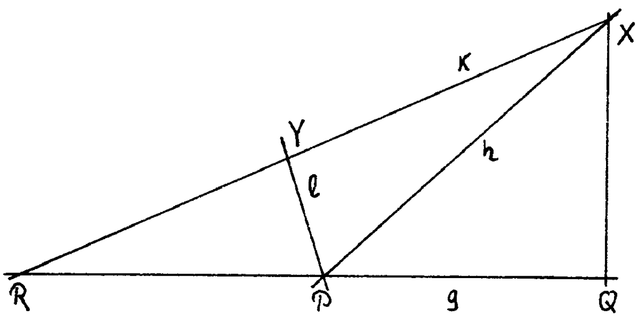

Fig. 11

Wir wählen R I g, R ø Q und setzen $RX = k$. Dann ist $RQ = g\,\tau^{pa}k$. Sei l ø g, P I l, $Y = l \cap k$, also ist $P\tau^{pa}Y$. Da $\tau \neq \mathrm{id}$ ist, τ aber auch (K4) erfüllt, folgt aus $P\tau^{pa}X$ sofort $Q\tau^p X$ (2.7c).

Wegen $\neg(P\tau^p Q)$ ist $\neg(P\tau^p Y)$, mit (K5) ist daher $k\,\tau^{pa}h$. Aus $g\,\tau^{pa}k$ folgt $g\,\tau^{pa}h$, also $\neg(P\tau^{pap}Q)$. Damit haben wir $\tau^{pap} \subseteq \tau^p$ nachgewiesen.

b)$\Rightarrow$a) Sei g I P,R, h I Q,R, $P\tau^{pa}Q$ und $\neg(P\tau^p R)$. Wir haben zu zeigen: $g\,\tau^{pa}h$. Wäre $\neg(g\,\tau^{pa}h)$, so wäre $P\tau^{pap}R$, also $P\tau^p R$, was im Widerspruch zu den Voraussetzungen steht.

Sei nun $g\,\tau^{pa}h$, $\neg(g\,\tau^p k)$, P I g,k und Q I h,k. Wäre $\neg(P\tau^{pa}Q)$, so folgte mit $Q\tau^{pa}g$, da $\tau^{pap} = \tau^p$ und τ (K4) erfüllt, sofort $g\,\tau^{pap}k$. Das hat $g\,\tau^p k$ zur Folge. Widerspruch! Also haben wir: $P\tau^{pa}Q$.

<u>Folgerungen</u>: τ erfülle (K4), τ^p (K5) und (K6). Dann gelten folgende Aussagen:

1. $\tau^{pa} = \mathrm{id} \Longrightarrow \tau^p = o$.

   Es ist $\tau^{pap} = \mathrm{id}^p = o$, andererseits mit 2.8 $\tau^{pap} = \tau^p$. Also ist $\tau^p = o$.

2. $\tau^{\rho a} \neq \mathrm{id} \Longrightarrow \tau^{\rho a a} = \tau^{\rho}$
   Mit 2.6 b) gilt $\tau^{\rho} \subseteq \tau^{\rho a a}$, mit 2.6 a) $\tau^{\rho a a} \subseteq \tau^{\rho a \rho}$. Daher ist wegen 2.8 $\tau^{\rho a a} = \tau^{\rho}$.
3. Ist $\tau^{\rho a} \neq \mathrm{id}$, so ist $\tau^{\rho a}$ minimales Element der Menge aller K-Rel. η mit $\eta \neq \mathrm{id}$ und $\eta^{\rho} = \tau^{\rho}$.
   Mit 2.7 g) ist $\tau^{\rho a}$ untere Schranke für diese Menge. Wegen 2.8 gilt $\tau^{\rho a \rho} = \tau^{\rho}$, also ist $\tau^{\rho a}$ minimales Element.

Die Aussagen dieser Lemmata spiegeln für desarguessche H-Ebenen wesentliche Eigenschaften des Idealverbandes eines H-Ringes wieder. Wir werden in §6 näher darauf eingehen, verweisen an dieser Stelle lediglich auf folgende Interpretationen.

2.7 e): Ist der Annullator des maximalen Ideals vom Nullideal verschieden, so ist der Annullator oberer Nachbar des Nullideals.

Folgerung 2.8.2: Der Annullator des Annullators eines Primideals ist das Primideal.

Folgerung 2.8.3: Ist der Annullator eines Primideals das Nullideal, so ist das Primideal maximal.

B. Faktorstrukturen unter Kongruenzrelationen

Sei $\mathcal{H}$ projektive H-Ebene und τ eine K-Rel. Als Äquivalenzrelation induziert τ eine Klasseneinteilung in der Punktmenge von $\mathcal{H}$. Die Äquivalenzklasse $[P]_{\tau}$ des Punktes P bezeichnen wir mit $\pi(P)$. Damit haben wir die Punktmenge der Faktorstruktur $\mathcal{H}/_{\tau}$ beschrieben. Es liegt nun nahe, für Geraden in $\mathcal{H}$ zu setzen

$$\pi(g) = \{\pi(P) \mid P \; I \; g\}$$

und diese Objekte als Geraden der Faktorstruktur $\mathcal{H}/_{\tau}$ anzusehen. Wir bemerken, dass aus $g \tau h$ stets $\pi(g) = \pi(h)$ folgt. Ferner genügen diese Geraden der Reichhaltigkeitsbedingung $|\pi(g)| \geq 3$, da $\tau \subseteq \circ$ ist. In naheliegender Weise definieren wir $\pi(P) \; I \; \pi(g)$ durch $P \tau g$, was sinnvoll ist, da τ Äquivalenzrelation ist. Offensichtlich gibt es zu Punkten $\pi(P)$, $\pi(Q)$ eine Gerade in $\mathcal{H}/_{\tau}$ bzw. zu Geraden $\pi(g)$, $\pi(h)$ einen

Punkt, der mit beiden inzidiert. Inzidenzstrukturen mit dieser Eigenschaft wollen wir projektive Inzidenzstrukturen nennen. In $\mathcal{H}/_\tau$ betrachten wir folgende Relation auf der Menge der Punkte:

$$\pi(P) \circ_\tau \pi(Q) \Longleftrightarrow \exists \pi(g), \pi(h) \varepsilon \mathcal{G}(\mathcal{H}/_\tau): \pi(g) \neq \pi(h) \text{ und } \pi(P), \pi(Q) \; I \; \pi(g), \pi(h).$$

Besitzt nun die K-Rel. τ eine p-konjugierte K-Rel. τ^p, so haben wir

$$\pi(P) \circ_\tau \pi(Q) \Longleftrightarrow P \tau^p Q,$$

da mit 2.3 $\tau \subseteq \tau^p$ gilt. Die Relation $\circ_\tau$, die wir als Nachbarschaftsrelation in $\mathcal{H}/_\tau$ erkennen, ist damit Äquivalenzrelation. Wegen $\tau^p \subseteq \circ$ gilt

$$\pi(P) \circ_\tau \pi(Q) \Longrightarrow P \circ Q \quad \text{oder als Kontraposition}$$

$$P \not\circ Q \Longrightarrow \neg(\pi(P) \circ_\tau \pi(Q)).$$

$\neg(\pi(P) \circ_\tau \pi(Q))$ kürzen wir durch $\pi(P) \not\circ_\tau \pi(Q)$ ab.

Diese Ergebnisse fassen wir zusammen:

2.9 <u>Lemma</u>: Sei $\mathcal{H}$ eine H-Ebene und τ eine K-Rel., die eine p-konjugierte besitzt. Dann ist die (oben definierte) Faktorstruktur $\mathcal{H}/_\tau$ eine projektive Inzidenzstruktur mit einer Nachbarschaftsrelation $\circ_\tau$ auf der Punktmenge. Es gilt

$$\pi(P) \circ_\tau \pi(Q) \Longleftrightarrow P \tau^p Q$$

wobei $\pi(P)$, $\pi(Q)$ Punkte in $\mathcal{H}/_\tau$ sind.

<u>Bemerkungen</u>: 1. Da wir die Geraden von $\mathcal{H}/_\tau$ als Punktmengen betrachten, kann man die Nachbarschaftsrelation in natürlicher Weise auf die Geradenmenge von $\mathcal{H}/_\tau$ fortsetzen. Wir definieren:

$$\pi(g) \circ_\tau \pi(h) \Longleftrightarrow \forall \pi(P) \; I \; \pi(g) \; \exists \; \pi(Q) \; I \; \pi(h) \text{ mit } \pi(P) \circ_\tau \pi(Q) \text{ und } \forall \pi(P) \; I \; \pi(h) \; \exists \; \pi(Q) \; I \; \pi(g) \text{ mit } \pi(P) \circ_\tau \pi(Q).$$

Für die Gültigkeit von

$$\pi(g) \circ_\tau \pi(h) \Longleftrightarrow \exists \; \pi(P), \pi(Q) \varepsilon \mathcal{P}(\mathcal{H}/_\tau): \pi(P) \neq \pi(Q) \text{ und } \pi(P), \pi(Q) \; I \; \pi(g), \pi(h)$$

ist notwendig und hinreichend, dass τ (K4) genügt.

2. Ist $\tau = \tau^{\rho}$, so ist $\mathcal{H}/\tau$ projektive Ebene.
$\pi(P) \circ_\tau \pi(Q) \Longleftrightarrow P \tau^{\rho} Q \Longleftrightarrow P \tau Q \Longleftrightarrow \pi(P) = \pi(Q)$, d.h. inzidieren Punkte $\pi(P)$, $\pi(Q)$ mit zwei verschiedenen Geraden $\pi(g)$, $\pi(h)$, so ist $\pi(P) = \pi(Q)$. Haben Geraden $\pi(g)$, $\pi(h)$ verschiedene Punkte $\pi(P)$, $\pi(Q)$ gemeinsam, so sind die Geraden gleich. Damit ist die Menge der Verbindungsgeraden zweier Punkte bzw. die Menge der Schnittpunkte zweier Geraden höchstens einelementig. Mit Lemma 2.9 enthalten diese Mengen mindestens ein Element. Wegen $\tau \subseteq \circ$ ist die Reichhaltigkeit von $\mathcal{H}/\tau$ gewährleistet, also $\mathcal{H}/\tau$ projektive Ebene.

2.10 <u>Satz</u>: Sei $\mathcal{H}$ H-Ebene und τ eine K-Rel. τ besitze eine p-konjugierte K-Rel. und erfülle (K4). Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\mathcal{H}/\tau$ ist H-Ebene.

b) Die K-Rel. τ^{ρ} erfüllt (K3).

<u>Beweis</u>: a)$\Rightarrow$b) Wegen $\pi(P) \circ_\tau \pi(Q) \Longleftrightarrow P \tau^{\rho} Q$ bzw. $\pi(g) \circ_\tau \pi(h) \Longleftrightarrow g \tau^{\rho} h$ gilt mit den Bemerkungen 2.9.1 und 1.1.2 (K3).

b)$\Rightarrow$a) Mit 2.9 ist $\mathcal{H}/\tau$ projektive Inzidenzstruktur mit einer Nachbarschaftsrelation auf der Punkt- und Geradenmenge, die Äquivalenzrelation ist. Damit sind die Bedingungen A1, A2, A4 des zu Definition 1.1 äquivalenten Axiomensystems einer projektiven H-Ebene bei KLINGENBERG [8,S.387/388] erfüllt. Die K-Rel. τ^{ρ} induziert wegen (K4) gerade die Nachbarschaftsrelation in $\mathcal{H}/\tau$, denn es ist

$\pi(P) \circ_\tau \pi(Q) \Longleftrightarrow P \tau^{\rho} Q$ und $\pi(g) \circ_\tau \pi(h) \Longleftrightarrow g \tau^{\rho} h$.

Die Axiome A5, A6 fordern die Projektionsinvarianz von $\circ_\tau$, also

$\pi(P) \circ_\tau \pi(Q)$ und $\pi(P) \not\circ_\tau \pi(R) \Longrightarrow \pi(P)\pi(R) \circ_\tau \pi(Q)\pi(R)$,

$\pi(g) \circ_\tau \pi(h)$ und $\pi(g) \not\circ \pi(k) \Longrightarrow \pi(g) \cap \pi(k) \circ_\tau \pi(h) \cap \pi(k)$,

was aber gerade äquivalent zu der Bedingung (K3) für τ^{ρ} ist. Schliesslich überträgt sich wegen $P \not\circ Q \Longrightarrow \neg(P \tau^{\rho} Q)$ die Existenz eines nicht ausgearteten Vierecks von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}/\tau$. Damit gilt auch A3 für $\mathcal{H}/\tau$, d.h. $\mathcal{H}/\tau$ ist projektive H-Ebene, wobei $\mathcal{H}/\tau^{\rho}$ isomorph zum kanonisch homomorphen Bild $\overline{\mathcal{H}/\tau}$ ist.

§ 3. KONGRUENZRELATIONEN UND MORPHISMEN, ISOMORPHIESÄTZE

In diesem Paragraphen werden wir endlich den Zusammenhang zwischen Kongruenzrelationen und geeigneten Morphismen herstellen.
Hauptergebnis von Satz 1.12 war es, dass man unter naheliegenden Voraussetzungen nur ferntreue oder nahtreue Inzidenzmorphismen zu untersuchen hat. Diese Morphismen werden wir durch die von ihnen zwischen den kanonisch homomorphen Ebenen bestehenden Abbildungen charakterisieren. Damit wird der Begriff der verfeinerten Nachbarschaften bei ARTMANN [1] verallgemeinert.
Es zeigt sich nun, dass gerade die ferntreuen Morphismen in natürlicher Weise K-Rel. induzieren und unter geeigneten Voraussetzungen durch K-Rel. induziert werden. Diese Ergebnisse fassen wir in zwei Isomorphiesätzen zusammen und können dann auch die Bedeutung der p-konjugierten bzw. pa-konjugierten K-Rel. erläutern.

A. Ferntreue, nachbarschaftstreue Morphismen

In Satz 1.12 haben wir erkannt, dass jeder reguläre H-Morphismus global Nichtnachbarschaft oder die Nachbarschaft respektiert. Werden unter einem Inzidenzmorphismus ferne (d.h. nicht benachbarte) Punkte in eben solche übergeführt, so ist das Bild eines Basisvierecks wieder ein solches.
Da wir uns im folgenden im wesentlichen mit ferntreuen Morphismen (bzgl. nachbarschaftstreuer Morphismen, siehe PONELEIT [14]) beschäftigen, ist die Forderung, dass das ausgezeichnete Basisviereck in das ausgezeichnete der Bildebene übergeführt wird, entbehrlich.
Wir definieren daher:

3.1 <u>Def.</u>: Seien $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ H-Ebenen und $\varphi : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ eine inzidenzerhaltende Abbildung (Inzidenzmorphismus).
φ heisst <u>ferntreu</u>, wenn
$$\forall P,Q \in \mathcal{P}_1 : P \not\sim Q \Longrightarrow \varphi P \not\sim \varphi Q$$

φ heisst <u>nachbarschaftstreu</u> (oder kürzer: <u>nahtreu</u>), wenn $\forall P,Q \varepsilon \mathfrak{P}_1 : P \circ Q \implies \varphi P \circ \varphi Q$

φ heisst <u>nah- und ferntreu</u>, wenn

$$\forall P,Q \varepsilon \mathfrak{P}_1 : P \circ Q \iff \varphi P \circ \varphi Q.$$

<u>Bemerkungen</u>: 1. Sei φ ferntreu, dann gilt für alle Geraden $\forall g,h \varepsilon \mathfrak{G}_1 : g \not\circ h \implies \varphi g \not\circ \varphi h$. Zum Beweis siehe 1.13.

2. Wir werden im folgenden surjektive Inzidenzmorphismen als <u>Epimorphismen</u> bezeichnen.

3. Ist φ ein nahtreuer Epimorphismus, so gilt für alle Geraden

$\forall g,h \varepsilon \mathfrak{G}_1 : g \circ h \implies \varphi g \circ \varphi h.$

<u>Beweis</u>: Sei $g \circ h$ und $R \mathrel{I} g,h$. Nicht alle von R entfernten Punkte auf g können in die Nachbarschaft von φR abgebildet werden, da es auf φg von φR entfernte Punkte gibt und φ surjektiv ist. Also existiert $P \not\circ R$ auf g mit $\varphi P \not\circ \varphi R$. Wegen $g \circ h$ gibt es $Q \mathrel{I} h$ mit $Q \circ P$. Dann ist $\varphi Q \circ \varphi P$, also $\varphi Q \not\circ \varphi R$ und damit $\varphi Q \varphi R = \varphi h \circ \varphi g = \varphi P \varphi R$.

3.2 <u>Lemma</u>: Seien $\mathcal{H}_i$ H-Ebenen mit den kanonischen Projektionen $\kappa_i : \mathcal{H}_i \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}_i$ $(i = 1,2)$

a) Ist $\varphi : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ ein ferntreuer Epimorphismus,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\kappa_1"] & \mathcal{H}_2 \arrow[d, "\kappa_2"] \\ \overline{\mathcal{H}}_1 & \overline{\mathcal{H}}_2 \arrow[l, dashed, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

so existiert ein Epimorphismus $\overline{\varphi} : \overline{\mathcal{H}}_2 \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}_1$ der projektiven Ebenen $\overline{\mathcal{H}}_1, \overline{\mathcal{H}}_2$ mit $\overline{\varphi}\,\kappa_2\,\varphi = \kappa_1$.

b) Ist $\psi : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ ein nahtreuer Epimorphismus,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_1 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\kappa_1"] & \mathcal{H}_2 \arrow[d, "\kappa_2"] \\ \overline{\mathcal{H}}_1 \arrow[r, dashed, "\overline{\psi}"] & \overline{\mathcal{H}}_2 \end{tikzcd}$$

so existiert ein Epimorphismus $\overline{\psi} : \overline{\mathcal{H}}_1 \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}_2$ der projektiven Ebenen $\overline{\mathcal{H}}_1, \overline{\mathcal{H}}_2$ mit $\overline{\psi}\,\kappa_1 = \kappa_2\,\psi$.

c) Ist $\varphi : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ ein nah- und ferntreuer Epimorphismus,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathcal{H}_2 \arrow[d] \\ \overline{\mathcal{H}}_1 & \overline{\mathcal{H}}_2 \arrow[l, dashed, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

so existiert ein Isomorphismus $\overline{\varphi} : \overline{\mathcal{H}}_2 \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}_1$ der projektiven Ebenen $\overline{\mathcal{H}}_1, \overline{\mathcal{H}}_2$ mit $\overline{\varphi}\,\kappa_2\,\varphi = \kappa_1$.

Der Beweis ergibt sich durch einfaches Nachrechnen.

Bemerkung: Damit haben wir die nah- und ferntreuen Epimorphismen als die verfeinerten Nachbarschaften bei ARTMANN [1] erkannt. Wir werden im folgenden diese Bezeichnung übernehmen.

Für endliche H-Ebenen fallen die Begriffe ferntreuer- bzw. nahtreuer Epimorphismus zusammen.

3.4 Satz: Seien $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ projektive H-Ebenen, $\mathcal{H}_1$ endlich. Ist $\varphi : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ ein Epimorphismus, so sind folgende Aussagen äquivalent:

a) φ ist ferntreu.

b) φ ist nahtreu.

Beweis: Unter Berücksichtigung eines tieferliegenden Ergebnisses von HUGHES [6,S.49], dass für endliche projektive Ebenen jeder Epimorphismus schon Isomorphismus ist, folgt mit 3.3 sofort die Behauptung.
Die Aussage des obigen Satzes kann auch direkt, allerdings mit einigem Aufwand, durch Abzählen gewonnen werden.

B. Kongruenzrelationen und ferntreue Morphismen, Isomorphiesätze, Zerlegungssatz

Nachdem wir in §3 A die nötige Terminologie für Inzidenzmorphismen bereitgestellt haben, zeigen wir nun den Zusammenhang zwischen K-Rel. und ferntreuen Morphismen auf. Ferntreue Morphismen induzieren auf natürliche Weise in ihrem Definitionsbereich K-Rel. mit gewissen Eigenschaften, andererseits werden gerade durch solche K-Rel. kanonisch ferntreue Morphismen definiert. Epimorphe Bilder unter ferntreuen Morphismen sind daher durch die zugehörigen K-Rel. bestimmt, was Inhalt des 1. Isomorphiesatzes ist. Das epimorphe Bild ist genau dann eine projektive Ebene, wenn der 'Kern' eine p-konjugierte K-Rel. ist. Die Ergebnisse der Sätze 1.5 und 1.7 können wir nun als Resultate über ferntreue Morphismen interpretieren. Den Zusammenhang zwischen den K-Rel. einer H-Ebene und den epimorphen Bildern stellt der 2. Isomorphiesatz her. Dadurch wird die zentrale Stellung der bei ARTMANN definierten verfeinerten Nachbarschaften unterstrichen. Mit der in 2.7 angesprochenen Minimalität der pa-konjugierten K-Rel. beweisen wir zum Abschluss des Paragraphen einen Zerlegungssatz für ferntreue Morphismen.

3.5 Lemma: Sei τ K-Rel. einer H-Ebene $\mathcal{H}$. τ erfülle (K4) und τ^p genüge (K3). Dann ist $\pi: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}/_\tau$, definiert durch $\pi(P) = [P]_\tau$, ein ferntreuer Epimorphismus.

Beweis: Aufgrund der Voraussetzungen ist mit 2.10 $\mathcal{H}/_\tau$ eine H-Ebene. Wegen $\tau^p \subseteq o$ folgt aus $P \not o Q$ stets $\neg(P \tau^p Q)$, also $\pi(P) \not o \pi(Q)$. Offensichtlich ist die Projektion π inzidenzerhaltend und surjektiv, daher ist π ein ferntreuer Epimorphismus.

Umgekehrt induziert jeder ferntreue Morphismus in seinem Definitionsbereich in natürlicher Weise eine K-Rel. Wir zeigen zunächst:

3.6 Lemma: Sei $\varphi : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ ferntreuer Morphismus der H-Ebenen $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ und η eine K-Rel. in $\mathcal{H}_2$.

a) $P \tau_\eta Q \iff \varphi P \,\eta\, \varphi Q$ definiert eine K-Rel. in $\mathcal{H}_1$.

b) Ist φ surjektiv und genügt η (K4), η^p (K3), so besitzt τ_η eine p-konjugierte K-Rel., die (K3) erfüllt, während für τ_η (K4) gilt.

Beweis: a) τ_η ist sicher eine Äquivalenzrelation. Da φ ferntreu ist, gilt $\tau_\eta \subseteq o$. Also erfüllt τ_η (K1).

Wir setzen

$g \tau_\eta h \iff \forall P \, I \, g \; \exists Q \, I \, h: P \tau_\eta Q$ und $\forall P \, I \, h \; \exists Q \, I \, g: P \tau_\eta Q$

und zeigen $\qquad \varphi g \,\eta\, \varphi h \iff g \tau_\eta h.$

$\Rightarrow$ Sei $P \, I \, g$. Wähle $k \, I \, P$ mit mit $g \not o k$. Dann ist $\varphi g \not o \varphi k$, also $(\varphi g \cap \varphi k) \,\eta\, (\varphi h \cap \varphi k)$. Für $Q \underset{def}{=} h \cap k$ gilt offensichtlich $P \tau_\eta Q$ und daher $g \tau_\eta h$.

$\Leftarrow$ Sei $g \tau_\eta h$, $P \tau_\eta Q$ mit $P \, I \, g$ und $Q \, I \, h$. Wir wählen $R \, I \, g$ mit $R \not o P$. Zu R gibt es einen Punkt $S \, I \, h$ mit $R \tau_\eta S$. Nun ist η K-Rel. und φ ferntreu: $\varphi g = \varphi R \varphi P \,\eta\, \varphi R \varphi Q \,\eta\, \varphi S \varphi Q = \varphi h$, also $\varphi g \,\eta\, \varphi h$.

Dass nun τ_η auch die Bedingung (K2) erfüllt, ist offensichtlich.

b) Da φ ferntreuer Epimorphismus ist und $\eta \subseteq \eta^p$ gilt, definiert $P \tau_\eta^p Q \iff \varphi P \,\eta^p\, \varphi Q$ eine K-Rel. in $\mathcal{H}_1$, die p-konjugierte von τ_η ist. Dabei übertragen sich die Eigenschaften von (K3) bzw. (K4) infolge der Surjektivität und der Ferntreue von φ auf τ_η bzw. τ_η^p.

3.7 <u>Folgerungen</u>: 1. Sei $\varphi : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ein ferntreuer Morphismus der H-Ebenen $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, dann definiert $P\tau_\varphi Q \iff \varphi P = \varphi Q$ eine K-Rel. in $\mathcal{H}_1$.

2. Ist φ zusätzlich surjektiv, so besitzt τ_φ eine p-konjugierte, die (K3) genügt, während τ_φ (K4) erfüllt. Es gilt:

$$P\tau_\varphi^p Q \iff \varphi P \circ \varphi Q.$$

<u>Beweis</u>: 1. Wegen 3.6 ist τ_φ K-Rel. in $\mathcal{H}_1$, da id eine solche in $\mathcal{H}_2$ ist.
2. Nun ist $\mathrm{id}^p = \circ$ (2.1.3) und id bzw. $\circ$ erfüllen trivialerweise die Bedingungen (K4) bzw. (K3) in $\mathcal{H}_2$ (1.1.2, 1.1.3). Anwendung von 3.6 b) liefert die Behauptung von 3.7.2.

Eine wesentliche Folgerung aus 1.5 ist

3.8 <u>Satz</u>: Jedes ferntreue, epimorphe Bild einer H-Ebene, das H-Ebene ist, ist bis auf Isomorphismen bestimmt durch das inverse Bild eines Bildpunktes auf einer mit dem Urbild inzidierenden Geraden.

mit anderen Worten:

Seien $\varphi_i : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_i$ $(i = 1,2)$ ferntreue Epimorphismen von H-Ebenen $\mathcal{H}, \mathcal{H}_i$ und gibt es einen Punkt P in $\mathcal{H}$ mit $P \; I \; g$ und

$$[P]_{\tau_{\varphi_1}} \cap g = [P]_{\tau_{\varphi_2}} \cap g,$$

so existiert ein Isomorphismus $\lambda : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & \mathcal{H}_1 \arrow[d, dashed, "\lambda"] \\ & \mathcal{H}_2 \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Beweis: Wegen 3.7 sind τ_{φ_i} $(i = 1,2)$ K-Rel. in $\mathcal{H}$, die aufgrund von 1.5 durch den Schnitt einer Klasse eines Punktes mit einer inzidierenden Geraden eindeutig bestimmt sind, d.h. $\tau_{\varphi_1} = \tau_{\varphi_2}$ bzw. $\forall P,Q \in \mathcal{P}: \varphi_1 P = \varphi_1 Q \iff \varphi_2 P = \varphi_2 Q$.
Daher definiert $\lambda : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ mit $\lambda(\varphi_1 P) = \varphi_2 P$ einen Isomorphismus von $\mathcal{H}_1$ auf $\mathcal{H}_2$. Man beachte, dass genau ein Isomorphismus das Diagramm kommutativ macht.

3.9 Satz: 1. Isomorphiesatz

Es sei $\mathcal{H}$ projektive H-Ebene und τ eine K-Rel., die eine p-konjugierte K-Rel. mit (K3) besitze und (K4) erfülle. Für jeden ferntreuen Morphismus $\varphi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ der H-Ebenen $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ mit
$\exists P \in \mathcal{P}\, \forall Q \in \mathcal{P}: P\,\tau\,Q \Longrightarrow \varphi P = \varphi Q$
gibt es genau einen Inzidenzmorphismus
$\varphi' : \mathcal{H}/_\tau \longrightarrow \mathcal{H}'$ der projektiven H-Ebenen $\mathcal{H}/_\tau$, $\mathcal{H}'$, so dass $\varphi = \varphi' \cdot \pi$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{H}/_\pi \arrow[d, dashed] \\
 & \mathcal{H}'
\end{tikzcd}$$

Dabei ist φ' ferntreu oder nahtreu und zwar:
φ' ferntreu genau dann, wenn $\exists P \in \mathcal{P}\, \forall Q \in \mathcal{P}$:
$$\varphi P \circ \varphi Q \Longrightarrow P\,\tau^p\,Q$$
φ' nahtreu genau dann, wenn $\exists P \in \mathcal{P}\, \forall Q \in \mathcal{P}$:
$$P\,\tau^p\,Q \Longrightarrow \varphi P \circ \varphi Q.$$

Beweis: Setzen wir $P\,\tau_\varphi\,Q \iff \varphi P = \varphi Q$, so ist τ_φ wegen 3.6 a) K-Rel. Mit 1.5 gilt: $\tau \subseteq \tau_\varphi$. Ferner erfüllt τ die Voraussetzungen von 2.10, also ist $\mathcal{H}/_\tau$ projektive H-Ebene. Da τ und τ_φ Äquivalenzrelationen sind, existiert genau eine Abbildung φ' der Punktmenge von $\mathcal{H}/_\tau$ auf die von $\mathcal{H}'$. Wegen $\tau \subseteq \tau_\varphi$ und $\pi(P)\ I\ \pi(g) \iff P\,\tau\,g$ ist φ' Inzidenzmorphismus. Die Nachbarschaftsrelation $\circ$ in $\mathcal{H}'$ induziert in $\mathcal{H}$ eine K-Rel. Wir setzen: $P\,\eta\,Q \iff \varphi P \circ \varphi Q$. Mit 1.7 gilt daher $\eta \subseteq \tau^p$ oder $\tau^p \subseteq \eta$. Nun ist $P\,\tau^p\,Q \iff \pi(P) \circ \pi(Q)$. Also ist φ ferntreu (nahtreu) genau dann, wenn $\eta \subseteq \tau^p$ $(\tau^p \subseteq \eta)$ ist.

3.10 Folgerung: Es sei $\mathcal{H}$ H-Ebene und τ eine K-Rel., die eine p-konjugierte K-Rel. mit (K3) besitze und (K4) erfülle. Sei $\varphi: \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ ferntreuer Epimorphismus mit

$\exists P \in \mathcal{P}\, \forall Q \in \mathcal{P} : P \tau Q \Longleftrightarrow \varphi P = \varphi Q.$

Dann gibt es genau einen Isomorphismus $\varphi' : \mathcal{H}/_\tau \longrightarrow \mathcal{H}'$, so dass $\varphi = \varphi' \cdot \pi$ gilt.

Beweis: Offensichtlich ist φ' Bijektion und ein Inzidenzmorphismus. Mit [2,S.4ff] ist jeder bijektive Inzidenzmorphismus von H-Ebenen ein Isomorphismus.

Bemerkungen: 1. Es ist unter den Voraussetzungen von 3.10

$$\mathcal{H}/_\tau \cong \mathcal{H}/_{\tau^p}$$

2. Ist die K-Rel. τ p-konjugierte einer K-Rel. τ_1, also $\tau = \tau_1^p$, wobei τ (K3) erfüllt, dann ist mit 2.4 $\tau^p = \tau_1^{pp} = \tau_1^p$. Wegen 2.9.2 ist $\mathcal{H}/_\tau$ projektive Ebene.

Naheliegend ist nun die Frage nach den Beziehungen zwischen den K-Rel. einer H-Ebene $\mathcal{H}$ und dem ferntreuen epimorphen Bild $\mathcal{H}/_\tau$.

3.11 Satz: 2. Isomorphiesatz

Sei $\varphi: \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ eine verfeinerte Nachbarschaft. Dann gibt es eine bijektive, isotone Abbildung f der K-Rel. τ von $\mathcal{H}_1$ mit $\tau_\varphi \subseteq \tau \subseteq \circ$ auf die K-Rel. von $\mathcal{H}_2$.

Beweis: Sei τ K-Rel. in $\mathcal{H}_1$ mit $\tau_\varphi \subseteq \tau \subseteq \circ$. Wir setzen $f(\tau) = \tau^\varphi$, wobei

$$\varphi P\, \tau^\varphi \varphi Q \Longleftrightarrow P \tau Q.$$

Wegen $\tau_\varphi \subseteq \tau$ ist die Definition vertreterunabhängig und offensichtlich ist τ^φ eine Äquivalenzrelation.

$\varphi P\, \tau^\varphi \varphi Q \Longrightarrow P \tau Q$, also $P \circ Q$ und, da φ verfeinerte Nachbarschaft ist, $\varphi P \circ \varphi Q$. Damit haben wir: $\tau^\varphi \subseteq \circ$ (K1).

Setzen wir τ^φ in gewohnter Weise auf die Geradenmenge fort, so gilt, da φ surjektiv ist,

$$\varphi g\, \tau^\varphi \varphi h \Longleftrightarrow g \tau h.$$

Sei $\varphi P\, \tau^\varphi \varphi Q$ und $\varphi P \not\circ \varphi R$, also $P \not\circ R$. Ist $\varphi g = \varphi P \varphi R$, $\varphi h = \varphi Q \varphi R$, wobei $P\ I\ g$, $Q\ I\ h$ ist. Mit $R'\ I\ g,h$ und $\varphi R = \varphi R'$ haben wir $R \tau_\varphi R'$, also $R' \not\circ P$. Daher ist $g \tau h$, d.h. $\varphi g\, \tau^\varphi \varphi h$.

Entsprechend beweist man die andere Aussage in (K2). Somit ist τ^φ K-Rel. in $\mathcal{H}_2$.
In 3.6 wurde gezeigt, dass $P\,\tau_\eta\,Q \underset{def}{\Longleftrightarrow} \varphi P\,\eta\,\varphi Q$ für jede K-Rel. η in $\mathcal{H}_2$ eine K-Rel. τ_η mit $\tau_\varphi \subseteq \tau_\eta$ in $\mathcal{H}_1$ definiert. Setzen wir $g: \eta \longmapsto \tau_\eta$, so erhalten wir eine Abbildung von $K(\mathcal{H}_2)$ auf die Menge der K-Rel. τ von $\mathcal{H}_1$ mit $\tau_\varphi \subseteq \tau \subseteq o$. Wegen $g\circ f(\tau) = \tau$ und $f\circ g(\eta) = \eta$ ist f bijektiv. Offensichtlich ist f isoton:

$$\tau_1 \subseteq \tau_2 \Longrightarrow f\tau_1 \subseteq f\tau_2.$$

Da die Menge der K-Rel. von $\mathcal{H}_1$ bzw. $\mathcal{H}_2$ Ketten sind, ist f ein Ordnungsisomorphismus. Man beachte, dass benachbarte Relationen $(\tau_1 \subset \tau_2)$ in benachbarte $(f\tau_1 \subset f\tau_2)$ übergeführt werden.

Zum Abschluss dieses Paragraphen ziehen wir aus 1.7 eine wesentliche Folgerung.

3.12 <u>Satz</u>: Seien $\varphi_i : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_i$ $(i = 1,2)$ ferntreue Epimorphismen von H-Ebenen $\mathcal{H}, \mathcal{H}_i$, dann gelten folgende Aussagen:

a) Es existiert genau ein surjektiver Inzidenzmorphismus $\lambda : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ oder $\lambda' : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ (je nachdem ob $\tau_{\varphi_1} \subseteq \tau_{\varphi_2}$ oder $\tau_{\varphi_2} \subseteq \tau_{\varphi_1}$ ist) mit $\lambda\circ\varphi_1 = \varphi_2$ bzw. $\lambda'\circ\varphi_2 = \varphi_1$.

b) Ist nun $\lambda : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$, so ist
λ ferntreu genau dann, wenn $\tau_{\varphi_2}^\rho \subseteq \tau_{\varphi_1}^\rho$
λ nahtreu genau dann, wenn $\tau_{\varphi_1}^\rho \subseteq \tau_{\varphi_2}^\rho$.

<u>Beweis</u>: a) Nach Satz 1.7 ist die Menge der K-Rel. linear geordnet. Mit 3.6 sind $\tau_{\varphi_1}, \tau_{\varphi_2}$ K-Rel. Sei o.B.d.A. $\tau_{\varphi_1} \subseteq \tau_{\varphi_2}$. Man wendet 3.9 an und erhält genau einen surjektiven Inzidenzmorphismus $\lambda : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$.
b) Da φ_i Epimorphismen sind, gilt
$\forall P,Q \in \mathfrak{P}: P\,\tau_{\varphi_i}^\rho\,Q \Longleftrightarrow \varphi_i P \circ \varphi_i Q$. Mit 3.9 folgt dann sofort b).

Ist $\tau_{\varphi_1}^\rho = \tau_{\varphi_2}^\rho$, so unterscheiden sich die H-Ebenen $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 'nur' um eine verfeinerte Nachbarschaft. Andererseits bedeutet dies, dass wir den ferntreuen Epimorphismus φ_2 in einen ferntreuen – nämlich φ_1 – und eine verfeinerte Nachbarschaft – λ – zerlegt haben, wobei

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & \mathcal{H}_1 \arrow[d, dashed, "\lambda"] \\ & \mathcal{H}_2 \end{tikzcd}$$

$\varphi_2 = \lambda \cdot \varphi_1$ ist. Unter Umständen lässt sich φ_1 seinerseits wiederum nichttrivial zerlegen, d.h. es gibt eine verfeinerte Nachbarschaft λ', die kein Isomorphismus ist, und einen ferntreuen Epimorphismus φ' mit $\varphi_1 = \lambda' \cdot \varphi'$. Dieser Prozess braucht nicht abzubrechen, das zeigt der desarguessche Fall. Damit stellt sich die Frage, ob es zu jedem φ_2 wenigstens einen ferntreuen Epimorphismus φ_0, eine verfeinerte Nachschaft λ_0 und eine H-Ebene $\mathcal{H}_0$ gibt, wobei $\varphi_2 = \lambda_0 \cdot \varphi_0$ ist. und φ_0 keine nichttriviale Zerlegung dieser Art besitzt. Offensichtlich existiert dann wegen 3.12 eine verfeinerte Nachbarschaft λ', so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & \mathcal{H}_0 \arrow[d, "\lambda_0"] \\
& \mathcal{H}_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] \arrow[drr, "\varphi_2"] & \mathcal{H}_0 \arrow[d, dashed, "\exists_1 \lambda'"] \arrow[dr, "\lambda_0"] & \\
& \mathcal{H}_1 \arrow[r, "\lambda"] & \mathcal{H}_2
\end{tikzcd}$$

kommutativ wird.

Eine Antwort auf die oben gestellte Frage gibt folgender Zerlegungssatz für ferntreue Epimorphismen, der gerade die Minimalität der pa-konjugierten K-Rel. widerspiegelt.

3.13 Satz: Zerlegungssatz für ferntreue Epimorphismen

Sei $\mathcal{H}$ eine H-Ebene. Jede K-Rel. $\tau \in K(\mathcal{H})$ erfülle (K4) und besitze p- und pa-konjugierte K-Rel. Dabei sollen die p-konjugierten (K3), (K5) und (K6) genügen.

Dann gilt:

Für jeden ferntreuen Epimorphismus $\varphi_2 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_2$ gibt es eine H-Ebene $\mathcal{H}_0$ und eine, bis auf Isomorphismen eindeutige Zerlegung in einen ferntreuen Epimorphismus $\varphi_0 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_0$ und eine verfeinerte Nachbarschaft $\lambda_0 : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ mit $\varphi_2 = \lambda_0 \circ \varphi_0$ wobei φ_0 nur trivial zerlegbar ist.

Beweis: τ_{φ_2} ist K-Rel in $\mathcal{H}$. O.B.d.A. sei $\tau_{\varphi_2} \neq id$, d.h. φ_2 ist kein Isomorphismus.

a) $\tau_{\varphi_2}{}^{pa} = id$, also (2.7.1) $\tau_{\varphi_2}^{p} = o$.
Nun ist $P\tau_{\varphi_2}^{p} Q \Longleftrightarrow \varphi P \; o \varphi Q$, also $P o Q \Longleftrightarrow \varphi P o \varphi Q$.
Daher ist φ_2 verfeinerte Nachbarschaft. Wir setzen $\mathcal{H}_o = \mathcal{H}$, $\varphi_o = 1_{\mathcal{H}}$ und $\lambda_o = \varphi_2$. Wegen 3.12 ist φ_o minimal.
b) $\tau_{\varphi_2}{}^{pa} \neq id$. Wir setzen $\mathcal{H}_o = \mathcal{H}/\tau_{\varphi_2}{}^{pa}$ und $\varphi_o : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_o$ als kanonische Projektion auf die Faktorstrukur. Mit 3.5 ist φ_o ferntreu und $\mathcal{H}_o$ projektive H-Ebene (2.10), da $\tau_{\varphi_2}{}^{pa}$ als K-Rel. (K4) und $\tau_{\varphi_2}^{pap} = \tau_{\varphi_2}^{p}$ (2.8) (K3) erfüllen. Wegen $\tau_{\varphi_2}{}^{pa} \subseteq \tau_{\varphi_2}$ existiert genau ein Inzidenzmorphismus $\lambda_o: \mathcal{H}_o \rightarrow \mathcal{H}_2$.
Mit 3.12 und 2.8 folgt, da $\tau_{\varphi_o}^{p} = \tau_{\varphi_2}{}^{pap} = \tau_{\varphi_2}^{p}$ ist, dass λ_o verfeinerte Nachbarschaft ist.
Wegen der Minimaleigenschaft der pa-konjugierten Relationen (2.8.3) ist φ_o nur trivial zerlegbar, d.h. φ_o ist minimal unter allen Zerlegungen obiger Art.

§ 4. EINE KLASSIFIZIERUNG VON HJELMSLEV-EBENEN

Nachdem 1954/1955 KLINGENBERG [8] global die desarguesschen H-Ebenen charakterisiert hatte, war wohl LÜNEBURG [11] der erste, der eine geometrisch beschriebene Klasse von H-Ebenen - die uniformen H-Ebenen - im nichtdesarguesschen Fall näher untersuchte. Verallgemeinerungen dieses Begriffes brachten Arbeiten von ARTMANN [1] und für die endlichen Strukturen von DRAKE [4]. Wesentliches Hilfsmittel in den Arbeiten von ARTMANN ist der schon oben erwähnte Morphismusbegriff der verfeinerten Nachbarschaften. Dort werden H-Ebenen behandelt, in denen die kanonische Projektion in höchstens endlich viele verfeinerte Nachbarschaften zerlegt werden kann. Dass dies nicht immer möglich ist, legt die Betrachtung von desarguesschen H-Ebenen schon nahe. Anstelle der Zerlegung der kanonischen Projektion betrachten wir hier die Menge der K-Rel. einer H-Ebene, die wir eineindeutig der Menge der ferntreuen Epimorphismen zuordnen können, wobei wir die Epimorphismen, die sich um einen Isomorphismus unterscheiden, identifizieren. Den Ordnungstyp dieser Menge benutzen wir als Klassifizierungsmerkmal.
Es scheint uns schwierig, im allgemeinen Fall ohne zusätzliche Voraussetzungen an die Ebenen wesentliche Folgerungen aus dem Typ einer H-Ebene zu ziehen. Daher werden wir in diesem Paragraphen lediglich die Terminologie bereitstellen, die H-Ebenen der Höhe n einordnen, dann aber die verschiedenen Typen erst im desarguesschen Fall diskutieren.

Mit $K(\mathcal{H})$ haben wir bislang die Menge der K-Rel. einer projektiven H-Ebene $\mathcal{H}$ bezeichnet. Setzen wir für $\tau_1, \tau_2 \in K(\mathcal{H})$

$$\tau_2 \leq \tau_1 \underset{def}{\Longleftrightarrow} \tau_1 \subseteq \tau_2$$

so ist $(K(\mathcal{H}), \leq)$ wegen 1.7 eine linear geordnete Menge. Dass es günstiger ist, anstelle von $\subseteq$ die konverse Relation $\leq$ zu benutzen, wird sich bei der Behandlung von desarguesschen H-Ebenen herausstellen.

4.1 Def.: Sei $\mathcal{H}$ eine H-Ebene und $(K(\mathcal{H}), \leq)$ die Menge der K-Rel. von $\mathcal{H}$.
Der Ordnungstyp von $(K(\mathcal{H}), \leq)$ heisst i-Typ von $\mathcal{H}$.
Der Ordnungstyp von
$$(\{\sigma \varepsilon K(\mathcal{H}) \mid \exists\, \tau \varepsilon K(\mathcal{H}) : \sigma \lessdot \tau\} \cup \{id\}, \leq),$$
d.h. der Menge der K-Rel. zusammen mit id, die in bezug auf $\leq$ ($\subseteq$) untere (obere) Nachbarn sind, heisst h-Typ von $\mathcal{H}$.
Der Ordnungstyp der Menge aller p-konjugierten K-Rel., d.h. der Ordnungstyp von
$$(\{\varrho\ \varepsilon K(\mathcal{H}) \mid \exists\, \tau \varepsilon K(\mathcal{H}) : \varrho = \tau^{p}\}, \leq),$$
wobei die an τ^{p} gestellten Forderungen zu beachten sind, heisst p-Typ von $\mathcal{H}$.

Bemerkung: Eine grössere Klasse von H-Ebenen verschiedener Typen können wir erst, nachdem wir Konstruktionsprinzipien von Hjelmslev-Ringen behandelt haben, vorstellen. Dann wird sich der i-Typ als der Ordnungstyp des Idealverbandes des H-Ringes R der H-Ebene $\mathcal{H}(R)$, der h-Typ als der Ordnungstyp der Menge aller Hauptideale (falls R Duo-Ring ist) und der p-Typ als der Ordnungstyp der Menge aller vollständigen Primideale herausstellen.

Mit $\underline{n}$ kennzeichnen wir den Ordnungstyp einer Kette mit n Elementen.

4.2 Lemma: Sei $\mathcal{H}$ H-Ebene. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\mathcal{H}$ ist projektive H-Ebene.

b) $\mathcal{H}$ hat i-Typ $\underline{1}$.

Beweis: a)$\Rightarrow$b) Da für K-Rel. stets gilt: $id \subseteq \tau \subseteq o$, hier aber wegen a) $id = o$ ist, kann $\mathcal{H}$ nur den i-Typ $\underline{1}$ haben.
b)$\Rightarrow$a) Nun ist $id = o$, also $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}/_{id} = \mathcal{H}/_{o} \cong \overline{\mathcal{H}}$, d.h. $\mathcal{H}$ ist eine projektive Ebene.

Bemerkung: Ist $\mathcal{H}$ projektive Ebene, so ist offensichtlich auch der h-Typ und der p-Typ $\underline{1}$.

4.3 Def.: Eine (echte) projektive H-Ebene heisst uniform, wenn
$$P \circ Q \Longleftrightarrow \forall g,h \varepsilon \mathcal{G} : g \circ h,\ P,Q\ I\ g,\ P\ I\ h \Longrightarrow Q\ I\ h$$
$$g \circ h \Longleftrightarrow \forall P,Q \varepsilon \mathcal{P} : P \circ Q,\ P\ I\ g,h,\ Q\ I\ g \Longrightarrow Q\ I\ h$$

4.4 <u>Lemma</u>: Sei $\mathcal{H}$ eine uniforme H-Ebene, so ist der i-Typ und der h-Typ $\underline{2}$, der p-Typ $\underline{1}$.

<u>Beweis</u>: Nach Voraussetzung ist $id \neq \circ$ und $\circ^a = \circ$. Mit 2.3.1 ist $\circ^p = \circ$. Wegen 2.6 e) hat $\circ^a = \circ \neq id$ zur Folge: $id \subset \circ^a = \circ$. Da $id^p = \circ$ gilt, erkennt man, dass der i-Typ und der h-Typ $\underline{2}$ sind, während es genau eine p-konjugierte K-Rel., nämlich $\circ$, gibt.

Ob dagegen alle H-Ebenen mit i-Typ und h-Typ $\underline{2}$, p-Typ $\underline{1}$ uniform sind, ist direkt nicht ersichtlich. Für den desarguesschen Fall werden wir die Schwierigkeiten unter 5.15 bzw. 6.18 diskutieren.

4.5 <u>Lemma</u>: Sei $\mathcal{H}$ eine H-Ebene der Höhe n, dann ist der i-Typ und der h-Typ $\underline{n}$, der p-Typ $\underline{1}$.

<u>Beweis</u>: (Bezüglich der Definition und der Terminologie von H-Ebenen der Höhe n, vgl. ARTMANN [1,S.165-167,174]).

a) Sei τ verfeinerte minimale Nachbarschaft von $\mathcal{H}$, so ist mit Lemma 1.2 [1] τ eine K-Rel. Die Minimalitätsbedingung

M a) bedeutet: $\tau \subseteq \circ^a$, denn

$P \tau Q \implies (\forall g,h \in \mathcal{G} : P,Q\ I\ g,\ P\ I\ h,\ g \circ h \implies Q\ I\ h)$.

M b) bedeutet: $\circ \subseteq \tau^a$, denn

$P \circ Q \implies (\forall g,h \in \mathcal{G} : P,Q\ I\ g,\ P\ I\ h,\ g \tau h \implies Q\ I\ h)$.

M c) bedeutet: $id \neq \tau$. Wegen $id \neq \tau$ und daher $\circ^a \neq id$ folgt mit 2.6 e) $id \subset \circ^a$, also mit $\tau \subseteq \circ^a$ ist $id \subset \tau$, d.h. $\tau = \circ^a$.

b) Wir beweisen nun die Aussage von 4.5 durch Induktion über die Höhe der projektiven H-Ebene.

1. Ist $\mathcal{H}$ H-Ebene der Höhe 1, so ist nach Definition $\mathcal{H}$ gewöhnliche projektive Ebene. Wegen 4.2 sind wir fertig.
2. Sei nun die Aussage von 4.5 für alle Ebenen der Höhe kleiner oder gleich k richtig. Ist $\mathcal{H}_{k+1}$ H-Ebene der Höhe k+1, so haben wir folgendes kommutative Diagramm [1,S.174]:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_{k+1} \arrow[r, "\psi_k"] \arrow[d, "\varphi_{k+1}"] & \mathcal{H}_k \arrow[r, "\psi_{k-1}"] \arrow[d, "\varphi_k"] & \cdots \arrow[r, "\psi_2"] & \mathcal{H}_2 \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"] & \mathcal{H}_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\
\bar{\mathcal{H}}_{k+1} & \bar{\mathcal{H}}_k \arrow[l, "\lambda_k"] & \cdots \arrow[l, "\lambda_{k-1}"] & \bar{\mathcal{H}}_2 \arrow[l] & \bar{\mathcal{H}}_1 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Setzen wir $P \tau_{\psi_k} Q \Longleftrightarrow \psi_k P = \psi_k Q$, so ist $\tau_{\psi_k} = (\sim k)$ und K-Rel. in $\mathcal{H}_{k+1}$. Dabei ist $(\sim k)$ minimale verfeinerte Nachbarschaft, also mit a) $id \subset (\sim k)$.
Nun ist ψ_k fern- und nahtreuer Epimorphismus, also ist aufgrund des 1. Isomorphiesatzes $\mathcal{H}_{k+1}/(\sim k) \cong \mathcal{H}_k$ und aufgrund des 2. Isomorphiesatzes existiert ein Ordnungsisomorphismus $f_k: (K(\mathcal{H}_{k+1}/(\sim k)), \leq) \longrightarrow (K(\mathcal{H}_k), \leq)$.
Die Induktionsvoraussetzung und die Tatsache, dass $id \subset (\sim k)$ ist, haben zur Folge: i-Typ und h-Typ sind $\underline{k+1}$.
Ist $(\sim i)$ p-konjugierte K-Rel., d.h. es existiert eine K-Rel. $(\sim j)$ mit $(\sim j)^{\rho} = (\sim i)$, so betrachten wir den fern- und nahtreuen Epimorphismus (verfeinerte Nachbarschaft) $\psi = \psi_j \cdots \psi_{k-1} \circ \psi_k$
Man beachte $(\sim i) \leq (\sim j) \leq (\sim k)$ nach 2.3. Dann ist $\mathcal{H}_{k+1}/(\sim j) \cong \mathcal{H}_j$ und es gilt mit 3.8

$$\psi P \circ \psi Q \Longleftrightarrow P \, (\sim j)^{\rho} \, Q \Longleftrightarrow P \, (\sim i) \, Q.$$

Nun ist ψ verfeinerte Nachbarschaft, also

$$\psi P \circ \psi Q \Longleftrightarrow P \circ Q,$$

was sofort $i = 1$ nach sich zieht. Daher ist $\underline{1}$ der p-Typ von $\mathcal{H}_{k+1}$.

<u>Bemerkungen</u>: 1. In einer H-Ebene der Höhe n gilt:

$$(\sim i)^{\rho} = (\sim 1) \text{ für alle } 1 \leq i \leq n.$$

2. $\psi_{n-1}: \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n-1}$ ist universell unter der Menge der ferntreuen Epimorphismen, da $\tau_{\psi_{n-1}} \lessdot id$ und K-Rel. gerade die 'Kerne' von ferntreuen Epimorphismen sind. Das war ein offenes Problem bei ARTMANN [2,S.10].
3. Ob sich die H-Ebenen der Höhe n gerade durch diese Typen (i-Typ und h-Typ $\underline{n}$, p-Typ $\underline{1}$) charakterisieren lassen, ist ungewiss, da, wie oben erwähnt, im uniformen Fall erhebliche Schwierigkeiten auftauchen.

§ 5. HJELMSLEV-RINGE

5.1 Def.: Ein (nicht notwendig kommutativer) Ring heisst Hjelmslev-Ring (H-Ring), wenn er folgenden Bedingungen genügt:

a) Die Links- und Rechtsideale bilden eine Kette.

b) Die Nullteiler bilden ein zweiseitiges Ideal und jeder Nullteiler ist zweiseitiger Nullteiler.

c) Jeder Nichtnullteiler ist Einheit.

Bemerkungen: 1. Ringe mit 5.1 a) werden wir als Kettenringe, Ringe mit 5.1 a),b) als Quasi-H-Ringe bezeichnen.

2. Kettenringe sind lokale Ringe. Mit $J(R) = J$ bezeichnen wir das maximale Ideal der Nichteinheiten, mit $N(R) = N$ das Ideal der Nullteiler und mit $U(R) = U$ die Einheitengruppe des Ringes R.

Die Definition 5.1 stammt von KLINGENBERG [8], der solche Ringe als Koordinatenbereiche von hinreichend transitiven H-Ebenen entdeckte. In der gleichen Arbeit findet sich ein Konstruktionsverfahren für (kommutative) H-Ringe, indem man geeignete epimorphe Bilder von (kommutativen) Bewertungsringen betrachtet. Das dort angegebene Kriterium, wann epimorphe Bilder von Bewertungsringen H-Ringe sind, ist fehlerhaft. Eine Korrektur bzw. Verallgemeinerung und Beispiele von H-Ringen werden wir in §7 angeben.
Da die Definition eines Kettenringes links-rechts-symmetrisch im Hinblick auf die Idealverbände ist, werden wir im folgenden oftmals lediglich Ergebnisse über Linksideale beweisen, während dann die Aussage analog auch für Rechtsideale richtig ist.

A. Eigenschaften von H-Ringen

Aus der Eigenschaft 5.1 a), die wir im folgenden oft als Vergleichbarkeitsbedingung ansprechen werden, folgt sofort:

5.2 Lemma: In einem Kettenring ist jedes endlich erzeugte Linksideal ein Linkshauptideal.

5.3 Lemma: In einem Kettenring R besitzt jedes Linkshauptideal $Ra \neq (0)$ im Verband der Linksideale einen unteren Nachbarn, nämlich Ja, in Zeichen: $Ja \subset Ra$.

Beweis: Offensichtlich ist $Ja \subsetneq Ra$. Sei $x \neq 0$, $x \in Ra \setminus Ja$. Dann ist $x = ra$ für ein $r \in R$ und wegen $r \in J$ folgt $Ra = Rx$.

Umgekehrt gilt:

5.4 Lemma: Jedes Linksideal I_1 eines Kettenringes R, das einen unteren Nachbarn I_2 hat, ist Linkshauptideal.

Beweis: Sei $a \in I_1 \setminus I_2$. Also ist $I_2 \subset Ra \subseteq I_1$. Wegen $I_2 \subset I_1$ haben wir $I_2 \subset Ra = I_1$.

5.5 Lemma: Für einen Kettenring R sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $Ra \subseteq aR$

b) $Ua \subseteq aU$

c) $aJ \subseteq Ja$

Beweis: Wir bemerken, dass $ra = a$ und $r \in J$ wegen 5.3 $a = 0$ zur Folge hat. (Entsprechend gilt: $ar = a$ und $r \in J \Rightarrow a = 0$).
Sei im folgenden o.B.d.A. $a \neq 0$.

a)$\Rightarrow$b) Sei $ka \in Ua$ mit $k \in U$. Ist $ka = al_1$, so haben wir $a = k^{-1}al_1$ und mit a) folgt $a = ak'l_1$. $l_1 \in J$ hätte $a = 0$ zur Folge, also $l_1 \in U$.
Ist dagegen $kal_2 = a$ (Vergleichbarkeitsbedingung), wobei wir von $l_2 \in J$ ausgehen können, so folgt wiederum mit a) $kal_2 = a = ak'l_2$, also $a = 0$. Widerspruch! Daher gilt: $Ua \subseteq aU$

b)$\Rightarrow$c) Sei $ak \in aJ$ mit $k \in J$. Ist $ak = l_1a$, so ist, falls $l_1 \in U$ gilt, $l_1^{-1}ak = a$, mit b) daher $al'k = a$, was $a = 0$ zur Folge hätte. Somit muss $l_1 \in J$ sein.
Ist dagegen $l_2ak = a$, wobei wir von $l_2 \in J$ ausgehen können, so haben wir $(1+l_2)ak = a(k+1)$. Nun sind $1+l_2$, $1+k \in U$, daher $(1+l_2)ak(k+1)^{-1} = a$, also mit $al'k(k+1)^{-1} = a$, was mit $l'k(k+1)^{-1} \in J$ zum Widerspruch führt. Also ist $aJ \subseteq Ja$.

c)$\Rightarrow$a) Sei $ka \in Ra$. Ist $kal = a$ mit $l \in J$, so gibt es wegen c) ein $l' \in J$ mit $kl'a = a$, also $a = 0$. Daher gilt: $Ra \subseteq aR$.

Bemerkung: Gilt eine der äquivalenten Aussagen von 5.5, so ist das Rechtsideal aR ein zweiseitiges Ideal.

Von grosser Bedeutung für die Struktur des Idealverbandes eines H-Ringes sind die Annullatoren.

5.6 Def.: Sei R ein Ring und I R. Dann heisst
$$I^r = \{x \varepsilon R \mid \forall\, a \varepsilon I:\ ax = 0\}$$ Rechtsannullator von I.

Entsprechend definiert ist der Linksannullator I^l. Offensichtlich sind Rechtsannullatoren Rechtsideale. Wir zitieren einige Eigenschaften von Annullatoren, die man z.B. bei MAEDA [12] findet.

5.7 Lemma: Seien I_1, I_2 Linksideale. Dann gelten folgende Aussagen:

a) $I_1 \subseteq I_2 \Longrightarrow I_2{}^r \subseteq I_1{}^r$

b) $I_1 \subseteq (I_1{}^r)^l$

c) $I_1{}^r = ((I_1{}^r)^l)^r$

d) $(I_1 \cup I_2)^r = I_1{}^r \cap I_2{}^r$

Bemerkungen: 1. In Verallgemeinerung von d) gilt für Linksideale $I_\lambda (\lambda \varepsilon \Lambda)$: $(\bigcup_{\lambda\varepsilon\Lambda} I_\lambda)^r = \bigcap_{\lambda\varepsilon\Lambda} I_\lambda^r$

2. Anstelle von $(I^r)^l$ schreiben wir im allgemeinen I^{rl}.

Wesentlich für das folgende ist

5.8 Lemma: Sei Ra Linkshauptideal eines H-Ringes R. Dann gilt:
$$(Ra)^{rl} = RA$$

Beweis: O.B.d.A. $a \neq 0$. Mit 5.7 b) bleibt zu zeigen: $(Ra)^{rl} \subseteq Ra$, d.h. $\{y \mid \forall\, c\varepsilon R: (ca)x = 0 \Rightarrow yx = 0\} \subseteq Ra$. Offensichtlich kann $c = 1$ gesetzt werden, also ist zu zeigen: $\{y \mid ax = 0 \Rightarrow yx = 0\} \subseteq Ra$. Wegen der Linksvergleichbarkeit erhalten wir für $y\varepsilon(Ra)^{rl}$ $k_1a = y$ oder $k_2y = a$. Annahme: Sei $k_2y = a$, also $k_2yx = 0 \Rightarrow yx = 0$. Somit gilt: $(Rk_2)^r \cap yR = (0)$. Aus der Rechtsvergleichbarkeit folgt $yR = (0)$ oder $(Rk_2)^r = (0)$. $yR = (0) \Rightarrow y = 0$, also $a = 0$. Widerspruch! $(Rk_2)^r = (0)$ impliziert $k_2\varepsilon U$, d.h. $y = k_2{}^{-1}a\varepsilon Ra$.

Man solte nun aber nicht erwarten, dass damit 5.8 für alle Linksideale in H-Ringen gilt. Ein Gegenbeispiel findet man in 7.6.3. Was dieses Beispiel zeigt, gilt allgemein:

5.9 <u>Lemma</u>: Sei R ein H-Ring und I ein Linksideal. Dann gilt entweder $I = I^{rl}$ oder $I \subset I^{rl}$.

<u>Beweis</u>: Sei o.B.d.A. $I \subset I^{rl}$. Es existiert $x \varepsilon I^{rl} \setminus I$, also $I \subset Rx \subseteq I^{rl}$. $I \subseteq Rx \Longrightarrow (Rx)^r \subseteq I^r$ (5.7 a)).
$(Rx)^r \subseteq I^r \Longrightarrow I^{rl} \subseteq (Rx)^{rl} = Rx$ (5.7 a), 5.8). Also ist $I \subset I^{rl}$.

Aussagen ähnlichen Inhalts gibt Lemma 5.10:

5.10 <u>Lemma</u>: Sei R ein H-Ring, I_1, I_2 Linksideale:

a) $I_1 \subseteq I_2$ und $I_1{}^r = I_2{}^r \Longrightarrow I_1 = I_2$ oder $I_1 \subset I_2$.
b) $\exists\, x \varepsilon R$: $I_1 \subset Rx \subset I_2 \Longrightarrow I_1{}^r = I_2{}^r$.
c) $(Rx)^r = (Ry)^r \Longleftrightarrow Rx = Ry$

5.11 <u>Def.</u>: a) Ein zweiseitiges Ideal P eines Ringes R heisst <u>Primideal</u>, wenn $\forall x,y \varepsilon P^c \; \exists\, t \varepsilon R$: $xty \varepsilon P^c$.

b) Ein zweiseitiges Ideal P eines Ringes R heisst <u>vollständiges Primideal</u>, wenn $\forall x,y \varepsilon P^c$: $xy \varepsilon P^c$

Bezüglich der Existenz von H-Ringen mit vollständigen Primidealen $\neq N$ vgl. §7.

5.12 <u>Lemma</u>: Sei P vollständiges Primideal, $P \neq N$, eines H-Ringes. Dann ist P weder als Links- noch als Rechtsideal endlich erzeugt und weder als Links- noch als Rechtsideal unterer Nachbar.

<u>Beweis</u>: a) Sei $P = Ra$, wobei $P \neq N$. a muss verschieden von Null sein, da sonst R nullteilerfrei wäre, also $N = P$.
Sei daher $P = Ra$ mit $a \neq 0$ angenommen. Für $x \varepsilon N \setminus P$ existiert $s \varepsilon R$ mit $xs = a$. Da P vollständig prim ist, haben wir $s \varepsilon Ra$, also $s = ra$ für ein $r \varepsilon R$. $xs = xra = a$ hat wegen $x \varepsilon N$ stets $a = 0$ zur Folge, Widerspruch!
b) Jeder untere Nachbar ist nach 5.3 von der Form $P = Na$. Wie oben überlegt man sich, dass man $a \neq 0$ und $a \varepsilon N$ annehmen kann. Daher ist $a \notin P$, stets aber $a^2 \varepsilon P$. Widerspruch! Also kann P nicht von der Form Na sein.

Folgerung: Da P kein unterer Nachbar sein kann, folgt aus 5.9 $P^{rl} = P$ und $P^{lr} = P$.

Entsprechendes wie in 5.12 gilt auch für die Annullatoren von vollständigen Primidealen.

5.13 Lemma: Der Links- und Rechtsannullator eines vollständigen Primideals $P \neq N$ eines H-Ringes R kann weder als Links- noch als Rechtsideal endlich erzeugt und weder als Links- noch als Rechtsideal unterer Nachbar sein.

Beweis: Wir beschränken uns auf die Betrachtung des Linksannullators P^l. Der Linksannullator eines zweiseitigen Ideals ist offensichtlich zweiseitig.

a) Sei P^l von der Form Ra, also ist $P^{lr} = P = (Ra)^r$. Wegen $P \neq N$ ist P^l nicht oberer Nachbar des Nullideals. Daher gibt es $s \in N \setminus P$ mit $sa = x \neq 0$. Da $P^l = Ra$ und P^l zweiseitig ist, haben wir mit (5.5 Seiten vertauscht) $aR \subseteq Ra$ bzw. $Na \subseteq aN$. Also gibt es $s_1 \in R$ mit $sa = x = as_1$. Da $P = (Ra)^r$ ist, folgt $s_1 \in N \setminus P$. Sei $k \in (Rx)^r$. $0 = xk = as_1k$ hat wegen $P = (Ra)^r$ $s_1k \in P$ zur Folge, also $k \in P$. Damit ist $(Rx)^r \subseteq P$.
Sei nun $k \in P$, dann ist $s_1k \in P$, daher auch $as_1k = 0 = xk$. Damit ist $P \subseteq (Rx)^r$, was $(Rx)^r = P$ bzw. $(Rx)^{rl} = Rx = P^l$ zeigt. $Ra = Rx$ ist aber wegen $s \in N$ unmöglich.

b) Ist P^l als Linksideal unterer Nachbar, also $P^l = Na$ für ein $a \in R$, so gilt wegen 5.9 $(Ra)^r \subset (Na)^r$ oder $(Ra)^r = (Na)^r$. Mit $(Ra)^r \subset (Na)^r$ folgt $(Ra)^r \subset P$, also $P = bR$ (Widerspruch zu 5.12), während $(Ra)^r = (Na)^r = P^{lr} = P$ stets $P^l = Ra$ nach sich zieht. Widerspruch zu a).

c) Sei $P^l = aR$. P^l ist ein zweiseitiges Ideal, also $Ra \subseteq aR$, d.h. auch $aN \subseteq Na$ nach 5.5.
Ist $aR = Ra$, so sind wir wegen a) fertig. Annahme: $Ra \subset aR$. Es gibt $x \in aR \setminus Ra$, d.h. es existiert $r \in R$ mit $x = ar$ und $s \in N$ mit $sx = a$. Mit $sar = a$ ist wegen $aN \subseteq Na$ und $a \neq 0$ sicher $r \in U$. Da $Ra \subset Rx$ gilt, folgt mit 5.10 $(Rx)^r \subset (Ra)^r$. Somit gibt es $y \in (Ra)^r \setminus (Rx)^r$, d.h. $ay = 0$ und $xy = ary \neq 0$. Also ist $y \notin P$, daher auch $y^2 \notin P$. Nun ist $y \in (Ra)^r$ genau dann, wenn $Ray = 0$ ist. Mit $aNy \subseteq Nay = 0$ folgt $Ny \subseteq (Ra)^r$.

Da $P^l \neq (0)$ ist, haben wir $y \in N$, also $aRy^2 \subseteq aNy \subseteq a(Ra)^r = (0)$. Somit liegt y^2 in $(aR)^r = P$, was der Tatsache, dass P ein Primideal ist und $y \notin P$ gilt, widerspricht.

d) Sei P^l als Rechtsideal unterer Nachbar.

$$P^l = aN \iff (\forall z \in R: zP = (0) \iff z \in aN)$$

Nun ist $NP = P$, denn offensichtlich ist $NP \subseteq P$ richtig. Sei $p \in P$, $n \in N \subseteq P$, dann exisiert $r \in R$ mit $nr = p$. Da P vollständiges Primideal ist, gilt $r \in P$, d.h. $P \subseteq NP$. Daher impliziert $aNP = (0)$ stets $aP = (0)$. Wegen $P^l = aN$ ist $a \in aN$. Widerspruch!

Folgerung: Es gilt $P^{llr} = P^l$ und $P^{rrl} = P^r$, denn mit 5.9 haben wir für die Rechtsideale $P^l \subset P^{llr}$ oder $P^l = P^{llr}$. $P^l \subset P^{llr}$ widerspricht 5.13.

Wir bemerken noch, dass, falls $P = N$, stets $N^l = (0)$ oder $N^l = Rm$ für ein $m \in R$ ist. Dabei ist Rm oberer Nachbar des Nullideals im Linksidealverband und es gilt $Rm = mR$ [19]. Damit zeigt man schnell: $N^l = N^r$.

Bislang haben wir nur über die Struktur der vollständigen Primideale im Links- und Rechtsidealverband gesprochen. Ist das Primideal P nicht vollständig, so ist es ungewiss, ob die Aussagen von 5.12 und 5.13 auch für P gelten. Sofort einzusehen ist:

5.14 Lemma: Sei $P \neq N$ Primideal eines H-Ringes R, so ist P weder im Linksidealverband noch im Rechtsidealverband unterer Nachbar.

Ob dagegen (nicht vollständige) Primideale links- oder rechts endlich erzeugt sein können, bleibt offen. Dazu äquivalent ist die Frage, ob ein H-Ring, der kein Körper ist, Primring (das Nullideal ist ein Primideal) sein kann. Wir verweisen lediglich auf folgendes Zwischenergebnis:

5.15 Lemma: Sei R ein H-Ring, der Primring ist. Dann besitzt R höchstens zwei zweiseitige Ideale, nämlich N und (0).

<u>Beweis</u>: Ist R ein Körper, so sind wir fertig. Ist dagegen $N \neq (0)$, (0) Primideal und I ein zweiseitiges Ideal I mit $(0) \subset I \subset N$. Wegen $I \neq N$ ist $I^r \neq (0)$. Sei $0 \neq x \varepsilon I$, $0 \neq y \varepsilon I^r$, d.h. $xy = 0$. Da (0) prim ist, gibt es $t \varepsilon R$ mit $xty \notin (0)$. I^r ist auch ein Rechtsideal, also $xt \varepsilon I^r$, so dass $xty = 0$ ist. Daher kann es höchstens zwei Ideale geben.

Dadurch bleibt auch die Frage offen, ob ein H-Ring mit genau zwei zweiseitigen Idealen, nämlich (0) und N, ein E-Ring ist (siehe 5.27). Das verhindert, dass man die uniformen (desarguesschen) H-Ebenen als H-Ebenen mit i-Typ <u>2</u> charakterisieren könnte.(Siehe ferner 6.18) In diesem Zusammenhang erwähnen wir eine Arbeit von B. OSOFSKY [13], in der ein verwandtes Problem für eine Klasse von selbstinjektiven Ringen angesprochen wird, das anscheinend bislang ungelöst ist.

Wir ziehen zum Schluss dieses Abschnittes noch einige Folgerungen über die Darstellungen von Annullatoren.

5.16 <u>Lemma</u>: Sei R ein H-Ring, I ein Linksideal, wobei $I^r \neq (0)$ nicht endlich erzeugt ist. Dann gilt:

$$I^r = \{a \mid \exists\, t \varepsilon I^c: ta = 0\}$$

<u>Beweis</u>: Sei $a \varepsilon I^r$. <u>Annahme</u>: $\forall t \varepsilon I^c$: $ta \neq 0$, d.h. $a \notin (Rt)^l$. Also ist $\bigcup_{t\varepsilon I^c} (Rt)^r \subset aR$. Daher gilt:

$$(aR)^l \subseteq \Big(\bigcup_{t\varepsilon I^c}(Rt)^l\Big)^r = \bigcap_{t\varepsilon I^c}(Rt)^{lr} = \bigcap_{t\varepsilon I^c} Rt \quad (5.8).$$

Ist $\bigcap_{t\varepsilon I^c} Rt = I$, so folgt mit $(aR)^l \subseteq I$ und $a \varepsilon I^r$ sofort $aR \subseteq I^r$, also $I \subseteq (aR)^l$ und damit $I = (aR)^l$, was wegen $I^r = aR$ im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

Ist dagegen $\bigcap_{t\varepsilon I^c} Rt \subset I$, so schliessen wir mit $(aR)^l \subset I$ sofort auf $I^r = aR$ oder $I^r \subset aR$ (5.10). Mit $a \varepsilon I^r$, also $aR \subset I^r$, folgt $aR \subset aR$. Widerspruch! Daher ist Annahme falsch und die Behauptung bewiesen.

<u>Folgerung</u>: Für vollständige Primideale $P \neq N$ sind mit 5.12 und 5.13 P^r bzw. $(P^l)^r = P$ nicht endlich erzeugt.

Daher gilt: $P^r = \{a \mid \exists\, t \varepsilon P^c: ta = 0\}$

$P = \{a \mid \exists\, t \varepsilon P^{lc}: ta = 0\}$.

B. Epimorphe Bilder von H-Ringen

Epimorphismen von H-Ringen erhalten sicher die lineare Ordnung der Links- und Rechtsideale, jedoch im allgemeinen nicht die Zweiseitigkeit von Nullteilern. Gerade diese Eigenschaft ist eng mit der Frage gekoppelt, wann und ob epimorphe Bilder von desarguesschen H-Ebenen wieder solche sind. Es zeigt sich, dass wir dieses Problem auch allgemeiner für Kettenringe behandeln können.
Wir setzen für ein zweiseitiges Ideal I eines Ringes R:

$$S_l(I) = \{ s \mid \forall t \varepsilon R: st \varepsilon I \Longrightarrow t \varepsilon I \}$$
$$S_r(I) = \{ s \mid \forall t \varepsilon R: ts \varepsilon I \Longrightarrow t \varepsilon I \}$$

Bemerkungen: 1. $S_l(I)$, $S_r(I)$ sind multiplikativ abgeschlossen.

2. $S_l(I) \cap I = \emptyset$, $S_r(I) \cap I = \emptyset$.

5.17 Satz: In einem Kettenring R sind für jedes zweiseitige Ideal I die Mengen $S_l(I)^c$, $S_r(I)^c$ vollständige Primideale.

Beweis: Nach obiger Bemerkung ist zu zeigen, dass $S_l(I)^c = P_1$ bzw. $S_r(I)^c = P_2$ zweiseitige Ideale sind, wobei wir den Nachweis für P_1 führen. Nun ist offensichtlich $RP_1 \subseteq P_1$. In Kettenringen sind Links- (Rechts-) Ideale der multiplikativen Halbgruppe des Ringes schon Links- (Rechts-) Ideale des Ringes. Deshalb ist P_1 Linksideal. Wir weisen daher nach:

$$x \varepsilon P_1 \Rightarrow \forall r \varepsilon R: xr \varepsilon P_1$$

Gibt es r_1 mit $r_1 x = xr$, so sind wir fertig. Im anderen Fall gibt es sicher ein $r_2 \varepsilon J(R) = J$ mit $x = r_2 xr$.
Annahme: $xr \varepsilon S_l(I)$. Ist $r_2 \varepsilon S_l(I)$, dann ist auch $r_2 xr = r$ in $S_l(I)$. Widerspruch! Ist $r_2 \notin S_l(I)$, dann existiert $t \notin I$ mit $r_2 t$ in I. Wir vergleichen nun die Rechtsideale xr^2R und tR. Ist $t = xr^2 s_1$ für ein $s_1 \varepsilon R$, so ist sicher $s_1 \notin I$.
$r_2 t = r_2 xr^2 s_1 = xrs_1 \varepsilon I$. $xrs_1 \varepsilon I$ und $s_1 \notin I$ impliziert $xr \notin S_l(I)$. Widerspruch zur Annahme! Ist dagegen $ts_2 = xr^2$ für ein $s_2 \varepsilon R$, so ist $r_2 ts_2 = r_2 xrr = xr$. Wegen $r_2 t \varepsilon I$ ist $xr \varepsilon I$. Widerspruch zur Annahme! Daher ist die Annahme falsch, also $xr \varepsilon P_1$ und somit P_1 auch ein Rechtsideal.

<u>Bemerkung</u>: Setzen wir $N_l(R) = \{t\varepsilon R \mid \exists\, w \neq 0: tw = 0\}$ und $N_r(R) = \{t\varepsilon R \mid \exists\, w \neq 0: wt = 0\}$, so gilt $S_l(0)^c = N_l(R)$ bzw. $S_r(0)^c = N_r(R)$. Da $N_l(R)$ und $N_r(R)$ zweiseitige Ideale sind (5.17), bilden die Nullteiler ein zweiseitiges Ideal $N = N_l(R) \cup N_r(R)$. Damit ist die Forderung in der Definition eines H-Ringes von KLINGENBERG, dass die Nullteiler ein zweiseitiges Ideal bilden, entbehrlich.

Wir bemerken ferner, dass für einen Epimorphismus $\varphi: R \longrightarrow R'$ eines Kettenringes R mit Ker $\varphi = I$ gilt:

$N_l(R') = \varphi(S_l(I)^c)$ und $N_r(R') = \varphi(S_r(I)^c)$

Damit ist das folgende Lemma offensichtlich:

5.18 <u>Lemma</u>: Sei $\varphi: R \to R'$ ein Epimorphismus mit Ker $\varphi = I$, dabei R ein Kettenring. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

a) R' ist ein Quasi-H-Ring (d.h. $N_l(R') = N_r(R')$).

b) $S_l(I) = S_r(I)$.

5.19 <u>Satz</u>: Sei $\varphi: R \to R'$ ein Epimorphismus mit Ker $\varphi = I \neq J(R)$, dabei R ein Kettenring. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

a) R' ist ein H-Ring.

b) $S_l(I) = S_r(I) = U(R)$.

c) $\forall x\varepsilon J(R)\ \exists\, y,y'\varepsilon J(R) \setminus I: xy, y'x\varepsilon I$.

<u>Beweis</u>: a)$\Rightarrow$b) Sei $x\varepsilon S_l(I)$. $\varphi(x) = x+I \notin N_l(R')$, also $x+I\varepsilon U(R')$. $(x+I)(y+I) = 1+I$, d.h. $xy-1\varepsilon I$. Nun ist R lokal und $I \subseteq J(R)$, daher ist $xy \notin J(R)$, d.h. $xy\varepsilon U(R)$, also auch $x\varepsilon U(R)$. Somit gilt $S_l(I), S_r(I) \subseteq U(R)$ und trivialerweise $U(R) \subseteq S_l(I), S_r(I)$.

b)$\Rightarrow$c) O.B.d.A. $x \notin I$, $x\varepsilon J(R)$. Daher ist $x\varepsilon S_l(I)^c, S_r(I)^c$, d.h. $\exists\, y,y' \notin I$ mit $xy, y'x\varepsilon I$.

c)$\Rightarrow$a) Es ist $x\varepsilon U(R) \Longrightarrow \varphi(x)\varepsilon U(R')$. Ist $\varphi(x) \notin U(R')$, dann ist $x\varepsilon J(R)$. Also existiert $y,y' \notin I$ mit $xy, y'x\varepsilon I$, d.h. $(x+I)(y+I) = (y'+I)(x+I) = 0$, wobei $y+I, y'+I \neq 0$. Somit ist $\varphi(x)\varepsilon N_l(R') = N_r(R')$, d.h. R' ist ein H-Ring.

Für das weitere benötigen wir noch folgende Lemmata:

5.20 <u>Lemma</u>: Sei R ein Kettenring und I ein zweiseitiges Ideal. Dann gilt:

a) $S_l(S_l(I)^c) = S_l(I)$ und $S_l(S_r(I)^c) = S_r(I)$.

Sei R ein H-Ring und P ein vollständiges Primideal. Dann gilt:

b) $S_l(P^r)^c = P$

c) $S_l(P^l)^c = P^{ll}$, falls $P^l \neq (0)$ ist.

<u>Beweis</u>: a) Sei $s \in S_l(I)$. Wir nehmen an: $s \notin S_l(S_l(I)^c)$. Dann existiert $t \notin S_l(I)^c$ mit $st \in S_l(I)^c$. Da $t \in S_l(I)$ ist und $S_l(I)$ multiplikativ abgeschlossen ist, führt $st \in S_l(I)^c$ sofort zu einem Widerspruch, also ist: $S_l(I) \subseteq S_l(S_l(I)^c)$.
Sei $s \notin S_l(I)$, dann ist $s \cdot 1 \in S_l(I)^c$ und wegen $1 \notin S_l(I)^c$ folgt $s \in S_l(S_l(I)^c)$. Entsprechend beweist man die Gültigkeit von $S_l(S_r(I)^c) = S_r(I)$.
b) Ist $P = N$, so betrachten wir die Fälle $N^r = (0)$ und $N^r = Rm = mR \supset (0)$ für ein $m \in R$. Sicher ist $S_l(0) = U(R)$. Für $N^r = Rm$ gilt sicher $U(R) \subseteq S_l(N^r)$. Ist $0 \neq s \in N$, dann gibt es aber $t \notin Rm$ mit $st \in Rm = mR$, was $U(R) = S_l(N^r) = N^c$ bzw. $S_l(N^r)^c = N$ zur Folge hat.
Sei nun $P \neq N$ und $s \in P^c$. Wir betrachten $st \in P^r$ für ein $t \in R$. Mit 5.16 Folgerung haben wir für ein $v \in P^c$: $vst = v't = 0$. Wegen $v' \in P^c$ ist daher $t \in P^r$, also $S_l(P^r)^c \subseteq P$. Sei $x \in P$. Mit 5.16 Folgerung gibt es $t \notin P^r$, so dass $xt = 0$ ist, was $x \in S_l(P^r)^c$ beweist.
c) Ist $P = N$ und $P^l \neq (0)$, so ist offensichtlich $N^l = Rm$ mit $(0) \subset Rm$ für ein $m \in R$. Man sieht sofort, dass $S_l(Rm)^c$ genau aus den Nullteilern besteht bzw. $(mR)^l = N$ ist.
Sei nun $P \neq N$ und $x \in S_l(P^l)$, d.h. $xt \in P^l \Longrightarrow t \in P^l$.
Wäre $x \in P^{ll}$, d.h. $xP^l = (0)$, so wähle $0 \neq z \in P^l$. Wegen $x \notin P^l$ gibt es $s \in R$ mit $z = xs \in P^l$, daher ist $s \in P^l$, was $z = 0$ zur Folge hätte. Also $P^{ll} \subseteq S_l(P^l)^c$.
Sei nun $x \in S_l(P^l)^c$, dann existiert $t \notin P^l$ mit $xt \in P^l$. Sei $z \in P^l$. Wir zeigen: $xz = 0$, also $x \in P^{ll}$. Wegen $t \notin P^l$ ist $tu = z$ für ein $u \in R$. Wäre $u \in P^c$, so folgte mit $S_r(P^l) = P^c$ und $tu \in P^l$ sofort $t \in P^l$. Daher ist $u \in P$ und wegen $xt \in P^l$ stets $xtu = xz = 0$.

Folgerungen: Sei R ein H-Ring und I ein zweiseitiges Ideal in R.

1. $S_l(I)^c$, $S_r(I)^c$ sind vollständige Primideale, daher gilt: $S_l(S_l(I)^{cl})^c = S_l(I)^{cll}$
$S_l(S_l(I)^{cr})^c = S_l(I)^c$
$S_l(S_r(I)^{cl})^c = S_r(I)^{cll}$
$S_l(S_r(I)^{cr})^c = S_r(I)^c$
2. Erfüllen alle Ideale I die Bedingung: $S_l(I) = S_r(I)$, so ist insbesondere für alle vollständigen Primideale P: $P^l = P^r$.
denn: Ist $P = N$, so gilt offensichtlich nach Bemerkung 5.13 $N^l = N^r$. Ist $P \neq N$, so ist
$$S_l(P^l) = P^{llc} = S_r(P^l) = P^c \text{, also ist } P = P^{ll}$$
und mit 5.13 stets $P^l = P^r$.
3. Mit 1. ergibt sich, dass für vollständige Primideale P stets P^{ll} bzw. P^{rr} vollständige Primideale sind:
Für ein vollständiges Primideal P ist $S_r(P)^c = P$, also $S_l(S_r(P)^{cl})^c = S_r(P)^{cll} = P^{ll}$, was mit 5.17 vollständiges Primideal ist.
4. Ist $P^l = P^r \neq (0)$ für ein vollständiges Primideal P, so gilt: $S_l(P^l) = S_r(P^l)$, denn es ist
$$S_r(P^l) = P^c = P^{llc} = S_l(P^l).$$

C. Struktursätze

5.21 Lemma: Sind die Nullteiler eines H-Ringes nilpotent, so ist jedes Ideal zweiseitig.

Beweis: Da die Links- bzw. Rechtsideale eines H-Ringes eine Kette bilden, genügt es, die Behauptung für Hauptideale nachzuweisen. Sei $I = Ra$, wobei wir o.B.d.A. $a \neq 0$ setzen. Ist $x = ar \varepsilon Ra$, so gibt es $s \varepsilon J(R) = J$ mit $sx = a$, also $sar = a$ und damit $s^n ar^n = a$ für jedes $n \varepsilon \mathbb{N}$, woraus wegen der Nilpotenz von s folgt: $a = 0$. Widerspruch!

5.22 Lemma: In einem Kettenring R, dessen Linksideale zweiseitig sind, ist jedes Primideal vollständig.

Beweis: Sei P ein Primideal und $x,y \in P^c$. Nach Voraussetzung ist $xty \in P^c$ für ein $t \in R$. Nun gilt $xR \subseteq Rx$, also existiert $t' \in R$ mit $t'x = xt$, weswegen schon $xy \in P^c$ ist.

5.23 Lemma: Für einen H-Ring sind folgende Aussagen gleichwertig:

a) Der Ring besitzt genau ein Primideal.

b) Alle Nullteiler sind nilpotent.

Beweis: a)$\Rightarrow$b) Das maximale Ideal N ist zugleich schon Primradikal, d.h. alle Nullteiler sind nilpotent. [10,S.56]
b)$\Rightarrow$a) Wegen 5.21 und 5.22 ist jedes Primideal vollständig. Sei P Primideal und $x \in P^c$. Also ist für alle $n \in \mathbb{N}$ stets $x^n \in P^c$, was wegen der Nilpotenz der Nullteiler $N = P$ zur Folge hat.

In solchen Ringen lässt sich die Struktur des Verbandes der Hauptideale vollkommen beschreiben.

5.24 Satz: Die Halbgruppe Π der Hauptideale (zusammen mit dem Ring R) eines H-Ringes R, der genau ein Primideal besitzt, ist einer Unterhalbgruppe von einer der beiden folgenden linear geordneten Halbgruppen ordnungs- und verknüpfungsisomorph.

Γ_1: Die reellen Zahlen im Intervall $[0,1]$ mit der üblichen Ordnung und mit

$$\alpha \cdot \beta = \min\{\alpha+\beta, 1\}$$

Γ_2: Die reellen Zahlen im Intervall $[0,1]$ und das Symbol ∞ mit der üblichen Ordnung und der Verknüpfung

$$\alpha \cdot \beta = \alpha+\beta \qquad \text{für } \alpha+\beta \leq 1$$
$$\alpha \circ \beta = \infty \qquad \text{für } \alpha+\beta > 1.$$

Beweis: [19,S.38]

Da diese Halbgruppen offensichtlich kommutativ sind, gilt
5.25 Folgerung: [19,S.37] Sei R ein H-Ring mit genau einem Primideal. Dann gilt:

$\forall x,y \in R$: $xy = 0 \Leftrightarrow yx = 0$

oder dazu äquivalent:

$\forall r,s,x \in R$: $rx = sx \Leftrightarrow xr = xs$

Diese Eigenschaft ist nicht allgemein in H-Ringen erfüllt, siehe Beispiel 7.6.4.

5.26 Lemma: Ist das maximale Ideal N eines H-Ringes ein Linkshauptideal, so ist es auch ein Rechtshauptideal.

Beweis: Sei $N = Ra$. Da N zweiseitiges Ideal ist, gilt $aR \subseteq Ra$ (5.5), wobei o.B.d.A. $a \neq 0$ ist. Ist nun $ra \in Ra$ und gibt es $s \in R$ mit $ra = as$, so sind wir fertig. Ist $rat = a$ für ein $t \in R$, so existiert $v \in R$ mit $t = va$, was wegen $rat = rava = a$ und $rat \in N$ stets $a = 0$ impliziert. Damit gilt: $Ra = aR$.

Damit können wir folgenden wesentlichen Satz beweisen:

5.27 Satz: Sei R ein H-Ring, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) R ist links-noethersch.
b) R ist links-artinsch.
c) R ist rechts-artinsch.
d) R ist rechts-noethersch.

Beweis: a)$\Rightarrow$b),c),d) Jedes Linksideal ist endlich erzeugt, also Linkshauptideal (5.1), insbesondere mit 5.26 haben wir $N = Ra = aR$ für ein $a \in R$. Sei $P \neq N$ ein weiteres Primideal, also $P = Rp$ für ein $p \in R$. Nun ist sicher $Rp \subset Ra = aR$, also existiert $r \in N$ mit $ar = p$. Es gilt $Rr \subseteq Ra$. Wäre $Rr \subseteq Rp$, so hätten wir $r = qp$ für ein $q \in R$, also $r = qp = qar$, was $r = 0$ nach sich zöge. Dann wäre $(Ra)^r$ oberer Nachbar des Nullideals, was aber wegen 5.14 der Tatsache, dass P Primideal ist, widerspricht. Daher besitzt R genau ein Primideal und mit 5.23, 5.22 ist R ein zweiseitiger H-Ring. Also gilt d).
Nun ist a mit 5.23 nilpotent, d.h. $a^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wegen $Ra = aR$ gilt $Ra^k = a^kR$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dies sind aber auch die einzigen Ideale von R, denn $Ra^{k+1} \subset Rx \subseteq Ra^k$ hat mit $ra^k = x$, $sx = a^{k+1}$ für geeignete $r \in R$, $s \in N$ sofort $r \in U$ zur Folge. Also ist R sowohl links- als auch rechts-artinsch. Aus Symmetriegründen folgt d)$\Rightarrow$a). Da R ein Ring mit Einselement ist, gilt bekanntlich auch c)$\Rightarrow$d), b)$\Rightarrow$a).

Ein Ring R heisst vollständig primär und einreihig, kurz E-Ring, falls es ein Ideal A von R gibt, so dass jedes

Rechtsideal und jedes Linksideal von R von der Form A^i ist [7]. Obiger Satz gibt daher Bedingungen an, wann ein H-Ring E-Ring ist.
Man beachte, dass sämtliche epimorphen Bilder von H-Ringen mit einem Primideal wieder H-Ringe sind. Ferner stimmen in solchen H-Ringen die Links- und Rechtsannullatoren überein. Wir werden nun zeigen, dass noch unter schwächeren Voraussetzungen - der Primidealverband genüge der Maximal- oder Minimalbedingung - ähnliche, auch geometrisch relevante Aussagen zu erhalten sind.

5.28 Satz: Sei R ein H-Ring, dessen Primideale der Minimal- oder Maximalbedingung genügen. Dann gilt für alle vollständigen Primideale

$$P^l = P^r.$$

Beweis: Das maximale Ideal erfüllt $N^l = N^r$ (vgl. Bemerkung nach 5.13). Gibt es ein vollständiges Primideal $P \neq N$ mit $P^l \neq P^r$, so betrachten wir die Menge Γ_1 (Γ_2) aller vollständigen Primideale, deren Links- und Rechtsannullatoren nicht übereinstimmen, also $\Gamma_1 \neq \emptyset$ ($\Gamma_2 \neq \emptyset$). Γ_1 (Γ_2) besitzt ein minimales (maximales) Element Q_1 (Q_2), etwa $Q_1{}^l \subset Q_1{}^r$ (und o.B.d.A. $Q_2{}^l \subset Q_2{}^r$). Dabei ist aufgrund der Bemerkung nach 5.13 $Q_1 (Q_2) \neq N$ und $Q_1{}^l, Q_1{}^r (Q_2{}^l, Q_2{}^r) \neq (0)$. Dann ist $Q_1{}^{rr} \subset Q_1 \subset N$ ($Q_2 \subset Q_2{}^{ll}$). Mit 5.20.3 ist $Q_1{}^{rr} (Q_2{}^{ll})$ ein vollständiges Primideal. Wäre $Q_1{}^{rrl} = Q_1{}^{rrr}$ ($Q_2{}^{llr} = Q_2{}^{lll}$), so wäre mit der Folgerung von 5.13 $Q_1{}^r = Q_1{}^{rrr}$ ($Q_2{}^l = Q_2{}^{lll}$), also auch $Q_1{}^{rl} = Q_1{}^{rrrl}$ ($Q_2{}^{lr} = Q_2{}^{lllr}$) und somit $Q_1 = Q_1{}^{rr}$ ($Q_2 = Q_2{}^{ll}$), was wieder $Q_1{}^r = Q_1{}^l$ ($Q_2{}^r = Q_2{}^l$) zur Folge hätte. Somit gehört $Q_1{}^{rr}$ ($Q_2{}^{ll}$) zu Γ_1 (Γ_2), was der Minimalität (Maximalität) von Q_1 (Q_2) widerspricht. Daher stimmen die Links- und Rechtsannullatoren von vollständigen Primidealen überein.

<u>Folgerung</u>: Sei R ein H-Ring mit den Voraussetzungen des Satzes 5.28. Dann ist jedes epimorphe Bild, dessen Kern der Annullator eines vollständigen Primideals ist, ein Quasi-H-Ring.

<u>Beweis</u>: Sei P ein vollständiges Primideal. Mit 5.20 a) ist $P^c = S_l(P^r) = S_r(P^l)$. Wegen 5.28 ist $P^l = P^r$, folglich $S_l(P^l) = S_r(P^l)$ und aufgrund von 5.18 ist R Quasi-H-Ring.

Man beachte, dass wir bislang ohne eine Zweiseitigkeitsbedingung ausgekommen sind. Um über die epimorphen Bilder bei beliebigen Kernen etwas aussagen zu können, scheint es uns unmöglich, ohne die Bedingung, dass alle Linksideale zweiseitige Ideale sind, wesentliche Aussagen geben zu können. Wir erwähnen in diesem Zusammenhang ohne Beweis folgendes Ergebnis:

5.29 <u>Lemma</u>: Sei R ein H-Ring, dessen Linksideale zweiseitig sind. Dann ist R ein Duo-Ring, d.h. auch alle Rechtsideale sind zweiseitig.

5.30 <u>Satz</u>: Es sei R ein H-Ring, dessen Primideale der Minimal- oder Maximalbedingung genügen. Ferner sei R ein Duo-Ring. Dann haben alle Primideale P die Eigenschaft:

$\forall a \varepsilon R$: $Pa = aP$ und $P^c a = aP^c$.

<u>Beweis</u>: Wir bemerken, dass aufgrund der Zweiseitigkeit des Kettenringes R jedes Primideal vollständiges Primideal ist (5.22). Daher gilt mit 5.28 für jedes Primideal P stets $P^l = P^r$. Ferner folgt mit 5.5 für das maximale (Prim-) Ideal N $\quad Na = aN$ bzw. $U(R)a = aU(R)$.

Sei $a \varepsilon R$. Gibt es ein Primideal mit $Pa \neq aP$, so betrachten wir die Menge γ_1 (γ_2) aller Primideale P_1 mit $P_1 a \neq aP_1$. γ_1 (γ_2) besitzt ein minimales (maximales) Element Q_1 (Q_2), etwa $Q_1 a \subset aQ_1$ (und o.B.d.A. $Q_2 a \subset aQ_2$). Mit 5.28 ist sicher $(0) \neq Q_1 a$ ($(0) \neq Q_2 a$) und nach obiger Bemerkung $Q_1 \neq N$ ($Q_2 \neq N$). Da R Duo-Ring ist, ist $Q_1' = \{x \mid ax \varepsilon Q_1 a\}$ ($Q_2' = \{x \mid xa \varepsilon aQ_2\}$) ein Ideal mit $aQ_1' = Q_1 a$ ($Q_2' a = aQ_2$). Sind $s,t \varepsilon Q_1'^c$ ($Q_2'^c$), also $as = s_1 a$, $at = t_1 a$ für $s_1, t_1 \varepsilon Q_1^c$ ($sa = as_2$, $ta = at_2$ für $s_2, t_2 \varepsilon Q_2^c$), so folgt mit $Q_1 a \neq (0)$

($Q_2a \neq (0)$) sofort $st\varepsilon Q_1{'}^c$ ($Q_2{'}^c$). Daher ist $Q_1{'}$ ($Q_2{'}$) ein Primideal. Wäre $Q_1 \subseteq Q_1{'}$ ($Q_2{'} \subseteq Q_2$), so hätte man $Q_1a \subset aQ_1 \subseteq aQ_1{'} = Q_1a$ ($aQ_2 = Q_2{'}a \subset Q_2a \subseteq aQ_2$). Widerspruch! Folglich ist $Q_1{'} \subset Q_1$ ($Q_2 \subset Q_2{'}$), was mit $Q_1a \neq (0)$ ($Q_2a \neq (0)$) auch $Q_1{'}a \neq aQ_1{'}$ ($Q_2{'}a \neq aQ_2{'}$) nach sich zieht. Daher kann Q_1 (Q_2) nicht minimales (maximales) Element von $\mathfrak{F}_1$ ($\mathfrak{F}_2$) sein. Daraus erkennt man: $\mathfrak{F}_1 = \emptyset$ ($\mathfrak{F}_2 = \emptyset$).

5.31 <u>Folgerung</u>: Sei R ein Ring mit den Voraussetzungen des Satzes 5.30. Dann ist jedes epimorphe Bild ein Quasi-H-Ring.

<u>Beweis</u>: Es genügt mit 5.18 zu zeigen: Für jedes Ideal I ist $S_l(I) = S_r(I)$. Sei $s\varepsilon S_l(I)$. Mit 5.17 ist $S_l(I)^c = P$ ein vollständiges Primideal. Sei nun $ts\varepsilon I$, also gibt es, da R Duo-Ring ist, s' mit $ts = s't$. Mit 5.30 gilt $tP = Pt$ bzw. wegen $tR = Rt$ auch $tP^c = P^ct$. Da s in P^c liegt, muss auch $s'\varepsilon P^c$ sein. Daher folgt aus $s't\varepsilon I$ sofort $t\varepsilon I$, insgesamt daher: $s\varepsilon S_l(I)$ und $ts\varepsilon I \Longrightarrow t\varepsilon I$, was $S_l(I) \subseteq S_r(I)$ bedeutet. Entprechend zeigt man $S_r(I) \subseteq S_l(I)$.

Damit haben wir ein hinreichendes Kriterium gefunden, wann epimorphe Bilder von H-Ringen Quasi-H-Ringe sind. Es nimmt, wie oben erwähnt, nur Bezug auf die Ordnungsstruktur des Primidealverbandes. Da einerseits jedes epimorphe Bild von kommutativen H-Ringen wieder Quasi-H-Ring ist, andererseits H-Ringe, die die Kettenbedingungen für Primideale verletzen, mit epimorphen Bildern, die keine Quasi-H-Ringe sind, existieren (7.6.5), ist das obige Kriterium in gewisser Weise 'scharf'.

§ 6. DESARGUESSCHE HJELMSLEV-EBENEN

Nachdem wir in §5 uns eingehend mit H-Ringen beschäftigt haben, stellen wir nun die Verbindung zwischen den K-Rel. desarguesscher H-Ebenen und den zweiseitigen Idealen der zugehörigen H-Ringe her. Wir werden zeigen, dass die zweiseitigen Ideale gerade die K-Rel. in natürlicher Weise induzieren. Ferner beschreiben wir idealtheoretisch die Darstellungen der speziellen K-Rel. und untersuchen die Bedeutung und die interne Abhängigkeit der Zusatzbedingungen (K3) - (K6). Damit ist der Begriff der Typen einer desarguesschen H-Ebene algebraisiert und bekannte Eigenschaften von H-Ringen lassen sich einerseits geometrisch interpretieren, während offene geometrische Fragestellungen ringtheoretisch formuliert werden können.

6.1 Def.: Eine projektive Hjelmslev-Ebene $\mathcal{H} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ heisst desarguessch, wenn sie zu der Hjelmslev-Ebene $\mathcal{H}(R)$ über einem H-Ring R isomorph ist. Dabei sind die Punkte (Geraden) von $\mathcal{H}(R)$ links- (rechts-) homogene Tripel, wobei wenigstens ein Element des Tripels kein Nullteiler ist.
Ist $P = R\vec{p}$ mit $\vec{p} = (p_1,p_2,p_3)$ ein Punkt, $g = \vec{g}R$ mit $\vec{g} = (g_1,g_2,g_3)$ eine Gerade von $\mathcal{H}(R)$, so wird

$$P \; I \; g \text{ durch } \Sigma\, p_i g_i = 0$$

definiert.

6.2 Bemerkung: Da wir im folgenden mehrmals eine Darstellung einer Verbindungsgeraden zweier Punkte benötigen, nehmen wir diese Rechnung vorweg:
Seien P,Q Punkte mit den Darstellungen $P = R\vec{p}$. $Q = R\vec{q}$, wobei $\vec{p} = (p_1,p_2,p_3)$ und $\vec{q} = (q_1,q_2,q_3)$
Inzidiert die Gerade g mit P und Q, so haben wir:
(1) $\Sigma\, p_i g_i = 0$ und (2) $\Sigma\, q_i g_i = 0$.
O.B.d.A. ist $p_1 = 1$, also $g_1 = -(p_2g_2+p_3g_3)$ und daher $(q_2-q_1p_2)g_2+(q_3-q_1p_3) = 0$.
Wir setzen $q_2-q_1p_2 = t_2$ und $q_3-q_1p_3 = t_3$.

O.B.d.A. $\exists s\varepsilon R$: $t_2 = t_3 s$. Damit erhalten wir

$$t_3 s g_2 + t_3 g_3 = 0.$$

Offensichtlich erfüllt $\vec{g} = (-p_2+p_3 s, 1, -s)$ (1) und (2). Man erkennt ferner, dass

$P \circ Q \Longleftrightarrow t_3 \varepsilon N$ (wobei o.B.d.A. $p_1 = 1$, $t_2 = t_3 s$).

A. Kongruenzrelationen in desarguesschen H-Ebenen

Für die Nachbarschaft von Punkten in desarguesschen H-Ebenen hat man

$$P \circ Q \Longleftrightarrow \exists (l,m) \notin N^2: l\vec{p}-m\vec{q} \varepsilon N^3.$$

Dabei ist $P = R\vec{p}$, $Q = R\vec{q}$ und N das maximale (zweiseitige) Ideal. Die Nachbarschaft $\circ$ ist eine K-Rel. Das legt folgende Fragestellungen nahe:

1. Sei I irgendein zweiseitiges Ideal des Ringes R. Was wird durch

   (3) $P \tau Q \Longleftrightarrow \exists (l,m) \notin N^2: l\vec{p}-m\vec{q} \varepsilon I^3$

   in $\mathcal{H}(R)$ definiert?
2. Lässt sich jede K-Rel. in $\mathcal{H}(R)$ durch ein geeignetes Ideal im Sinne von (3) induzieren?

Diesen beiden Fragen werden wir nun nachgehen:

6.3 Lemma: Sei $\mathcal{H}(R)$ desarguessche H-Ebene und I ein zweiseitiges Ideal von R. Dann definiert, wobei $P = R\vec{p}$, $Q = R\vec{q}$ ist,

$$P \tau Q \Longleftrightarrow \exists (l,m) \notin N^2: l\vec{p}-m\vec{q} \varepsilon I^3$$

eine K-Rel. in $\mathcal{H}(R)$. Dabei wird gesetzt:

$$g \tau h \Longleftrightarrow \forall P \mathrel{I} g \; \exists Q \mathrel{I} h: P \tau Q \text{ und}$$
$$\forall P \mathrel{I} h \; \exists Q \mathrel{I} g: P \tau Q.$$

Ferner gilt für Geraden g,h mit $g = \vec{g}R$ und $h = \vec{h}R$ stets

$$g \tau h \Longleftrightarrow \exists (l,m) \notin N^2: \vec{g}l-\vec{h}m \varepsilon I^3.$$

Beweis: a) Da $I \subseteq N$ ist, haben wir

$P \tau Q \Longleftrightarrow \exists (l,m) \varepsilon U^2: l\vec{p}-m\vec{q} \varepsilon I^3$. Also gilt auch $\tau \subseteq \circ$. Offensichtlich ist τ reflexiv und symmetrisch. Sei nun $P \tau Q$ und $Q \tau S$, also $l_1\vec{p}-m_1\vec{q} \varepsilon I^3$ und $l_2\vec{q}-m_2\vec{s} \varepsilon I^3$, wobei $l_i, m_i \varepsilon U$ sind. Da I ein zweiseitiges Ideal ist, ist

$m_1 l_2^{-1} l_2 \vec{q} - m_1 l_2^{-1} m_2 \vec{s}$ in I^3. Wegen $m_1 l_2^{-1} \varepsilon U$ haben wir $l_1 \vec{p} - m_1 \vec{q} + m_1 \vec{q} - m_1 l_2^{-1} m_2 \vec{s} = l_1 \vec{p} - m_1 l_2^{-1} m_2 \vec{s} \varepsilon I^3$, also $P \tau S$.

b) Wir zeigen nun: Sei $P \tau Q$, $P \not\circ X$, $PX = g = \vec{g}R$, $Qx = h = \vec{h}R$, dann gibt es $(l,m) \notin N^2$ mit $\vec{g}l - \vec{h}m \varepsilon I^3$.

Sei $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ und $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. O.B.d.A. sei $x_1 = 1$. Setzen wir $-p_1 x_2 + p_2 = t_2$, $-p_1 x_3 + p_3 = t_3$ und gehen davon aus, dass ein $v \varepsilon R$ existiert mit $t_3 v = t_2$, so wissen wir mit 6.2 wegen $P \not\circ X$, dass $t_3 \varepsilon U$ ist und erhalten $\vec{g} = (-x_2 + x_3 v, 1, -v)$ als eine Darstellung der Verbindungsgerade von P und X. Entsprechend betrachten wir nun die Verbindungsgerade h von Q und X. Wir setzen $-q_1 x_2 + q_2 = t_2'$ und $-q_1 x_3 + q_3$. Wegen $P \not\circ X$, $P \tau Q$ und $x_1 = 1$ kann o.B.d.A. q so gewählt werden, dass $p_i - q_i = n_i \varepsilon I$ $(i = 1,2,3)$ ist. Wegen $t_3' = -q_1 x_3 + q_3 = -p_1 x_3 + p_3 + n_1 x_3 - n_3 = t_3 + n_1 x_3 - n_3$, wobei $n_1 x_3 - n_3 \varepsilon I \subseteq N$ ist, haben wir $t_3' \varepsilon U$. Es ist $t_2' = t_2 + n_1 x_2 - n_2$. Sei also $t_3' v' = t_2'$, so ist $\vec{h} = (-x_2 + x_3 v', 1, -v')$ eine Darstellung der Verbindungsgeraden von Q und X. Wir haben:

$t_3(v - v') = t_2 - t_3' v' + (t_3' - t_3) v' = n_2 - n_1 x_2 + (n_3 - n_1 x_3) v' \varepsilon I$.

Da $t_3 \varepsilon U$ und I Linksideal ist, gilt $v - v' \varepsilon I$, daher auch $x_3(v - v') \varepsilon I$. Somit ist $-\vec{g} - \vec{h} = \vec{g}(-1) - \vec{h}(+1) \varepsilon I^3$ und b) bewiesen.

c) Folgerung: $g \tau h \implies \exists (l,m) \notin N^2 : \vec{g}l - \vec{h}m \varepsilon I^3$.

Dazu wähle man X I g,h und Punkte P I g, Q I h mit $P \not\circ X$ und $P \tau Q$. Dann ist $PX = g$ und $QX = h$. Mit b) folgt sofort die Behauptung c).

d) Wir zeigen: Für Geraden g und h gelte: $\exists (l,m) \notin N^2 : \vec{g}l - \vec{h}m \varepsilon I^3$. Es sei $g \not\circ k$. Dann ist $g \wedge k \tau h \wedge k$.

Der Beweis verläuft wie unter b), jedoch unter Vertauschung von 'links' mit 'rechts' bei Multiplikationen. Da I zweiseitiges Ideal ist, bleiben alle Schlüsse gültig.

e) Aus c) und d) folgt

$g \tau h \iff \exists (l,m) \notin N^2 : \vec{g}l - \vec{h}m \varepsilon I^3$.

f) Daher gilt: $P \tau Q$ und $P \not\circ X \implies PX \tau QX$

$g \tau h$ und $g \not\circ k \implies g \wedge k \tau h \wedge k$.

Damit ist τ als K-Rel. nachgewiesen.

Satz 6.4 sagt nun aus, dass alle K-Rel. einer desarguesschen H-Ebene durch zweiseitige Ideale induziert werden.

6.4 <u>Satz</u>: Sei $\mathcal{H}(R)$ desarguessche H-Ebene über einem H-Ring R. Für jede K-Rel. τ in $\mathcal{H}(R)$ gibt es ein zweiseitiges Ideal I in R, so dass $\forall\, P,Q\varepsilon\mathcal{H}(R): P\tau Q \Longleftrightarrow \exists(1,m)\varepsilon U^2: 1\vec{p}-m\vec{q}\varepsilon I^3$, wobei $R\vec{p}$ bzw. $R\vec{q}$ eine Darstellung des Punktes P bzw. des Punktes Q ist.

<u>Beweis</u>: a) Als Hilfsüberlegung benötigen wir folgendes: Sei $X\tau P_1$, wobei τ K-Rel. und $X = R(1,x,0)$ und $P_1 = R(1,0,0)$ ist. Dann gilt für alle $r\varepsilon R$: $Q = R(1,rx,0)\,\tau\, R(1,0,0) = P_1$.

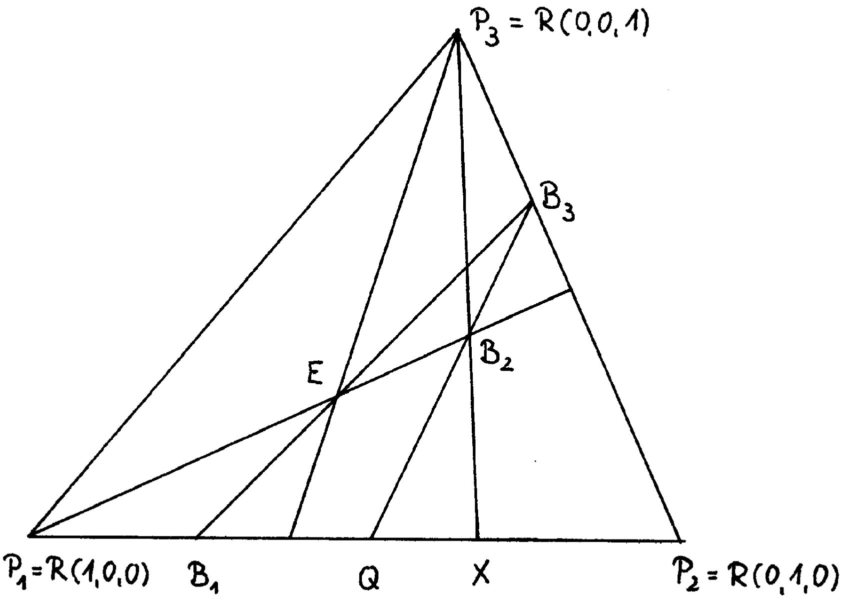

Fig. 12

Es sei $X = R(1,x,0)$ und $B_1 = R(1,r,0)$. Wegen $P_1\tau X$ gilt für $B_2 = P_1E\cap P_3X$ ebenfalls $B_2\tau P_1$. Setzen wir $B_3 = B_1E\cap P_2P_3$, wobei dann $B_3 = R(0,1-r,1)$ ist, so erhalten wir für $Q = P_1P_2\cap B_2B_3$ auch $Q = R(1,rx,0)$. Man beachte, dass wegen $B_2\tau P_1$ auch $B_3 \varnothing B_2$, $B_3 \varnothing P_2$ gilt. Folglich ist $B_3P_1\tau B_3Q$ und wegen $B_3 \varnothing P_2$ haben wir $P_1P_2 \varnothing P_1B_3$, also $P_1\tau Q$.

b) Bezeichnen wir die durch ein zweiseitiges Ideal I induzierte K-Rel. (siehe 6.3) mit τ_I, so betrachten wir zu einer vorgegebenen K-Rel. τ das zweiseitige Ideal

$$L = \bigcup_{\tau_I \subseteq \tau} I$$

Offensichtlich ist, da R Kettenring ist, $\tau_L \subseteq \tau$.

<u>Annahme</u>: $\tau_L \subset \tau$. Da K-Rel. durch die Klasse eines Punktes

auf einer Geraden festgelegt sind (1.5), betrachten wir die Umgebung von P_1 und wissen, dass es einen Punkt X mit $X = R(1,x,0)$ auf P_1P_2 mit $X \tau P_1$, aber nicht $X \tau_L P_1$ gibt. Nun ist $RxR = L_1$ ein zweiseitiges Ideal und demzufolge τ_{L_1} K-Rel. Wir zeigen nun:

$$\forall S \text{ I } P_1P_3: S \tau_{L_1} P_1 \Longrightarrow S \tau P_1.$$

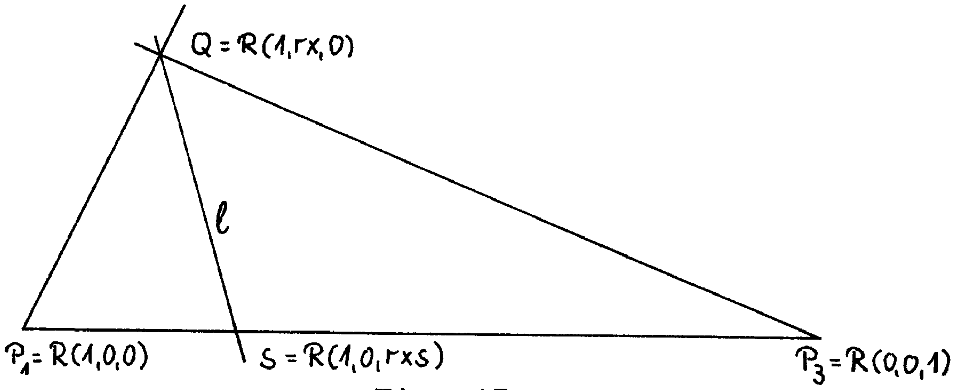

Fig. 13

Für S können wir die Darstellung $R(1,0,rxs)$ annehmen. Mit a) gilt $Q = R(1,rx,0) \tau P_1$, also $g = P_1P_3 \tau QP_3 = h$. Man betrachte die Gerade $k = (-rxs,s,1)R$, die sicher nicht zu $g = (0,1,0)R$ benachbart ist.
Ferner sind Q I k und S I k, denn $1\cdot(-rxs)+(rx)\cdot s = 0$ bzw. $1\cdot(-rxs)+(rxs)\cdot 1 = 0$. Wegen $g \tau h$ und $l \not\!\!\!\, g$ haben wir $Q \tau S$, also $P_1 \tau S$. Das hat $\tau_{L_1} \subseteq \tau$ zur Folge und somit $RxR = L_1 \subseteq L$, was mit $X \tau_L P_1$ im Widerspruch zur Annahme $\tau_L \subset \tau$ steht. Also ist $\tau_L = \tau$ für ein zweiseitiges Ideal, was zu zeigen war.

Nachdem wir nun festgestellt haben, dass die K-Rel. in desarguesschen H-Ebenen durch zweiseitige Ideale induziert werden, erhebt sich die Frage, welche ausgezeichneten Ideale der p- und pa-konjugierten K-Rel. einer durch ein Ideal I beschriebenen K-Rel. entspricht. Ferner können wir dann die Existenzfrage solcher speziellen K-Rel. positiv beantworten und suchen schliesslich noch die ringtheoretische Bedeutung der Zusatzbedingungen (K3) - (K6).

6.5 Lemma: Sei $\mathcal{H}(R)$ desarguessche H-Ebene und I ein zweiseitiges Ideal in R. Für einen Punkt $P = R\vec{p}$ und eine Gerade $g = \vec{g}R$ gelten:

$$P \tau_I g \iff \Sigma p_i g_i \in I$$

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei $P \tau_I g$. Dann gibt es $Q = R\vec{q}$ mit $Q\ I\ g$ und $P \tau_I Q$, wobei wir davon ausgehen können, dass $\vec{p}-\vec{q} \in I^3$ gilt. Wegen $Q\ I\ g$ ist $\Sigma q_i g_i = 0$, also
$\Sigma p_i g_i = \Sigma q_i g_i + \Sigma(p_i - q_i)g_i = \Sigma(p_i - q_i)g_i \in I$.
$\Longleftarrow$ Sei $\Sigma p_i g_i \in I$. O.B.d.A. ist $p_1 = 1$. Wären g_2, g_3 beide in N, dann müsste $g_1 \in U$ sein und wir hätten $\Sigma p_i g_i \in U$. Sei daher etwa $g_2 \in U$. Dann existiert $t \in R$ mit $tg_2 = \Sigma p_i g_i$, wobei dann $t \in I$ folgt. Nun ist $g_1 + (p_2 - t)g_2 + p_3 g_3 = 0$. Wir setzen $Q = R(1, p_2 - t, p_3)$, dann ist $Q\ I\ g$ und $P \tau_I Q$, also $P \tau_I g$.

6.6 Lemma: Sei $\mathcal{H}(R)$ desarguessche H-Ebene und τ_I eine K-Rel., die eine p-konjugierte K-Rel. besitzt. Wird τ_I durch das Ideal I induziert, so wird τ_I^{ρ} durch das Ideal $S_1(I)^c$ definiert.

Beweis: Ist τ eine K-Rel., so hatten wir in 2.2 τ^{ρ}, falls es den in 2.1 gestellten Forderungen entsprach, durch
$P \tau^{\rho} Q \iff \exists g,h \in \mathcal{H}(R)$: $\neg(g \tau h)$, $P,Q\ I\ g$, $P\ I\ h$ und $Q \tau h$ beschrieben. $S_1(I)$ war in 5.B durch $S_1(I) = \{s \mid \forall t \in R: st \in I \Rightarrow t \in I\}$ definiert worden. Wird die Relation τ_I durch das zweiseitige Ideal I induziert und setzen wir $S_1(I)^c = L$, so haben wir zu zeigen:

$$\forall P,Q \in \mathcal{H}(R): P \tau_L Q \iff P \tau_I^{\rho} Q.$$

$\Longrightarrow$ Sei $P = R\vec{p}$, $Q = R\vec{q}$ mit $\vec{p}-\vec{q} \in L^3$, wobei wir von $p_1 = 1$ ausgehen. Da $L \subseteq N$ und daher P und Q benachbart sind, ist $q_1 \in U$. Wie in 6.2 setzen wir $-q_1 p_2 + q_2 = t_2$, $-q_1 p_3 + q_3 = t_3$. Sei o.B.d.A. $t_2 R \subseteq t_3 R$ mit $t_3 v = t_2$, so ist mit 6.2 $g = (-p_2 + p_3 v, 1, -v)R$ eine Gerade, die mit P, Q inzidiert. Wir suchen nun eine Gerade h mit $P\ I\ h$, $Q \tau_I h$ und $\neg(g \tau_I h)$. Wegen $t_3 \in S_1(I)^c$ gibt es $w \in R$ mit $t_3 w \in I$ und $w \notin I$. Wir setzen $v' = v - w$ und betrachten die Gerade $h = (-p_2 + p_3 v', 1, -v')R$. Mit $1 \cdot (-p_2 + p_3 v') + p_2 \cdot 1 - p_3 v' = 0$ ist $P\ I\ h$. Wegen $q_1 \cdot (-p_2 + p_3 v') + q_2 \cdot 1 - q_3 v' = t_3 v - t_3 v' = t_3 w \in I$ folgt $Q \tau_I h$.

Sind nun $(-p_2+p_3v)l-(-p_2+p_3v')m\varepsilon I$, $l-m\varepsilon I$ und $-vl+v'm\varepsilon I$, so wäre, falls o.B.d.A. $m\varepsilon U$ angenommen wird, $v'm-vl = v'm-vm+vm-vl = (v'-v)m+v(m-l)$, also $(v'-v)m\varepsilon I$, d.h. $v-v' = w\varepsilon I$. Widerspruch! Also ist $m\varepsilon N$, was wegen $l-m\varepsilon I \subseteq N$ sofort $l\varepsilon N$ nach sich zieht. Damit gilt schliesslich $\neg (g\,\tau_I\, h)$.

$\Leftarrow$ Sei $P\tau_I^{\rho}Q$, wobei o.B.d.A. $p_1 = 1$ sei. Somit ist wegen $\tau_I^{\rho} \subseteq o$ auch $q_1\varepsilon U$. Wir setzen $-q_1p_2+q_2 = t_2$, $-q_1p_3+q_3 = t_3$ und gehen davon aus, dass $t_2R \subseteq t_3R$ ist, also $t_3v = t_2$ für ein $v\varepsilon R$. mit 6.2 ist $g = (-p_2+p_3v,1,-v)R$ eine mit P und Q inzidierende Gerade. <u>Annahme</u>: $t_3\varepsilon S_1(I)$. Sei $h = \vec{h}R$ eine Gerade mit $P\ I\ h$ und $Q\,\tau_I\,h$.

$P\ I\ h \iff \Sigma\, p_ih_i = 0$ bzw. $Q\,\tau_I\,h \iff \Sigma\, q_ih_i\ \varepsilon I$.

Damit folgt $(-q_1p_2+q_2)h_2+(-q_1p_3+q_3)h_3\varepsilon I$, also $t_2h_2+t_3h_3 = t_3(vh_2+h_3)\varepsilon I$. Wegen $t_3\varepsilon S_1(I)$ ist $vh_2+h_3\varepsilon I$. Nun ist aber mit $(h_2,1)\notin N^2$ stets $\vec{g}(-h_2)-\vec{h}(-1)\varepsilon I^3$, denn $(-p_2+p_3v)(-h_2)+h_1 = h_1+p_2h_2-p_3vh_2 = -p_3(h_3+vh_2)\varepsilon I$, $-h_2+h_2 = 0\varepsilon I$, $(-v)(-h_2)-h_3(-1) = vh_2+h_3\varepsilon I$.

Also gilt für alle Geraden h mit $P\ I\ h$ und $Q\,\tau_I\,h$: $g\,\tau_I\,h$. Das ist ein Widerspruch zu $P\tau_I^{\rho}Q$, was die Annahme $t_3\varepsilon S_1(I)$ verwerfen lässt.

Mit $t_3\varepsilon S_1(I)^c = L$ haben wir auch $t_2\varepsilon L$, also $-q_1+q_1\varepsilon L$, $-q_1p_2+q_2\varepsilon L$ und $-q_1p_3+q_3\varepsilon L$. Dabei ist $q_1\varepsilon U$. Damit ist gezeigt: $P\,\tau_L\,Q$.

6.7 <u>Korollar</u>: In einer desarguesschen H-Ebene $\mathcal{H}(R)$ besitzt jede K-Rel. eine p-konjugierte.

<u>Beweis</u>: Das Ideal $S_1(I)^c$, was für jedes I gebildet werden kann, induziert eine Kongruenzrelation, die nach dem eben bewiesenen Satz offensichtlich die p-konjugierte von τ_I ist.

6.8 <u>Korollar</u>: In einer desarguesschen H-Ebene $\mathcal{H}(R)$ erfüllen alle p-konjugierten K-Rel. die Bedingung (K3).

<u>Beweis</u>: Wegen 2.4 ist (K3) äquivalent zu $\tau^{\rho\rho} = \tau^{\rho}$. Nun gilt mit 5.20 a) $S_1(S_1(I)^c) = S_1(I)$, damit auch (K3).

6.9 Lemma: Sei $\mathcal{H}(R)$ desarguessche H-Ebene und τ_I eine K-Rel., die durch das Ideal I induziert wird. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Die K-Rel. τ_I erfüllt (K4).

b) $S_l(I) = S_r(I)$.

Beweis: Man beachte, dass aus Symmetriegründen aus 6.6 folgt: $\exists\ P,Q \varepsilon \mathcal{H}(R)$: $\neg(P \tau_I Q)$ und $P,Q\ \tau_I\ g,h \iff g\ \tau_L\ h$, wobei nun $L = S_r(I)^c$ gesetzt sei. Die Relation τ_I^{ρ} wird aber durch $S_l(I)^c$ induziert. Mit (K4) und 6.3 folgt daher $S_l(I) = S_r(I)$. Das Umgekehrte gilt trivialerweise.

Wir werden jetzt den in 2.5 angedeuteten Zusammenhang der a-konjugierten K-Rel. mit den Annullatoren im Idealverband beweisen.

6.10 Lemma: Sei $\mathcal{H}(R)$ desarguessche H-Ebene und τ_I eine K-Rel., die durch das Ideal I induziert wird. Dann wird die a-konjugierte K-Rel. durch den Linksannullator I^l induziert.

Beweis: Für eine K-Rel. τ_I hatten wir in 2.5 definiert, falls τ_I^a die dort gestellten Forderungen erfüllt:

$P\tau_I^a Q \iff \forall g,h \varepsilon \mathcal{H}(R)$: $g\tau_I h$ und P,Q I g und P I h $\Longrightarrow$ Q I h.

Der Linksannullator eines zweiseitigen Ideals ist wiederum ein zweiseitiges Ideal, also induziert $I^l = L$ eine K-Rel.

Wir zeigen: $P\ \tau_L\ Q \iff P\ \tau_I^a Q$.

$\Longrightarrow$ Seien $P = R\vec{p}$, $Q = R\vec{q}$ Punkte mit $\vec{p}-\vec{q}\varepsilon L^3$, wobei mit 6.2 $p_1 = 1$ angenommen werden kann. Setzt man $-q_1p_2+q_2 = t_2$, $-q_1p_3+q_3 = t_3$ und geht davon aus, dass $t_2R \subseteq t_3R$, also $t_3v = t_2$ ist, so ist die Gerade $g = (-p_2+p_3v, 1, -v)R$ mit P und Q inzident. Sei nun $h\ \tau_I\ g$ mit P I h, also $\Sigma\ p_ih_i = 0$, d.h. o.B.d.A. ist $\vec{g}-\vec{h}\varepsilon I^3$. Sei $-p_2+p_3v-h_1 = n_1$, $1-h_2 = n_2$ und $-v-h_3 = n_3$, wobei $n_i\varepsilon I$ ist. Nun erhalten wir:

$$\begin{aligned}\Sigma\ q_ih_i &= \Sigma\ p_ih_i + \Sigma\ (q_i-p_i)h_i\\ &= \Sigma\ (q_i-p_i)h_i\\ &= (q_1-p_1)(-p_2+p_3v-n_1)+(q_2-p_2)(1-n_2)+(q_3-p_3)(-v-n_3)\\ &= \Sigma\ (q_i-p_i)n_i = 0, \text{ da } \vec{p}-\vec{q}\varepsilon L^3 = (I^l)^3, \text{ also } Q\ I\ h.\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ Seien $P\tau_I^a Q$. P,Q I g. Dabei können wir $\vec{g} = (-p_2+p_3v, 1, -v)$ mit obigen Bezeichnungen voraussetzen. Wähle $s\varepsilon I$ und setze

$h_1 = g_1 - p_3 s$, $h_2 = g_2 = 1$ und $h_3 = g_3 + s$. Offensichtlich ist $P\ I\ h$ und $g\ \tau_I\ h$. Daher muss für alle $s \in I$ gelten:
$Q\ I\ h$, d.h. $q_1 g_1 - q_1 p_3 s + q_2 g_2 + q_3 g_3 + q_3 s = 0$. Wegen $Q\ I\ g$ erhalten wir: $\forall\, s \in I$: $(q_3 - q_1 p_3)s = t_3 s = 0$.
Somit ist $t_3 \in I^l$ und wegen $t_2 = t_3 v$ folgt $t_2 \in I^l$. Mit $q_1 \in U$ und $t_3 = -q_1 p_3 + q_3 \in I^l$, $t_2 = -q_1 p_2 + q_2 \in I^l$ und $0 = -q_1 + q_1 \in I^l$ ist $P\ \tau_L\ Q$.

Mit 6.10 erkennt man sofort:

6.11 <u>Korollar</u>: In einer desarguesschen H-Ebene $\mathcal{H}(R)$ besitzt jede K-Rel. eine a-konjugierte.

Aus Symmetriegründen folgt mit 6.10 für den Rechtsannullator I^r eines Ideals I:

6.12 <u>Lemma</u>: Sei $\mathcal{H}(R)$ desarguessche H-Ebene und τ_I eine K-Rel., die durch das Ideal I induziert wird. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
a) Die K-Rel. τ_I erfüllt (K6).
b) $I^l = I^r$.

Für die Bedingung (K5) erhalten wir im desarguesschen Fall folgende Charakterisierung:

6.13 <u>Lemma</u>: Sei $\mathcal{H}(R)$ desarguessche H-Ebene und τ_I eine K-Rel., die durch das Ideal I induziert wird. Dann sind folgende Aussagen äquivalent, falls $I^l \subseteq I$:
a) Die K-Rel. τ_I erfüllt (K5).
b) $I^c \subseteq S_l(I^l)$ und $I^c \subseteq S_r(I^l)$.

<u>Beweis</u>: a)$\Rightarrow$b) Wir haben zu zeigen: Sei $s \in I^c$ und $st \in I^l$ bzw. $t's \in I^l$, dann ist $t \in I^l$ bzw. $t' \in I^l$.
Sei nun t_3 ein Element aus I^c. Wir wählen zu einem Punkt $X = R(1, x_2, x_3)$ Elemente $p_1 \in U$ und $p_3 \in R$, so dass $t_3 = -p_1 x_3 + p_3$ und bestimmen p_2, t_2 mit $t_2 = -p_1 x_2 + p_2$, so dass $t_2 R \subseteq t_3 R$ ist. Wir setzen $P = R\vec{p}$. Mit $t_3 v = t_2$ haben wir durch $g = (-p_2 + p_3 v, 1, -v)R$ eine mit P und X inzidierende Gerade. Sei nun $t_3 w \in I^l$, wobei wir $w = v - v'$ für ein geeig-

netes v' setzen. Wir nehmen nun $q_1\varepsilon U$ und $q_3\varepsilon R$ mit $p_1-q_1 = n_1$, $p_3-q_3 = n_3$, wobei n_1, n_3 in I^1 liegen mögen. Setzen wir ferner $-q_1x_3+q_3 = t_3'$, $t_3'v' = t_2'$ und $t_2'+q_1x_2 = q_2$, so ist wegen $n_1,n_3\varepsilon I^1$ stets $t_3'-t_3\varepsilon I^1$. Aus $t_3w = t_3(v-v')\varepsilon I^1$ folgt über
$t_3v-t_3v' = t_2-t_3'v'+(t_3'-t_3)v' = t_2-t_2'+(t_3'-t_3)v'$ sofort
$t_2-t_2' = -n_1x_2+p_2-q_2\ \varepsilon I^1$ und damit $p_2-q_2\ \varepsilon I^1$, d.h. $P\tau_I\ell Q$.
Nun ist $h = (-q_2+q_3v',1,-v')R$ eine mit Q und X inzidierende Gerade. Man sieht sofort, dass mit (K5) aus $g\tau_I\ell\, h$ folgt: $v-v' = w\varepsilon I^1$, was unserer Behauptung entspricht, also $I^c \subseteq S_l(I^1)$. Aus Symmetriegründen folgt aus der in (K5) enthaltenen Aussage über Geraden: $I^c\subseteq S_r(I^1)$.
b)$\Rightarrow$a) Sei nun $X = R(1,x_2,x_3)$ und $P = R\vec{p}$, $Q = R\vec{q}$ Punkte mit $\neg(P\tau_I X)$ und $P\tau_I\ell Q$. O.B.d.A. sei $\vec{p}-\vec{q}\varepsilon I^1$. Wie üblich setzen wir $-p_1x_2+p_2 = t_2$, $-p_1x_3+p_3$ mit $t_2R\subseteq t_3R$. Wegen $t_2R\subseteq t_3R$ und $I^1\subseteq I$ folgt für $-q_1x_2+q_2 = t_2'$, $-q_1x_3+q_2 = t_3'$ stets $t_2'R\subseteq t_3'R$. Seien also $v,v'\varepsilon R$ mit $t_3v = t_2$ und $t_3'v' = t_2'$. Damit sind $g = (-p_2+p_3v,1,-v)R$ bzw. $h = (-q_2+q_3v',1,-v')R$ mit X,P bzw. X,Q inzidierende Geraden. Mit $t_2'-t_2 = n_1x_2-n_2$ und $t_3'-t_3 = n_1x_3-n_3$, wobei $p_i-q_i = n_i$ ist, erkennt man sofort, dass $t_3(v-v')\ \varepsilon I^1$ ist. Da $\neg(P\tau_I X)$ gilt, also $t_3\varepsilon I^c$, folgt aufgrund der Voraussetzung b) stets $v-v'\varepsilon I^1$, was $g\tau_I\ell h$ nach sich zieht. Entsprechend verläuft der Beweis für Geraden.

6.14 <u>Korollar</u>: Sei $\mathcal{H}(R)$ desarguessche H-Ebene. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

a) τ^P erfüllt (K5), wobei τ^P durch $S_l(I)^c = P$ induziert wird.

b) $P^r\subseteq P^l$.

<u>Beweis</u>: Mit 6.13 folgt aus der Gültigkeit von (K5) wegen $P^l\subseteq P$ sofort $P^c\subseteq S_l(P^l) = P^{llc}$, was wegen 5.13 $P^r\subseteq P^l$ nach sich zieht. $P^c\subseteq S_r(P^l)$ gilt trivialerweise.
Ist dagegen $P^r\subseteq P^l$, so haben wir $P^c = S_r(P^l)$ und schliesslich $P^c\subseteq S_l(P^l)$, was mit 6.13 die Gültigkeit von (K5) impliziert.

Über die interne Abhängigkeit der Forderungen (Ki) einer desarguesschen H-Ebene $\mathcal{H}(R)$ gibt folgende Tabelle Auskunft:

6.15 Übersicht

geometrische Eigenschaft in $\mathcal{H}(R) = \mathcal{H}$	algebraische Eigenschaft von R	interne Abhängigkeit Bemerkungen
(1) Pappos	$\Longleftrightarrow$ $\forall x,y \in R$: $xy = yx$	$(1) \Rightarrow (2)$ Ringe mit (2) und $\neg(1)$, siehe in 7.6.1 -3.
(2) $\forall \tau \in K(\mathcal{H})$: τ erfüllt (K6)	$\Longleftrightarrow$ Für alle zweis. Ideale I: $I^l = I^r$	Ist R Duo-Ring, so ist $(2) \Longleftrightarrow$ $\forall x,y$: $xy = 0 \Rightarrow yx = 0$
(3) $\forall \tau \in K(\mathcal{H})$: τ erfüllt (K4)	$\Longleftrightarrow$ Für alle zweis. Ideale I: $S_l(I) = S_r(I)$	Ist R Duo-Ring, so gilt: $(2) \Rightarrow (3)$ Ringe mit (3) und $\neg(2)$, siehe in 7.6.4.
(4) $\forall \tau \in K(\mathcal{H})$: τ^P erfüllt (K6)	$\Longleftrightarrow$ Für alle vollst. Primideale P: $P^l = P^r$	$(3) \Rightarrow (4)$, siehe Folgerung 5.20.2. $(4) \overset{?}{\Rightarrow} (3)$
(5) $\forall \tau \in K(\mathcal{H})$: τ^P erfüllt (K5)	$\Longleftrightarrow$ Für alle vollst. Primideale P: $P^r \subseteq P^l$	$(4) \Rightarrow (5)$ $(5) \overset{?}{\Rightarrow} (4)$
(6) $\forall \tau \in K(\mathcal{H})$: τ^P erfüllt (K3)	$\Longleftrightarrow$ Für alle zweis. Ideale I: $S_l(S_l(I)^c) = S_l(I)$	gilt immer (5.20). Ringe mit $\neg(4), \neg(3)$, $\neg(2), \neg(1)$, siehe in 7.6.5.

B. Typen desarguesscher H-Ebenen

Nach den Vorbereitungen des Abschnittes A können wir nun den Begriff der Typen von H-Ebenen benutzen und einige Eigenschaften des Idealverbandes eines H-Ringes geometrisch fassen.

6.16 Satz: Sei $\mathcal{H}(R)$ desarguessche H-Ebene über einem H-Ring R und setzen wir für Ideale I_1, I_2

$$I_1 \leq I_2 \underset{def}{\Longleftrightarrow} I_2 \subseteq I_1,$$

so ist der i-Typ von $\mathcal{H}$ der Ordnungstyp (bzgl. $\leq$) der Menge aller zweiseitigen Ideale, der h-Typ von $\mathcal{H}$ der Ordnungstyp der Menge aller zweiseitigen Ideale, die bzgl. $\leq$ einen oberen Nachbarn besitzen einschliesslich des Nullideals und der p-Typ von $\mathcal{H}$ der Ordnungstyp der Menge aller vollständigen Primideale.

Beweis: Mit Satz 6.4 lässt sich jede K-Rel. als durch ein zweiseitiges Ideal induziert darstellen. Die Zuordnung ist offensichtlich ein Ordnungsisomorphismus der Menge der K-Rel. auf die Menge aller zweiseitigen Ideale von R. Somit entspricht der i-Typ dem Ordnungstyp der Menge der zweiseitigen Ideale. Damit ist Charakterisierung des h-Typs evident. Mit 6.6 und 6.7 ist der p-Typ der Ordnungstyp der Menge aller vollständigen Primideale.

Bemerkung: Ist R als H-Ring ein Duo-Ring, so ist wegen 5.4 der h-Typ gerade der Ordnungstyp der Menge aller Hauptideale.

Wir sagen, ein Ordnungstyp ist noethersch (artinsch), wenn es eine linear geordnete Menge dieses Ordnungstypes gibt, in der die entsprechende Kettenbedingung gilt. Damit erfüllen alle Mengen dieses Ordnungstyps die entsprechenden Kettenbedingungen.

6.17 Satz: Sei $\mathcal{H}$ (R) desarguessche H-Ebene über einem Duo-H-Ring. Dann sind folgende Aussagen äquivalent: (Für die Definition der Höhe vgl. [2])

a) $\mathcal{H}$ (R) ist eine desarguessche H-Ebene der Höhe n.

b) Der i-Typ ist endlich und gleich $\underline{n}$.

c) Der h-Typ ist endlich und gleich $\underline{n}$.

Folgerungen: Unter den Voraussetzungen von 6.17 gelten:

1. Ist eine der Aussagen a), b) oder c) erfüllt, so ist der p-Typ von $\mathcal{H}$ (R) $\underline{1}$.
2. Ist der i-Typ oder h-Typ von $\mathcal{H}$ (R) artinsch (noethersch), so ist $\mathcal{H}$ (R) eine H-Ebene der Höhe n.

Beweis: Mit Satz 3.7 [2] ist $\mathcal{H}$ (R) eine H-Ebene der Höhe $\underline{n}$ genau dann, wenn R ein E-Ring vom Rang n ist. Offensichtlich ist daher a)$\Rightarrow$b),c) richtig. Da R Duo-Ring ist, ist mit b) das maximale Ideal endlich erzeugt, also ist R ein E-Ring, d.h. b)$\Rightarrow$c). Aus der Zweiseitigkeit aller Ideale und c) folgt sofort a).

Eine gewisse Übersicht über einige Typ-Kombinationen einer desarguesschen H-Ebene $\mathcal{H}(R)$ vermittelt Tabelle 6.18:

6.18 <u>Tabelle</u>:

$\mathcal{H}(R)$ besitzt

p-Typ	h-Typ	i-Typ	Bemerkungen
		$\underline{1}$	$\Longleftrightarrow$ projektive Ebene (4.2) Dann ist $\underline{1}$ auch p-Typ und h-Typ von $\mathcal{H}(R)$.
	$\underline{n}$	$\underline{n}$	R Duo-Ring $\Longleftrightarrow$ H-Ebene der Höhe n (6.17) $\Longleftrightarrow$ Dann ist $\underline{1}$ p-Typ von $\mathcal{H}(R)$.
$\underline{1}$		$\underline{2}$	$\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ uniforme H-Ebene ungelöstes Problem (Bemerkung nach 5.15)

Befreien wir uns von Endlichkeitsvoraussetzungen für den i-Typ, so gilt wegen 6.16 und 5.24 allgemein:

6.19 <u>Satz</u>: Ist der p-Typ einer desarguesschen H-Ebene über einem Duo-Ring $\underline{1}$, so ist der h-Typ der Ordnungstyp der Menge der positiven Elemente einer Unterhalbgruppe von einer der beiden linear geordneten Halbgruppen.

Γ_1: Die reellen Zahlen im Intervall $[0,1]$ mit der üblichen Ordnung und mit

$$\alpha \circ \beta = \min\{\alpha+\beta, 1\}$$

Γ_2: Die reellen Zahlen im Intervall $[0,1]$ und das Symbol ∞ mit der üblichen Ordnung und der Verknüpfung

$$\alpha \circ \beta = \alpha+\beta \quad \text{für } \alpha+\beta \leq 1$$
$$\alpha \circ \beta = \infty \quad \text{für } \alpha+\beta > 1.$$

Inwieweit ähnliche Aussagen für nicht-desarguessche H-Ebenen gelten oder ob die Menge der möglichen Ordnungstypen 'reichhaltiger' ist, wissen wir nicht.
In Verbindung mit 5.28 und 5.29 können wir nun noch zwei Folgerungen für bestimmte p-Typen ziehen.

6.20 <u>Satz</u>: Sei $\mathcal{H}$ (R) desarguessche H-Ebene, deren p-Typ artinsch oder noethersch ist. Dann ist jedes ferntreue Bild $\mathcal{H}'$, dessen Kern eine pa-konjugierte K-Rel. induziert, eine H-Ebene.
<u>Beweis</u>: Mit 6.6 werden die p-konjugierten K-Rel. durch vollständige Primideale P, die pa-konjugierten durch die Linksannullatoren von vollständigen Primidealen induziert (6.10). Nun ist mit 5.28 $P^l = P^r$ für alle vollständigen Primideale. Mit Folgerung 5.20.4 gilt $S_l(P^l) = S_r(P^r)$. Mit 6.9 erfüllt τ^{pa} (K4). Wegen 6.8 genügen in desarguesschen H-Ebenen die p-konjugierten K-Rel. stets (K3). Damit sind die Voraussetzungen von 3.10 erfüllt. Daher ist $\mathcal{H}' \cong \mathcal{H}/_{\tau^{pa}}$ eine projektive H-Ebene.

6.21 <u>Satz</u>: Sei $\mathcal{H}$ (R) desarguessche H-Ebene über einem H-Ring, der ein Duo-Ring ist. Ist der p-Typ artinsch oder noethersch, so ist jedes ferntreue epimorphe Bild $\mathcal{H}'$ von $\mathcal{H}$ (R) eine H-Ebene.
Der <u>Beweis</u> verläuft wie in 6.20 unter Berücksichtigung, dass mit 5.29 für jedes Ideal I stets $S_l(I) = S_r(I)$ gilt.

Eine Umkehrung der Aussagen von 6.20 und 6.21 ist nicht möglich, da, wie schon bei 5.31 erwähnt, für H-Ebenen über kommutativen H-Ringen jedes epimorphe Bild bei beliebigem p-Typ eine projektive H-Ebene ist.

§ 7. EIN KONSTRUKTIONSVERFAHREN FÜR HJELMSLEV-RINGE BEISPIELE VON HJELMSLEV-RINGEN

Gleichsam als Anhang an §5 geben wir in diesem Abschnitt noch ein Konstruktionsverfahren für H-Ringe an.
Wie schon in §5 erwähnt, stammt die Idee von KLINGENBERG, H-Ringe als epimorphe Bilder von (kommutativen) Bewertungsringen zu konstruieren. Seinem Satz 6.8 [8] zufolge wären aber nur H-Ringe mit einem einzigen Primideal über dieses Verfahren zu gewinnen. Diese Aussage ist inkorrekt, wie wir gleich sehen werden. Dennoch kann dieses Verfahren sogar verallgemeinert werden. Man sieht sehr bald, dass man eigentlich nur die lineare Ordnung der Ideale in Bewertungsringen zur Konstruktion ausnützt. Daher kann man allgemein über geeignete epimorphe Bilder von Kettenringen H-Ringe finden. Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium liefert Satz 5.19. Für die Anwendung ist allerdings oftmals ein anderes hinreichendes Kriterium bedeutsam.

7.1 Lemma: Sei R ein Kettenring und $\varphi: R \rightarrow R'$ ein Epimorphismus mit $\ker \varphi = I \neq (0)$. Ist das zweiseitige Ideal I im Links- und Rechtsidealverband ein Hauptideal oder ein unterer Nachbar, so ist R' ein H-Ring.

Beweis: Ist $I = J(R)$, so ist R' ein Körper, also H-Ring. Mit 5.19 genügt es zu zeigen:

$$\forall x \varepsilon J(R) \ \exists \ y,y' \varepsilon J(R) \setminus I: \ xy, y'x \varepsilon I$$

Sei $x \varepsilon J(R) \setminus I$ und $I = Ra = bR$, also $I = Ra = aR$. Da R Kettenring ist, gibt es $y,y' \varepsilon R$ mit $xy = y'x = a$. Wegen $a \neq 0$ ist $y,y' \varepsilon I$, während $y,y' \varepsilon U(R)$ stets $x \varepsilon I$ zur Folge hätte. Ist nun $I = J(R)a = bJ(R)$, so wähle $y = a$ bzw. $y' = b$.

Damit ist allerdings das Problem der Konstruktion von H-Ringen auf das von Kettenringen verlagert. In dieser Hinsicht ist bislang relativ wenig bekannt. Daher empfiehlt es sich in vielen Fällen, spezielle (zweiseitige) Kettenringe - nämlich Bewertungsringe - zu benutzen.

7.2 Def.: [17]

Ein Unterring B eines Körpers K heisst Bewertungsring, wenn B folgenden Bedingungen genügt:

(1) $\forall x \in K^*$: $x \in B$ oder $x^{-1} \in B$.

(2) B ist eine in K invariante Menge, d.h. $\forall x \in K^*$: $x^{-1}Bx = B$.

Nach einem Satz von KRULL (siehe SCHILLING [17,S.23]) kann man zu jeder linear geordneten Gruppe einen Bewertungsring B konstruieren, dessen Wertegruppe die vorgelegte Gruppe ist.

Man nehme etwa eine nicht archimedisch geordnete Gruppe Γ, z.B. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit der gewöhnlichen Addition und der lexikographischen Ordnung. Ein zugehöriger Bewertungsring B besitzt dann, sieht man vom Nullideal ab, zwei nichttriviale Primideale P_1, P_2. Ist $v: B \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ die Bewertungsfunktion, so lassen sich P_1, P_2 wie folgt beschreiben:

$$P_1 = \{x \in B \mid v(x) \geqslant (0,1)\}$$

$$P_2 = \{x \in B \mid \exists\, k \in \mathbb{Z}: v(x) \geqslant (1,k)\}$$

Da v der Bedingung $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$ genügt, besteht ein enger Zusammenhang zwischen der Multiplikation in B und der Addition in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Faktorisiert man nach einem Hauptideal, etwa $I = \{x \in B \mid v(x) \geqslant (1,2)\}$, so folgt mit 7.1, dass B/I ein H-Ring ist, der zwei Primideale, nämlich P_1/I und P_2/I besitzt. (Näheres über Eigenschaften von Bewertungsringen, siehe z.B. SCHILLING [17]). Man erkennt, dass die Halbgruppe der Hauptideale von B/I epimorphes Bild des Positivbereiches von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist und somit wesentliche Eigenschaften der multiplikativen Struktur auf B/I übertragen werden. Unabhängig von einer Darstellung als epimorphes Bild eines Bewertungsringes lässt sich folgende Aussage über die Struktur der Menge der Hauptideale eines zweiseitigen H-Ringes treffen:

7.3 Lemma: Sei R ein zweiseitiger H-Ring und Π die Menge seiner Hauptideale (zusammen mit R). Dann hat Π folgende Eigenschaften:

a) $(\Pi, \leqslant)$ ist mit $I_1 \leqslant I_2 \Longleftrightarrow I_2 \subseteq I_1$ linear geordnet, wobei R minimales, (0) maximales Element ist.

b) $(\Pi, +, \leq)$ mit
$I_1 \cdot I_2 = \{xy \mid x \varepsilon I_1,\ y \varepsilon I_2\}$ für Hauptideale I_1, I_2 ist eine linear geordnete Halbgruppe mit neutralem Element R und folgenden Eigenschaften:
1. $\forall\, I \varepsilon \Pi :\ R \leq I$
2. $\forall\, I_1, I_2 \varepsilon \Pi :\ I_1 \leq I_2 \Longrightarrow \exists\, I, I' \varepsilon \Pi :\ I_1 \cdot I = I' \cdot I_1 = I_2$
3. $\forall\, I, I', I_1 \varepsilon \Pi :\ I_1 \cdot I = I_1 \cdot I' \neq (0) \Longrightarrow I = I'$
$\qquad I \cdot I_1 = I' \cdot I_1 \neq (0) \Longrightarrow I = I'$

c) Jedes Element, verschieden von R, ist zweiseitiger Nullteiler:
$\forall\, I_1 \varepsilon \Pi \setminus \{R\}\ \exists\, I, I' \neq (0):\ I_1 \cdot I = I' \cdot I_1 = (0)$.
Daher ist jeder Nichtnullteiler Einheit.

Der <u>Beweis</u> ist einfach und wird weglassen.

Halbgruppen mit den Eigenschaften 7.3 a),b) erfüllen die Voraussetzungen zur Bildung von verallgemeinerten Halbgruppenringen. (siehe SKORNJAKOV [18]).

7.4 <u>Def.</u>: Sei $(\Gamma, +, \leq)$ eine linear geordnete Halbgruppe mit den Eigenschaften 7.3 a),b) und k ein Körper. Sei $f: \Gamma \to k$ eine Abbildung und $D(f) = \{\alpha \mid f(\alpha) \neq 0\}$, dann heisst $K(\Gamma, k) = \{f: \Gamma \to k \mid D(f) \text{ ist wohlgeordnet in } \Gamma\}$ <u>verallgemeinerter Halbgruppenring</u> (verallg. HG-Ring), wobei

$$(f+g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$$

$$(fg)(\alpha) = \sum_{\beta+\delta=\alpha} f(\beta) g(\delta)$$

gesetzt wird. Das Einselement $1 \varepsilon K(\Gamma, k)$ ist die Funktion $1: \Gamma \to k$ mit $1(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha = 0 \varepsilon \Gamma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

<u>Bemerkungen</u> 1. Die Multiplikation ist wohldefiniert, d.h. die Summe ist endlich, weil die Träger $D(f)$, $D(g)$ wohlgeordnet sind und Γ den schwachen Kürzungsregeln, siehe 7.3 b)3., genügt.

2. Jeder verallg. HG-Ring $K(\Gamma, k)$ besitzt eine natürliche Abbildung $v: K(\Gamma, k) \longrightarrow \Gamma \cup \infty$ mit $v(f) = \min\{D(f)\}$ und $v(x) = \infty \Longleftrightarrow x = 0$, $v(fg) = v(f) + v(g)$ und $\min\{v(f), v(g)\} \leq v(f+g)$. Besitzt Γ Nullteiler, so ∞ maximales Element von Γ, also $\infty \varepsilon \Gamma$.

7.5 Satz: Für eine linear geordnete Halbgruppe (Γ,+,$\leq$) mit den Eigenschaften 7.3 a)-c) und einen Körper k ist der verallg. HG-Ring K(Γ,k) ein H-Ring, dessen Links- und Rechtsideale zweiseitig sind.

Beweis: In Anwendung eines Satzes von SKORNJAKOV [18, Th.10] folgt aus 7.3 a),b), dass K(Γ,k) ein Kettenring ist, wobei alle Elemente mit $v(f) = 0 \in \Gamma$ Einheiten sind. Dass jede Nichteinheit Nullteiler und jeder Nullteiler zweiseitiger Nullteiler ist, folgt direkt aus 7.3 c).

7.6 Beispiele: Im folgenden sei k ein Körper.

1. $\Gamma = \{0,1,\ldots,n\}$ versehen mit der natürlichen Ordnung. Wir setzen $k \oplus 1 = \min\{k+1,n\}$. Dann ist K($\Gamma$,k) ein E-Ring vom Rang n.

2. $\Gamma = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ mit der natürlichen Ordnung und der Addition wie in 1. Dann ist K(Γ,k) ein H-Ring. $I = \{x \mid v(x) > 1/4\}$ ist ein nicht endlich erzeugtes Ideal, das unterer Nachbar (bzgl. $\subseteq$) von $I_1 = \{x \mid v(x) \geq 1/4\}$ ist. $I^r = \{x \mid v(x) \geq 3/4\}$ und $I^{rl} = I_1$ belegen $I \subset I^{rl}$ (siehe Bemerkung nach 5.8). Hier ist offensichtlich $N^l = N^r = (0)$, wobei $N = \{x \mid v(x) > 0\}$ das maximale Ideal ist.

3. $\Gamma = (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \cup \{\infty\}$ mit der natürlichen Ordnung und $\forall\, \alpha \in \Gamma:\ \alpha \leq \infty$. Wir definieren
$$\alpha \oplus \beta = \alpha+\beta \quad \text{falls } \alpha+\beta \leq 1$$
$$= \infty \quad \text{sonst.}$$
Hier haben wir $(0) \subset N^l = N^r$.

Die Kommutativität der Multiplikation in 1. - 3. hängt von der Kommutativität der Multiplikation in k ab.

4. Wir betrachten das lexikographisch geordnete Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sei $\Gamma = \{(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (0,0) \leq (\alpha_1,\alpha_2) \leq (1,1)\}$. Durch
$$(\alpha_1,\alpha_2) \oplus (\beta_1,\beta_2) = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2 e^{\beta_1}+\beta_2)$$
$$\text{falls } (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2 e^{\beta_1}+\beta_2) \leq (1,1)$$
$$= (1,1) \quad \text{sonst}$$
wird(Γ, $\oplus$,$\leq$) zu einer linear geordneten (nicht

kommutativen) Halbgruppe [17,S.24], die die Eigenschaften von 7.3 erfüllt. Also ist $K(\Gamma,k)$ ein H-Ring.

Behauptung: Es gibt $x,y\in K(\Gamma,k)$ mit $xy = 0 \neq yx$.

Wähle x,y mit $v(x) = (0,1)$ und
$v(y) = (1,1-e)$.

$$v(xy) = v(x)\oplus v(y) = (0,1)\oplus(1,1-e) = (1,e+1-e) = (1,1), \text{ also } xy = 0.$$

$$v(yx) = v(y)\oplus v(x) = (1,1-e)\oplus(0,1) = (1,(1-e)e^0+1) = (1,2-e) < (1,1), \text{ also } yx \neq 0.$$

Zum Schluss bilden wir einen zweiseitigen H-Ring, der ein Ideal I mit $S_l(I) \neq S_r(I)$ besitzt und demzufolge die Voraussetzung von 5.30 verletzt. Dabei modifizieren wir ein Beispiel von RADÓ [15,S.315] zu einem anderen Fragenkomplex.

5. Sei $\mathbb{R}(t)$ der Körper der rationalen Funktionen (mit reellen Koeffizienten) mit der Ordnung

$$\frac{a_0t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0t^m+b_1t^{m-1}+\ldots+b_m} > 0 \iff a_0b_0 > 0$$

Wir definieren auf $\mathbb{R}(t)\times\mathbb{R}(t)$ eine Multiplikation durch

$$(\alpha_1,\alpha_2)\cdot(\beta_1,\beta_2) = (\alpha_1\beta_1,\beta_1\alpha_2+\beta_2).$$

Mit der lexikographischen Ordnung versehen ist

$$\Gamma = \{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}(t)\times\mathbb{R}(t) \mid (1,0)\leq(\alpha_1,\alpha_2)\leq(t^2,0)\}$$

mit

$$(\alpha_1,\alpha_2)\odot(\beta_1,\beta_2) = \min\{(\alpha_1\beta_1,\beta_1\alpha_2+\beta_2),(t^2,0)\}$$

eine linear geordnete Halbgruppe, die 7.3 erfüllt. Dabei ist $(1,0)$ neutrales Element. Daher ist $K(\Gamma,k)$ ein H-Ring.

Wir betrachten nun das zweiseitige Ideal I

$$I = \{x\in K(\Gamma,k) \mid \exists\,\alpha\in\mathbb{R}_+ : v(x) > (t,\alpha t)\}$$

Behauptung: $S_l(I) = U(K(\Gamma,k)) = U$.

Trivialerweise ist $U \subseteq S_l(I)$. Wir zeigen:

$$x\notin U \iff \exists\, z\notin I: xz\in I$$

wir $\gamma = 0\varepsilon\mathbb{R}$, d.h. $z \notin I$. Nun ist
$v(xz) = v(x) \odot v(z) = (1,\beta) \odot (t,0) = (t,\beta t) \varepsilon v(I)$,
d.h. $x \notin S_l(I)$. Damit wurde gezeigt: $S_l(I) = U$.

<u>Behauptung</u>: $S_r(I)^c = \{x \mid \exists\, \alpha\varepsilon\mathbb{R}_+ : v(x) > (1,\alpha t)\} \underset{def}{=} P$
Wir zeigen zunächst: $P^c \subseteq S_r(I)$.
Sei $zx\varepsilon I$, wobei wir uns auf den Fall beschränken können, dass $v(z) = (t,\gamma)$ und $v(x) = (1,\beta)$ ist.
$v(zx) = v(z) \odot v(x) = (t,\gamma) \odot (1,\beta) = (t,\gamma+\beta)$.
$v(zx)\varepsilon v(I) \Longrightarrow \exists \alpha_1 \varepsilon R_+ : \alpha_1 t < \gamma+\beta$. Da für alle $\alpha\varepsilon R_+ : \beta < \alpha t$ ist, muss für ein $\alpha_2\varepsilon R_+ : \alpha_2 t < \gamma$ sein, d.h. $(t,\gamma)\varepsilon v(I)$ bzw. $z\varepsilon I$, was $x\varepsilon S_r(I)$ zur Folge hat.
Nun bleibt noch zu zeigen, dass $S_r(I) \subseteq P^c$ bzw. $P \subseteq S_r(I)$ gilt.
Sei $x\varepsilon P$, also $v(x) = (1,\beta)$ mit $\beta > \alpha_3 t$ für ein $\alpha_3 \varepsilon \mathbb{R}_+$.
Wir setzen $v(z) = (t,0)$, dann ist
$v(zx) = v(z) \odot v(x) = (t,0) \odot (1,\beta) = (t,\beta)\varepsilon v(I)$, ohne dass $v(z)\varepsilon v(I)$ ist. Damit wurde gezeigt: $P \subseteq S_r(I)$.
Wegen $P \neq N$ ist $S_l(I) \neq S_r(I)$.

Man zeigt nun leicht, dass

$$P_i = \{x\varepsilon K(\Gamma,k) \mid \exists\, \alpha\varepsilon R_+ : v(x) > (1,\alpha t^i)\},$$
$$Q_i = \{x\varepsilon K(\Gamma,k) \mid \exists\, \alpha\varepsilon R_+ : v(x) > (1+\alpha t^{-i},0)\}$$

für $i\varepsilon\mathbb{N}$ Primideale sind. Somit haben wir eine nicht abbrechende, aufsteigende bzw. absteigende Kette, von Primidealen, die nach 5.30 existieren muss, nämlich
$N = P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset \ldots \supset \ldots \supset Q_3 \supset Q_2 \supset Q_1$.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] ARTMANN, B.: Hjelmslev-Ebenen mit verfeinerten Nachbarschaftsrelationen. Math. Z. 112 (1969), 163 - 180

[2] ARTMANN, B.: Desarguessche Hjelmslev-Ebenen n-ter Stufe. Mitt. Math. Sem. Giessen 91 (1971), 1 - 19

[3] BACON, P.Y.: On the extension of projectively uniform affine Hjelmslev-planes. erscheint demnächst in Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg

[4] DRAKE, D.A.: On n-uniform Hjelmslev-planes. J. Combinatorial Theory 9 (1970), 267 - 288

[5] FUCHS, L.: Teilweise geordnete algebraische Strukturen. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht. 1966

[6] HUGHES, D.R.: On homomorphisms of projective planes. Proceedings of Symposia in Applied Math., Vol. X, 45 - 52. 1960

[7] JONSSON, B. and MONK, G.S.: Representations of primary arguesian lattices. Pacific J. Math. 30 (1969), 95 - 139

[8] KLINGENBERG, W.: Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen. Math. Z. 60 (1954), 384 - 406

[9] KLINGENBERG, W.: Desarguessche Ebenen mit Nachbarelementen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 20 (1955), 97 - 111

[10] LAMBEK, J.: Lectures on rings and modules. London, Blaisdell Publ. Comp. 1966

[11] LÜNEBURG, H.: Affine Hjelmslev-Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. 79 (1962), 260 - 288

[12] MAEDA, F.: Kontinuierliche Geometrien. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer Verlag. 1958

[13] OSOFSKY, B.L.: Noncommutative rings whose cyclic modules have cyclic injective hulls. Pacific J. Math. 25 (1968), 331 - 340

[14] PONELEIT, V.: Über Quasibewertungen und Morphismen von desarguesschen projektiven Hjelmslev-Ebenen. Giessen, Diplomarbeit. 1973

[15] RADÓ, F.: Non-injective collineations on some sets in Desarguesian projective planes and extension of non-commutative valuations. Aequationes Math. 4 (1970), 307 - 321

[16] ROW, D.: A homomorphism theorem for projective planes. Bull. Austral. Math. Soc. 4 (1971), 155 - 158

[17] SCHILLING, O.F.: The theory of valuations. New York, American Math. Soc., Math. Surveys IV. 1950

[18] SKORNJAKOV, L.A.: Rings chain like from the left (Russian). Izdat. Kazan Univ (1964), 75 - 88
MR: 34, # 190

[19] TÖRNER, G.: Hjelmslev-Ringe und die Geometrie der Nachbarschaftsbereiche in den zugehörigen Hjelmslev-Ebenen. Giessen, Diplomarbeit. 1972

[20] TÖRNER, G.: Über Homomorphismen von Hjelmslev-Ebenen. erscheint demnächst in J. Geometry

LEBENSLAUF

Am 29. Juli 1947 wurde ich als Sohn des kaufmännischen Angestellten Otto Törner und seiner Ehefrau Emmi geb. Kind in Giessen geboren.

Von Ostern 1954 bis Ostern 1958 besuchte ich die Goethe-Schule in Giessen. Danach wechselte ich zu der Liebig-Schule (Gymnasium), ebenfalls in Giessen, über, auf der ich die Reifeprüfung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig im November 1966 ablegte.

Von Januar 1967 bis April 1968 leistete ich einen 15-monatigen Grundwehrdienst ab.

Zum Sommersemester 1968 wurde ich an der Justus Liebig-Universität in Giessen für die Fächer Mathematik und Physik immatrikuliert. Im April 1970 bestand ich die Diplom-Mathematiker-Vorprüfung mit Nebenfach Physik, während ich mich im April 1972 mit Erfolg der Diplomhauptprüfung in Mathematik, ebenfalls mit Nebenfach Physik, unterzog.

Von April 1971 bis zu meiner Einstellung als wissenschaftlicher Bediensteter am Mathematischen Institut in Giessen im September 1972 war ich Stipendiat der Studienstiftung des Deutschen Volkes.

Seit Juli 1972 bin ich mit der Tierärztin Mechthild Törner geb. Kuwilsky verheiratet.