

**Über den Stufenaufbau**

von

**Hjelsmley-Ebenen**

**Günter Törner**

Die vorliegende Arbeit wurde vom Fachbereich Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt als Habilitationsschrift angenommen.

## INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	Seite 1
0. Vorbemerkungen, grundlegende Definitionen und Sätze	Seite 4
1. Über Stufenparameter von H-Ebenen	
A. Eigenschaften von Stufenparametern	Seite 12
B. Einfache Erweiterungen	Seite 16
C. Eine (6,2) FAH-Ebene des Typs 3	Seite 19
2. Stufenparameter $q_i = r$ und $(r^{n-1}, r)$ H-Ebenen des Typs n	
A. Stufenparameter $q_i = r$	Seite 26
B. H-Ebenen der Höhe n, "Property A" und das Axiom reziproker Strecken	Seite 28
C. H-Ebenen n-ter Stufe	Seite 33
3. Kongruenzrelationen in AH-Translationsebenen	Seite 37
4. Hjelmslev-Fastringe	Seite 46
5. Fastring-Hjelmslev-Ebenen	Seite 53
6. Literatur	Seite 58

## Einleitung

Als HILBERT 1899 sein epochemachendes und richtungweisendes Werk: Grundlagen der Geometrie veröffentlichte, war damit die Geometrie endgültig von den letzten Makeln, die EUKLID's Elementen anhafteten, befreit worden; andererseits war mit dieser Arbeit auch eine unwiderrufliche Lösung von einem Realitätsbezug verbunden, was die bekannten Worte HILBERT's von Tischen, Stühlen und Bierseideln als Punkte, Geraden und Ebenen belegen. Das eigentliche Anliegen der alten Völker, Geometrie als die der Wirklichkeit zukommende Theorie zu sehen, war dadurch in den Hintergrund gedrängt worden. Vor dieser geschichtlichen Entwicklung ist auch die erste Veröffentlichung des Geometers HJELMSLEV: Die Geometrie der Wirklichkeit [24] aus dem Jahre 1916 zu werten, die wieder in die ursprüngliche Richtung weisen wollte. Seine Theorie baute er in weiteren Arbeiten aus [25], jedoch blieb diesen Vorschlägen der Erfolg hinsichtlich der eigentlichen Intention, eine Geometrie der Wirklichkeit zu sein, versagt.

Es war Mitte der fünfziger Jahre KLINGENBERG, der HJELMSLEV's Ideen unter grundlagentheoretischem Aspekt aufgriff und damit einen neuen Anfang für geometrische, algebraische und kombinatorische Untersuchungen von Hjelmslev-Ebenen setzte.

Im folgenden interessieren wir uns für affine bzw. projektive Inzidenzstrukturen, in denen zwei Punkte u.U. mehr als eine Verbindungsgerade, zwei Geraden mehr als einen Schnittpunkt besitzen. Solche Punkte bzw. Geraden nennen wir benachbart. Die Großgeometrie, d.h. die Faktorstruktur nach dieser Nachbarschaftsrelation soll eine (gewöhnliche) affine bzw. projektive Ebene sein.

Standen anfangs Fragen einer Koordinatisierung und die Beschäftigung mit desarguesschen Hjelmslev-Ebenen im Vordergrund, so interessierte man sich bald für geometrisch gekennzeichnete Klassen von Hjelmslev-Ebenen und deren Eigenschaften. In Anlehnung an die von LÜNEBURG [31] ausführlich diskutierten uniformen Hjelmslev-Ebenen beschäftigten sich ARTMANN [1,2] und DRAKE [11] mit der Klasse der  $n$ -uniformen Hjelmslev-Ebenen, wobei

---

Der Autor dankt der Stiftung Volkswagenwerk für die Unterstützung während der Arbeit.

immer mehr die Behandlung endlicher Strukturen und deren Invarianten an Bedeutung gewann. Damit stellte sich zwangsläufig die Frage der Existenz- bzw. Nichtexistenz von Ebenen im Hinblick auf das Invariantenpaar  $(t,r)$ . Seit etwa 2 Jahren hat man auf diesem Gebiet große Fortschritte gemacht, nicht zuletzt durch die Arbeiten von DRAKE [13, 16] und LENZ [20]. Waren anfangs die einzelnen Klassen von  $(n$ -uniformen) Hjelmslev-Ebenen noch einigermaßen zu überschauen, so erbrachten neue Konstruktionsverfahren [16, 20] eine verwirrende Vielfalt bislang unbekannter Hjelmslev-Ebenen. Es scheint, daß eine Vielzahl von Hjelmslev-Ebenen lediglich durch "Aufstocken" von Hjelmslev-Ebenen entsteht, wobei von bekannten Ebenen als den Grundbausteinen ausgegangen wird. Diese als einfache Objekte zu bezeichnenden Ebenen sind ähnlich wie in anderen Theorien oft die am schwersten zugänglichen Strukturen.

Wir werden uns in der vorliegenden Arbeit mit einigen Aspekten dieses Stufenaufbaus beschäftigen. Als ordnendes Prinzip erweist sich unserer Meinung nach der Begriff der Kongruenzrelation und die damit äquivalente Betrachtung von epimorphen Bildern einer vorgelegten Hjelmslev-Ebene. Als Schlüssel kann der Satz bezeichnet werden, daß die epimorphen Bilder einer Hjelmslev-Ebene durch natürlich Projektion linear geordnet sind, den man neben anderen bekannten Resultaten in einem einleitenden Kapitel 0 findet.

Eine entscheidende Rolle spielen bei diesem Stufenaufbau die Quotienten der Invarianten zweier aufeinanderfolgenden Kongruenzrelationen, die wir Stufenparameter nennen und mit  $q_i$  bezeichnen. In Kapitel 1 werden einige numerische Aussagen über diese Parameter  $q_i$  hergeleitet und in Verbindung mit dem BRUCK-RYSER Theorem ein Nichtexistenzsatz für gewisse Paare  $(q_i, r)$  angegeben. (Dabei ist  $r$  stets die Ordnung der zugehörigen affinen bzw. projektiven Ebene.) Bisher bekannte Konstruktionsverfahren von Hjelmslev-Ebenen werden unter dem Gesichtspunkt des Stufenaufbaus untersucht.

Die dabei diskutierten Strukturen sind fastaffine, affine und projektive Hjelmslev-Ebenen. Daß der Aufbau dieser drei Typen durchaus unterschiedlich ist, wird durch die ausführliche Diskussion einer (bislang wohl noch unbekanntes)  $(6,2)$  fastaffinen Hjelmslev-Ebene belegt.

Da ein Stufenparameter stets größer oder gleich  $r$  sein muß, spielen Ebenen, in denen sämtliche Stufenparameter  $q_i$  stets  $r$  sind, eine ausgezeichnete Rolle. Da diese Ebenen in mancherlei Hinsicht ähnliche Eigenschaften wie die desarguesschen aufweisen, standen diese auch am Beginn des Studiums endlicher Hjelmslev-Ebenen. Der oben erwähnte numerische Sachverhalt gestattet eine anschaulich geometrische Kennzeichnung, wodurch gerade die Klasse der Hjelmslev-Ebenen der Höhe  $n$  beschrieben wird. Mit Hilfe unserer Terminologie stellen wir schließlich den Zusammenhang bzw. die Äquivalenz verschiedener Definitionsvarianten bei ARTMANN [1] und DRAKE [15] her (Kapitel 2).

Eine allgemeine Charakterisierung des Zusammenhangs zwischen den einzelnen Stufenparametern erscheint zur Zeit nur in einigermaßen homogenen Ebenen (z.B. Translations-Hjelmslev-Ebenen) erfolgversprechend zu sein. Wir algebraisieren daher in Kapitel 3 das Konzept der Kongruenzrelationen für Translations-Hjelmslev-Ebenen. Die Kongruenzrelationen entsprechen dann Untergruppen des die Ebene koordinatisierenden Biternähring, die ähnliche Eigenschaften wie Ideale aufweisen.

Im Falle, daß die Multiplikationen eines Biternähring assoziativ sind, lassen sich diese Verknüpfungen entkoppeln und man erhält einen Fastring (Kapitel 4), dessen Rechtsideale genau die Kongruenzrelationen induzieren. Die Stufenparameter erweisen sich als gruppentheoretische Invarianten der additiven Gruppe des Fastringes. Ähnlich wie im desarguesschen Fall, allerdings mit erheblich größerem Aufwand zu beweisen, wird bewiesen, daß affine Hjelmslev-Fastringe schon projektive sind (Satz 4.10) und daher die Stufenparameter  $q_i = r$  erfüllen.

In Kapitel 5 schließlich kennzeichnen wir affine Fastring-Hjelmslev-Ebenen geometrisch. Aus Satz 4.10 (siehe oben) folgt, daß solche Ebenen in projektive Hjelmslev-Ebenen einbettbar sind.

0. Vorbemerkungen, grundlegende Definitionen und Sätze

In diesem Abschnitt stellen wir die wesentlichen Definitionen und Sätze zusammen, auf denen unsere Untersuchungen aufbauen. Dabei werden wir einige Begriffe und Sätze, sofern dies in der Literatur noch nicht geschehen ist, auf die zur Diskussion stehenden drei Klassen von Hjelmslev-Ebenen (fastaffine, affine, projektive) übertragen. Wir beschränken uns generell auf die Behandlung endlicher Inzidenzstrukturen.

0.1 Def.: [28] Eine (endliche) Inzidenzstruktur  $\mathcal{H} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \epsilon)$  heißt projektive Hjelmslev-Ebene (PH-Ebene), falls  $\mathcal{H}$  den Bedingungen (PH 1) - (PH 3) genügt:

(PH 1) Für alle  $P, Q \in \mathcal{P}$  existiert  $g \in \mathcal{G}$  mit  $P, Q \in g$

(PH 2) Für alle  $g, h \in \mathcal{G}$  existiert  $P \in \mathcal{P}$  mit  $P \in g, h$ .

Wir nennen Punkte  $P, Q$  (Geraden  $g, h$ ) benachbart, in Zeichen:

$P \sim Q$  ( $g \sim h$ ), falls zwei verschiedene Geraden  $g, h$  (Punkte  $P, Q$ ) mit  $P, Q \in g, h$  existieren.

(PH 3) Es gibt einen (inzidenzerhaltenden) Epimorphismus

$\varphi: \mathcal{H} \rightarrow \bar{\mathcal{H}}$  von  $\mathcal{H}$  auf eine gewöhnliche projektive Ebene  $\bar{\mathcal{H}}$  mit

(a)  $P \sim Q \Leftrightarrow \varphi(P) = \varphi(Q)$

(b)  $g \sim h \Leftrightarrow \varphi(g) = \varphi(h)$

Man zeigt ohne Schwierigkeiten

$$(1) \left. \begin{array}{l} g \sim h \Leftrightarrow \forall P \in g \exists Q \in h \\ \forall Q \in h \exists P \in g \end{array} \right\} : P \sim Q$$

In affinen Strukturen dient (1) zur Definition der Nachbarschaftsrelation in der Geradenmenge, so daß wir Geraden  $g, h$  mit (1) affin benachbart nennen.

0.2 Def.: [12] Eine (endliche) Inzidenzstruktur  $\mathcal{H} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \epsilon)$  heißt fastaffine Hjelmslev-Ebene (FAH-Ebene), falls  $\mathcal{H}$  die Eigenschaften (FAH 1) - FAH 4) besitzt:

(FAH 1) Für alle  $P, Q \in \mathcal{P}$  gibt es  $g \in \mathcal{G}$  mit  $P, Q \in g$ .

(FAH 2) Ist  $|g \cap h| \geq 1$ , so sind  $g, h$  genau dann gemäß (1) affin benachbart, falls  $|g \cap h| \geq 2$  ist.

(FAH 3) Es gibt einen (inzidenzerhaltenden) Epimorphismus

$\varphi: \mathcal{H} \rightarrow \bar{\mathcal{H}}$  auf eine gewöhnliche affine Ebene  $\bar{\mathcal{H}}$  mit

(a)  $P \sim Q \Leftrightarrow \varphi(P) = \varphi(Q)$

(b)  $g \sim h \Leftrightarrow \varphi(g) = \varphi(h)$

(c)  $|g \cap h| = 0 \Rightarrow \varphi(g) \parallel \varphi(h)$

(FAH 4)  $t(P, g) = |\{h \in g \mid P \in h, h \sim g\}|$  ist unabhängig von der Fahne  $(P, g)$ .

0,3 Def.: [10] Unter einem Parallelismus  $\parallel$  einer Inzidenzstruktur verstehen wir eine Äquivalenzrelation in der Geradenmenge, wobei jede Äquivalenzklasse eine Partition der Punktmenge liefert,

0,4 Def.: [31] Eine FAH-Ebene  $\mathcal{H} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \epsilon)$  mit einem Parallelismus  $\parallel$  heißt affine Hjelmslev-Ebene (AH-Ebene)  $\mathcal{H} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \epsilon, \parallel)$ .

Die Klassen der PH-Ebenen, FAH-Ebenen und AH-Ebenen fassen wir im folgenden unter dem Namen H-Ebenen zusammen. Aus [12] zitieren wir an dieser Stelle:

0,5 Lemma: Es sei  $(P, g)$  Fahne einer H-Ebene  $\mathcal{H} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \epsilon)$ .  $t(P, g)$  bezeichne die Anzahl der Geraden durch  $P$ , die zu  $g$  benachbart sind;  $s(P, g)$  die Anzahl der zu  $g$  nicht benachbarten Geraden durch  $P$ . Dann gelten:

- (1)  $s$  und  $t$  sind unabhängig von der Fahne.
- (2)  $|\{Q \mid P \sim Q \in g\}| = t$  für alle  $P \in g$ .
- (3)  $r = \frac{s}{t} \in \mathbb{N}$  und  $r$  ist die Ordnung der zugehörigen affinen bzw. projektiven Ebene.
- (4) Auf einer Geraden einer FAH- bzw. AH-Ebene liegen  $rt = s$ , auf einer Geraden einer PH-Ebene liegen  $(r+1)t = s+t$  Punkte.
- (5) Jeder Punkt (Gerade) besitzt  $t^2$  Nachbarpunkte (Nachbargeraden).
- (6) Ist  $\mathcal{H}$  PH-Ebene, so gilt:  $|\mathcal{P}| = |\mathcal{G}| = (r^2+r+1)t^2$ .
- (7) Ist  $\mathcal{H}$  FAH-Ebene bzw. AH-Ebene, so gilt:  $|\mathcal{P}| = r^2t^2$  und  $|\mathcal{G}| = (r^2+r)t^2$

In naheliegender Weise sprechen wir bei einer endlichen H-Ebene mit den Invarianten  $t$  und  $r$  von einer  $(t, r)$  H-Ebene.

Fundamental für die Struktur und den Aufbau von H-Ebenen ist der Begriff einer Kongruenzrelation, einer Relation in der Punkt- bzw. Geradenmenge, die ähnliche Eigenschaften wie die Nachbarschaftsrelation aufweist.

Während wir für den projektiven Fall äquivalente Definitionen in [35] und [22] gegeben hatten, erweitern wir die Definition aus [37] auch auf FAH-Ebenen. Zur besseren Übersicht für den Leser erwähnen wir die erstgenannte Definition nochmals an dieser Stelle.

0.6 Def.: Ein Paar  $(\tau_1, \tau_2)$  von Äquivalenzrelationen in der Punkt- bzw. Geradenmenge einer PH-Ebene  $\mathcal{H} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \epsilon)$  heißt Kongruenzrelation, falls

(PK 1)  $\tau_i \subseteq \sim$  für  $i = 1, 2$ .

(PK 2) Für alle  $P, Q, R \in \mathcal{P}, g, h, k \in \mathcal{G}$

$$P \tau_1 Q, P \not\tau R \Rightarrow PR \tau_2 QR$$

$$g \tau_2 h, g \not\tau k \Rightarrow g \tau_1 k, h \tau_1 k$$

Punkte  $P, Q$  (Geraden  $g, h$ ) mit  $P \tau_1 Q$  ( $g \tau_2 h$ ) bezeichnen wir als  $\tau_1$ - (bzw.  $\tau_2$ -) benachbart. Kongruenzrelationen sind somit Verfeinerungen der Nachbarschaftsrelation.

Wie in [22] erwähnt wurde, sind  $\tau_2$ -benachbarte Geraden im Sinne von (1)  $\tau_1$ -affin benachbart, während die Umkehrung sofort mit (PK 2) folgt.

Es gilt also:

$$(2) \left. \begin{array}{l} g \tau_2 h \Leftrightarrow \forall P \in g \exists Q \in h \\ \forall Q \in h \exists P \in g \end{array} \right\} : P \tau_1 Q$$

Somit kann die Relation  $\tau_2$  als durch  $\tau_1$  induziert angesehen werden, wobei (2) in affinen Strukturen als Definition dienen wird. Das läßt uns dann von der Äquivalenzrelation  $\tau_1$  aus 0.6 schlechthin als der Kongruenzrelation  $\tau$  sprechen. Schließlich wird die Nachbarschaftsrelation in der Geradenmenge in FAH- bzw. AH-Ebenen durch die Punktnachbarschaft induziert, wodurch folgende Definition einer Kongruenzrelation in affinen Strukturen nahegelegt wird.

0.7 Def.: Es sei  $\tau$  eine Äquivalenzrelation in der Punktmenge  $\mathcal{P}$  einer FAH-Ebene  $\mathcal{H} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \epsilon)$ . Ferner setzen wir:

$$(3) \left. \begin{array}{l} g \tau h \Leftrightarrow \forall P \in g \exists Q \in h \\ \forall Q \in h \exists P \in g \end{array} \right\} P \tau Q.$$

$\tau$  heißt Kongruenzrelation, falls gelten:

(AK 1)  $\tau \subseteq \sim$

(AK 2)  $u(P, g) = |\{h \mid P \in g, h, g \tau h\}|$  ist unabhängig von der Wahl der Fahne  $(P, g)$

(AK 3) Für alle  $P, Q, R \in \mathcal{P}$  :

$$P \tau Q, P \not\tau R \Rightarrow PR \tau QR$$

(AK 4) Für alle  $g, h, k \in \mathcal{G}$  :

$$g \tau h, |g \tau k| = 1 \Rightarrow g \tau k, h \tau k$$

(AK 5) Für alle  $P \in \mathcal{P}, g, h \in \mathcal{G}$  :

$$P \in g, h, g \tau h, \neg(g \tau h) \Rightarrow \exists Q \in \mathcal{P} : \neg(P \tau Q) \text{ und } g \tau Q \tau h.$$

Mit  $u(P,g) = u_\tau$  bezeichnen wir die  $\tau$  zugeordnete Invariante der Kongruenzrelation  $\tau$ ,

0,8 Def.: Es sei  $\mathcal{H} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \epsilon, \parallel)$  eine AH-Ebene und  $\tau$  Kongruenzrelation der FAH-Ebene  $\mathcal{H} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \epsilon)$ ,

$\tau$  heißt Kongruenzrelation der AH-Ebene  $\mathcal{H}$ , falls (außer (AK 1) - (AK 5)) gelten:

(AK 6) Für alle  $P, Q \in \mathcal{P}, g, h \in \mathcal{G}$  :

$$P\tau Q, P \in g, Q \in h, g \parallel h \Rightarrow g\tau h.$$

(AK 7) Für alle  $P, Q \in \mathcal{P}, g_1, g_2, h_1, h_2 \in \mathcal{G}$  :

$$P \in g_1, g_2, Q \in h_1, h_2, g_i \parallel h_i \ (i = 1, 2), g_1\tau g_2 \Rightarrow h_1\tau h_2.$$

In AH-Ebenen bzw. in  $(t, r)$  FAH-Ebenen mit  $r \neq 2$  ist (AK 2) eine Folge der übrigen Bedingungen:

0.9 Satz: Es sei  $\tau$  Kongruenzrelation einer  $(t, r)$  FAH-Ebene  $\mathcal{H}$  ( $r \neq 2$ ) bzw. einer  $(t, r)$  AH-Ebene. Dann ist (AK 2) eine Folge der übrigen Bedingungen einer Kongruenzrelation.

Beweis: Es genügt nachzuweisen, daß für alle Fahnen  $(P, g)$  stets  $u_\tau = u'(P, g) = |\{Q|P\tau Q, Q \in g\}|$  gilt. Da ein Punkt  $P$  einer FAH-Ebene mit mindestens drei paarweise nicht benachbarten Geraden inzidiert, erhalten wir mit (AK 3) sofort  $u'(P, g) = u'(P, h)$  (siehe auch [12, 1.1]). Ist  $P \neq Q$ , so können wir o.B.d.A. von  $P, Q \in g, P \in h, Q \in k, h, k \not\parallel g$  ausgehen und den Nachweis für  $u'(P, h), u'(Q, k)$  führen. In AH-Ebenen liefern wegen (AK 6) geeignete Parallelen zu  $g$  die gewünschte Korrespondenz. In einer FAH-Ebene findet man wegen  $r \neq 2$  einen Punkt  $R \in g, R \not\parallel P, Q$ . Die Verbindungsgeraden von  $R$  mit zu  $P$   $\tau$ -benachbarten Punkten werden von der Geraden  $k$  in  $\tau$  benachbarten Punkten von  $Q$  geschnitten, was die Behauptung beweist.

0.10 Lemma: Es sei  $\mathcal{H}$  eine H-Ebene und  $\tau$  eine Kongruenzrelation mit der Invarianten  $u_\tau = u$ . Dann gelten für beliebige Fahnen  $(P, g)$

$$(a) u = |\{Q|P\tau Q, P, Q \in g\}|$$

$$(b) u^2 = |\{Q|P\tau Q\}| \stackrel{\text{def}}{=} |[P]_\tau|$$

$$(c) u^2 = |\{h|g\tau h\}| \stackrel{\text{def}}{=} |[g]_\tau|$$

Die Kongruenzrelationen sind in gewisser Hinsicht verfeinerte Nachbarschaftsrelationen, die den "Abstand" zweier benachbarter Punkte bzw. Geraden "messen". Daher sprechen wir im folgenden oftmals von Nachbarschaftsbereichen und meinen damit die Klassen  $(\sim i)$ -benachbarter Punkte bzw. Geraden.

Die Bedeutung der Kongruenzrelationen liegt nun im wesentlichen im Zusammenhang mit Morphismen von H-Ebenen, wobei sich die Kongruenzrelationen als deren "Kerne" herausstellen werden. Es wird jedoch darauf hingewiesen, daß für den Verfasser dieser Arbeit zunächst, zeitlich gesehen, der Begriff der Kongruenzrelation als Verfeinerung der Nachbarschaftsrelation der primäre war und erst später die Verbindung mit einem geeigneten Morphismusbegriff, der im Fall von H-Ebenen keinesfalls kanonisch ist, gesehen wurde.

Aus ARTMANN [1], LORIMER/LANE [30], DRAKE [15] zitieren wir:

0.11 Def.: Ein Inzidenzmorphismus  $\psi : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  von H-Ebenen  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  heißt verfeinerte Nachbarschaft (H-Epimorphismus), falls

- (a)  $\psi$  ist eine auf der Punkt- bzw. Geradenmenge surjektive Abbildung.
- (b)  $P \sim Q \Leftrightarrow \psi(P) \sim \psi(Q)$   
 $g \sim h \Leftrightarrow \psi(g) \sim \psi(h)$
- (c) Werden  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  als AH-Ebenen betrachtet, so gelte:  
 $g \parallel h \Rightarrow \psi(g) \parallel \psi(h)$

0.12 Satz: Es seien  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  (endliche) H-Ebenen.

- (a) Ein H-Epimorphismus  $\psi : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  induziert durch  
 $P \not\sim Q \Leftrightarrow \psi(P) = \psi(Q)$   
eine Kongruenzrelation  $\tau$  in  $\mathcal{H}_1$ . Wir setzen:  $\tau = \tau_\psi$ .
- (b) Ist  $\tau$  Kongruenzrelation in  $\mathcal{H}_1$ , so definiert  
 $P \mapsto [P]_\tau = \{Q \mid Q\tau P\} = \psi(P)$   
 $g \mapsto [g]_\tau = \{h \mid h\tau g\} = \psi(g)$   
eine verfeinerte Nachbarschaft  $\psi : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1/\tau$   
auf eine H-Ebene  $\mathcal{H}_1/\tau = \mathcal{H}_2$ .
- (c) Es sei  $\psi : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  ein H-Epimorphismus und  
 $\tau = \tau_\psi$  die durch  $\psi$  in  $\mathcal{H}_1$  induzierte Kongruenzrelation. Dann gibt es eine isotone Bijektion  
 $f : \{\mu \mid \mu \text{ Kongruenzrelation in } \mathcal{H}_1 \text{ und } \tau_\psi \subseteq \mu \subseteq \sim\} \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{H}_2)$   
in die Menge der Kongruenzrelation von  $\mathcal{H}_2$ .

Die durch einen H-Epimorphismus  $\psi$  induzierte Kongruenzrelation  $\tau_\psi$  bezeichnen wir als Kern von  $\psi$ .

Beweis von O.12: Den Nachweis für PH-Ebenen findet man in [35, 1.6] bzw. [22].

Die einfache Begründung von (a) bleibe dem Leser überlassen.

Zu (b): Wie in Satz 1.5 [22] folgt aus der Endlichkeit der H-Ebene  $\mathcal{H}_1$  und den Eigenschaften einer Kongruenzrelation die Aussage

$$(4) P \sim Q \Leftrightarrow \exists g, h \in \mathcal{G} : \neg(g \cap h), P, Q \in g, P \in h \text{ und } Q \cap h$$

Somit erhalten wir:

$$(5) P \sim Q \Leftrightarrow \exists [g]_{\tau} \neq [h]_{\tau} \in \mathcal{G}/_{\tau} : [P]_{\tau}, [Q]_{\tau} \in [g]_{\tau}, [h]_{\tau} \\ \Leftrightarrow [P]_{\tau} \sim [Q]_{\tau} \text{ (in } \mathcal{H}_1/\tau) \\ \Leftrightarrow \psi(P) \sim \psi(Q)$$

Mit (5) und der Tatsache, daß die Geradenachbarschaft durch die Punktnachbarschaft induziert wird, schließt man auf

$$g \sim h \Leftrightarrow [g]_{\tau} \sim [h]_{\tau}$$

Ist  $[g]_{\tau} \sim [h]_{\tau}$  und  $|[g]_{\tau} \cap [h]_{\tau}| \geq 1$ , so folgt mit (AK 5) stets  $|[g]_{\tau} \cap [h]_{\tau}| \geq 2$ . Ist umgekehrt  $|[g]_{\tau} \cap [h]_{\tau}| \geq 2$ , so gibt es Punkte  $P_1, P_2 \in g, Q_1, Q_2 \in h$  und  $P_i \tau Q_i$ , aber nicht  $P_1 \tau Q_1$ . Ist  $g \cap h = \emptyset$ , so ist  $g \sim h$ . Wäre  $g \not\sim h$ , so gibt es  $X \in g \cap h \neq \emptyset$  und wir erhalten  $P_1 \tau X \tau Q_1$  bzw.  $P_2 \tau X \tau Q_2$ . Damit ist  $g \sim h$ , also  $[g]_{\tau} \sim [h]_{\tau}$ .

Ist  $\mathcal{H}_1$  eine AH-Ebene, so induziert der Parallelismus in  $\mathcal{H}_1$  aufgrund von (AK 6) und (AK 7) einen solchen in  $\mathcal{H}_1/\tau$ . Damit ist  $\mathcal{H}_1/\tau$  als FAH- bzw. AH-Ebene nachgewiesen.

Zu (c): Ähnlich wie im projektiven Fall weist man nach, daß für eine Kongruenzrelation  $\mu$  mit  $\tau_{\psi} \subseteq \mu \subseteq \sim$  durch  $\psi(P) f(\mu) \psi(Q) \Leftrightarrow P \mu Q$  eine Kongruenzrelation in  $\mathcal{H}_2$  definiert wird. Andererseits induziert eine Kongruenzrelation  $\eta$  von  $\mathcal{H}_2$  mittels  $P f^{-1}(\eta) Q \Leftrightarrow \psi(P) \eta \psi(Q)$  eine Kongruenzrelation in  $\mathcal{H}_1$ , was schließlich (c) beweist.

Bei der Behandlung von H-Ebenen im folgenden haben wir nun stets die Möglichkeit, den der jeweiligen Situation angemessenen Aspekt (Kongruenzrelation - H-Epimorphismus) näher zu untersuchen, um Informationen über die Struktur der betrachteten H-Ebenen zu erhalten. Von fundamentaler Bedeutung ist dabei das folgende Ergebnis:

**O.13 Hauptsatz:** Die Menge  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  der Kongruenzrelation einer H-Ebene  $\mathcal{H}$  ist durch Inklusion linear geordnet.

Beweis: Den Beweis findet man für PH-Ebenen in [35, 1.7], während der Nachweis für AH-Ebenen in [37, 2.6] geführt wurde. Dazu benötigen wir allerdings nur die Eigenschaften (AK 1), (AK 4) und (AK 6). Der dort angegebene Beweis läßt sich wie folgt auch auf den FAH-Fall übertragen: Ähnlich wie im Beweis von 0.9 zeigt man für Kongruenzrelationen  $\tau_1, \tau_2$  und  $A \in g$

$$(6) [A]_{\tau_1} \cap g \subseteq [A]_{\tau_2} \cap g \Rightarrow [A]_{\tau_1} \subseteq [A]_{\tau_2} .$$

Sei für  $A \in g$  angenommen:

$$(7) [A]_{\tau_2} \not\subseteq [A]_{\tau_1} .$$

O.B.d.A. können wir voraussetzen, daß  $[A]_{\tau_1}, [A]_{\tau_2}$  mehr als einen Punkt enthalten. Sei  $X \in [A]_{\tau_2}, X \notin [A]_{\tau_1}$  und  $A, X \in h$ . Wir wählen  $g \neq h, A \in g$  und  $Y \in g \cap [A]_{\tau_1}$ . Sei  $k \ni X, Y$  und  $B \in k, B \neq Y$ . Wäre  $AB \sim g$ , so  $A \tau_1 X$ . Daher ist  $g \neq AB$  und aufgrund von  $A \tau_2 X$ , (AK 3) und (AK 4) auch  $A \tau_2 Y$ , d.h. mit (6) schließlich  $[A]_{\tau_1} \subseteq [A]_{\tau_2}$ .

Für jeden Punkt sind daher die Äquivalenzklassen der Kongruenzrelationen linear geordnet. Da deren Mächtigkeit endlich und nach 0.10(b) aufgrund von (AK 2) Invarianten sind, ist die Menge  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  der Kongruenzrelationen einer FAH-Ebene  $\mathcal{H}$  linear geordnet.

Somit bilden die Kongruenzrelationen einer H-Ebene  $\mathcal{H}$  eine Kette. Wir numerieren für endliche H-Ebenen diese Kongruenzrelationen wie folgt:

$$(8) id = (\sim_n) \subset (\sim_{n-1}) \subset \dots \subset (\sim_1) = \sim$$

wobei wir vereinbaren:

$$(9) P(\sim_i)Q \Leftrightarrow P(\sim_i)Q \text{ und } \neg(P(\sim_{i+1})Q) \\ g(\sim_i)h \Leftrightarrow g(\sim_i)h \text{ und } \neg(g(\sim_{i+1})h)$$

Punkte bzw. Geraden mit (9) bezeichnen wir als exakt i-benachbart.

#### 0.14 Def.:

- (i) Eine H-Ebene  $\mathcal{H}$ , die genau  $n$  Kongruenzrelationen besitzt, heißt H-Ebene des Typs  $n$ .
- (ii) H-Ebenen des Typs 2 heißen einfache H-Ebenen.
- (iii) Die H-Ebene  $\mathcal{H}'$  heißt eine Erweiterung der H-Ebene, falls es einen H-Epimorphismus  $\psi : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$  gibt.

Da die Kongruenzrelationen gerade die Kerne der H-Epimorphismen sind, vereinbaren wir ferner.

- (iv) Eine Erweiterung  $\mathcal{H}'$  der H-Ebene  $\mathcal{H}$  heißt einfach, falls der Typ von  $\mathcal{H}'$  um eins größer als der von  $\mathcal{H}$  ist.

- (v) Eine Sequenz  $(\psi_i, \mathcal{H}_{i+1})$  von H-Epimorphismen  $\psi_i$  und H-Ebenen  $\mathcal{H}_{i+1}$  heißt eine Auflösung von  $\mathcal{H}$  der Länge n, falls  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n$ ,  $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_1$  und jede Erweiterung  $\psi_i : \mathcal{H}_{i+1} \rightarrow \mathcal{H}_i$  einfach ist.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1 = \overline{\mathcal{H}}$$

Aufgrund von Satz 0.13 besitzt jede H-Ebene  $\mathcal{H}$  im wesentlichen eine Auflöserung, wobei die Ebenen  $\mathcal{H}_i$  gerade die Faktorstrukturen nach sämtlichen Kongruenzrelationen sind. Man beachte, daß der Typ einer FAH-Ebene  $\mathcal{H}$  größer sein kann als der der gleichen Inzidenzstruktur  $\overline{\mathcal{H}}$ , in der nun ein (vorhandener) Parallelismus  $\mathcal{H}$  als AH-Ebene betrachten läßt (siehe Bemerkung nach 2.19).

Es sei  $\mathcal{H}$  eine H-Ebene des Typs n,  $\mathcal{H}_i$  zugehörige H-Ebenen einer Auflöserung von  $\mathcal{H}$  und  $(t, r)$  bzw.  $(t_i, r)$  die zugehörigen Invariantenpaare. Setzen wir  $t = t_n$  und

$$(10) \quad t_i / t_{i-1} = q_i \quad (i \geq 2),$$

so bezeichnen wir  $q_i$  als den i-ten Stufenparameter.

Man beachte:

$$(11) \quad t = t_n = \prod_{i=1}^n q_i \quad \text{und}$$

$$u_i = \prod_{i+1}^n q_i \quad (u_i \text{ Invariante der Kongruenzrelation } \sim_i)$$

Damit stellen sich zwangsläufig folgende Probleme:

- (i) Man beschreibe mögliche Stufenparameter  $q_{i+1}$  in Abhängigkeit von  $r, q_2, \dots, q_i$ .  
(Problem der einfachen Erweiterungen)
- (ii) Inwieweit bedingen geometrische bzw. algebraische Eigenschaften der Ebenen Konsequenzen für die Stufenparameter? Welche Stufenparameter lassen anschauliche geometrische Interpretationen zu?

Da in diesen beiden Problemen weitgehend die "rohe" Struktur aller H-Ebenen erfragt wird, können wir im folgenden nur mit ansatzweisen Lösungen und Antworten rechnen.

## 1. Über Stufenparameter von H-Ebenen

Die am Ende des letzten Abschnittes aufgeworfene Frage nach der Existenz von  $q_{i+1}$  in Abhängigkeit der vorangehenden Stufenparameter  $q_2, \dots, q_i$  soll nun weiter verfolgt werden. Neben einem Nichtexistenzsatz, der mit Hilfe des BRUCK-RYSER-Theorems für projektive Ebenen [26, 3.6] bewiesen wird, geben wir insbesondere Bedingungen für die Stufenparameter an, sofern die induzierten Inzidenzstrukturen affine Ebenen sind. Ferner werden bekannte Konstruktionsverfahren für H-Ebenen sich als Lösungen des Erweiterungsproblems interpretieren lassen.

Die Verschiedenartigkeit des Aufbaus von FAH-Ebenen, AH-Ebenen und PH-Ebenen wird durch die Angabe einer (6,2) FAH-Ebene des Typs 3 belegt werden.

### A. Eigenschaften von Stufenparameter

Im folgenden sei  $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}$  eine (t,r) H-Ebene des Typs n,  $u_{n-1}$  die Invariante der K-Rel. ( $\sim n-1$ ) und  $q = q_{n-1}$  ( $= u_{n-1}$ ) n-ter Stufenparameter. Analog zu [13] führen wir folgende Bezeichnungen ein:

Für einen Punkt P bezeichnet  $\bar{P} = [P]_{\sim n-1}$  die Menge der zu P ( $\sim n-1$ )-benachbarten Punkte. Ist  $\bar{P} \cap h \neq \emptyset$  für eine Gerade h, so setzen wir  $h' = h \cap \bar{P}$ .

Dual bezeichnet  $\bar{g}$  die Menge aller zu g ( $\sim n-1$ )-benachbarten Geraden h und  $Q' = \{h \in \bar{g} \mid Q \in h\}$ .

Mit  $l(q)$  bezeichnen wir die Maximalzahl paarweise orthogonaler lateinischer Quadrate der Ordnung q.

Dann ist sofort ersichtlich:

1.1 Lemma: In einer (t,r) H-Ebene gilt für jeden Stufenparameter q:

$$(1) \quad r-1 \leq l(q) \leq q-1$$

Beweis: O.B.d.A. ist  $\mathcal{H}$  eine (t,r) H-Ebene des Typs n und  $q = q_n$ . Seien  $g_1, g_2, \dots, g_{r+1}$  paarweise nicht benachbarte Geraden, die mit einem Punkt P inzidieren. Wir wählen  $Q_i \in g_i$ ,  $Q_i \neq P$  und betrachten jeweils die q zu  $g_i$  ( $\sim n-1$ )-benachbarten Geraden durch  $Q_i$ . Diese induzieren nach  $\bar{P}$  ein r+1-Netz der Ordnung q, d.h.  $r-1 \leq l(q)$  [5] und trivialerweise  $l(q) \leq q-1$ .

1.2 Folgerung: In einer (t,r) H-Ebene ( $r \neq 2$ ) ist jeder Stufenparameter q von sechs verschieden.

**Beweis:** Nach dem klassischen Ergebnis von TARRY [34] gibt es keine zwei zueinander orthogonalen lateinischen Quadrate der Ordnung 6, mit 1.1 folgt daher die Behauptung.

**1.3 Lemma:** Schneiden sich in einer Punktnachbarschaft  $\bar{P}$  induzierte Geraden  $g' \neq h'$  einer H-Ebene in höchstens einem Punkt, so ist die von  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n$  nach  $\bar{P}$  induzierte Inzidenzstruktur eine gewöhnliche affine Ebene. Insbesondere gilt:  $l(q) = q-1$

**Beweis:** Offensichtlich existiert zu je zwei Punkten in  $\bar{P}$  genau eine Verbindungsgerade, die jeweils  $q$  Punkte von  $\bar{P}$  enthält. Aus  $(q+1)(q-1) = q^2-1$  folgt, daß jeder Punkt von  $\bar{P}$  mit genau  $q+1$  Geraden inzidiert. Somit gibt es zu jeder Geraden  $g'$  und jedem Punkt  $Q \in \bar{P}$ ,  $Q \notin g'$  genau eine die Gerade  $g'$  nicht schneidende Gerade  $h'$ .

Umgekehrt kann jedoch nicht aus der Tatsache, daß ein Stufenparameter Ordnung einer projektiven Ebene ist, gefolgert werden, daß die Voraussetzungen von 1.3 erfüllt sind. Von DRAKE/SHULT wurden in [21] (8,2) PH-/AH-Ebenen angegeben, die extremal sind. Extremale H-Ebenen besitzen nach [17] eine uniforme Fahne und sind demzufolge einfach [17].

Historisch gesehen betrachtet man zunächst H-Ebenen, in denen die induzierten Inzidenzstrukturen in den kleinsten Punktnachbarschaften (gewöhnliche) affine Ebenen sind. Dazu zählen neben den desarguesschen Ebenen insbesondere die uniformen H-Ebenen, die schließlich in den n-uniformen H-Ebenen bzw. H-Ebenen n-ter Stufe eine naheliegende Verallgemeinerung fanden. Eine andere Klasse von H-Ebenen, in deren kleinsten Nachbarschaftsbereichen affine Ebene induziert werden, sind die von DRAKE/TÖRNER in [22] untersuchten.

Von einer Charakterisierung der Stufenparameter  $q_n$  in Abhängigkeit von  $r, q_2, \dots, q_{n-1}$ , für die  $\bar{P}$  affine Ebenen sind, ist man zur Zeit noch weit entfernt.

In Anwendung eines BRUCK'schen Resultates [5, Cor. 3.2] gewinnt man nun folgendes hinreichende Kriterium.

**1.4 Satz:** Genügt der Stufenparameter  $q_i$  einer  $(t,r)$  H-Ebene  $\mathcal{H}$  der Bedingung

$$(2) \quad q_i - r < \sqrt{q_i}$$

so ist jede nach  $\bar{P}$  induzierte Inzidenzstruktur eines Punktes  $P$  in  $\mathcal{H}/(\sim_i)$  eine affine Ebene.

Beweis: Es sei o.B.d.A.  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_i$  eine H-Ebene des Typs  $i$ . Wie in 1.1 dargestellt, induzieren  $r$  paarweise nichtbenachbarte Geraden  $\ni P$  nach  $[P]_{\sim_{i-1}}$  ein  $r$ -Netz  $\alpha$  der Ordnung  $q_i$  mit Defekt  $d = q_i - r + 1$  (siehe [5]). Benachbarte Geraden  $g_1, h_1 \ni P$ , die zu den übrigen  $r$  Richtungen nicht benachbart sind, induzieren nach  $\alpha$  Transversale hinsichtlich  $\alpha$ . Umgekehrt lassen sich je zwei benachbarte Geraden als Transversale eines geeigneten Netzes  $\alpha$  auffassen. Wegen  $q_i > (q_i - r)^2$  infolge von (2) und in Anwendung eines Ergebnisses von BRUCK [5, Cor. 3.2] folgt, daß verschiedene Transversale höchstens einen Punkt gemeinsam haben. Lemma 1.3 liefert die Behauptung.

1.5 Korollar: Ist  $q_i$  Stufenparameter einer  $(t, r)$  H-Ebene und

$$q_i - r < \sqrt{q_i}, \text{ so gilt: } l(q_i) = q_i - 1$$

1.6 Bemerkungen: 1. Die globalen Nicht-Existenzsätze von DRAKE [13, Th. 2.18] lassen sich anscheinend nicht ohne weiteres auf beliebige Stufenparameter übertragen. Allerdings können sie als Aussagen über den Stufenparameter  $q_2$  angesehen werden:

$$q_2 \neq r \Rightarrow r \leq q_2 + 2 - \sqrt{2q_2 + 3}$$

2. Stufenparameter  $q_i$ , die der Bedingung (2) genügen, können wegen 1.6.1 oder unmittelbar wegen [13, 2.7] nur für  $i \geq 3$  auftreten. Aufgrund von 1.5 sind solche Parameter auch Ordnungen von projektiven Ebenen. Allgemeine Nichtexistenzresultate für projektive Ebenen werden zur Zeit nur durch das BRUCK-RYSER Theorem [26] erbracht. Insofern erhält man die folgende Nichtexistenzaussage für Parameterpaare  $(q_i, r)$ :

In einer  $(t, r)$  H-Ebene kann kein Stufenparameter  $q_i$ , der nicht Summe von Quadraten ist, zugleich (2) und  $q_i \equiv 1$  oder  $2 \pmod{4}$  genügen.

So lassen sich u.a. die folgenden Parameter  $(q_i, r)$  ausschließen:

r	11	12	13	17	18	19	20	18	19	20	25	26	27	28	29
$q_i$	14	14	14	21	21	21	21	22	22	22	30	30	30	30	30

Ist in einer PH- bzw. AH-Ebene  $\mathcal{E}$  des Typs  $n$  die nach  $\bar{P}$  induzierte Inzidenzstruktur eine affine Ebene, so läßt sich eine obere Schranke für den Stufenparameter  $q_n$  angeben:

1.7 Lemma: Ist die in  $\bar{P}$  induzierte Inzidenzstruktur einer  $(t,r)$  PH- bzw. AH-Ebene des Typs  $n$  bzw. FAH-Ebene des Typs  $n$  mit  $r \neq 2$  eine affine Ebene, so gilt:

$$(3) \quad q_n \leq (r+1) \prod_{i=2}^{n-1} q_i - 1$$

Beweis: Annahme: Es gibt Geraden  $g (\simeq n-1)h$ ,  $P \in g, h$  und  $\{P\} = g' \cap h'$ . Wir bezeichnen die Punkte auf  $g$ , die  $(\simeq n-1)$ -benachbart zu  $P$  sind, mit  $P_2, \dots, P_{q_n}$ . Auf  $h$  wählen wir einen Punkt  $X \neq P$  und bezeichnen mit  $h_i$  die Verbindungsgerade von  $X$  mit  $P_i$ . Es ist  $h_i (\simeq n-1)h$ . Somit existieren mindestens  $q_n$  Geraden durch  $X$ , die zu  $h (\simeq n-1)$ -benachbart sind. Ist  $r \neq 2$  oder  $\mathcal{E}$  eine PH-Ebene, so gibt es  $Y \in g$  mit  $P \neq Y \neq X$ . Wegen  $Y (\simeq n-1)h$  ist  $XY (\simeq n-1)h$  und es ist  $XY \neq h_i$ , so daß  $X$  mit mindestens  $q_n + 1$  Geraden, die zu  $h (\simeq n-1)$ -benachbart sind, inzidieren würde. Widerspruch zu (AK 2). Im Falle, daß  $\mathcal{E}$  eine AH-Ebene ist, gibt es  $k \parallel g$  mit  $k \ni X$ , also  $k (\simeq n-1)h$ . Widerspruch!

Daher ist die Annahme zu verwerfen, somit inzidieren  $(\simeq n-1)$ -Geraden  $g, h$  mit  $g' \cap h' = P$  in sämtlichen Punkten von  $\bar{P} \cap g$ , d.h.

$$q_n^2 - 1 \leq (r+1) \prod_{i=2}^{n-1} q_i (q_n - 1), \text{ also}$$

$$q_n \leq (r+1) \prod_{i=2}^{n-1} q_i - 1$$

Insbesondere hat der Beweis gezeigt:

1.8 Folgerung: Unter den Voraussetzungen von 1.7 gilt:

$$P \in g \cap h, g (\simeq n-1)h \Rightarrow g' = h'$$

Bevor wir die durch (3) gegebene Schranke in 1.B diskutieren, verweisen wir auf eine weitere wesentliche Invariante einer Kongruenzrelation ( $\sim$ ):

1.9 Lemma: Es sei  $\mathcal{E}$  eine  $(t,r)$  H-Ebene des Typs  $n$  mit  $t = q_2 \dots q_n$ . Dann gilt für die mittlere Verbindungszahl  $\lambda_i$  ( $\simeq i$ )-benachbarter Punkte:

$$(4) \quad \lambda_i = \frac{(r+1) q_2 \cdots q_{i+1}}{1 + q_{i+1}}$$

Beweis: Wir zählen die Fahnen von  $\{(Q, g) \mid P, Q \in g, P(\simeq i)Q\}$  und erhalten

$$t(r+1)(u_i - u_{i+1}) = \lambda_i (u_i^2 - u_{i+1}^2), \text{ also}$$

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{(r+1)t}{u_i + u_{i+1}} = \frac{(r+1) q_2 \cdots q_n}{q_{i+1} \cdots q_n + q_{i+1} \cdots q_n} \\ &= \frac{(r+1) q_2 \cdots q_{i+1}}{1 + q_{i+1}} \end{aligned}$$

1.10 Bemerkungen: 1. In PH-Ebenen gilt offensichtlich auch die duale Aussage von 1.9.

2.  $\lambda_i$  ist eine Invariante der H-Ebene, also unabhängig von der Wahl des Punktes P.
3.  $\lambda_i$  überträgt sich auf epimorphe Bilder.
4. Ist  $\partial \mathcal{C}$  eine FAH-Ebene und

$$\mu_i(g) = |\{h \mid g(\simeq i)h \text{ und } g \cap h = \emptyset\}|,$$

so ist die durchschnittliche Schnittzahl von g mit  $(\simeq i)$ -benachbarten Geraden von g

$$(5) \quad \eta_i(g) = \frac{r \cdot t (u_i - u_{i+1})}{u_i^2 - \mu_i(g) - u_{i+1}^2}$$

5. Es gilt  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-1}$ .

Aus 1.10.5 folgt unmittelbar:

1.11 Lemma: Ist  $\partial \mathcal{C}$  eine H-Ebene des Typs n und die nach  $[P]_{\simeq i}$  induzierte Inzidenzstruktur eine affine Ebene, so gilt:  $i = n-1$ , d.h. ist der Kern einer Erweiterung eine affine Ebene, so ist die Erweiterung einfach.

### B. Einfache Erweiterungen

Sieht man von der Konstruktion desarguesscher H-Ebenen ab, auf die schon HJELMSLEV [25] und KLINGENBERG [28] verwiesen hatten, so wurde das Erweiterungsproblem - die Konstruktion von H-Ebenen  $\mathcal{H}'$  ausgehend von bekannten H-Ebenen  $\mathcal{H}$ , so daß  $\mathcal{H}'$  epimorphes Bild von  $\mathcal{H}$  ist - für den Fall einer projektiven Ebene  $\mathcal{H}$  zuerst von CRAIG [7] behandelt, ARTMANN [1,2] und DRAKE [11] "stockten" dann die von LÜNEBURG [31] und CRAIG [7] untersuchten uniformen Ebenen weiter "auf".

Wir zitieren (in unserer Sprechweise) aus [1,2,11,18] :

1.12 Satz: ARTMANN, DRAKE: Es existiere eine  $(1,r)$  H-Ebene. Dann gibt es für jedes  $n$  eine  $(r^{n-1}, r)$  H-Ebene des Typs  $n$ , die einfache Erweiterung mit dem Stufenparameter  $q_n = r$  einer  $(r^{n-2}, r)$  H-Ebene des Typs  $n-1$  ist.

Die Konstruktionen von ARTMANN bzw. DRAKE garantieren die Existenz von H-Ebenen  $n$ -ter Stufe bzw. stark  $n$ -uniformen H-Ebenen, die vom Typ  $n$  sind. Eine algebraische Lösung des Erweiterungsproblems findet man für Translationsebenen in [8].

Da jeder Stufenparameter  $q_i = r$  ist, sind die jeweils induzierten Inzidenzstrukturen affine Ebenen und nach 1.11 ist die Erweiterung notwendigerweise einfach.

Einer Idee von CRAIG [7] folgend, haben DRAKE-LENZ ein weiteres wesentliches Konstruktionsprinzip vorgestellt.

1.13 SATZ [20] : Es existiere eine  $(t,r)$  PH-Ebene und  $q = (r+1)t-1$  sei Ordnung einer projektiven Ebene. Dann gibt es eine  $(tq,r)$  PH-Ebene  $\mathcal{E}'$ , die einfache Erweiterung von  $\mathcal{E}$  ist. Überdies gilt für den Kern  $\tau$  der Erweiterung:

(a) Für Geraden  $g, h$  gilt:

$$\tau(gth) \Rightarrow |g'nh'| \leq 1.$$

(b) Für Geraden  $g, h$  gilt:

$$g'nh' \neq \emptyset, gth \Rightarrow g' = h' = gnh.$$

Beweis: Der Existenzbeweis wurde für PH-Ebenen in [20] geführt. Ist  $P \in g, h$  mit  $gth$ , so ist wegen  $M_\lambda M_\lambda^T = q M_\lambda$  (siehe [20]) stets  $|gnh| \geq q$ , insbesondere also auch  $g' = h'$ . Ist  $P \in g, h$  und  $\tau(gth)$ , so folgt aus  $M_\lambda M_\mu^T = J(\lambda \neq \mu)$ , daß die Geraden in  $\bar{P}$  keinen weiteren Punkt gemeinsam haben, also (a). Schließlich erhält man aus 1.3:  $\bar{P}$  ist eine affine Ebene und wegen 1.11 ist die Erweiterung einfach. Die mittlere Schnittzahl  $\tau$ -benachbarter Geraden ist  $\lambda_\tau = \frac{(r+1)tq}{q+1} = q$ . Aufgrund von  $|gnh| \geq q$  folgt für  $\tau$ -benachbarte Geraden und damit schließlich  $|gnh| = q$ , also mit 1.8 insbesondere (b).

1.14 Bemerkung: Die nach 1.7 berechnete obere Schranke für einfache Erweiterungen, in deren Kern affine Ebenen induziert werden, wird angenommen; dagegen gibt es jedoch auch Erweiterungen, deren Kern affine Ebenen induzieren, die somit einfach sind, ohne daß  $q+1 = (r+1)t$ . In [22] wird eine Klasse von PH-Ebenen studiert, deren sämtliche in geeigneten epimorphen Bildern affine Ebenen induzieren. Hier gilt  $q_{i+1} = q_i$  oder  $q_{i+1} + 1 = (r+1)q_2 \dots q_i$ , sofern nur  $q_{i+1}$  Ordnung einer projektiven Ebene ist ([22, 18]). Ob dagegen stets  $q_{i+1} \geq q_i$  für Stufenparameter gelten muß,

ist bislang offen.

Die in [20] entwickelten Methoden benutzt DRAKE zum Beweis eines weiteren Existenzsatzes [20, 6.2], aus dem wir das folgende für Stufenparameter  $q_3$  entnehmen können.

1.15 Satz: Es sei  $\mathcal{E}$  eine (uniforme)  $(r,r)$  PH-Ebene,  $q_3$  Primzahl und

$$(6) \quad 2(r+1) \leq q_3+1 \leq r(r+1) .$$

Da gibt es eine  $(rq_3, r)$  PH-Ebene  $\mathcal{E}'$ , die einfache Erweiterung von  $\mathcal{E}$  ist.

Für den späteren Gebrauch notieren wir an dieser Stelle, wie sich die Lösung des Erweiterungsproblems - das "Aufstocken" - in der "Sprache der Inzidenzmatrix" formulieren läßt. Aufgrund des Zusammenhangs zwischen Kernen und Kongruenzrelationen entsprechen daher die Kongruenzrelationen gewissen Matrixzerlegungen mit den im folgenden Satz angegebenen Eigenschaften.

1.16 Satz: Es sei  $A = (A_{ij})$  eine  $(0,1)$ -Matrix, wobei jede Matrix  $A_{ij}$  in jeder der  $q^2$  Spalten bzw. Zeilen genau  $q$  Einträge 1 hat. Ferner sei  $B = (a_{ij})$  vermöge

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow A_{ij} \neq (0)$$

$$a_{ij} = 0 \Leftrightarrow A_{ij} = (0)$$

Inzidenzmatrix einer  $(t,r)$  FAH-Ebene. Dann ist A genau dann Inzidenzmatrix einer  $(tq,r)$  FAH-Ebene, falls gelten:

$$(a) \quad A_{ik} (A_{jk})^T = J, \text{ falls } i \neq j \text{ und } A_{ik}, A_{jk} \neq (0)$$

$$(a)' \quad (A_{ik})^T A_{ij} \leq J, \text{ falls } i \neq j \text{ und } A_{ik}, A_{ij} \neq (0)$$

$$(b) \quad \sum_j A_{i_1 j} (A_{i_2 j})^T \geq 2J, \text{ falls } i_1 \sim i_2$$

$$(b)' \quad \text{Ist } \sum_i (A_{ij_1})^T A_{ij_2} = (c_{kl}) \text{ mit } j_1 \sim j_2, \text{ so folgt}$$

$$c_{kl} \neq 0 \Rightarrow c_{kl} \geq 2$$

1.17 Satz: In Satz 1.16 kann das Wort FAH-Ebene durch PH-Ebene ersetzt werden, falls (a)' und (b)' durch

$$(a)'' \quad (A_{ik})^T A_{ij} = J, \text{ falls } j \neq k \text{ und } A_{ik}, A_{ij} \neq (0)$$

$$(b)'' \quad \sum_i (A_{ij_1})^T A_{ij_2} \geq 2J, \text{ falls } j_1 \sim j_2 \text{ ersetzt werden.}$$

Satz 1.17 findet man in [16, 1.7], während der Beweis von 1.16 in Verbindung mit 0.12 und analog zu Satz 4.1 in [20] "straightforward" ist.

### C. Eine (6,2) FAH-Ebene des Typs 3

Wenngleich wir bislang den Stufenbau von FAH-, AH- und PH-Ebenen unter gemeinsamen Gesichtspunkten betrachtet haben, so sind doch erhebliche Unterschiede hinsichtlich des jeweiligen Stufenaufbaus zu erkennen. Dies soll im folgenden durch die Analyse von (6,2) H-Ebenen präzisiert werden, was im wesentlichen in [38] zu finden ist.

Bislang ist die Existenz von (6,2) PH-Ebenen bzw. AH-Ebenen noch ungeklärt, während DRAKE in [12] bzw. DRAKE/HALE [19] (6,2) FAH-Ebenen angegeben haben. Der äußerst mühsame Vergleich auf Isomorphie wurde bisher noch nicht durchgeführt. Auch ist nicht unmittelbar ersichtlich, von welchem Typ diese genannten H-Ebenen sind. Daher werden wir im folgenden eine (gegebenenfalls weitere) (6,2) FAH-Ebenen angeben, deren Typ durch die Konstruktion unmittelbar zu erkennen ist.

Daß das Existenzproblem für (6,2) PH-Ebenen bisher offen ist, mag durch den folgenden Satz verständlich gemacht werden:

1.18 Satz: Jede (6,2) PH-Ebene ist einfach.

Für den Beweis benötigen wir folgende Überlegungen, die wir als Hilfssatz formulieren:

1.19 Lemma: Es sei  $\mathcal{H}$  eine  $(t,r)$  H-Ebene und  $\tau$  eine Kongruenzrelation von  $\mathcal{H}$  mit der Invarianten  $u$ . Ist  $n$  die minimale Verbindungszahl benachbarter Punkte, so folgt aus  $[P,Q] \geq t+n+1-un$  stets  $P\tau Q$ .

Beweis: Es seien  $P, Q \in g$  und  $\tau(P\tau Q)$ . Ist ferner  $g \not\sim h \ni Q$ , so sind alle zu  $Q$   $\tau$ -benachbarten Punkte auf  $h$  durch zu  $g$  benachbarte Geraden  $k$  mit  $P$  verbindbar, d.h.  $[P,Q] + (u-1)n \leq t$ , also

$[P,Q] \geq t+n+1-un$  impliziert  $P\tau Q$ .

Beweis von 1.18. Nach [13, 3.2] gibt es keine (3,2) PH-Ebenen. Wäre  $\mathcal{H}$  (6,2) PH-Ebene vom Typ 3, so erhielten wir als Stufenparameter  $q_2 = 2, q_3 = 3$ . Aus  $q_3 = 3$  und 1.4 folgt, daß  $[P]_{\sim 2}$  affine Ebene der Ordnung 3 ist. Daher gibt es eine Gerade  $g \ni P$ , so daß für alle Geraden  $h \ni P, h \sim g$  gilt:  $X \in g, P(\sim 2)X \Rightarrow X \in h$ . Insbesondere existieren Geraden  $g(\sim 1)h$  mit  $|g \cap h| \geq 3$ , was mit der dualen Fassung von 1.19 zu einem Widerspruch führt.

1.20 Satz: Es existiert eine (6,2) FAH-Ebene des Typs 3.

Beweis: Wir gehen von der Inzidenzmatrix M einer (2,2) FAH-Ebene  $\mathcal{E}$  aus.  
(Punkte werden durch Zeilen, Geraden durch Spalten repräsentiert.)

1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1				1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1		1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1		
	1 1 1 1 1 1		1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1	
		1 1 1 1 1 1		1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1

Analog zu [20] bilden wir mit Hilfe einer affinen Ebene der Ordnung 3 vier symmetrische  $9 \times 9 - (0,1)$  - Matrizen A,B,C,D, wobei gelten:

$$AB = AC = AD = BC = CD = J,$$

$$A^2 = 3A, B^2 = 3B, C^2 = 3C, D^2 = 3D, A+B+C+D \geq J$$

(Mit J bezeichnen wir die Matrix, die an jeder Stelle den Eintrag 1 hat.)



Durch direkte Überprüfung und mit Hilfe von Satz 1.16 folgt, daß die konstruierte Matrix  $M'$  Inzidenzmatrix einer  $(6,2)$  FAH-Ebene des Typs 3 ist.

Daß diese angegebene Ebene keine AH-Ebene des Typs 3 sein kann, also keinen mit den Kongruenzrelationen verträglichen Parallelismus besitzen kann, wird durch das Spaltenprodukt  $A^2+B^2+C^2+D^2$  ( $\geq 3J$ ) belegt. Somit schneiden sich je zwei ( $\approx 2$ )-benachbarte Geraden stets in genau drei Punkten. Mehr noch - und dies gilt für alle  $(6,2)$  FAH-Ebenen des Typs 3:

1.21 Satz: Jede  $(6,2)$  FAH-Ebene  $\mathcal{E}$  des Typs 3 besitzt keinen Parallelismus.

Als Folgerung aus 1.21 erhalten wir unmittelbar:

1.22 Folgerung: Jede  $(6,2)$  AH-Ebene ist einfach, was als Indiz für die Schwierigkeit des Existenzproblems angesehen werden kann.

Den Beweis von Satz 1.21 zerlegen wir in kleinere Abschnitte und beweisen zunächst:

1.23 Lemma: Benachbarte Geraden einer  $(6,2)$  FAH-Ebene des Typs 3 schneiden sich nie in genau vier Punkten.

Beweis: gegenteilige Annahme: Es sei  $g \cap h = \{P_1, P_4, P_5, P_6\}$  mit  $P_1 (\approx 1) P_4 (\approx 2) P_5 (\approx 2) P_6 (\approx 2) P_4$ . Die mittlere Verbindungszahl ( $\approx 1$ )-benachbarter Punkte ist nach 1.9

$$\lambda_1 = \frac{(r+1) q_2}{q_2 + 1} = 2$$

Daher haben je zwei ( $\approx 1$ )-benachbarte Punkte genau zwei Verbindungsgeraden. Ist  $Q \in h \setminus g \cap h$ ,  $Q \sim P_1$ , so gibt es eine Gerade  $k \neq g, h$  mit  $P, Q \in k$ , die  $g$  in mindestens einem der Punkte  $P_4, P_5, P_6$  schneidet. Dies widerspricht  $\lambda_1 = 2$ .

1.24 Lemma: Es sei  $\mathcal{E}$  eine  $(6,2)$  FAH-Ebene des Typs 3. Dann gibt es zu jedem Punkt  $P$  Geraden  $g, h$  mit

$$(7) P \in g, h, g (\approx 1) h \text{ und } |h' \cap g'| = |h \cap g \cap [P]_{\sim 2}| = 1.$$

Beweis: Da die nach  $[P]_{\sim 2}$  induzierte Struktur eine affine Ebene der Ordnung 3 ist, gibt es benachbarte Geraden  $g, h$   $P$  mit  $|g' \cap h'| = 1$ . Es sei  $g (\approx 2) h$ . Wegen  $q_3 = 3$  inzidiert eine weitere Gerade  $k (\approx 2) g$  mit  $P$ . O.B.d.A.  $g' = k'$ . Zu einem Punkt  $Q \in h$ ,  $Q (\approx 2) P$  muß es eine Gerade  $l \neq h$  mit  $P, Q \in l$  geben; also ist  $l (\approx 1) g$ , was Lemma 1.24 beweist.

1.25 Lemma: Es sei  $\mathcal{E}$  eine (6,2) FAH-Ebene des Typs 3. Genügen  $P, g, h$  (7), so gilt: Jede zu  $g(\simeq 2)$ -benachbarte Gerade  $k$  schneidet  $g$  in genau drei Punkten.

Beweis: Wir setzen:  $\mu_2(g) = |\{l \mid l(\simeq 2)g \text{ und } g \cap l = \emptyset\}|$

Dann ist die mittlere Schnittzahl für zug ( $\simeq 2$ )-benachbarte Geraden mit  $g$ :

$$n_2(g) = \frac{rt(q_3 - 1)}{q_3^2 - \mu_2(g) - 1}$$

d.h.  $(q_3^2 - \mu_2(g) - 1) n_2(g) = 24$ . Andererseits gilt:  $24 = 2n_2 + 3n_3 + 6n_6$ . Dabei ist  $n_i$  die Anzahl der zu  $g(\simeq 2)$ -benachbarten Geraden mit genau  $i$  Schnittpunkten mit  $g$ . Offensichtlich ist wegen  $\lambda_1 = 2$  stets  $n_6 \leq 2$ . Da nach Voraussetzung eine Gerade  $h \ni P$  mit  $|h \cap g| = 1$  existiert, kann wegen  $\lambda_1 = 2$  keine Gerade durch  $P$  mit 6 Punkten von  $g$  inzidieren, d.h.  $n_6 \leq 1$ .

Annahme:  $n_6 = 1$ , also  $2n_2 + 3n_3 = 18$  mit  $n_2 + n_3 \leq 7$ . Als ganzzahlige Lösungen unter dieser Nebenbedingung erhalten wir:  $n_2 = 3, n_3 = 4, \mu_2(g) = 0$  bzw.  $n_2 = 0, n_3 = 6, \mu_2(g) = 1$ .

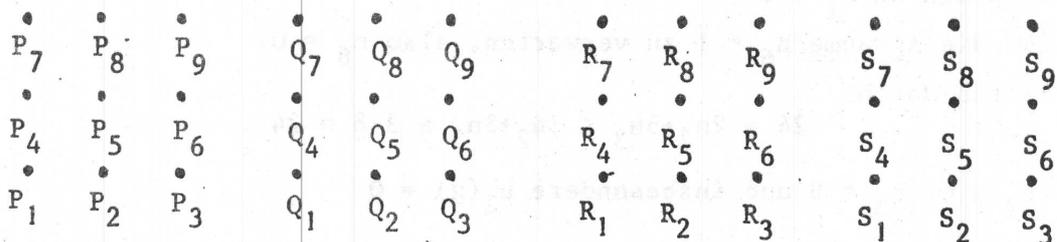
Fall 1:  $n_2 = 3, n_3 = 4, \mu_2(g) = 0$ .

Wir setzen  $g = g_1$  und  $P_1 (\simeq 1)Q_1 \neq R_1 (\simeq 1)S_1 \in g_1$ . Zu  $P_1$  seien die Punkte  $P_2, \dots, P_9 (\simeq 2)$ -benachbart, zu  $Q_1$  die Punkte  $Q_2, \dots, Q_9$ , zu  $S_1$  die Punkte  $S_2, \dots, S_9$ . Die Gerade  $g_1$  inzidiere mit  $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3, S_1, S_2, S_3$ . Ferner schneide die Gerade  $h$  mit  $|g_1 \cap h| = 6$  in der Nachbarschaft von  $R_1$ . Wegen  $\lambda_1 = 2$  schneiden keine ( $\simeq 2$ )-benachbarte Geraden in der Nachbarschaft von  $R_1$  die Gerade  $g$  in genau zwei Punkten. O.B.d.A. setzen wir daher:

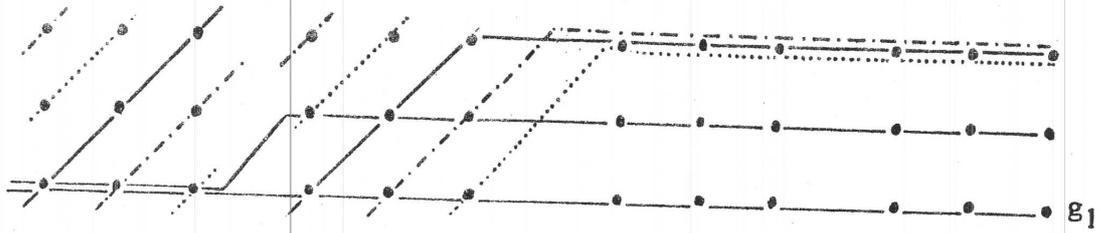
$P_1, P_5, P_9, Q_1, Q_5, Q_9 \in g_2, P_2, P_6, P_7, Q_2, Q_6, Q_7 \in g_3, P_3, P_4, P_8, Q_3, Q_4, Q_8 \in g_4$

Auf  $g_5$  mit  $|g_5 \cap g_1| = 3$  liegen o.B.d.A. die Punkte  $P_1, P_2, P_3,$

$Q_4, Q_5, Q_6, R_4, R_5, R_6, S_4, S_5, S_6$ . Dann folgt  $R_7, R_8, R_9, S_7, S_8, S_9 \in g_2, g_3, g_4$ , was  $\lambda_1 = 2$  widerspricht.



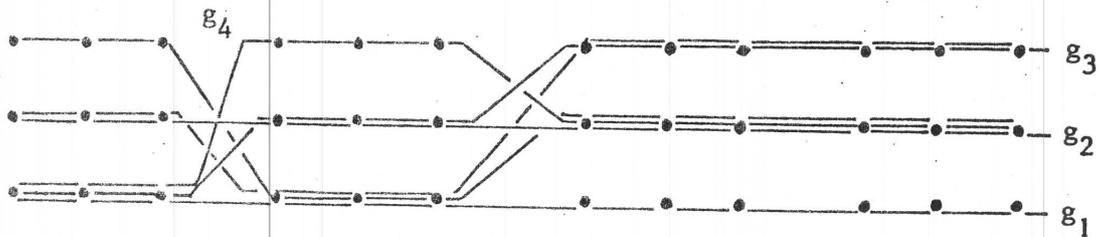
- Fig. 1 -



- Fig. 2 -

Fall 2;  $n_2 = 0, n_3 = 6$

Wegen  $n_2 + n_3 + 1 = 7$  existiert eine Gerade  $g_2 (\simeq 2) g_1$  mit  $g_2 \cap g_1 = \emptyset$ .



- Fig. 3 -

Es sei  $\{P_4, \dots, P_6, \dots, S_4, \dots, S_6\} = g_2$ . Da nach Voraussetzung eine Gerade  $h (\simeq 1) g_1$  mit  $|g_1 \cap h| = 2$  existiert, können sich wegen  $\lambda_1 = 2$  keine  $(\simeq 2)$ -Geraden, die zu  $g$   $(\simeq 2)$ -benachbart sind, in der Nachbarschaft von  $P_1$  in sechs Punkten schneiden. Wir setzen o.B.d.A.

$$g_3 = \{P_1, P_2, P_3, Q_4, Q_5, Q_6, R_7, R_8, R_9, S_7, S_8, S_9\}$$

$$g_4 = \{P_1, P_2, P_3, Q_7, Q_8, Q_9, R_4, R_5, R_6, S_4, S_5, S_6\}$$

$$g_5 = \{P_4, P_5, P_6, Q_1, Q_2, Q_3, R_7, R_8, R_9, S_7, S_8, S_9\}$$

für  $g_6 (\simeq 2) g_1$  mit  $P_7, P_8, P_9, Q_1, Q_2, Q_3 \in g_6$  folgt dann  $R_4, Q_4 \in g_6, g_2, g_4$ , im Widerspruch zu  $\lambda_1 = 2$ .

Daher ist die Annahme  $n_6 = 1$  zu verwerfen, also  $n_6 = 0$ .

Wir erhalten durch

$$24 = 2n_2 + 3n_3 \leq 3n_2 + 3n_3 \leq 3 \cdot 8 = 24$$

sofort  $n_2 = 0, n_3 = 8$  und insbesondere  $\mu_2(g) = 0$

1.26 Folgerungen: 1. Unter den Voraussetzungen von Lemma 1.25 folgt aus

$$|g'nh'| = 1 \text{ und } g \sim h \text{ stets } g(\simeq 1)h.$$

2. Besitzt  $\mathcal{H}$  als (6,2) FAH-Ebenen vom Typ 3 einen Parallelismus, so sind die Parallelen zu einer Geraden  $g$  mit (7) stets ( $\simeq 1$ )-benachbart zu  $g$ , so daß  $\mathcal{H}$  keine AH-Ebene vom Typ 3 sein kann. Parallelen zu  $g$  durch Punkte, die zu  $P$  ( $\simeq 2$ )-benachbart sind, sind zu sämtlichen Punkten  $P_i \in g$ ,  $P_i \sim P$  ( $\simeq 2$ )-benachbart, zu Punkten  $Q_i \in g$ ,  $Q_i \sim Q \in g$ ,  $Q \neq P$  immer ( $\simeq 1$ )-benachbart.

Mit Lemma 1.25 und Folgerungen 1 und 2 können wir nun den Beweis von Satz 1.21 führen.

Beweis von 1.21: Annahme: Die FAH-Ebene  $\mathcal{H}$  des Typs 3 besitze einen Parallelismus. Analog wie in Lemma 1.25 numerieren wir die Punkte, wobei wir wegen Lemma 1.24 einen Punkt  $P$  und Geraden  $g, h$  mit (7) betrachten können. Es sei  $g = g_1$  und  $h = h_1 \ni P_1, P_5, P_9$ . Nun ist wegen Folgerung 2 die Parallele  $k_1$  durch  $P_5$  zu  $g_1$  ( $\simeq 1$ )-benachbart. Ferner sind  $P_5R_1 = l_1$ ,  $P_5S_1$  zwei Geraden durch  $P_5$ , die zu  $h_1$  ( $\simeq 1$ )-benachbart sind. Aus  $q_2 = 2$  erhalten wir  $k_1(\simeq 2)l_1(\simeq 2)l_2(\simeq 2)k_1$ . Seien  $l_3, l_4$  zu  $g_1$  ( $\simeq 2$ )-benachbarte Geraden mit  $l_3 \cap g_1 = l_4 \cap g_1 = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ . Da jede der Geraden  $l_3, l_4$  mit  $h_1$  in  $[P_1]_{\simeq 2}$  genau einen Punkt gemeinsam hat, folgt mit 1.25 nun  $l_2 \cap l_4 = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ , so daß eine weitere Gerade, o.B.d.A. etwa  $l_3$ , mit  $P_5$  inzidiert und zu  $k_1$  ( $\simeq 2$ )-benachbart ist. Widerspruch zu  $q_3 = 3$  und 0.10.

2. Stufenparameter  $q_i = r$  und  $(r^{n-1}, r)$  H-Ebenen des Typs

Ausgehend von den von CRAIG [7] bzw. LÜNEBURG [31] untersuchten uniformen H-Ebenen wurden von ARTMANN [1,2] und DRAKE [11] 1969/1970 unabhängig voneinander zwei Klassen rekursiv definierter H-Ebenen eingeführt bzw. konstruiert: die H-Ebenen mit verfeinerten Nachbarschaften bzw. die  $n$ -uniformen H-Ebenen.

Nach unserer Terminologie handelt es sich dabei um die Angabe einer Auflösung beliebiger Länge, wobei die jeweils neu konstruierte H-Ebene einfache Erweiterung der vorhergehenden ist und der Stufenparameter stets gleich der Ordnung der kanonischen Faktorstruktur, nämlich  $r$  ist.

Dieser - kleinstmögliche - Stufenparameter spielt überdies für Verallgemeinerungen der ARTMANN/DRAKE'schen H-Ebenen eine entscheidende zentrale Rolle. Außerdem gestattet er anschaulich geometrische Konsequenzen in den zugehörigen Ebenen. Dies soll im folgenden näher untersucht werden, wodurch auch die Zusammenhänge von verschiedenen Varianten, Abschwächungen und Verallgemeinerungen der H-Ebenen mit verfeinerten Nachbarschaften als auch der  $n$ -uniformen H-Ebenen klarer werden.

A. Stufenparameter  $q_i = r$

Im folgenden sei  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_n$  eine  $(t, r)$  H-Ebene des Typs  $n$ ,  $u_{n-1}$  die Invariante der Kongruenzrelation  $(\sim_{n-1})$  und  $q = q_n (= u_{n-1})$   $n$ -ter Stufenparameter.

2.1 Lemma: Für eine Kongruenzrelation  $(\sim_{n-1})$  sind die folgenden Aussagen

äquivalent: (a)  $q_n = r$

(b) Die Kongruenzrelation  $(\sim_{n-1})$  genügt der Bedingung [1, Def. 4]

(M)a) Aus  $P, Q \in g, P \in h, P(\sim_{n-1})Q, g \sim h$  folgt  $Q \in h$ .

Beweis: (a)  $\Rightarrow$  (b)

Wegen  $|\{P\}_{\sim_{n-1}}| = r^2 = (r+1)(r-1)+1$  inzidieren benachbarte Geraden  $g, h \ni P$  in  $\{P\}_{\sim_{n-1}}$  in  $r$  Punkten, d.h. (M)a) ist erfüllt.

(b)  $\Rightarrow$  (a)

Aus  $|\{P\}_{\sim_{n-1}}| = q_n^2 = (r+1)(q_n-1)+1$  folgt unmittelbar (a).

Die Bedingung (M)a) ist Bestandteil der Definition einer minimalen Nachbarschaft [1, Def. 4]. Somit induziert eine minimale Nachbarschaft als Kongruenzrelation (1.1) für jeden Punkt den kleinsten Nachbarschaftsbereich. Eine minimale Nachbarschaft ist daher die kleinste Kongruenzrelation

in einer H-Ebene, nicht jedoch umgekehrt.

Zusätzlich zu der Bedingung (M)a) benutzte ARTMANN zur Definition der H-Ebenen der Höhe  $n$  [1, Def. 5] die dazu duale Bedingung

(M)b) Aus  $P, Q \in g, P \in h, P \sim Q, g \sim^{n-1} h$  folgt  $Q \in h$ .

Für PH-Ebenen erhalten wir aus Dualitätsgründen sofort:

2.2 Lemma: Es sei  $(\sim^{n-1})$  Kongruenzrelation einer  $(t, r)$  PH-Ebene des Typs  $n$ . Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a)  $q_n = r$
- (b) Die Kongruenzrelation  $(\sim^{n-1})$  genügt der Bedingung (M)a).
- (c) Die Kongruenzrelation  $(\sim^{n-1})$  genügt der Bedingung (M)b).

Im fastaffinen Fall ist die Bedingung (M)b) allerdings von der Existenz genügend vieler nicht schneidender Geraden abhängig.

2.3 Lemma: Es sei  $\mathcal{E}$  eine  $(t, r)$  FAH-Ebene des Typs  $n$ ,  $q_n = r$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) Für alle Geraden  $g$  gibt es eine Gerade  $h \sim^{n-1} g$  mit  $|g \cap h| = 0$
- (b) Die Kongruenzrelation  $(\sim^{n-1})$  genügt der Bedingung (M)b).
- (c) Aus  $P \in (\sim^{n-1})g$  folgt:

$$|\{h \in P \mid |g \cap h| = 0, g \sim^{n-1} h\}| = 1$$

Beweis: (a)  $\Rightarrow$  (b)

gegenteilige Annahme: Es gibt Geraden  $g, h$  mit  $g \sim^{n-1} h, |g \cap h| < t$ . Sei  $P \in g \cap h, Q \in g \setminus h, Q \sim P$  und  $R \in g, R \not\sim P, k \in R, k \not\sim g$ . Auf der Geraden  $h$  wählen wir  $r-1$  paarweise nicht benachbarte Punkte von  $P$  und verbinden mit  $Q$ . Diese Geraden schneiden  $k$  in  $r-1$  zu  $R \sim^{n-1}$ -benachbarte Punkten. Die restlichen  $r-2$  Geraden durch  $P$ , die zu  $g \sim^{n-1}$ -benachbart sind, können daher nicht mit  $Q$  inzidieren. Daher gibt es mindestens

$$r-1+r-1 \quad (r-1)(r-1)+2 = r^2+1,$$

was im Widerspruch zu  $|[g]_{\sim^{n-1}}| = r^2$  steht.

(b)  $\Rightarrow$  (c)

Sei  $P \in (\sim^{n-1})g$ . Da  $P$  mit genau  $r$  Geraden, die zu  $g \sim^{n-1}$  benachbart sind, inzidiert, folgt unmittelbar (c).

(c)  $\Rightarrow$  (a) offensichtlich

2.4 Korollar: In einer AH-Ebene sind die Eigenschaften (M)a) und (M)b) äquivalente Bedingungen an eine Kongruenzrelation.

Beweis: Aus (M)a) folgt mit 2.1  $q_n = r$  und wegen 2.3 erhält man somit (M)b). Setzen wir umgekehrt (M)b) voraus, so ergibt sich durch Abzählen unter Beachtung, daß zu jeder Geraden  $g$  stets  $h (\approx n-1)g$  mit  $h \cap g = \emptyset$  existiert,

$$r(q-1) + (q-1) = q^2 - 1,$$

also  $r = q_n$ . Aus 2.1 folgt (M)a).

Da die Kongruenzrelationen gerade die Kerne von H-Epimorphismen sind, ist die folgende geometrische Charakterisierung des Stufenparameters  $q_{i+1} = r$  als Verallgemeinerung von 2.1 sofort ersichtlich.

2.5 Korollar: Für eine Kongruenzrelation  $(\sim_i)$  einer  $(t,r)$  H-Ebene des Typs  $n$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $q_{i+1} = r$
- (b) Aus  $P(\sim_i)Q, P, Q \in g, P \in h, g \sim h$  folgt  $Q(\sim_{i+1})h$
- (c) Die Kongruenzrelation  $(\sim_i)$  in  $\mathcal{A}/\sim_{i+1}$  genügt der Bedingung (M)a).

Die 2.5(b) erwähnte Eigenschaft wurde zuerst von DRAKE [11] in  $n$ -uniformen H-Ebenen festgestellt, in unserem Zusammenhang bezeichnet allerdings  $(\sim_i)$  (im Gegensatz zu den  $n$ -uniformen H-Ebenen) eine beliebige Kongruenzrelation einer H-Ebene.

Ferner erhält man unmittelbar für FAH-Ebenen:

2.6 Korollar: Es sei  $\mathcal{A}$  eine  $(t,r)$  FAH-Ebene des Typs  $n$ ,  $q_{i+1} = r$ .

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) Durch jeden Punkt  $P(\sim_i)g$  gibt es eine Gerade  $h(\sim_i)g$ , so daß für alle  $X \in h : X(\sim_i)g$ .
- (b) Die Kongruenzrelation  $(\sim_i)$  in  $\mathcal{A}/\sim_{i+1}$  genügt der Bedingung (M)b).

B. H-Ebenen der Höhe  $n$ , "Property A" und das Axiom reziproker Strecken

Während wir im 1. Abschnitt lediglich einige Eigenschaften einer H-Ebene aufgezeigt haben, die aus der Tatsache folgen, daß ein Stufenparameter gleich der Ordnung  $r$  der Faktorstruktur, d.h. der zugehörigen projektiven bzw. affinen Ebene, ist, beschäftigen wir uns nun mit H-Ebenen, deren sämtliche Stufenparameter  $q_i$  gleich  $r$  sind.

In unserer Terminologie lautet die Definition einer H-Ebene der Höhe  $n$ , die man bei ARTMANN [1, Def. 5] für den projektiven Fall, bei DRAKE [15, Def. 17] für den fastaffinen bzw. affinen Fall findet, wie folgt:

**2.7 Def.:** Eine H-Ebene  $\mathcal{E}$  des Typs  $n$  heißt H-Ebene der Höhe  $n$ , falls die Kongruenzrelation  $(\sim_i)$  in den epimorphen Bildern  $\mathcal{E}/\sim_{i+1}$  den Bedingungen (M)a) und (M)b) genügen.

Als unmittelbare Folgerung aus 2.4 und 2.5 ergibt sich der folgende Satz:

**2.8 Satz:** Für eine  $(t,r)$  AH-/PH-Ebene  $\mathcal{E}$  des Typs  $n$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

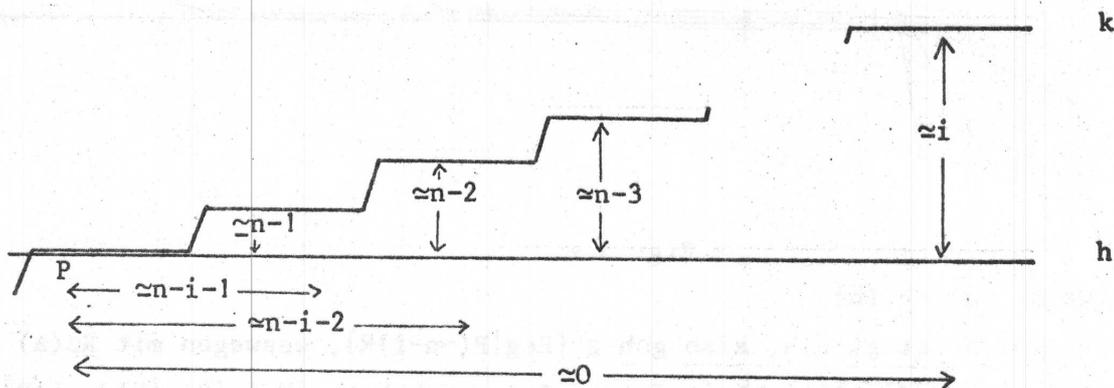
- (a)  $\mathcal{E}$  ist eine H-Ebene der Höhe  $n$ .
- (b)  $t = r^{n-1}$ .

Wir erinnern ferner an eine Eigenschaft "Property A", die DRAKE [11] zur Definition von stark  $n$ -uniformen Ebenen benutzte. In unserer Terminologie lautet diese Bedingung für beliebige Kongruenzrelationen einer H-Ebene des Typs, wobei man [14, Prop. 1.10.9] beachte:

**2.9 Def.:** Eine H-Ebene  $\mathcal{E}$  des Typs genügt der Bedingung "Property A", falls für alle Kongruenzrelationen  $(\sim_i), (\sim_j)$  ( $i+j < n$ ) gilt:

$$P \sim_i h, h \sim_k = \{R \in h \mid R(\sim_{n-i})P\}, Q \in h \setminus k,$$

$$P(\sim_j)Q \Rightarrow Q(\sim_{i+j})k$$



- Fig. 4 -

Schließlich erwähnen wir noch das von ARTMANN zur Definition H-Ebenen n-ter Stufe benutzte Axiom RS "reziproker Strecken."

Die ursprüngliche Definition [1, S. 175] bzw. [15, Def. 18] für H-Ebenen der Höhe n modifizieren wir für H-Ebenen des Typs n:

2.10 Def.: Eine H-Ebene  $\mathcal{H}$  des Typs n genügt dem Axiom RS "reziproker Strecken", falls  $\mathcal{H}$  folgende Eigenschaften besitzt:

RS(a) Für alle Geraden  $g, h$  von  $\mathcal{H}$  mit  $|gnh| > 0$  ist die Punktmenge  $gnh$  ein Segment (für ein  $k$  mit  $0 \leq i \leq n$ ).

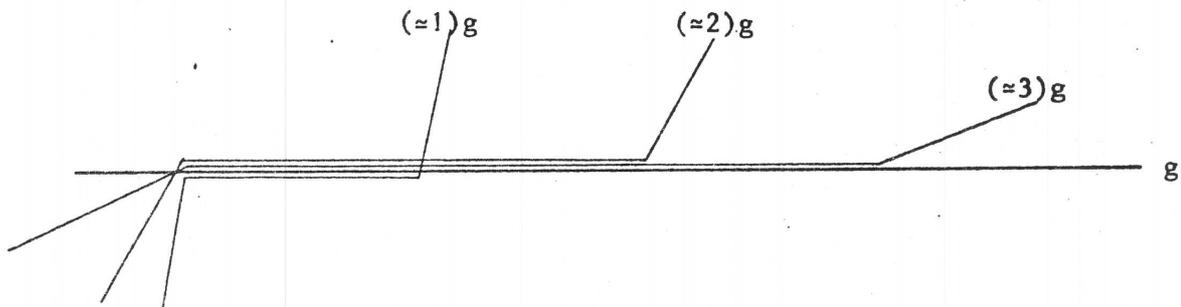
RS(b) Falls  $|gnh| > 0$ , so gilt  $g(\sim i)h$  genau dann, wenn  $g$  und  $h$  ein  $(n-i)$ -Segment gemeinsam haben ( $0 \leq i \leq n$ ).

Unter einem i-Segment verstehen wir (in naheliegender Weise) den nicht-leeren Durchschnitt einer Geraden mit einer Klasse  $(\sim i)$ -benachbarter Punkte.

Wir formulieren RS wie folgt um:

2.11 Lemma: Für eine H-Ebene  $\mathcal{H}$  des Typs n sind die folgenden Aussagen äquivalent;

- (a)  $\mathcal{H}$  genügt dem Axiom RS.
- (b) Für Geraden  $g, h$  mit  $gnh \neq \emptyset$ ,  $P \in gnh$  gilt:  
 $g(\approx i)h \Leftrightarrow gnh = \{R \in g | P(\sim n-i)R\}$



- Fig. 5 -

Beweis: (a)  $\Rightarrow$  (b)

Mit  $g(\approx i)h$  ist  $g(\sim i)h$ , also  $gnh \supseteq \{R \in g | P(\sim n-i)R\}$ , weswegen mit RS(a) und RS(b) sofort die Gleichheit folgt. Ist umgekehrt  $gnh = \{R \in g | P(\sim n-i)R\}$ , so ist sicher  $g(\sim i)h$ .  $g(\sim i+1)h$  hätte mit RS(b)  $\{R \in g | P(\sim n-i-1)R\} \subseteq gnh$  zur Folge, was  $g(\approx i)h$  beweist.

(b)  $\Rightarrow$  (a) Offensichtlich mit RS(a) erfüllt. Sei  $g(\sim i)h$  und  $g(\approx j)h$  mit  $i \geq j$ . so folgt

$$g \cap h = \{R \in g \mid P(\sim n-j)R\},$$

insbesondere also  $\{R \in g \mid P(\sim n-j)R\} \subseteq g \cap h$ . Entsprechend zeigt man die Umkehrung.

Schließlich können wir mit Hilfe von 2.11 die duale Aussage 2.11.b als zu RS äquivalent nachweisen.

2.12 Lemma: Für eine H-Ebene  $\mathcal{H}$  des Typs  $n$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) Für Geraden  $g, h$  mit  $g \cap h \neq \emptyset$ ,  $P \in g \cap h$  und alle Kongruenzrelationen  $(\sim i)$  gilt:  $g(\sim i)h \Leftrightarrow g \cap h = \{R \in g \mid P(\sim n-i)R\}$ .
- (b) Für Punkte  $P, Q \in g$  und alle Kongruenzrelationen  $(\sim i)$  gilt:  $P(\sim i)Q \Leftrightarrow \langle P, Q \rangle = \{h \mid P \in h(\sim n-i)g\}$ .

Der Beweis bleibe dem Leser überlassen.

Nach diesen beweistechnischen Umformungen des Axiom RS können wir nun die Beziehung zu der von DRAKE benutzten Eigenschaft "Property A" herstellen: die unterschiedlichen Bedingungen charakterisieren ein und dieselbe Klasse von H-Ebenen des Typs  $n$ .

Zunächst erhalten wir folgende numerische Bedingung aus dem Erfülltsein von Axiom RS:

2.13 Lemma: Es sei  $\mathcal{H}$  eine  $(t, r)$  H-Ebene des Typs  $n$  und  $\mathcal{H}$  genüge dem Axiom RS. Dann gilt:  $t = r^{n-1}$ .

Beweis: Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion, in dem wir zeigen:  $q_{n-i} = r = q_{i+2}$ .

Dabei nehmen wir stets Bezug auf die durchschnittlichen Verbindungszahlen  $(\sim i)$ -benachbarter Punkte aufgrund von 2.11 und 2.12(b).

$$i = 0. \quad \lambda_{n-1} = \frac{(r+1) q_2 \dots q_n}{1+q_n} = q_2 \dots q_n, \text{ also } q_n = r$$

$$\lambda_1 = \frac{(r+1) q_2}{1+q_2} = q_n = r, \text{ also } q_2 = r.$$

Es sei bereits bewiesen:  $q_2 = \dots = q_i = r$ ,  $q_n = \dots = q_{n-i+2} = r$  und  $i+1 \leq n-i+2$  angenommen.

$$\lambda_{n-1} = \frac{(r+1)q_2 \cdots q_{n-i+1}}{1+q_{n-i+1}} = q_{i+1} \cdots q_n$$

$$= \frac{(r+1)r^{i-1} q_{i+1} \cdots q_{n-i+1}}{1+q_{n-i+1}} = q_{i+1} \cdots q_{n-i+1} r^{i-1}$$

d.h.  $q_{n-i+1} = r$ .

Entsprechend erhält man:  $q_{i+1} = r$ , was 2.13 beweist.

Ist in 2.9  $j = 0$ , so folgt unmittelbar für  $h \cap k \neq \emptyset$  und  $P \in h \cap k$ :

$$h(\approx i)k \Leftrightarrow h \cap k = \{R \in h \cap R(\sim n-i)P\}.$$

Somit genügt eine H-Ebene mit "Property A" auch dem Axiom RS; mehr noch, es gilt:

2.14 Satz: Für eine H-Ebene  $\mathcal{H}$  des Typs  $n$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $\mathcal{H}$  genügt dem Axiom RS
- (b)  $\mathcal{H}$  genügt "Property A".

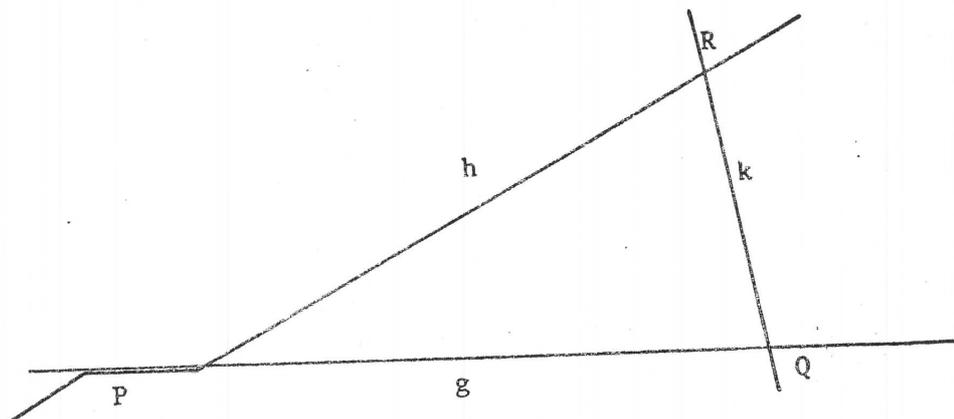
Beweis: Aufgrund der obigen Bemerkung können wir uns auf den Fall (a)  $\Rightarrow$  (b) beschränken.

Wegen 2.13 ist  $\mathcal{H}$  eine  $(r^{n-1}, r)$  H-Ebene.

Mittels vollständiger Induktion über  $j$  beweisen wir für  $i \leq j$  die Aussagen

- (1)  $Q(\approx j)R, P(\approx j-i)Q \Rightarrow |g \cap h| = r^i$
- (2)  $|g \cap h| = r^i, P(\approx j-i)Q \Rightarrow Q(\approx j)R$ .

Dabei sei stets  $P, Q \in g, P, R \in h, Q, R \in k, g \neq k \neq h$ .



- Fig. 6 -

Im Fall  $i = j$  folgt (1) und (2) unmittelbar aus RS, während für  $i = 0$  die Aussagen (1) und (2) aufgrund von 2.5(b) erfüllt sind.

Insbesondere ist daher (1) und (2) für  $j = 1$  richtig.

Wir nehmen nun an, (1) und (2) seien für  $j' \leq j-1$  bewiesen, ferner sei  $Q(\simeq j)R$ .

Wir setzen:  $j-i = v$

$$\mathcal{M}_v = \{X \in g \mid X(\simeq v)Q\}$$

$$\mathcal{N}_v = \{h \in R \mid \exists X \in \mathcal{M}_v, X \in h\}$$

und  $s_v = |\mathcal{N}_v|$

Wir behaupten:  $h \in \mathcal{N}_v \Rightarrow h(\simeq j-v)g$ .

Sei  $v_1$  kleinstes Gegenbeispiel, also

$$(3) \quad h \in \mathcal{N}_{v_1} \text{ und } \neg(h(\simeq j-v_1)g)$$

Ist  $v < v_1$ ,  $h \in \mathcal{N}_v$ , also  $h(\simeq j-v)g$ , d.h.  $|g \cap h| = r^{j-v}$

insbesondere nach Voraussetzung  $g \cap h = \{Y \mid Y(\simeq n-j+v)P\}$

Auf der Geraden  $g$  gibt es  $r^{n-v} - r^{n-v-1}$  Punkte  $(\simeq v)Q$ . Jede Gerade  $h \in X, R$  überdeckt ein  $(n-j+v)$ -Segment, ferner gibt es aufgrund von 2.12 stets  $r^v$  Verbindungsgeraden, d.h.  $s_v = r^{n-j+v} - r^{n-j+v-1}$ , was schließlich

$$h(\simeq j-v)g \Rightarrow h \in \mathcal{N}_v \text{ für } v < v_1 \text{ beweist.}$$

Ist  $h$  eine Gerade gemäß (3), so gibt es  $\mu > v_1$ , so daß  $h(\simeq j-\mu)$  gilt.

Also ist  $|g \cap h| = r^{j-\mu}$  und  $P(\simeq)(j-\mu+v_1)-(j-\mu)Q$ . Wegen  $j-\mu < j+v_1-\mu < j$  folgt nach Induktionsvoraussetzung über (2)  $R(\simeq j-\mu+v_1)Q$ , im Widerspruch zur Voraussetzung.

Ferner gilt:

$$h \in \mathcal{N}_v \Leftrightarrow h(\simeq j-v)g \Leftrightarrow h(\simeq i)g$$

Um (2) zu beweisen, gehen wir wie folgt vor.

$P$  inzidiert wegen (1) mit  $r^{j-i}$  Geraden  $h \in \mathcal{N}_v$ , also  $h(\simeq i)g$ , die durch  $R$  gehen. Entsprechendes gilt für sämtliche  $r^{n-j} - r^{n-j-1}$  Punkte  $R(\simeq j)Q$ .

Andererseits gibt es genau  $r^{n-i} - r^{n-i-1}$  Geraden  $h \ni P$  mit  $g(\simeq i)h$ , wodurch (2) bewiesen ist.

### C. H-Ebenen n-ter Stufe

Mit den im vorigen Kapitel erzielten Ergebnissen läßt sich nun auch der von ARTMANN gebrauchte Begriff einer H-Ebene n-ter Stufe als gleichwertig mit den anderen Begriffsbildungen nachweisen:

2.15 Def.: Eine H-Ebene  $\mathcal{H}$  heißt H-Ebene n-ter Stufe, falls  $\mathcal{H}$  H-Ebene der Höhe n ist und sämtliche epimorphen Bilder dem Axiom RS genügen.

Mit Hilfe von Satz 2.14 erhalten wir das folgende Lemma:

2.16 Lemma: Gilt in einer H-Ebene  $\mathcal{H}$  des Typs n das Axiom RS, so genügen auch sämtliche epimorphen Bilder von  $\mathcal{H}$  dem Axiom RS.

Beweis: Es sei  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n$ ,  $\psi = \psi_{n-1}$  und  $\mathcal{H}_{n-1} = \psi(\mathcal{H}_n)$ , d.h.

$\tau_{\psi_{n-1}} = (\sim_{n-1})$ . Es ist hinreichend, in  $\mathcal{H}_{n-1}$  die Gültigkeit des

Axioms RS nachzuweisen. Wie in 2.11(b) sei  $\psi(P) \in \psi(g) \cap \psi(h)$ . Mit

$\psi(g) (\sim_i) \psi(h)$  und  $g \cap h \neq \emptyset$  erhält man aus 2.14 offensichtlich

$\psi(g) \cap \psi(h) = \{X \in \psi(g) \mid X (\sim_{n-1}) (\sim_i) \psi(P)\}$ . Ist dagegen  $g \cap h = \emptyset$ , so gibt

es  $A \in g$ ,  $B \in h$  mit  $A (\sim_{n-1}) B$ . Dann wähle man  $g_1 (\sim_{n-1}) g$  mit  $g_1 \supset B$  und

argumentiere wie oben.

Ist umgekehrt  $\psi(g) \cap \psi(h) = \{X \in \psi(g) \mid X (\sim_{n-1}) (\sim_i) \psi(P)\}$  und o.B.d.A.  $P \in g \cap h$ .

Aus 2.14 folgt mit  $g (\sim_j) h$  sofort  $\psi(g) \cap \psi(h) = \{X \in \psi(g) \mid X (\sim_{n-1}) (\sim_j) \psi(P)\}$ ,

d.h.  $j = i$ .

Daher reduziert sich der Beweis des oben angekündigten Ergebnisses im wesentlichen auf folgendes Lemma:

2.17 Lemma: In einer H-Ebene  $\mathcal{H}$  der Höhe n gilt das Axiom RS.

Zum Beweis von 2.17 benötigen wir folgenden Hilfssatz, den wir daher hier einschieben:

2.18 Lemma: Es sei  $\mathcal{H}$  eine (t,r) FAH-Ebene der Höhe n und  $\mu_i(g)$  wie in 1.10 definiert. Dann ist

$$(4) \quad \mu_i(g) \geq r^{2n-2i-1} - r^{2n-2i-2}$$

Beweis: Es sei  $P (\sim_i) g$ . Nach 2.6 gibt es eine Gerade h mit  $X (\sim_i) g$  für alle  $X \in h$ .

Entsprechendes gilt für sämtliche  $r^{n-i-1}$  Geraden durch P, die zu h ( $\sim_{i+1}$ )-

benachbart sind. Schließlich liegen auf einer Geraden k,  $g \neq k$ ,  $P \in k$  genau

$r^{n-i} - r^{n-i-1}$  Punkte, die zu g ( $\sim_i$ )-benachbart sind, was die Behauptung von

2.18 beweist.

Beweis von 2.17:

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion über die Aussagen

$$(5) \quad g(\approx i)h, P \in g \cap h \Rightarrow |g \cap h| = \{R \in g \mid P(\approx n-i)R\}$$

$$(6) \quad |g \cap h| = \{R \in g \mid P(\approx n-i)R\} \Rightarrow g(\approx i)h$$

$$(7) \quad P(\approx n-i)Q, P, Q \in g \Rightarrow$$

$$\langle P, Q \rangle =_{\text{def}} \{h \mid P, Q \in h\} = \{h \mid g(\approx i)h \ni P\}$$

Aufgrund von 2.2 und 2.3 ist (5) für  $i = n-1$  erfüllt. Wegen 2.1 ist  $\mathcal{H}$  eine  $(r^{n-1}, r)$  H-Ebene, daher ist auch

$$\lambda_1 = \frac{(r+1)q_2}{q_2+1} = r.$$

Da andererseits aufgrund von (5)  $\lambda_1 \geq r$  gilt mit

$$\langle P, Q \rangle = \{h \mid g(\approx n-1)h \ni P\},$$

ist (6) und (7) bewiesen.

Wir setzen (5), (6) und (7) als richtig für  $i < j \leq n-1$  voraus. Sei  $P \in g \cap h$ ,  $g(\approx i)h$ . Nach Induktionsvoraussetzung können sich die Geraden  $g$  und  $h$  nicht in zu  $P(\approx n-j)$ -benachbarten Punkten ( $j > i$ ) treffen, also ist  $|g \cap h| \subseteq \{R \in g \mid P(\approx n-i)R\}$ , d.h.  $|g \cap h| \leq r^i$ .

Ist  $\mathcal{H}$  eine PH-Ebene, so erhält man aus 1.9.

$$r^i \geq \lambda_i = \frac{(r+1)r^i}{1+r} = r^i \quad \text{sofort}$$

$$|g \cap h| = r^i, \text{ also (5).}$$

Ist  $\mathcal{H}$  eine FAH-Ebene, so folgt mit 1.10 und Lemma 2.18

$$\begin{aligned} r^i \geq \eta_i(g) &= \frac{r^n(r^{n-i} - r^{n-i-1})}{r^{2n-2i} - \mu_i(g) - r^{2n-2i-2}} \geq \\ &\geq \frac{r^n(r^{n-i} - r^{n-i-1})}{r^{2n-2i} - (r^{2n-2i-1} - r^{2n-2i-2}) - r^{2n-2i-2}} = r^i \end{aligned}$$

also  $\eta_i(g) = r^i$ , was (5) beweist.

Betrachten wir nun weiter  $(\approx n-i)$ -benachbarte Punkte  $P, R$  auf  $g$ .

Da  $\lambda_{n-i} = r^{n-i}$  ist, andererseits aber mindestens  $r^{n-i}$  Geraden durch  $P$  mit einem Punkt  $R(\approx n-i)P \in g$  inzidieren, ist (7) bewiesen. Aus Anzahlgründen folgt die Gültigkeit von (6).

Damit können wir abschließend das Hauptergebnis dieses Abschnittes wie folgt formulieren:

2.19 Satz: Es sei  $\mathcal{H}$  eine H-Ebene des Typs  $n$ . Dann sind die folgende Aussagen äquivalent:

- (a)  $\mathcal{H}$  ist eine H-Ebene der Höhe  $n$
- (b)  $\mathcal{H}$  ist eine H-Ebene  $n$ -ter Stufe
- (c)  $\mathcal{H}$  genügt dem Axiom RS
- (d)  $\mathcal{H}$  genügt "Property A"
- (e)  $\mathcal{H}$  ist stark  $n$ -uniform.

Beweis: (a)  $\Rightarrow$  (b) 2.16, 2.17; (b)  $\Rightarrow$  (c) trivial

(c)  $\Rightarrow$  (d) 2.14

(d)  $\Rightarrow$  (e) Wegen 2.14, 2.16, 2.17 ist  $\mathcal{H}$  eine H-Ebene  $n$ -ter Stufe, nach [15, Satz 28] ist  $\mathcal{H}$  daher stark  $n$ -uniform.

(e)  $\Rightarrow$  (a) Ist  $\mathcal{H}$  eine PH- bzw. AH-Ebene des Typs  $n$ , so ist  $\mathcal{H}$  wegen 2.2 H-Ebene der Höhe  $n$ .

Ist  $\mathcal{H}$  eine FAH-Ebene des Typs  $n$ , so folgt aus der Eigenschaft (e) mit [14, 1.16], daß hinreichend viele Paare nicht schneidender Geraden existieren, und mit 2.5 und 2.6 erhält man die Behauptung (a).

Wir betonen, daß der einer stark  $n$ -uniformen AH-Ebene des Typs  $n$  zugrunde liegende Parallelismus gleichmäßig sein muß. Läßt man in 2.19 die Voraussetzung "H-Ebene des Typs  $n$ " weg, so ist (e) durch (e')

" $\mathcal{H}$  ist stark  $n$ -uniform (mit gleichmäßigem Parallelismus, falls  $\mathcal{H}$  AH-Ebene ist)"

zu ersetzen. Beim Nachweis (e')  $\Rightarrow$  (a) beachte man, daß zunächst eine stark  $n$ -uniforme FAH-Ebene  $(r^{n-1}, r)$  FAH-Ebene des Typs  $n$  ist. Wegen "Property S'" [14, 1.15] erfüllen sämtliche K-Rel. einer stark  $n$ -uniformen AH-Ebene die Eigenschaft (AK 6) und, da der Parallelismus als gleichmäßig vorausgesetzt wird, auch (AK 7). Somit ist  $\mathcal{H}$  AH-Ebene des Typs  $n$  und wegen 2.2 AH-Ebene der Höhe  $n$ . (Ein anderer Beweis wird in [15, Satz 34] gegeben.)

### 3. Kongruenzrelationen in AH-Translationsebenen

Die von den projektiven bzw. affinen Ebenen bekannten Koordinatisierungsverfahren lassen sich im wesentlichen für den Fall von AH-Ebenen verallgemeinern, jedoch ist damit ein erheblicher Mehraufwand verbunden. Im Gegensatz zu den gewöhnlichen Ebenen gibt es Geraden, die zur "y-Achse" benachbart sind und die sich von der "x-Achse" aus nicht koordinatisieren lassen.

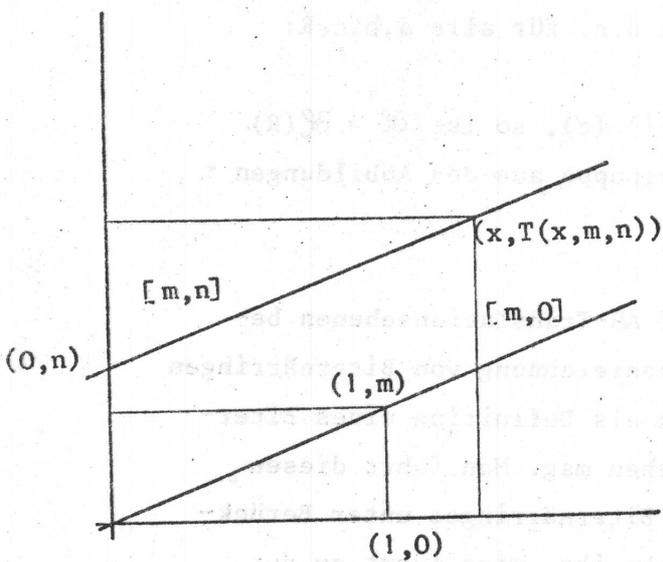


Fig. 7

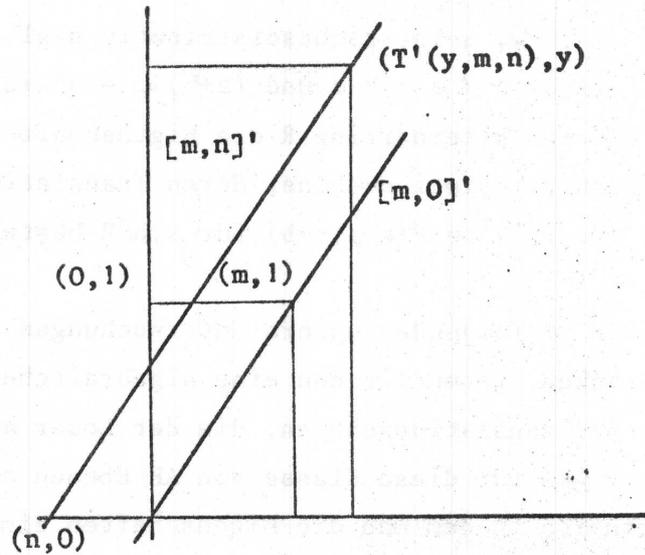


Fig. 8

Daher wird es nötig sein, zwei ternäre Verknüpfungen einzuführen, um Geraden entweder von der Blickrichtung der "x-Achse" oder der "y-Achse" zu koordinatisieren. Zwangsläufig werden dann Verträglichkeitsbedingungen notwendig, um den Fall zu beherrschen, daß gewisse Geraden zwei verschiedene Koordinatisierungen besitzen.

CYGANOVA hat als erste ein Koordinatisierungsverfahren für beliebige AH-Ebenen angegeben [9]. Die dort aufgezeigte Methode wurde von LORIMER [29] verbessert und von BACON [4] modifiziert (vgl. auch die Zusammenfassung bei DUGAS [23]). Wir verwenden in diesem Abschnitt das Verfahren von BACON [4], wobei wir uns hier allerdings eine detaillierte Beschreibung ersparen.

Als Koordinatenbereich  $R$  einer AH-Ebene  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(R)$  erhält man nach [4] einen Biternärring  $R = (R, T, T', 0, 1)$  mit zwei ternären Verknüpfungen  $T, T'$ .

Setzt man

$$a+b = T(a,1,b), \quad a\oplus b = T'(a,1,b)$$

$$a \cdot b = T(a,b,0) \quad \text{und} \quad a \circ b = T'(a,b,0),$$

so gilt nach BACON [4, Th.5.25,5.23] (siehe auch [23,29]) der folgende Satz:

3.1 Satz: 1. Es sei  $\mathcal{A}$  eine AH-Translationsebene [31] mit einem Biternär-  
ring  $R$  als Koordinatenbereich. Dann gelten:

(a) Die ternären Verknüpfungen sind linear, d.h. für alle  $a,b,x \in R$ :

$$T(x,a,b) = x \cdot a + b \quad \text{und} \quad T'(x,a,b) = x \circ a + b.$$

(b)  $(R,+)$  ist eine abelsche Gruppe und es ist  $a+b = a\oplus b$  für alle  $a,b \in R$ .

(c)  $\cdot$  bzw.  $\circ$  ist rechtsdistributiv bzgl.  $+$ , d.h. für alle  $a,b,c \in R$ :

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{und} \quad (a+b) \circ c = a \circ c + b \circ c.$$

2. Hat ein Biternärtring  $R$  die Eigenschaften (a)-(c), so ist  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(R)$   
eine AH-Translationsebene, deren Translationsgruppe aus den Abbildungen  $\tau$   
mit  $(P(x,y))^T = P(x+a,y+b)$  für  $a,b \in R$  besteht.

Da wir im folgenden unsere Untersuchungen auf AH-Translationsebenen be-  
schränken, geben wir nun eine algebraische Kennzeichnung von Biternär-  
ringen für AH-Translationsebenen, die der Leser auch als Definition eines Biter-  
närtringes für diese Klasse von AH-Ebenen ansehen mag. Man führt diesen  
Nachweis, in dem man die Eigenschaften eines Biternärtringes unter Berück-  
sichtigung von 3.1 und [4, Th.5.25,5.23] umschreibt. Dies führt zu der  
algebraischen Struktur eines Quasirings [4, 6.3] als Koordinatenbereich  
von AH-Translationsebenen. Für unsere Untersuchungen erweist sich eine zu  
[4, 6.3] äquivalente Definition als hilfreicher. Um die Gleichwertigkeit  
mit der bei BACON angegebenen Definition aufzuzeigen, beweisen wir:

3.2 Satz: Eine algebraische Struktur  $R = (R,+, \cdot, \circ, 0, 1)$  ist genau dann ein  
Biternärtring  $R = (R, T, T', 0, 1)$  einer AH-Translationsebene  $\mathcal{A}(R)$  mit  
 $T(x,m,n) = xm+n$  bzw.  $T'(x,m,n) = x \circ m+n$ , falls die folgenden Bedingungen  
gelten: (Das Verknüpfungssymbol  $\cdot$  werden wir meist weglassen.)

1.(a)  $(R,+)$  ist eine abelsche Gruppe.

(b) Für alle  $a \in R$ :  $1a = a1 = a = 1 \circ a = a \circ 1$

$$0a = a0 = a = 0 \circ a = a \circ 0.$$

(c)  $\cdot$  bzw.  $\circ$  ist rechtsdistributiv bzgl.  $+$ , d.h. für alle  $a,b,c \in R$ :

$$(a+b)c = ac+bc \quad \text{und} \quad (a+b) \circ c = a \circ c + b \circ c.$$

2. Für  $N = \{n \in R \mid \exists k \neq 0: kn = 0\}$ ,  $N' = \{n \in R \mid \exists k \neq 0: kon = 0\}$

gelten:

(a)  $N = N'$

(b)  $(N, +)$  ist eine Untergruppe von  $(R, +)$ .

(c)  $NR \subseteq N$ ,  $N \circ R \subseteq N$

(d) Für alle  $x, a, b \in R$ :  $\begin{cases} a-b \in N \Rightarrow xa - xb \in N \\ a-b \in N \Rightarrow x \circ a - x \circ b \in N \end{cases}$

(e) Für alle  $x, a, b \in R$ :  $\begin{cases} x \in R \setminus N, xa - xb \in N \Rightarrow a-b \in N \\ x \in R \setminus N, x \circ a - x \circ b \in N \Rightarrow a-b \in N \end{cases}$

(f) Für alle  $x, a, b \in R$ :  $\begin{cases} a-b \in R \setminus N, xa - xb \in N \Rightarrow x \in N \\ a-b \in R \setminus N, x \circ a - x \circ b \in N \Rightarrow x \in N \end{cases}$

3. (a) Für alle  $x, a, b \in R$ :  $\begin{cases} a-b \in R \setminus N, xa = xb \Rightarrow x = 0 \\ a-b \in R \setminus N, x \circ a = x \circ b \Rightarrow x = 0 \end{cases}$

(b) Für alle  $x, a, b \in R$ :  $\begin{cases} x \in R \setminus N, xa = xb \Rightarrow a = b \\ x \in R \setminus N, x \circ a = x \circ b \Rightarrow a = b \end{cases}$

(c) Für alle  $x, a, b \in R$ :  $\begin{cases} x \in N, (a \circ x)b = a \Rightarrow a = 0 \\ x \in N, (ax) \circ b = a \Rightarrow a = 0 \end{cases}$

4. (a) Für alle  $a, b, c \in R$ :  $\begin{cases} a-b \in R \setminus N \Rightarrow \exists x \in R: xa - xb = c \\ a-b \in R \setminus N \Rightarrow \exists x \in R: x \circ a - x \circ b = c \end{cases}$

(b) Für alle  $a, b \in R$ ,  $u \in N$ :  $\begin{cases} \exists y \in R: y = (y \circ u)a + b \\ \exists y \in R: y = (yu) \circ a + b \end{cases}$

(c) Für alle  $a, b \in R$ ,  $a \in R \setminus N$ :  $\begin{cases} \exists x: ax = b \\ \exists x: a \circ x = b \end{cases}$

(d) Für alle  $a, b \in N$  gilt:  $\begin{cases} \exists x \in R: ax = b \text{ oder } \exists y \in N: boy = a \\ \exists x \in R: a \circ x = b \text{ oder } \exists y \in N: by = a \end{cases}$

Jede lösbare Gleichung (der letzten vier) besitzt mindestens zwei Lösungen.

(e) Für alle  $a, b \in R$ ,  $a-b \in N$ :  $\begin{cases} \exists 0 \neq x \in R: xa = xb \\ \exists 0 \neq x \in R: x \circ a = x \circ b \end{cases}$

5. (a) Für alle  $a, b \in R$ :  $ab = 1 \Leftrightarrow b \circ a = 1$

(b) Für alle  $a, b, x, y \in R$ :  $ab = 1 \Rightarrow (xb = y \Leftrightarrow y \circ a = x)$

3.3 Bemerkungen: 1. Für alle  $a, b \in R$ :  $ab \in N \Rightarrow a \in N$  oder  $b \in N$  bzw.

$a \circ b \in N \Rightarrow a \in N$  oder  $b \in N$ .

2. Für alle  $a, b, x \in R$ :  $x \in N$ ,  $-a + (a \circ x)b \in N \Rightarrow a \in N$ .

3. Eine algebraische Struktur  $R = (R, +, \cdot, \circ, 0, 1)$ , die den Bedingungen 1.-5. genügt, nennen wir nach BACON [4, 6.3, 6.5] und Satz 3.2 einen Quasiring.

4. Ob das System der Bedingungen, insbesondere im endlichen Fall, minimal ist, soll hier nicht diskutiert werden.

Beweis von 3.2: Aufgrund von [4, 6.3, 6.18] genügt es nachzuweisen, daß die durch 1. - 5. gekennzeichnete Struktur genau ein Quasiring im Sinne von BACON [4, 6.3, 6.5] ist.

Teil 1: R erfülle 1. - 5. Dann ist R ein Quasiring.

Aus 1., 2.(a) folgt offensichtlich die Gültigkeit von (VW0) - (VW4) bzw. (VW0)' - (VW4)'.

(VW 5) Es sei  $m - m' \in R \setminus N$ . Wegen 4.(a) und 3.(a) ist  $xm = xm' + d$  lösbar; unter Benutzung von 1.(c) erhält man die Eindeutigkeit der Lösung. Umgekehrt folgt aus der eindeutigen Lösbarkeit mittels 4.(e) sofort  $m - m' \in R \setminus N$ .

(VW6) folgt unmittelbar aus 4.(c) und 3.(b).

(VW 7) unter Benutzung von 3.(c) äquivalent zu 4.(d)

(VW8) Es sei  $y = xm + d$ ,  $x = y \circ u + v$ , somit  $y = (y \circ u + v)m + d = (y \circ u)m + vm + d$ .

Aufgrund von 4.(b) existiert ein solches  $y$ . Sei nun  $y_i = x_i m + d$ ,

$x_i = y_i \circ u + v$  für  $i = 1, 2$ , so erhalten wir  $y_1 - y_2 = (x_1 - x_2)m$ ,

$x_1 - x_2 = (y_1 - y_2) \circ u$ , also wegen  $u \in N$  und 3.(c) sofort  $y_1 = y_2$ ,  $x_1 = x_2$ .

(VW9) Sei nun  $um = 1$ ,  $am + e = b$ ,  $b \circ u + v = a$  und  $xm + e = y$ . Aus  $xm + e = y$

folgt  $xm = y - e$ , also wegen 5.(b)  $(y - e) \circ u = x$ , d.h.  $y \circ u - e \circ u = x$ , so

daß es genügt zu zeigen:  $-e \circ u = v$ .  $-e \circ u = (-e) \circ u = (am - b) \circ u =$

$(am) \circ u - b \circ u = (am) \circ u + v = a$ . Sei  $(am) \circ u = z$ . Mit 5.(b) folgt  $zm = am$ .

Wegen  $m \in R \setminus N$  ist daher  $z = a$ , d.h.  $-e \circ u = a + v - a = v$ .

(VW 10) Um nachzuweisen, daß  $(R/N, +, \cdot)$  ein Quasikörper ist, überzeugt man sich, daß mit 2.(c), 2.(d) aus  $a - a'$ ,  $b - b'$ ,  $m - m' \in N$  stets

$(a + b)m - (a' + b')m' \in N$  folgt. Wegen 4.(c) gibt es für  $a \in R \setminus N$  stets  $x \in R$  mit

$ax - b \in N$ . Aus  $ay - c \in N$ ,  $b - c \in N$  und 2.(c) folgt stets  $x - y \in N$ . Andererseits

gibt es für  $a, b \in R \setminus N$  aufgrund von 4.(a)  $x$  mit  $xa = b$ . Sofort schließt

man für  $ya - c \in N$ ,  $b - c \in N$  anhand der Folgerung auf  $x - y \in N$ . Daher ist

$(R/N \setminus \{0\}, \cdot)$  bzw.  $(R/N \setminus \{0\}, \circ)$  ein Loop. Schließlich wird die Gültigkeit

von (QF 4) in [4, 6.2] durch 2.(f) belegt.

Teil 2: R sei ein Quasiring. Dann erfüllt R die Bedingungen 1. - 5.

(VW0), (VW0)' - (VW4), (VW4)' ziehen offensichtlich 1. - 2.(b) nach sich.

2.(c) - 2.(f) folgen aus (VW10).

3.(a) Es sei  $xa = xb$  für  $a - b \in R \setminus N$ . Da wegen (VW5) genau eine Lösung existiert, andererseits  $0a = 0b$  gilt, erhalten wir  $x = 0$ .

3.(b) folgt mit (VW6)

3.(c) Nach (VW8) ist das System  $a \circ x = z$ ,  $z b = a$  eindeutig für  $a, z$  lösbar, also  $a = 0$ .

4.(a) Die Existenz einer Lösung wird durch (VW5) garantiert.

(b) folgt mit (VW8), (c) mit (VW6), (d) ist äquivalent zu (VW7).

Mit (VW 5) beweist man 4.(e).

5.(a),(b) siehe (VW9).

Wir wenden uns nun der algebraischen Beschreibung von Kongruenzrelationen zu, wodurch dann das in Kapitel 1 angesprochene Erweiterungsproblem und die Kennzeichnung von Stufenparametern in "homogenen" AH-Ebenen algebraisiert ist.

Es sei im folgenden  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(R)$  stets eine endliche AH-Translationsebene, so daß mit 3.2 der Biternärring  $R$  ein Quasiring ist, also den Bedingungen 1. - 5. genügt. Es sei  $\tau$  eine Kongruenzrelation in  $\mathcal{A}$ . Wir setzen für  $P = (0,0)$ :

$$I_P = \{x \in R \mid \exists (x,0) \in \mathcal{P} : (x,0) \tau (0,0)\}$$

Sofort erhält man mit (AK 6):

$$x \in I_P \iff (0,x) \tau (0,0)$$

und mit (AK 6), (AK 4)

$$(1) \quad x, y \in I_P \iff (x,y) \tau (0,0)$$

Da eine Translation in einer AH-Ebene ein H-Isomorphismus ist, der nach 0.12 kongruenzrelationentreu ist, folgt aus

$$(x_1, y_1) \tau (x_2, y_2) \text{ stets } (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \tau (0,0)$$

und somit  $x_1 - x_2, y_1 - y_2 \in I_P$ . Dies belegt:

$$(x_1, y_1) \tau (x_2, y_2) \iff x_1 - x_2, y_1 - y_2 \in I_P,$$

weswegen auch  $I_P$  unabhängig von der Auswahl des Punktes  $P$  ist. Wir setzen:

$I_P = I$ . Ferner ist:  $I \subseteq N$ . Unmittelbar mit (1) ergibt sich aus

$$(x_1, 0) \tau (0, 0) \iff x_1 \in I$$

$$(x_2, 0) \tau (0, 0) \iff x_2 \in I$$

stets  $(x_1 - x_2, 0) \tau (-x_2, 0) \tau (0, 0)$ , also

$$x_1, x_2 \in I \implies x_1 - x_2 \in I$$

Somit induziert  $\tau$  als Äquivalenzrelation nach  $R$  eine Untergruppe:

$$(I) \quad (I, +) \leq (N, +)$$

Eigenschaften der Kongruenzrelation  $\tau$  ziehen nun weitere Bedingungen für  $I$  nach sich:

$$(II) \quad IR \subseteq I, I \circ R \subseteq I$$

denn: Sei  $x \in R, a \in I$ . Wegen (AK6) ist  $g = [0, a] \tau [0, 0] = h$ ,  $(a, ax) \in [x, 0] = k$ .

Mit  $|gnk| = 1$  und (AK4) erhält man:  $(a, ax) \tau (0, 0)$ , d.h.  $ax \in I$ .

Sind  $[a, 0], [b, 0]$  Geraden mit  $a-b \in I$ , so gilt:  $[a, 0] [b, 0]$ . Somit sind auch die Schnittpunkte mit  $[0, x]'$  zueinander  $\tau$ -benachbart, d.h.  $xa-xb \in I$ .

Die Untergruppe  $(I, +)$  genügt damit der Bedingung:

$$(III) \quad \text{Für alle } a, b, x \in R: \begin{cases} a-b \in I \Rightarrow xa-xb \in I \\ a-b \in I \Rightarrow x \circ a - x \circ b \in I \end{cases}$$

Ähnlich argumentiert man, um die Bedingung

$$(IV) \quad \text{Für alle } a, b, x \in R: \begin{cases} x \in R \setminus N, xa-xb \in I \Rightarrow a-b \in I \\ x \in R \setminus N, x \circ a - x \circ b \in I \Rightarrow a-b \in I \end{cases}$$

als Eigenschaft der Untergruppe  $(I, +)$  zu erhalten.

Die Bedingungen (I) und (III) gestatten nun eine handliche Charakterisierung  $\tau$ -benachbarter Geraden:

3.4 Lemma: Es sei  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(R)$  AH-Translationsebene und  $\tau$  eine Kongruenzrelation,  $I$  wie oben definiert. Dann gilt:

$$[m_1, n_1] \tau [m_2, n_2] \Leftrightarrow m_1 - m_2, n_1 - n_2 \in I$$

$$[m_1, n_1]' \tau [m_2, n_2]' \Leftrightarrow m_1 - m_2, n_1 - n_2 \in I$$

Beweis: Da  $\tau$ -benachbarte Geraden sicherlich benachbart sind, können wir stets davon ausgehen, daß  $\tau$ -benachbarte Geraden formgleiche Darstellungen besitzen. Wir beschränken uns beim Beweis auf Geraden der Form  $[m_1, n_1], [m_2, n_2]$ . Wegen  $[0, 0]' \neq [m_1, n_1], [m_2, n_2]$  folgt mit (AK3), (AK4)  $n_1 - n_2 \in I$ . Entsprechend erhält man aufgrund von  $[0, 1]' \neq [m_1, n_1], [m_2, n_2]$  stets  $m_1 - m_2 \in I$ . Gilt nun umgekehrt  $m_1 - m_2, n_1 - n_2 \in I$ , so ist wegen (III) stets  $(x, xm_1 + n_1) \tau (x, xm_2 + n_2)$ , also  $[m_1, n_1] \tau [m_2, n_2]$ .

Mit Hilfe von (AK5) bestätigt man die Bedingung (V) der oben definierten Untergruppe  $(I, +)$ :

$$(V) \quad \text{Für alle } a, b \in R: \begin{cases} a-b \in N \setminus I \Rightarrow \exists x \notin I: xa-xb \in I \\ a-b \in N \setminus I \Rightarrow \exists x \notin I: x \circ a - x \circ b \in I \end{cases}$$

Die beiden folgenden Bedingungen sind ebenfalls Eigenschaften von  $I$ , die aus dem inhaltlichen Zusammenhang mit der Kongruenzrelation  $\tau$  folgen:

$$(VI) \quad \text{Für alle } a, b, x \in R: \begin{cases} a-b \in R \setminus N, xa-xb \in I \Rightarrow x \in I \\ a-b \in R \setminus N, x \circ a - x \circ b \in I \Rightarrow x \in I \end{cases}$$

$$(VII) \quad \text{Für alle } a, b, x \in R: x \in N, -a + (a \circ x)b \in I \Rightarrow a \in I$$

Rechtfertigung von (VI): Wir setzen  $a=u$ ,  $b=m_2$  und  $x=x_1-x_2$ . Also ist  $(x_1-x_2)u-(x_1-x_2)m_2 \in I$ ; ferner sei  $m_1=m_2+z$  für ein  $z \in I$ ; es gilt  $(x_1-x_2)u-(x_1-x_2)m_2+x_1m_2-x_1m_1 \in I$  (wegen III) und daher auch  $x_1u+v-x_1m_1+x_2m_2-v-x_2u \in I$  für beliebiges  $v \in R$ . Setzen wir  $n_1=x_1u+v-x_1m_1$ ,  $n_2=x_2u+v-x_2m_2$ , so ist  $n_1-n_2 \in I$  und daher die Geraden  $g = [m_1, n_1]$ ,  $h = [m_2, n_2]$   $\tau$ -benachbart. Ist  $k = [u, v]$ , so inzidiert  $(x_1, y_1)$  mit  $g$  und  $k$ ,  $(x_2, y_2)$  mit  $h$  und  $k$ , wobei  $y_1=x_1m_1+n_1=x_1u+v$  und  $y_2=x_2m_2+n_2=x_2u+v$  sei. Aus (AK 4) folgt  $x_1-x_2 \in I$ , wodurch (VI) gerechtfertigt ist. Analog begründe man (VII).

Die Eigenschaften (I) - (VII), die wir gerade hergeleitet haben, erweisen sich nun auch als hinreichend, eine Kongruenzrelation  $\tau$  algebraisch zu charakterisieren.

3.5 Satz: Es sei  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(R)$  AH-Translationsebene und  $I$  Teilmenge von  $R$ .

Wir setzen:

$$(2) \quad (x_1, y_1) \tau (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2, y_1 - y_2 \in I$$

Durch (2) wird genau dann eine Kongruenzrelation  $\tau$  definiert, falls  $I$  den Bedingungen (I) - (VII) genügt:

$$(I) \quad (I, +) \leq (N, +)$$

$$(II) \quad IR \subseteq I, I \circ R \subseteq I$$

$$(III) \quad \text{Für alle } a, b, x \in R: \begin{cases} a - b \in I \Rightarrow xa - xb \in I \\ a - b \in I \Rightarrow x \circ a - x \circ b \in I \end{cases}$$

$$(IV) \quad \text{Für alle } a, b, x \in R: \begin{cases} x \in R \setminus N, xa - xb \in I \Rightarrow a - b \in I \\ x \in R \setminus N, x \circ a - x \circ b \in I \Rightarrow a - b \in I \end{cases}$$

$$(V) \quad \text{Für alle } a, b \in R: \begin{cases} a - b \in N \setminus I \Rightarrow \exists x \notin I: xa - xb \in I \\ a - b \in N \setminus I \Rightarrow \exists x \notin I: x \circ a - x \circ b \in I \end{cases}$$

$$(VI) \quad \text{Für alle } a, b, x \in R: \begin{cases} a - b \in R \setminus N, xa - xb \in I \Rightarrow x \in I \\ a - b \in R \setminus N, x \circ a - x \circ b \in I \Rightarrow x \in I \end{cases}$$

$$(VII) \quad \text{Für alle } a, b, x \in R: x \in N, -a + (a \circ x) b \in I \Rightarrow a \in I$$

Zum Beweis von 3.5 genügt es offensichtlich nachzuweisen, daß aus (I) - (VII) mittels (2) die Eigenschaften einer Kongruenzrelation hergeleitet werden können. Aufgrund von (I) ist  $\tau$  eine Äquivalenzrelation, die feiner als die Nachbarschaftsrelation ist.

Sind  $[m_1, n_1], [m_2, n_2]$  Geraden, für die gilt:  $m_1 - m_2, n_1 - n_2 \in I$ , so sind solche Geraden affin  $\tau$ -benachbart: Ein Punkt  $(x, xm_1 + n_1)$  ist infolge von (III) zu  $(x, xm_2 + n_2)$   $\tau$ -benachbart. Wir erhalten daher:

$$(3) \quad m_1 - m_2, n_1 - n_2 \in I \Rightarrow [m_1, n_1] \tau [m_2, n_2]$$

$$(4) \quad m_1 - m_2, n_1 - n_2 \in I \Rightarrow [m_1, n_1]' \tau [m_2, n_2]'$$

Seien umgekehrt  $g = [m_1, n_1]$ ,  $h = [m_2, n_2]$   $\tau$ -benachbarte Geraden. Dann gibt es zu jedem Punkt  $(x_1, x_1 m_1 + n_1) \in g$  einen Punkt  $(x_2, x_2 m_2 + n_2) \in h$  mit  $x_1 - x_2 \in I$  und  $x_1 m_1 + n_1 - x_2 m_2 - n_2 \in I$ . Wegen (III) folgt schließlich

$$(5) \quad x_2 m_1 - x_2 m_2 + n_1 - n_2 \in I$$

Entsprechendes gilt für einen zu  $(x_1, x_1 m_1 + n_1)$  fernem Punkt  $(y_1, y_1 m_1 + n_1)$ , also

$$(6) \quad y_2 m_1 - y_2 m_2 + n_1 - n_2 \in I.$$

Mit Hilfe von (IV) folgt aus (5) und (6)  $m_1 - m_2 \in I$ , somit auch  $n_1 - n_2 \in I$  und daher:

$$(7) \quad [m_1, n_1] \tau [m_2, n_2] \Rightarrow m_1 - m_2, n_1 - n_2 \in I$$

$$(8) \quad [m_1, n_1]' \tau [m_2, n_2]' \Rightarrow m_1 - m_2, n_1 - n_2 \in I$$

Den weiteren Nachweis führen wir in einzelnen Schritten durch:

### 3.6 Lemma: $\tau$ besitzt die Eigenschaft (AK3).

Beweis: Es seien  $P = (x_1, y_1)$ ,  $Q = (x_2, y_2)$ ,  $R = (x_3, y_3)$ , ferner  $P \tau Q$  und  $P \sim R$ . Da  $PR, QR$  benachbarte Geraden sind, besitzen diese Darstellungen der gleichen Form. O.B.d.A. sei  $PR = [m_1, n_1]$ ,  $QR = [m_2, n_2]$ , d.h.

$x_1 m_1 + n_1 = y_1$ ,  $x_2 m_2 + n_2 = y_2$ ,  $x_3 m_1 + n_1 = y_3 = x_3 m_2 + n_2$ . Aus  $x_1 - x_2, y_1 - y_2 \in I$  erhält man  $x_1 m_1 + n_1 - x_2 m_2 - n_2$ , mit (II) schließlich  $x_2 m_1 - x_2 m_2 + n_1 - n_2 \in I$  und entsprechend  $x_3 m_1 - x_3 m_2 + n_1 - n_2 \in I$ . Mit  $x_2 - x_3 \in R \setminus N$ ,  $(x_2 - x_3) m_1 - (x_2 - x_3) m_2 \in I$  und (IV) folgt  $m_1 - m_2 \in I$ , mit (III) dann  $n_1 - n_2 \in I$ , was infolge von (7) die Behauptung beweist.

### 3.7 Lemma: $\tau$ besitzt die Eigenschaft (AK4).

Beweis: Sind  $g, h, k$  formgleiche Geraden mit  $g \tau h$ ,  $|g \tau k| = 1$ , so schließt man ähnlich wie bei der Herleitung von (VI) auf  $g \tau k \tau h \tau k$ . Sei nun

$g = [m_1, n_1]$ ,  $h = [m_2, n_2]$ ,  $k = [u, v]'$ , also  $y_1 = x_1 m_1 + n_1$ ,  $y_2 = x_2 m_2 + n_2$ ,

$x_1 = y_1 \circ u + v$ ,  $x_2 = y_2 \circ u + v$  für  $(x_1, y_1) \in g \tau k$ ,  $(x_2, y_2) \in h \tau k$ . Aus  $n_1 - n_2 \in I$

folgt  $y_1 - x_1 m_1 + x_2 m_2 - y_2 \in I$ . Ferner ist:

$$y_1 - x_1 m_1 + x_2 m_2 - y_2 = y_1 - y_2 + x_2 m_2 - x_2 m_1 + (x_2 - x_1) m_1. \text{ Wegen } m_1 - m_2 \in I \text{ ist}$$

$$I \ni y_1 - y_2 + (x_2 - x_1) m_1 = -(y_2 - y_1) + ((y_2 - y_1) u) m_1, \text{ also wegen (VII) } y_2 - y_1 \in I$$

und mittels (II) schließlich  $x_1 - x_2 = (y_1 - y_2) \circ u$  auch  $x_1 - x_2 \in I$ .

Entsprechend behandelt man den Fall:  $g = [m_1, n_1]'$ ,  $h = [m_2, n_2]'$  und  $k = [u, v]$ .

Weiter erhalten wir:

### 3.8 Lemma: $\tau$ besitzt die Eigenschaft (AK5).

Beweis: Es sei  $P = (x, y) \in [m_1, n_1]$ ,  $[m_2, n_2]$ . Somit ist  $x m_1 + n_1 = x m_2 + n_2$ , also  $x m_1 - x m_2 = n_2 - n_1$ . Wegen  $\tau([m_1, n_1] \tau [m_2, n_2])$  und (III) ist  $m_1 - m_2 \in N \setminus I$ .

Mit (V) folgt die Existenz eines Elementes  $q \in N \setminus I$  mit  $qm_1 - qm_2 \in I$ . Daher ist  $(x+q, (x+q)m_1+n_1) \tau [m_2, n_2]$ , dagegen  $\neg((x+q, (x+q)m_1+n_1) \tau (x, xm_1+n_1))$ .

3.9 Lemma:  $\tau$  besitzt die Eigenschaft (AK6).

Beweis: Es sei  $(x_1, y_1) \in [m_1, n_1]$ , d.h.  $x_1 m_1 + n_1 = y_1$ .  $[m_1, n_2]$  sei die Parallele zu  $[m_1, n_1]$  durch den Punkt  $(x_2, y_2) \tau (x_1, y_1)$ , d.h.  $x_2 m_1 + n_2 = y_2$ . Somit erhalten wir:  $n_1 - n_2 = y_1 - y_2 + x_2 m_1 - x_1 m_1 = y_1 - y_2 + (x_2 - x_1) m_1 \in I$ .

Da es einerseits zu je zwei parallelen Geraden eine vermittelnde Translation gibt, andererseits Translationen kongruenzrelationentreu sind, ist auch (AK7) erfüllt, so daß Lemma 3.6 - Lemma 3.9 den Beweis von 3.5 erbringen.

#### 4. Hjelmslev-Fastringe

Die in Kapitel 3 betrachteten Quasiringe sind multiplikative Doppelstrukturen, d.h. mit zwei multiplikativen Verknüpfungen versehene Gebilde. Die meisten der definierenden Eigenschaften eines Quasiringes sind für beide Verknüpfungen getrennt formuliert, dagegen sorgen die Bedingungen 3.(c), 4.(b) und 5 für die Verträglichkeit der beiden Multiplikationen. Durch 4.(d) sind die beiden Verknüpfungen noch stärker und in gewissem Maß "undurchsichtig" verwoben, zumal es Elemente  $a, b \in N$  mit  $ax = b$  und  $by = a$  geben kann, ohne daß  $a$  und  $b$  bezüglich der anderen Multiplikation vergleichbar sein müssen.

Es ist naheliegend, daß es aus beweistechnischen Gründen sinnvoll ist, zunächst solche Strukturen zu betrachten, in denen die erwähnte Kopplung durch 4.(d) symmetrisch ist. Hinreichend dafür ist die Forderung, daß die multiplikativen Verknüpfungen assoziativ sind, d.h. es gilt

$$(1) \quad (ab)c = a(bc) \quad \text{bzw.} \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

für alle  $a, b, c \in R$ .

Weil man für affine Ebenen dadurch zum Begriff des Fastkörpers gelangt, liegt es hier nahe, Hjelmslev-Fastringe zu definieren und deren Struktur im endlichen Fall zu studieren.

Durch (1) werden nun einige Eigenschaften in Satz 3.2 überflüssig bzw. lassen sich einfacher beschreiben.

4.1 Lemma: Es sei  $R = (R, +, \cdot, \circ, 0, 1)$  ein Quasiring und es gelte (1).

Dann läßt sich 4.(d) in 3.2 ersetzen durch:

Für alle  $a, b \in N$  gilt:

$$(2) \quad \exists x \in R: ax=b \quad \text{oder} \quad \exists y \in N: by=a$$

$$(3) \quad \exists x \in R: a \circ x = b \quad \text{oder} \quad \exists y \in N: b \circ y = a$$

Jede lösbare Gleichung besitzt mindestens zwei Lösungen.

Ferner erhält man:

$$(4) \quad \exists x \in R: ax=b \iff \exists y \in R: a \circ y = b$$

$$(5) \quad \exists x \in N: ax=b \iff \exists y \in N: a \circ y = b$$

Beweis: 4.(d)  $\Rightarrow$  (2), (3)

Annahme: Es gibt kein  $x \in R$  mit  $ax=b$  und kein  $y \in N$  mit  $by=a$ .

Dann ist  $b \circ p = a$  für  $p \in N$  bzw.  $a \circ q = b$  für  $q \in R$  (wegen 4.(d)).

Aus  $(a \circ q) \circ p = a = a \circ (q \circ p)$  folgt mit 3.(a)  $a=0$ . Widerspruch!

Entsprechend verfährt man beim Nachweis von (3).

(2), (3)  $\Rightarrow$  4.(d). Annahme: Es gibt kein  $x \in R$  mit  $ax=b$  und kein  $y \in N$  mit  $b \circ y = a$ . Aus (2) folgt sofort  $b \circ p = a$  für ein  $p \in N$ , während wir mit (3) erhalten:  $a \circ q = b$  für  $q \in R$ .

Somit ist  $(b \circ p) \circ q = b$ , woraus mit 3.(c) folgt:  $b=0=a$ . Widerspruch!

Infolge von (2), (3) und 3.(a) in 3.2 sind (4) bzw. (5) offensichtlich.

Fordert man in Quasiringen die Assoziativität der Multiplikationen, so ist 2.(c) selbstredend erfüllt. Mit Hilfe der Assoziativität und 4.(c) gibt es für  $x \in R \setminus N$  stets  $y \in R \setminus N$  mit  $xy = yx = 1$ , woraus 3.(b) in 3.2 folgt. Daher ist auch 2.(e) eine Folgerung von 2.(d). Gleichzeitig ergibt sich dadurch auch 2.(f).

Die Bedingungen 4.(c) und 4.(d) lassen sich unter Berücksichtigung von Lemma 4.1 wie folgt zusammenfassen:

Für alle  $a, b \in R$  :  $\exists x \in R$  :  $ax = b$  ( $a \circ x = b$ ) oder  $\exists y \in R$  :  
 $by = a$  ( $b \circ y = a$ ).

Jede lösbare Gleichung mit  $a, b \in N$  besitzt mindestens zwei Lösungen.

Wir vereinbaren nun:

4.2 Def.: Unter einem affinen Hjelmslev-Fastring (AH-Fastring)

$R = (R, +, \cdot, 0, 1)$  verstehen wir einen rechts-distributiven endlichen Fastring [40] (mit assoziativer Multiplikation), der den folgenden Bedingungen genügt:

- 1.(a)  $(R, +)$  ist eine abelsche Gruppe.  
(b) Für alle  $a \in R$ :  $1a = a1 = a$ ;  $0a = a0 = 0$
2. Für  $N = \{n \in R \mid \exists k \neq 0: kn = 0\}$  ist  
(a)  $(N, +) \leq (R, +)$   
(b) Für alle  $x, a, b \in R$ :  $a - b \in N \Rightarrow xa - xb \in N$
- 3.(a) Für alle  $x, a, b \in R$ :  $a - b \in R \setminus N$ ,  $xa = xb \Rightarrow x = 0$
- 4.(a) Für alle  $a, b, c \in R$ :  $a - b \in R \setminus N \Rightarrow \exists x \in R$ :  $xa - xb = c$   
(b<sub>r</sub>) Für alle  $a, b \in R$ :  $\exists x \in R$ :  $ax = b$  oder  $\exists y \in R$ :  $by = a$   
Jede lösbare Gleichung mit  $a, b \in N$  besitzt mindestens zwei Lösungen.  
(c) Für alle  $a, b \in R$ ,  $a - b \in N$ :  $\exists 0 \neq x \in R$  mit  $xa = xb$

4.3 Def.: Ein AH-Fastring  $R$  heißt projektiver Hjelmslev-Fastring (PH-Fastring), falls gilt:

- 4.(b<sub>1</sub>) Für alle  $a, b \in R$ :  $\exists x \in R$ :  $xa = b$  oder  $\exists y \in R$ :  $yb = a$   
Jede lösbare Gleichung mit  $a, b \in N$  besitzt mindestens zwei Lösungen.

4.4 Bemerkungen: 1. Die in 4.2 gegebene Definition weicht von der in [33, 4.1] benutzten ab. Während die dort betrachteten Strukturen einerseits den uniformen Fall ( $N^2 = (0)$ ) wiedergeben, gilt andererseits dort das Assoziativgesetz nicht generell. Schließlich fordert SEIER allerdings die Existenz eines zentralen Elementes im Ideal  $N$ . Insgesamt ist die Definition in [33] so angelegt, daß die Faktorstruktur  $R/N$  ein Skalaxom system im Sinne von SPERNER ist [33, 4.6].

2. Man beachte, daß in der Mehrzahl der Arbeiten über Fastringe das Links distributivgesetz vorausgesetzt wird, wohingegen wir in Folge der eingebürgerten Schreibweise der Geradengleichung in AH-Translationsebenen das Rechts distributivgesetz fordern.

3. Jeder AH-Fastring ist in natürlicher Hinsicht ein Quasiring;

Wir setzen:  $\circ = \cdot$ . Daß auch 4.(b) aus 3.2 erfüllt ist, sieht man wie folgt ein: Für  $a \in R, u \in N$  betrachten wir die Abbildung  $y \rightarrow y - yua$ . Wir setzen  $ua = z \in N$ .  $y_1 - y_1z = y_2 - y_2z$  impliziert  $y_1 - y_2 = (y_1 - y_2)(-z)$ . Aus der Nilpotenz der Nullteiler (siehe 4.5(b)) folgt  $y_1 = y_2$ , d.h. die Abbildung ist injektiv und daher auch surjektiv.

4. Es sei R ein Fastring (mit kommutativer Addition) und  $(I, +)$  Untergruppe von  $(R, +)$  (siehe [40, 1.2]):

I heißt R-Untergruppe, falls

$$R \cdot I = \{ra \mid r \in R, a \in I\} \subseteq I \text{ gilt.}$$

I heißt Rechtsideal, falls  $I \cdot R \subseteq I$ .

I heißt Linksideal, falls für alle  $x, y \in R, m \in I$  stets  $x(y+m) - xy \in I$ .

Unter einem zweiseitigen Ideal I verstehen wir eine additive Untergruppe I, die zugleich Links- als auch Rechtsideal ist.

5. Aufgrund von 2.(a) und 2.(b) bilden die Nullteiler eines AH-Fastringes R ein zweiseitiges Ideal. R ist insbesondere daher ein lokaler Fastring.

4.5 Lemma: R sei ein endlicher AH-Fastring. Dann gelten:

- (a) Die Menge der Nichtnullteiler ist bzgl. der Multiplikation eine Gruppe, die Einheitengruppe U.
- (b) Alle Nullteiler sind nilpotent.
- (c) Für alle  $x \in R: Rx \subseteq xR, Nx \subseteq xN, Ux \subseteq xU$ .
- (d) Das Ideal der Nullteiler ist maximales Rechtshauptideal:  $N = mR$
- (e) Jedes Rechtsideal ist von der Form  $m^j R$  ( $j \in IN$ )
- (f) Für alle  $x, y \in R: xy = 0 \iff yx = 0$
- (g) Für alle  $a, x, y \in R, x - y \in N$  gibt es  $b \in R: ax - ay = (x - y)b$
- (h) Jedes Rechtsideal ist zweiseitig.
- (i) Die Rechtsideale bilden eine Kette.
- (j)  $R/N$  ist ein Fastkörper.

Beweis: (a) offensichtlich wegen 4.2.4.(b<sub>r</sub>)

(b) Da R endlich ist, gibt es  $k_1 \neq k_2 \in IN$  mit  $x^{k_1} = x^{k_2}$ . Sei  $k_1 < k_2$ , also  $x^{k_1} - x^{k_2} = (1 - x^{k_2 - k_1})x^{k_1} = 0$ . Aus  $1 - x^{k_2 - k_1} \in U$  folgt  $x^{k_1} = 0$ .

(c) Ist  $axb = x$  für  $a \in R, b \in N$ , so erhalten wir für beliebiges  $n \in IN: a^n x b^n = x$ , mit (b) also  $x = 0$ , was  $Rx \subseteq xR$  beweist. Entsprechend belegt man:  $Nx \subseteq xN$  bzw.  $Ux \subseteq xU$ .

(d) Durch  $x \Delta y \Leftrightarrow \exists a \in U: xa = y$  wird in  $N$  eine Äquivalenzrelation "... ist rechtsassoziert..." definiert, deren Klassen wegen 4.2.4.(b<sub>r</sub>) linear durch Teilbarkeit  $[x]_{\Delta} \leq [y]_{\Delta} \Leftrightarrow \exists a \in R: xa = y$  angeordnet werden können. Aus der Endlichkeit von  $N$  folgt (d).

(e), (f), (i) Zunächst folgt aus der Endlichkeit des Ringes und der Bedingung 4.2.4.(b<sub>r</sub>) in Verbindung mit (d), daß jedes Element  $x \in N$  sich durch ein  $m^j a$  für ein geeignetes  $j \in \mathbb{N}$  und  $a \in U$  darstellen läßt. Wir erhalten mit Hilfe von (c)  $xy = 0 \Leftrightarrow yx = 0$  für beliebige Elemente  $x, y \in R$ , also (f). Sei  $m^n = 0, m^{n-1} \neq 0$ . Wir setzen:

$(m^{n-j})^1 = \{x \in R \mid xm^{n-j} = 0\}$ . Offensichtlich ist wegen der Gültigkeit des Rechtsdistributivgesetzes  $(m^{n-j})^1$  eine additive Untergruppe von  $N$  mit  $m^j R \subseteq (m^{n-j})^1$ . Ist umgekehrt  $x \in (m^{n-j})^1$ , also  $x = m^i a$  für ein  $a \in U$ , so schließt man mit (f) auf  $m^{n-j+i} = 0$ , d.h.  $j \leq i$ , was  $m^j R = (m^{n-j})^1$  beweist. Also ist  $m^j R$  ein Rechtsideal. Ferner erkennt man  $m^{j_1} R \subseteq m^{j_2} R \Leftrightarrow j_1 \leq j_2$ , also (i).

(g) Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion über den Exponenten  $i$  des Rechtsideals  $m^{n-i} R$ , in dem  $x-y$  liegt. Induktionsanfang:  $x-y \in m^n R = (0)$ , d.h.  $x = y$ , also  $ax = ay$  und daher  $ax-ay = (x-y) \cdot 1 = 0$ . Induktionsschritt: Die Behauptung werde als richtig für alle  $x-y \in m^{n-j} R$  mit  $0 \leq j \leq i$  vorausgesetzt. Sei o.B.d.A.  $x \neq y$ . Es sei  $(ax-ay)b = x-y$  für ein  $b \in N$  und  $x-y \in m^{n-i-1} R$  angenommen. Aus  $b \in N$  folgt  $xb-yb = (x-y)bm^{n-i} R$ , also  $(ax-ay)b = axb-ayb = (xb-yb)c = (x-y)bc = x-y$ ; was wegen  $bc \in N$  stets  $x-y = 0$  zur Folge hat. Widerspruch!

(h) offensichtlich wegen (g)

(j) Da  $N$  maximales (zweiseitiges) Ideal ist, ist  $R/N$  ein Fastkörper.

4.6 Folgerung: Für einen AH-Fastring  $R$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a)  $R$  ist ein PH-Fastring
- (b) Für alle  $x \in R : Ux = xU$
- (c) Für alle  $x \in R : Rx = xR$
- (d) Die  $R$ -Untergruppen bilden eine Kette.

Beweis: (a)  $\Rightarrow$  (b). 4.3, 4.5(c), 4.5(b). Bei Beweis (b)  $\Rightarrow$  (c) können wir uns wegen (b) auf den Fall  $x = m^i$  mit  $mR = N$  beschränken. Aufgrund 4.5(c) genügt es nachzuweisen:  $m^i R \subseteq Rm^i$ . Sei  $a = m^j b, b \in U$ , so liefert wiederholtes Anwenden von (b):  $m^i a = m^i m^j b = cm^j m^i$  und somit  $m^i R = Rm^i$ .

(c)  $\Rightarrow$  (d) Jede  $R$ -Untergruppe ist aufgrund von 4.5(e) ein Rechtsideal, was (d) belegt.

(d)  $\Rightarrow$  (a) Seien  $a = m^i p, b = m^j q$  vorgegeben, wobei o.B.d.A.  $i \leq j$  gesetzt wird. Dann ist  $Ra \supseteq Rb$ , was 4.(b<sub>1</sub>) nach sich zieht.

4.7 Beispiele: 1. In [40] werden die zu Bewertungsringen analogen Fastringstrukturen diskutiert. Ähnlich wie bei den Ringstrukturen sind geeignete epimorphe Bilder AH-Fastringe: Ist  $S$  ein "valuation near ring" im Sinne von ZEMMER,  $I$  ein zweiseitiges Ideal mit  $a-b \in S \setminus N$ ,  $xa-xb \in I \Rightarrow x \in I$ ,  $a-b \in N \setminus I \Rightarrow \exists x \notin I: xa-xb \in I$  und  $|S/I| < \infty$ , so ist  $R = S/I$  in Anlehnung an eine Idee von KLINGENBERG [27] (siehe auch [35]) ein PH-Fastring.

2. Es sei  $F$  ein endlicher Körper,  $\phi: F \rightarrow F$  eine bijektive Abbildung mit  $0^\phi = 0$ ,  $(ab)^\phi = a^\phi b^\phi$  (für alle  $a, b \in F$ ) und  $(a+b)^\phi \neq a^\phi + b^\phi$  für wenigstens zwei Elemente  $a, b$ . Solche Abbildungen, die lediglich Isomorphismen der multiplikativen Gruppe sind, gibt es in endlichen Körpern, da die multiplikative Gruppe einerseits zyklisch, andererseits die Automorphismengruppe gleich der Galoisgruppe über dem Primkörper ist. Sei  $R = F \times F$ . Während wir die Addition komponentenweise erklären, führen wir wie folgt eine Multiplikation ein:

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_1 b_2 + a_2 b_1^\phi)$$

Diese Verknüpfung genügt dem Assoziativgesetz:

$$\begin{aligned} ((a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)) \cdot (c_1, c_2) &= (a_1 b_1, a_1 b_2 + a_2 b_1^\phi) \cdot (c_1, c_2) \\ &= (a_1 b_1 c_1, (a_1 b_2 + a_2 b_1^\phi) c_1^\phi + a_1 b_1 c_2) \\ &= (a_1 b_1 c_1, a_1 b_2 c_1^\phi + a_2 b_1^\phi c_1^\phi + a_1 b_1 c_2) \\ (a_1, a_2) \cdot ((b_1, b_2) \cdot (c_1, c_2)) &= (a_1, a_2) \cdot (b_1 c_1, b_1 c_2 + b_2 c_1^\phi) \\ &= (a_1 b_1 c_1, a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_1^\phi + a_2 b_1^\phi c_1^\phi) \end{aligned}$$

Ferner ist das Rechtsdistributivgesetz erfüllt:

$$\begin{aligned} ((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) \cdot (c_1, c_2) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \cdot (c_1, c_2) \\ &= (a_1 c_1 + b_1 c_1, a_1 c_2 + b_1 c_2 + a_2 c_1^\phi + b_2 c_1^\phi) \\ (a_1, a_2) \cdot ((c_1, c_2) + (b_1, b_2)) &= (a_1 c_1, a_1 c_2 + a_2 c_1^\phi) + (b_1 c_1, b_1 c_2 + b_2 c_1^\phi) \\ &= (a_1 c_1 + b_1 c_1, a_1 c_2 + b_1 c_2 + a_2 c_1^\phi + b_2 c_1^\phi); \end{aligned}$$

dagegen gilt nicht notwendigerweise das Links-distributivgesetz:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) \cdot ((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) &= (a_1, a_2) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2) \\ &= (a_1 b_1 + a_1 c_1, a_1 b_2 + a_1 c_2 + a_2 (b_1 + c_1)^\phi) \\ (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) + (a_1, a_2) \cdot (c_1, c_2) &= (a_1 b_1, a_1 b_2 + a_2 b_1^\phi) + (a_1 c_1, a_1 c_2 + a_2 c_1^\phi) \\ &= (a_1 b_1 + a_1 c_1, a_1 b_2 + a_1 c_2 + a_2 b_1^\phi + a_2 c_1^\phi) \end{aligned}$$

Damit ist  $R$  ein Fastring, wobei  $N = \{0\} \times F$ . Offensichtlich gelten 4.2.2 (a), (b).

Sei  $(a_1, a_2) - (b_1, b_2) \in R \setminus N$ , d.h.  $a_1 \neq b_1$  und

$$(x_1 a_1, x_1 a_2 + x_2 a_1^\phi) = (x_1 b_1, x_1 b_2 + x_2 b_1^\phi). \text{ Daraus folgt } x_1 = 0 \text{ und somit}$$

$$x_2 a_1^\phi = x_2 b_1^\phi, \text{ also } x_2 = 0. \text{ Wie 4.2.3 verifiziert man 4.2.4 (a) entsprechend.}$$

Zu 4.2.4 (b) Es sei  $a = (a_1, a_2)$ ,  $b = (b_1, b_2)$  und  $a_1 \neq 0$ . Dann gilt

$$(a_1, a_2) \cdot (a_1^{-1} b_1, x_2) = (b_1, b_2) \text{ mit } x_2 = a_1^{-1} (b_2 - a_2 (a_1^{-1} b_1)^\phi). \text{ Ist dagegen}$$

$$a_1 = 0, \text{ so wählen wir } x_1 = (b_2 a_2^{-1})^{\phi^{-1}}, \text{ sofern } b_1 = 0. \text{ Andernfalls gibt es}$$

$y = (y_1, y_2)$  mit  $by = a$ . Der Beweis von 4.2.4 (c) bleibt dem Leser über-

lassen. Damit ist  $R$  als AH-Fastring nachgewiesen.

Um Informationen über die Idealstruktur eines AH-Fastringes  $R$  zu erhalten, wollen wir noch einige numerische Parameter und ihre interne Kopplung diskutieren. Dabei sei  $R$  ein endlicher AH-Fastring mit maximalem Ideal  $N = mR$ ,  $m^n = 0$ ,  $m^{n-1} \neq 0$ . Wir setzen:

$$r = |R/N|$$

$$q_{i+1} = |m^i R / m^{i+1} R| \text{ für } 1 \leq i \leq n-1$$

4,8 Lemma:

- (a)  $r \mid q_2, q_i \mid q_{i+1}$  für  $2 \leq i \leq n-1$
- (b)  $r \leq q_2 \leq \dots \leq q_n$
- (c)  $q_n = r \Rightarrow$  Für alle  $i \leq n$ :  $q_i = r$
- (d)  $|Rx / (Rx \cap m^{i+1} R)| = r$  für  $x = m^i a$  mit  $a \in U$
- (e)  $r-1 \mid q_{i+1}-1$  für  $1 \leq i \leq n-1$
- (f) Es gilt für  $1 \leq i \leq n-1$ :

$$q_{i+1} = r \Leftrightarrow \forall a \in R \exists b, c \in R: bm^i = m^i a + m^{i+1} c$$

Beweis: (a) Wir setzen:  $\phi_i: m^i a + m^{i+1} R \rightarrow m^i a + m^{i+2} R$ . Wegen 4.5 (d) ist  $\phi_i$  ein injektiver Gruppenhomomorphismus, was (a) beweist. (b), (c) trivial.

(d) Wir setzen:  $\psi_i: a + mR \rightarrow ax + L$  mit  $L = Rx \cap m^{i+1} R$  für  $x = m^i c$ ,  $c \in U$ . Aus  $a - b \in mR$  folgt  $ax - bx = (a-b)x = (a-b)m^i c$ . Somit ist  $\psi_i$  wohldefiniert und offensichtlich surjektiv. Andererseits erhält man aus  $ax = am^i c \in m^{i+1} R$  mit 4.5 (c) sofort  $a \in mR$ , so daß  $\psi_i$  bijektiv ist.

(e)  $Rx / (Rx \cap m^{i+1} R) \cong (Rx + m^{i+1} R) / m^{i+1} R$  ist infolge von (d)  $| (Rx + m^{i+1} R) / m^{i+1} R | = r$ . Ferner gilt:

$$m^i R / m^{i+1} R = \bigcup_{xR = m^i R} (Rx + m^{i+1} R) / m^{i+1} R$$

Sei  $(Rx + m^{i+1} R) / m^{i+1} R \cap (Ry + m^{i+1} R) / m^{i+1} R \neq (0)$ , also

$a_1 x + m^{i+1} a_2 - b_1 y - m^{i+1} b_2 \in m^{i+1} R$ , d.h.  $a_1 x - b_1 y = m^{i+1} c$  für  $a_1, b_1 \in U$ . Sei  $ax \in Rx$  mit  $a \in U$ . Aus  $a_1 x = b_1 y + m^{i+1} c$  erhält man  $ax = aa_1^{-1} (b_1 y + m^{i+1} c)$ . Aus 4.5 (g) folgt  $aa_1^{-1} (b_1 y + m^{i+1} c) - aa_1^{-1} b_1 y = m^{i+1} cd$  für ein  $d \in R$ , d.h.

$ax = aa_1^{-1} b_1 y + m^{i+1} cd$ . Somit gilt:

$$(Rx + m^{i+1} R) / m^{i+1} R = (Ry + m^{i+1} R) / m^{i+1} R. \quad m^i R / m^{i+1} R \text{ wird daher disjunkt}$$

durch Faktorgruppen der Form  $(Rx + m^{i+1} R) / m^{i+1} R$  überdeckt, d.h.  $r-1 \mid q_{i+1}-1$ .

(f) Es sei wie oben  $L = Rm^i \cap m^{i+1} R$ . Aus  $am^i - bm^i \in L$  folgt  $a - b \in mR$ , also  $am^i - bm^i \in m^{i+1} R$ . Daher ist die Abbildung  $\chi_i: Rm^i / L \rightarrow m^i R / m^{i+1} R$  vermöge  $\chi_i(am^i + L) = m^i a_1 + m^{i+1} R$  mit  $am^i = m^i a_1$  wohldefiniert. Ist

$q_{i+1} = r$ , so muß, da  $\chi_i$  injektiv ist,  $\chi_i$  auch surjektiv sein. Die Umkehrung ist offensichtlich.

4.9 Satz: Es sei  $R$  ein AH-Fastring, dessen maximales Ideal  $N$  den Index  $n$  hat, d.h.  $N^n = (0)$ ,  $N^{n-1} \neq (0)$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a)  $R$  ist ein PH-Fastring.

(b)  $q_n = r$

Beweis: (a)  $\Rightarrow$  (b) Nach 4.8 (d) ist  $|Rm^{n-1}| = r$ , andererseits wegen 4.6  $Rm^{n-1} = m^{n-1}R$  und somit  $q_n = r$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a) Ist  $q_n = r$ , so auch mit 4.8 (c)  $q_i = r$ . Sicher ist  $Rm^{n-1} = m^{n-1}R$ , was 4.8 (e) belegt. Den weiteren Beweis führen wir mittels vollständiger Induktion. Es sei  $Rm^{n-j} = m^{n-j}R$  für  $j \leq i-1$  bewiesen. wegen 4.5 (c) wissen wir  $Rm^{n-i} \subseteq m^{n-i}R$ . Andererseits folgt mit 4.8 (f) für  $a \in R$ :  $m^{n-i}a = bm^{n-i} - m^{n-i+1}c$ , nach Induktionsvoraussetzung also  $m^{n-i}a = (b-c_1m)m^{n-i}$  und somit  $m^{n-i}R \subseteq Rm^{n-i}$ . 4.6 liefert dann die Behauptung.

Mit Satz 4.9 sind wir nun imstande, daß Fastring-Analogen eines Ergebnisses von CLARK/DRAKE [6] zu beweisen:

4.10 Satz: Jeder (endliche) AH-Fastring ist ein PH-Fastring.

Beweis: Aufgrund von 4.9 genügt es zu zeigen, daß  $q_n = r$  ist. Wir betrachten zunächst den Fall, daß  $N$  den Nilpotenzindex 2 hat. Wir setzen:

$U_2 = \{u \mid \exists v \in U: vm = mu\}$ . Dabei ist  $U$  die Gruppe der Einheiten, also  $U_2 \leq U$ . Ferner erkennt man:  $Rmu_1 = Rmu_2 \Leftrightarrow u_2u_1^{-1} \in U_2$ , wobei  $u_1, u_2$  Einheiten seien. Aus 4.8(e) folgt:  $(r-1)[U:U_2] = q_2^{-1}$ , also  $[U:U_2] = (r-1)/(q_2-1)$ . Nun gilt aber:  $[U:U_2] \mid |U| = rq_2 - q_2 = (r-1)q_2$ , d.h.  $q_2-1 \mid (r-1)^2 q_2$ , was  $q_2-1 \mid (r-1)^2$  nach sich zieht. Mit  $r \mid q_2$  (4.8(a)) und  $r-1 \mid q_2-1$  (4.8(e)) erhalten wir  $ra = q_2$ ,  $(r-1)b = q_2-1$  mit  $b \leq r-1$ . Daher ist  $rb-b = q_2-1 = ra-1$ , d.h.  $r(b-a) = b-1 \leq r-2$ . Wegen  $b-1 \geq 0$  muß  $b = a$  gelten, also  $b = 1$  und somit  $r = q_2$ .

Sei  $R$  im folgenden ein AH-Ring mit Nilpotenzindex  $n$  und aufgrund der Induktionsannahme  $q_i = r$  für  $i \leq n-1$ . Wie oben setzen wir:

$U_n = \{u \mid \exists v \in U: vm^{n-1} = m^{n-1}u\}$  und erhalten wieder  $[U:U_n](r-1) = q_n-1$ . Aus  $[U:U_n] \mid |U| = r^{n-1}q_n - r^{n-2}q_n$  folgt sofort  $q_n-1 \mid r^{n-2}q_n(r-1)^2$ . Wegen  $(q_n-1, q_n) = 1$  bzw.  $(q_n-1, r) = 1$  ist  $q_n-1$  ein Teiler von  $(r-1)^2$  und wie oben schließt man auf  $r = q_n$ .

### 5. Fastring-Hjelmslev-Ebenen

Nachdem wir in Kapitel 4 ausführlich AH-Fastringe untersucht haben, erhebt sich die Frage nach einer geometrischen Kennzeichnung derjenigen Ebenen, die sich durch AH-Fastringe koordinatisieren lassen.

In affinen Translationsebenen ist der Koordinatenbereich genau dann ein Fastkörper, wenn die Homologien mit der  $y$ -Achse einer Koordinatisierung als Achse transitiv auf der  $x$ -Achse operieren.

Ein ähnliches Ergebnis für AH-Ebenen läßt sich nur nach einer geeigneten Modifizierung der Begriffe beweisen: Im Gegensatz zum affinen Fall können in AH-Ebenen entartete Kollineationen auftreten, die nicht trivial sind. Da außerdem eine Gerade nicht notwendigerweise durch zwei Punkte festgelegt ist, erweist es sich als günstig, Kollineation als Abbildungen der Punkt- und der Geradenmenge einer Ebene in sich zu definieren und die Bedingung der Transitivität einer Menge von Abbildungen auf geometrischen Objekten geeignet zu modifizieren.

Solange Verwechslungen ausgeschlossen sind, unterscheiden wir allerdings in der Bezeichnung die obengenannten Punkt- bzw. Geradenabbildungen nicht.

Wir nehmen nun Bezug auf die in Kapitel 3 erwähnte Koordinatisierung. Dazu werden in einer AH-Ebene  $\mathcal{E}$  drei nicht kollineare, paarweise nicht benachbarte Punkte  $O, X, Y$  ausgewählt, die als Basisdreieck hinsichtlich einer Koordinateneinführung dienen. Wir setzen:

$$OX = [0,0] \quad ("x\text{-Achse}"), \quad OY = [0,0]' \quad ("y\text{-Achse"}).$$

Die Klasse der zu  $[0,0]$  ( $[0,0]'$ ) parallelen Geraden bezeichnen wir mit  $(O)$  bzw.  $(O)'$ .

In Anlehnung an [4, 4.1] definieren wir:

5.1 Def.: Eine Abbildung  $\sigma$  der Punkt- bzw. Geradenmenge einer AH-Ebene heißt  $((O), [0,0]')$  H-Endomorphismus, falls gilt:

- (a)  $\sigma$  ist inzidenzerhaltend.
- (b)  $\sigma$  ist parallelitätstreu.
- (c)  $\sigma(P)' = P$  für alle  $P \in [0,0]'$ .
- (d)  $\sigma(g) = g$  für alle  $g \in (O)$ .

Da H-Endomorphismen nicht benachbarte Punkte in benachbarte überführen können - solche Kollineationen nennen wir entartet - , nicht jedoch in umgekehrter Richtung, ist die Menge  $\Gamma$  der  $((0), [0,0]')$  H-Endomorphismen hinsichtlich der Verkettung als Verknüpfung keine Gruppe.

Ferner erweitern wir den Transitivitätsbegriff für H-Automorphismen aus [4, 4.17] auf H-Endomorphismen.

5.2 Def.: Es sei  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(R)$  AH-Translationsebene mit  $R = (R, +, \cdot, \circ, 0, 1)$  als Biternärring.

$\mathcal{H}$  heißt  $((0), [0,0]')$  transitiv, falls es für jedes  $a, b \in R$  und für Geraden  $g, h$  mit  $(0,0), (1,b) \in g$ ,  $(0,0), (a,b) \in h$  einen  $((0), [0,0]')$  H-Endomorphismus  $\sigma$  mit (a), (b) gibt:

- (a)  $\sigma(1,0) = (a,0)$
- (b)  $\sigma(g) = h$

Ist  $(a,0) \neq (0,0)$ , so ist  $\sigma$  sicher injektiv auf der Punktmenge:

Annahme:  $\sigma(P) = \sigma(Q)$  für Punkte  $P \neq Q$ . Da  $\sigma(g) = g$  für alle  $g \in (0)$  gilt, ferner  $\sigma$  inzidenzerhaltend ist, können wir o.B.d.A. annehmen:  $P, Q \in [0,1]$ . Ferner gehen wir davon aus, daß  $P \sim Q$ , ansonsten konstruiere man gemäß Fig. 9 geeignete Punkte. Schließlich reduzieren wir den Beweis auf den Fall, daß  $P \sim (0,1)$ . Fig. 10 verdeutlicht das Vorgehen.

Sie also  $(1,0)P \cap [0,0]' = X$ ,  
 $(1,0)Q \cap [0,0]' = Y$ , wobei  
 $X \neq Y$  wegen  $P, Q \sim (0,1)$  gilt.  
 Mit  $\sigma(P) = \sigma(Q)$  und  $(a,0) \neq (0,0)$  folgt  $\sigma(X) = \sigma(Y)$ ,  
 im Widerspruch zu 5.1(c), wodurch obige Annahme zum Widerspruch geführt ist.

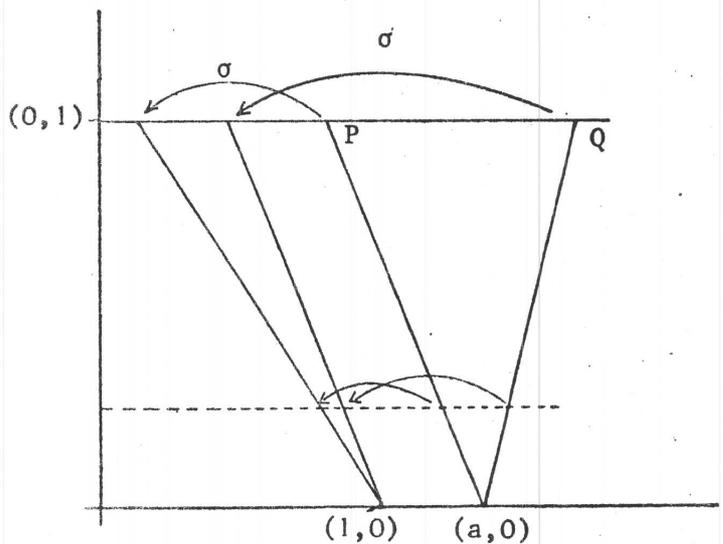


Fig. 9

Unter der Voraussetzung  $(a,0) \neq (0,0)$  und aus Endlichkeitsgründen ist somit  $\sigma$  bijektiv auf der Punkt- bzw. Geradenmenge. Sind  $P, Q$  benachbarte Punkte, so gibt es zwei Geraden  $g, h$   $P, Q$ ; aus der Bijektivität von  $\sigma$  auf der Geradenmenge folgt, daß  $\sigma$  Nachbarschaftstreue und somit ein Automorphismus im Sinne von BACON ist.

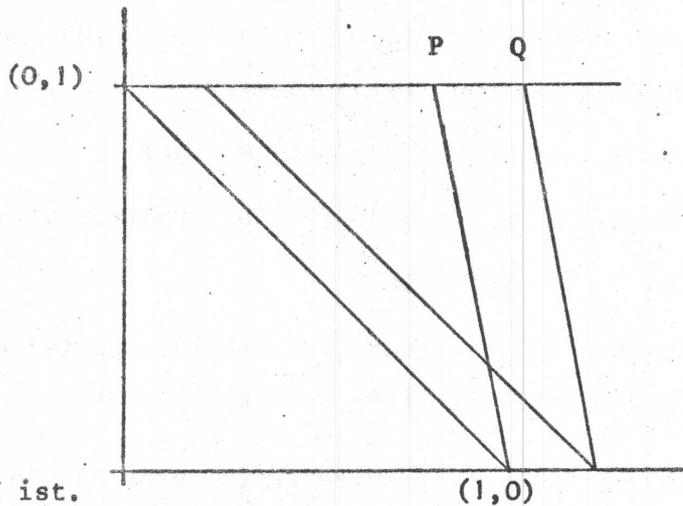


Fig. 10

Ist  $(a,0) \neq (0,0)$ , so ist  $\sigma$  ein Automorphismus und die Bedingung (b) erübrigt sich, da für Automorphismen die Punktabbildung die Abbildung auf der Geradenmenge gemäß (b) festlegt.

5.3 Satz: Für eine AH-Translationsebene  $\mathcal{H}(R)$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a)  $\mathcal{H}$  ist  $((0), [0,0]')$  transitiv,
- (b) Für den Biternärring  $R = (R, +, \cdot, \circ, 0, 1)$  gelten:
  - (1)  $x \cdot y = x \circ y$  für alle  $x, y \in R$ .
  - (2)  $(R, +, \cdot, 0, 1)$  ist ein AH-Fastring.

Beweis: (a)  $\Rightarrow$  (b). Offensichtlich genügt es neben (1) nachzuweisen, daß die Multiplikation in  $R$  assoziativ ist.

Sei  $\sigma$  ein  $((0), [0,0]')$  H-Endomorphismus mit  $(1,0) \rightarrow (a,0)$ .

Für  $a \in R \setminus N$  folgt mit [4, 8.11] sofort  $xa = x \circ a$  bzw.  $(xa)y = x(ay)$  für jedes  $x, y \in R$ . Wir beschränken uns im folgenden daher auf den Fall:  $a \in N$ .

Der nach Voraussetzung existierende H-Endomorphismus ist entartet.

Wir setzen:  $\sigma([u,0]') = [\lambda(u), 0]'$   
 $\sigma([0,v]') = [0, \eta(v)]'$  und daher  
 $\sigma([u,v]') = [\lambda(u), \eta(v)]'$  für Abbildungen

$\lambda, \eta : R \rightarrow R$  mit  $\lambda(1) = a, \eta(0) = 0$ .

Nun gilt:  $(x,y) \in [u,0]'$   $\Leftrightarrow y \circ u = x$ , also  $\sigma(x,y) = (\eta(x), y) \in [\lambda(u), 0]'$ , was  $\eta(x) = y \circ \lambda(u)$  nach sich zieht. Insbesondere ist für  $u = 1$ , d.h.  $x = y$

(3)  $\eta(x) = x \circ a$

Sei nun  $az = b$  für beliebiges  $z \in R$ . Dann ist  $(0,0), (1,b) \in [b,0]$ ,  
 $(0,0), (a,b) \in [z,0]$ . Somit gibt es nach Voraussetzung einen H-Endomorphismus  
 mit  $(1,0) \mapsto (a,0), [b,0] \mapsto [z,0]$ . Aus  $(x,y) \in [b,0]$ , also  $xb = y$ ,  
 folgt mit (3)  $\sigma(x,y) = (\eta(x),y) = (x \circ a, y) \in [z,0]$ , also

$$(4) \quad (x \circ a)z = y = xb = x(az)$$

Mit  $z = 1, a = b$  und 3.2.1(b) erhalten wir:

$$(5) \quad x \circ a = xa$$

wodurch (1) bewiesen ist. Mit (5) und (4) erkennt man, daß das Assoziativ-  
 gesetz für beliebiges  $a \in R$  erfüllt ist.

(b)  $\Rightarrow$  (a) Es sei  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(R)$  eine AH-Translationsebene, deren Biternär-  
 ring  $R$  die Bedingungen (1) und (2) erfüllt. Wir belegen nun die Existenz  
 eines  $((0), [0,0]')$  H-Endomorphismus mit (a). Sei also  $(0,0), (1,b) \in g$ ,  
 $(0,0), (a,b) \in h$ . Als Punktabbildung setzen wir:  $\sigma(x,y) = (xa,y)$ . Es ist  
 $g = [b,0]$ . Ist  $h = [z,0]$ , also  $az = b$ , so gilt:  $(x,y) \in g \Rightarrow \sigma(x,y) \in h$ ,  
 nämlich aus  $xb = y$  folgt mit (2)  $(xa)z = x(az) = xb = y$ . Ist dagegen  
 $h = [z,0]'$ , also  $b \circ z = a = bz$ , so erhalten wir aus  $xb = y$  stets  
 $(xb)z = x(bz) = xa$ , d.h.  $(x,y) \in [b,0]$  impliziert  $(xa,y) \in [z,0]'$ .

Für die übrigen Geraden legen wir die Geradenabbildung wie folgt fest:

1. Fall: Sei  $k = [u,v]'$ , setze  $\sigma(k) = [ua,va]'$ . Diese Zuordnung respektiert  
 die Inzidenz.

2. Fall: Sei  $k = [u,v]$ . Aufgrund der Assoziativität und Lemma 4.1 unter-  
 scheiden wir die sich gegenseitig ausschließenden Möglichkeiten:

$az_1 = u$  für ein  $z_1 \in R$  oder  $uz_2 = a$  für ein  $z_2 \in N$ . Im ersten Fall setzen  
 wir:  $\sigma(k) = [z_1, v]$ , da  $xu+v = y = x(az_1)+v = (xa)z_1+v$ . Im anderen Fall  
 sei  $\sigma(k) = [z_2, -vz_2]'$ , denn aus  $xu+v = y$  ergibt sich  
 $yz_2 - vz_2 = (xu+v)z_2 - vz_2 = (xu)z_2 = x(uz_2) = xa$ .

Damit ist der Beweis von 5.3 erbracht.

5.4 Def.: Eine AH-Translationsebene  $\mathcal{A}$  heißt AH-Fastringebene, falls  
 $\mathcal{A}$  durch einen AH-Fastring koordinatisierbar ist.

Nun sind wir imstande, die Beziehungen zwischen den Kongruenzrelationen in  
 AH-Fastringebenen und den Idealen des zugehörigen Fastringes herzustellen.

5.5 Satz: In einer AH-Fastringebene  $\mathcal{A}(R)$  induziert eine Menge  $I \subseteq R$   
 gemäß 3.5 genau dann eine Kongruenzrelation, wenn  $I$  Rechtsideal des  
 AH-Fastringes  $R$  ist.

Beweis: Ist  $\tau$  eine Kongruenzrelation, so ist wegen 3.5 (I) und (II) die Menge  $I$  ein Rechtsideal. Daher reduziert sich der Beweis von 5.5 auf die Herleitung, daß Rechtsideale eines AH-Fastringes die Bedingungen

- (III) Für alle  $a, b, x \in R$ :  $a - b \in I \Rightarrow xa - xb \in I$
- (IV) Für alle  $a, b, x \in R$ :  $x \in R \setminus N$ ,  $xa - xb \in I \Rightarrow a - b \in I$
- (V) Für alle  $a, b \in R$ :  $a - b \in N \setminus I \Rightarrow \exists x \notin I$ :  $xa - xb \in I$
- (VI) Für alle  $a, b, x \in R$ :  $a - b \in R \setminus N$ ,  $xa - xb \in I \Rightarrow x \in I$
- (VII) Für alle  $a, b, x \in R$ :  $x \in N$ ,  $-a + axb \in I \Rightarrow a \in I$

erfüllen; dabei haben wir berücksichtigt, daß die beiden Multiplikationen des Biternähringes  $R$  infolge von 5.3 zusammenfallen.

Nach 4.5 (h) ist jedes Rechtsideal zweiseitig, daher ist (III) erfüllt. Mit (III) und  $x^{-1} \in R \setminus N$  erhält man aus  $x^{-1}xa - x^{-1}xb \in I$  sofort  $a - b \in I$ , also genügt ein Rechtsideal  $I$  der Bedingung (IV).

Um (VI) nachzuweisen, gehen wir wie folgt vor: Durch  $x \mapsto xa - xb$  wird ein Gruppenhomomorphismus  $\phi : N \rightarrow N$  definiert. Ist  $xa = xb$ , so erhält man mit 4.2.3 und  $a - b \in R \setminus N$  stets  $x = 0$ , d.h.  $\phi$  ist injektiv und somit ein Automorphismus. Da aus  $x \in I$  stets  $xa - xb \in I$  folgt, ist somit (VI) erfüllt und wegen  $xb^{-1} \in R \setminus N$  auch (VII).

Zum Nachweis von (V): Es sei  $a - b \in N \setminus I$  und wir nehmen an:  $xa - xb \in I \Rightarrow x \in I$ . Durch  $x + I \mapsto xa - xb + I$  wird ein Gruppenhomomorphismus  $\psi : N/I \rightarrow N/I$  erklärt, der aufgrund der Annahme ein Automorphismus sein muß. Es sei  $p \in R \setminus N$ . Mit  $a - b \in N \setminus I$  ist  $pa - pb \in N \setminus I$  (IV). Somit gibt es  $x \in N$  mit  $xa - xb - pa + pb \in I$ , also  $(x-p)a - (x-p)b \in I$ . Andererseits liefert die Bedingung (IV) wegen  $x-p \in R \setminus N$  sofort  $a - b \in I$ , was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Daher ist die Annahme zu verwerfen.

5.6 Folgerung: Es sei  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(R)$  eine AH-Fastringebene, wobei das maximale Ideal  $N$  von  $R$  den Nilpotenzindex  $n$  habe. Dann ist  $\mathcal{A}$  eine AH-Ebene des Typs  $n$ .

Da AH-Fastringe stets PH-Fastringe sind (4.10), erhalten wir abschließend mit 5.5, 5.6, 2.8 und 2.19 das folgende Ergebnis:

5.7 Folgerung: Jede AH-Fastring-Ebene  $\mathcal{A}(R)$  ist eine AH-Ebene  $n$ -ter Stufe.

Da der Parallelismus einer Translationsebene gleichmäßig ist, ist  $\mathcal{A}(R)$  in eine PH-Ebene  $n$ -ter Stufe einbettbar.

6. Literatur

- [ 1 ] ARTMANN, B.: Hjelmslev-Ebenen mit verfeinerten Nachbarschaftsrelationen, Math.Z. 112 (1969), 163-180.
- [ 2 ] ARTMANN, B.: Existenz und projektive Limiten von Hjelmslev-Ebenen n-ter Stufe, Atti del Convegno "Geometria Combinatoria, Perugia 1971.
- [ 3 ] BACON, PH.Y.: Strongly n-uniform and level n Hjelmslev planes. Math. Z. 127 (1972), 1-9.
- [ 4 ] BACON, PH.Y.: Coordinatized Hjelmslev planes, Diss. Gainesville, Florida, 1974.
- [ 5 ] BRUCK, R.H.: Finite nets II. Uniqueness and embedding, Pacif. J. Math. 13 (1963), 421-457.
- [ 6 ] CLARK, W. EDWIN; DRAKE, D.A.: Finite chain rings. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 39 (1973), 147-153.
- [ 7 ] CRAIG, R.T.: Extension of finite projective planes, I-Uniform Hjelmslev planes. Canad. J. Math. 16 (1964), 261-266.
- [ 8 ] CRONHEIM, A.: Cartesian groups, formal power series and Hjelmslev planes. Archiv der Math. 27 (1976), 209-220.
- [ 9 ] CYGANOVA, V.K.: On the impossibility of introducing universally understood Configurational propositions into a projective plane with neighbor elements (p. 35-43) Ternary rings of affine Hjelmslev planes (p. 44-69). Smolensk Gos.Ped.Inst. Ucen. Zap. 18 (1967). (Russisch) MR 42 Nr. 3665.
- [10] DEMBOWSKI, P.: Finite Geometries. Ergebnisse der Mathematik 44, Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1968.
- [11] DRAKE, D.A.: On n-uniform Hjelmslev planes. J. Combinatorial Theory 9 (1970), 267-288.
- [12] DRAKE, D.A.: Near affine Hjelmslev planes. J. Combinatorial Theory 16 (1974), 34-50.
- [13] DRAKE, D.A.: Nonexistence results for finite Hjelmslev planes, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 40 (1974), 100-110.
- [14] DRAKE, D.A.: Existence of parallelisms and projective extensions for strongly n-uniform near affine Hjelmslev planes. Geometriae Dedicata 8 (1974), 191-214.
- [15] DRAKE, D.A.: Affine Hjelmslev-Ebenen mit verfeinerten Nachbarschaftsrelationen, Math. Z. 143 (1975), 15-26.
- [16] DRAKE, D.A.: More new integer pairs for finite Hjelmslev planes. Ill. J. Math. 19 (1975), 618-627.

- [17] DRAKE, D.A.: Charakterisierungen der Hjelmslev-Ebenen mit Invarianten  $(4,2)$ . Archiv der Math. 27 (1976), 436-440.
- [18] DRAKE, D.A.: Constructions of Hjelmslev planes. Erscheint in J. Geometry.
- [19] DRAKE, D.A.; HALE, M.P.: Group constructible  $(t,k)$ -nets and Hjelmslev planes. Preprint 1976, Gainesville (Florida)
- [20] DRAKE, D.A.; LENZ, H.: Finite Klingenberg planes, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 44 (1975), 70-83.
- [21] DRAKE, D.A.; SHULT, E.E.: Construction of Hjelmslev planes from  $(t,k)$ -nets. Erscheint in Geometriae Dedicata.
- [22] DRAKE, D.A.; TÖRNER, G.: Die Invarianten einer Klasse projektiver Hjelmslev-Ebenen. Erscheint in J. Geometry.
- [23] DUCAS, M.: Charakterisierung endlicher desarguesscher uniformer Hjelmslev-Ebenen. Geometriae Dedicata 3 (1974), 295-324.
- [24] HJELMSLEV, J.: Die Geometrie der Wirklichkeit. Acta Math. 40 (1916), 33-66.
- [25] HJELMSLEV, J.: Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre I-VI, alles in: KGI. Dansk. Vid. Selsk. Math. Fys. Medd. I. Mitt.: 8 (1929); II. Mitt. 10 (1929); III. Mitt. 19 (1942), no. 12; IV. Mitt. 22 (1945), no. 6; V. Mitt. 22 (1945), no. 13; VI. Mitt. 25 (1949), no. 10.
- [26] HUGHES, D.R.; PIPER, F.C.: Projective planes. Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1973.
- [27] KLINGENBERG, W.: Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen. Math. Z. 60 (1954), 384-406.
- [28] KLINGENBERG, W.: Desarguessche Ebenen mit Nachbarelementen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 20 (1955), 97-111.
- [29] LORIMER, J.W.: Coordinate theorems for affine Hjelmslev planes. Ann. Mat. Pura Appl. 105 (1975), 171-190.
- [30] LORIMER, J.W.; LANE, N.D.: Morphisms of affine Hjelmslev planes. Atti. Accad. Naz. Lincei. Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Matur Sez. I 56 (1974), 880-885.
- [31] LÜNEBURG, H.: Affine Hjelmslev-Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. 79 (1962), 260-288.
- [32] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 2. Auflage, 1975.
- [33] SEIER, W.: Über Hjelmslev-Strukturen, Abh. Math. Sem. Hamburg, I 42 (1974), 107-133; II 42 (1974), 236-254.

- [34] TARRY, G.: Le problème des 36 officiers. C.R. Assoc. Franc, Avanc. Sci. nat. 1 (1900), 122-123; 2 (1901), 170-203.
- [35] TÖRNER, G.: Eine Klassifizierung von Hjelmslev-Ringen und Hjelmslev-Ebenen. Mitt. Math. Sem. Gießen 107 (1974),
- [36] TÖRNER, G.: Über Homomorphismen projektiver Hjelmslev-Ebenen. J. Geometry 5 (1974), 1-13.
- [37] TÖRNER, G.: Homomorphismen von affinen Hjelmslev-Ebenen. Math. Z. 141 (1975), 159-167.
- [38] TÖRNER, G.: Bemerkungen zu (6,2)-Hjelmslev-Ebenen. Mitt. Math. Sem. Gießen 121 (1976), 93-101.
- [39] TÖRNER, G.: n-uniforme projektive Hjelmslev-Ebenen sind stark n-uniform. Erscheint in Geometriae Dedicata.
- [40] ZEMMER, J.L.: Valuation near-rings. Math. Z. 130 (1973), 175-188.