BELLA FIGURA IN UDINE!

VON PATRIZIO NEFF

Vom 24. bis 28. September 2007 fand in Udine ein CISM-Kurs mit dem Titel: "Poly-, Quasi- and Rank-One Convexity in Applied Mechanics" statt. Vielen Lesern ist Udine und CISM sicherlich schon bekannt. Für die Leser, welche Udine jedoch noch nicht kennen oder noch nicht an einem CISM-Kurs teilgenommen haben: Udine ist eine Stadt in der Region Friaul-Julisch Venetien im Nordosten Italiens und mit ca. 100.000 Einwohnern die zweitgrößte der Region. Die Stadt liegt malerisch zwischen den Südalpen und der Adria, nur 20 Kilometer von der slowenischen Grenze und Triest entfernt. CISM steht für Centre International des Science Mecaniques (http://www.cism.it) und ist eine 1968 gegründete gemeinnützige Organisation zur Förderung der mechanischen Wissenschaften. Im Renaissance-Palazzo del Torso, mitten im Zentrum von Udine, finden regelmäßig wissenschaftliche Veranstaltungen größtenteils wöchentlich statt. Begleitend zu den angebotenen Kursen ist es Tradition, einen Tagungsband im Springer-Verlag zu veröffentlichen. Diese Bände haben zur exzellenten Reputation von CISM beigetragen.

Verallgemeinerte Konvexitätsbedingungen haben sich als ein Schlüsselbegriff für die Behandlung vieler ingenieurrelevanter Problemstellungen herausgestellt. Insbesondere der zuerst von John Ball Ende der Siebziger Jahre eingeführte Begriff der Polykonvexität erlaubte zum erstenmal die Existenz von Minimierern von realistischen Variationsfunktionalen bei endlichen elastischen Verzerrungen zu beweisen. Ein Teil des Kurses widmete sich daher der Analyse dieses Begriffs und verwandter Konvexitäts-Begriffe, der andere Teil wandte sich der mathematischen Anwendung der Konvexitätsbegriffe auf Probleme mit dünnen Strukturen zu. Herrn Schröder und mir als Organisatoren war es gelungen, eine Reihe von international herausragenden Wissenschaftlern für diesen Kurs und zu diesem Thema zu gewinnen. Es trugen (in alphabetischer Reihenfolge) mit jeweils 5*45 Minuten vor: Sir John Ball (ehemaliger Präsident der Internationalen Mathematischen Union, Oxford), Antonio de Simone (Triest), Patrizio Neff (Darmstadt), Annie Raoult (Paris), Jörg Schröder (Essen), Miroslav Silhavy (Prag) und David Steigmann (Berkeley).

John Ball begann den Kurs mit einem faszinierenden Überblick über die offenen Probleme der nicht-linearen Elastizität. Die verständliche Entwicklung der Themen, die Beiläufigkeit, mit der schwierigste Konzepte klar eingeführt wurden, bezeugten eindrucksvoll die Meisterschaft von Ball auf diesem, „seinem", Gebiet! Das Auditorium war begeistert. Es ist unmöglich hier auch nur ansatzweise die Fülle der Einsichten zu rekapitulieren. Anni Raoult stellte an der Tafel ihren Beweis zur Nicht-Elliptizität der SVK-Energie vor. Danach zeigte sie, wie man unter geschickter Ausnutzung von algebraischen Beziehungen sogar die quasikonvexe Hülle dieser Energie ausrechnen kann. Sie wendete sich sodann der Dimensionsreduktion von klassischen dreidimensionalen Energiefunktionalen zu. Dafür motivierte und benutzte Sie die Γ- Konvergenz. Im Ergebnis stellt sich eine Membran ein, welche einer Kompression keinen Widerstand entgegensetzt. Dabei wird klar, dass das erhaltene Membranmodell nur die Spannungen, aber nicht die Deformation richtig wiedergibt. Die tatsächliche Membran würde unter Kompression ausbeulen. Der Γ- Limes beinhaltet einen Quasikonvexifizierungsschritt, welcher für dieses Verhalten verantwortlich ist.

Jörg Schröder legte den kontinuumsmechanischen Grundstein, indem er die Zuhörer auf das Gebiet der Darstellungstheorie von isotropen Tensorfunktionen einstimmte. Diese Darstellungssätze werden gebraucht, um anisotropes Materialverhalten mittels Invarianten auf einem erweiterten Satz von Variablen auszudrücken Damit gelingt die Konstruktion von anisotropen, polykonvexen Funktionen, die dann bei der numerischen Berechnung von z.B. Arterienwänden Verwendung finden. Weiterhin wurden die eingeführten Invarianten auch ingenieur-mechanisch interpretiert. Mit eindrucksvollen Animationen des Deformationsverhaltens dünner, anisotroper Schalen dokumentierte er den Stand der Technik.

Antonio de Simone untersuchte analytisch und numerisch geometrisch exakte Modelle zur Beschreibung von Liquid-Crystal Elastomers. Dabei stellte er zuerst ausgiebig die experimentellen Befunde vor. Es zeigt sich ein ausgeprägter Einfluss der Mikrostruktur auf das makroskopische Antwortverhalten. Die Mikrostruktur zeigt zudem ein ausgeprägtes richtungsabhängiges Verhalten. In einem ersten Schritt der Vereinfachung wird angenommen, dass sich das Material einem Energieprinzip entsprechend verhält. Aus den klassischen Darstellungssätzen lässt sich sodann eine kanonische freie Energie konstruieren, welche aber nicht quasikonvex ist. Ziel ist es jetzt, die quasikonvexe Hülle zu bestimmen. Dies gelingt de Simone wie folgt: man finde zuerst die Rang-Eins-Hülle und zeige sodann, dass sie mit der polykonvexen Hülle übereinstimmt. Hier fließt sehr viel physikalisches Verständnis ein. Danach ist die gefundene Hülle Basis einer FEM-Implementation. Klar ist, dass die Elliptizität erhalten bleibt. Nun zeigen sich aber die Grenzen der gewählten Methode: die Hülle selbst ist

sehr „flach", so dass weitere numerische Änderungen notwendig werden. Zuletzt erweitert de Simone das System um dissipative Effekte; konkrete numerische Resultate stehen dafür aber noch aus.
David Steigmann befasste sich mit Theorien für Membrane und Schalen sowie der Handhabung des Biotschen Verzerrungstensors. Für den zweidimensionalen Membranfall stellte er die Pipkinsche Methode vor, um zu relaxierten, quasikonvexen Energiefunktionalen zu kommen. Steigmann ging dann auf Formeln zur Berechnung des Biotschen Verzerrungstensors ein und konnte zeigen, wie man elegant mit dieser Größe rechnet. Insbesondere ist es mit den von ihm gezeigten Formeln möglich, Polykonvexität für anisotrope Ausdrücke zu überprüfen. Daran anschließend stellte Steigmann eine Schalentheorie höherer Ordnung vor, welche sich in das Umfeld des noch immer ungelösten Problems einer physikalisch korrekten, gleichzeitigen Beschreibung von Membran und Biegung einordnen lässt.
Miroslav Silhavy skizzierte im ersten Teil seiner Vorlesungen die verschiedenen Konvexitätsbedingungen, insbesondere für objektive und isotrope Energiefunktionen. Er stellte Beziehungen zwischen der Legendre-Hadamard Elliptizitätsbedingung und der Baker-Eriksen Ungleichung her und formulierte notwendige und hinreichende Kriterien für die Rang-Eins-Konvexität. Desweiteren stellte Silhavy allgemeine Methoden vor, um die quasikonvexe Hülle einer Energiefunktion zu bestimmen. Silhavy verdeutlichte, dass bis auf Modifikationen des Sverakschen Gegenbeispiels alle elliptischen Funktionen auch quasikonvex sind. Die Umkehrung ist sowieso klar. Mit den von ihm in diesem Teil vorgestellten Methoden (insbesondere sogenannte Interlacing-Ungleichungen zwischen gewissen Eigenwerten) konnten einige bereits vorgestellte Resultate als Spezialfälle abgehandelt werden. Zum Beispiel ergibt sich die von de Simone angegebene quasikonvexe Hülle ganz zwanglos. Im zweiten Teil ging Silhavy auf die Frage nach den richtigen Konvexitätsbedingungen für Interface-Energie Terme ein.
Meine Vorlesungen begann ich mit grundsätzlichen Konzepten zur Konvexität, wobei ich insbesondere auf Fallstricke einging, die der erfolgreichen Anwendung der Methoden im Wege stehen. So reicht z.B. die Überprüfung auf Positivität der formalen zweiten Ableitung eingeschränkt auf positiv definite Inkremente keineswegs aus. Ich rekapitulierte auch, wie man geschickt die Taylor-Entwicklung ansetzt, um, unter Umgehung der Index-Rechnung, erste und zweite Ableitungen zu berechnen. Damit kann man dann typischerweise die Nicht-Elliptizität von vielen in der Ingenieurliteratur gern verwendeten Ausdrücken zeigen. Im letzten Teil meiner Vorlesung stellte ich die Dimensionsreduktion eines dreidimensionalen finiten Cosserat Modells mithilfe der Methode der Γ- Konvergenz vor. Zuerst führte ich das zugrunde liegende Modell ein, welches zusätzliche Rotationsfreiheitsgrade aufweist. Dann wendete ich, angelehnt an Raoults Vorgehen, eine Membranskalierung an, um den Γ- Limes für die Dicke gegen Null zu bestimmen. Der Γ- Limit weist eine unübliche Defizienz auf: er ist nicht wohlgestellt! Die Gründe dafür wurden in einer Gegenüberstellung zu einer formalen Dimensionsreduktion erörtert. Das „formale" Modell geht nach Linearisierung in das wohlbekannte Reissner-Mindlin Modell über.
Die Organisatoren danken allen Vortragenden und den 59 Teilnehmern aus 13 Ländern, die zum Erfolg dieses Kurses beigetragen haben.

Dr. rer. nat. habil. Patrizio Neff
Technische Universität Darmstadt
FB Mathematik, AG 6
Schlossgartenstr. 7
D-64289 Darmstadt
Germany
e-mail: neff@mathematik.tu-darmstadt.de