

Überlegungen zu einer Vorlesung: Modellieren für das Lehramt

Patrizio Neff, TU DARMSTADT

**Vorstellungsvortrag Universität Duisburg-Essen
23.5.06**

Übersicht

- Vorbemerkungen
- Lehrplan Sek. II-NRW, Umfeld und Voraussetzungen
- Was ist Modellieren, Abgrenzung der Vorlesung
- Paradigma der Nichtlinearität, Ziele der Vorlesung
- Gliederung, Stoffauswahl, Verzahnung und Ausbau
- Abgrenzung zur Stochastik, Lehrplan Sek. II-NRW
- Eigene Vorstellungen zur Stochastik

Vorbemerkungen I

- Alle Bereiche von Wissenschaft und Technik sind von Mathematik durchdrungen
- Differentialgleichungssysteme repräsentieren Großteil unseres "Weltwissens"
- Fortschritt der Wissenschaft = zunehmende Mathematisierung mit Modellen
- Entwicklung der Analysis angetrieben vom Bedürfnis, DGL zu lösen
- schmerzlicher Verlust der Einheit von Modellierung/Anwendung und Analysis
- Euler und Gauß verkörpern beides in einer Person, Hilbert ist stark von der Physik/Mechanik inspiriert

Vorbemerkungen II

- Lehrer sollen die Bedeutung ihres Faches vermitteln
- Lehrer sind dabei oft überfordert, es mangelt an Wissen um die Bedeutung von "relevanter" Mathematik
- PISA-Schock
- Der zunehmende, gewollte Einsatz von Computern in der Schule entlastet vom Drill von Verfahren und ermöglicht, die Modellbildung, das Herstellen von Bezügen und Finden von Zusammenhängen stärker zu betonen
- und stellt daher höhere Anforderungen an die Kompetenz der Lehrer
- Differentialgleichungen sind fundamentale Ideen im Sinne von Mathematisierungsmustern, auch in der Schule

Lehrplan Sek. II

- "grundlegende Kompetenzen im Umgang mit mathematischen Systemen, Verfahren, Modellen (erwerben)"
- "denken in übergreifenden Zusammenhängen und komplexen Strukturen"
- "Verbindungen stiften zwischen mathematischer und außer-mathematischer Kultur"
- "mathematische Modelle kennenlernen, entwickeln, verwenden"
- "Mathematik in Beziehung setzen zu Phänomenen der Welt"
- "Darstellung von Wachstumsprozessen mit Exponentialfunktionen"

Umfeld und Voraussetzungen

- Modellieren 4+2 als Basisveranstaltung im Hauptstudium des Lehramts
- Umstellung Bachelor/Master: Voraussetzung (nur) Analysis I/II und Lineare Algebra I/II
- Spagat der Lehramtsstudenten zwischen zwei gleichberechtigten Fächern
- rein technische Anforderungen niedrig halten, Leitideen vermitteln
- Vorrang der Anschaulichkeit vor übertriebener mathematischer Strenge, historische Perspektive vielfach hilfreich
- inhaltlich: "weniger ist mehr" und "so einfach wie möglich, aber nicht einfacher"

Was ist und was soll Modellieren sein

- Modellieren ist kreativer Vorgang, nicht nur Abstraktion der Realität
- kein mechanistisches Verständnis von Modellierung
- Modellieren = Komponieren
- Bsp. Maxwell-Gleichungen, Relativitätstheorie
- Verpflichtung des Mathematikers, die "richtigen" Gleichungen aufzustellen
- Analyse der Gleichungen ist nachgeordneter Schritt

Was die Vorlesung nicht ist - eine Abgrenzung

- Kein Ersatz für Analysis III
- Keine "höhere Mathematik für das Nebenfach"
- disjunkt zu "Stochastik für höheres Lehramt"
- keine "Didaktik des Modellierens mit Schülern"
- aber: Modellierungswochen mit Schülern wie in Darmstadt?
- keine Einführung in ein spezielles Teilgebiet der Mathematik
- Zusatzvorlesung für Hauptfach Mathematik und Ingenieurwissenschaften?

Paradigma der Nichtlinearität und Komplexität

- Wirklichkeit wird immer komplexer
- Verlust der prinzipiellen Vorhersagbarkeit
- Gründe der Komplexität: viele beteiligte Prozesse (Statistik) und Nichtlinearitäten
- Chaostheorie, Wettervorhersage, dynamische Systeme
- Lineare Modelle allein nicht mehr angemessen
- Mathematik hat sich zu lange an linearen Modellen abgearbeitet

Ziele der Vorlesung

- Modellbilden erlernen, aber nicht primär Verstehen von gebildeten Modellen
- Mit Differentialgleichungen das Paradigma der Nichtlinearität aufzeigen
- Einblicke in anwendungsrelevante Teilbereiche der Mathematik und ihrer Methoden geben
- Für die Möglichkeiten der Mathematik begeistern, Freude an der Analysis (wiederentdecken?) wecken
- Grenzen der Methoden und spezieller Techniken aufzeigen
- Zusammenschau der Methoden aus Analysis und Algebra: Vorwissen verzahnen und festigen, damit das Lehramt fachlich stärken

Gliederung der Vorlesung

- Modellieren mit gewöhnlichen Differentialgleichungen
- Dimensionen, Skalierungen
- Regulär gestörte Probleme und asymptotische Entwicklungen
- Mathematische Modellierung von Strömungen
- Partielle Differentialgleichungen (elementar)
- Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

Modellieren mit gewöhnlichen Differentialgleichungen

- Übergang diskret nach kontinuierlich, Wachstumsprozesse
- Richtungsfeld, Tangenten, Phasenportraits
- rückgekoppelte, nichtlineare Systeme
- Studium von Modellvarianten im Räuber-Beute-System
- Lokale Linearisierung/Approximation: Stabilität von Ruhepunkten
- Wesen der Ableitung als Linearisierung
- keine Kochrezepte für ODE

Dimensionen und Skalierungen

- kleine dimensionslose Parameter
- Buckingham Π -Theorem
- Zusammenspiel von physikalischen Prozessen mit Einheiten
- Abstraktion: groß - klein
- nichtlineare Funktionen "leben" nur auf entdimensionierten Größen
- Skalierung von Gleichungen
- $\vartheta = \arcsin\left(\frac{g}{h}\right)$ dimensionsloser Winkel
- Schwingungsdauer eines Pendels

Regulär gestörte Probleme und formale asymptotische Entwicklung

- $x^2 + hx - 1 = 0$, h klein und dimensionslos
- asymptotische Entwicklung der Lösung nach h
- formale Übertragung des Prinzips auf gewöhnliche DGL
- Beispiel: Wurf einer Masse senkrecht zur Erdoberfläche
- R Erdradius, l typische Höhe über Oberfläche, $h = \frac{l}{R}$, klein und dimensionslos
- Finde maximale Höhe mit asymptotischer Entwicklung ohne (!) die DGL zu lösen
- Wiederhole Koeffizientenvergleich, Potenzreihenentwicklung

Mathematische Modellierung von Strömungen

- Keine Einführung in Navier-Stokes Gleichungen
- Thematisiert: Beziehung zwischen Modell und Wirklichkeit
- Vergleich: Modellströmung in Labor und Realität
- gekoppelte, nichtlineare PDE-Systeme
- Dimensionsanalyse liefert Kenngrößen
- Reynoldszahl
- Abstraktion: Honig-Wasser, schnell-langsam
- Übertragung der Modell-Lösung in die Wirklichkeit ist selbst komplex!

Partielle Differentialgleichungen (elementar)

- Einführung, simple Klassifikation und Beispielliste für PDE
- Linearität, Superpositionsprinzip
- Ein paar einfache Beispiele zur Lösung von PDE (Auftreten einer unbestimmten Funktion)
- Transportgleichung und Travelling-Wave Lösung
- eindimensionale Wellengleichung, d'Alambertsche Lösungsformel
- Wohlgestelltheit im Sinne von Hadamard
- Koordinatenwechsel und Transformation einer PDE

Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

- Komplette lösbar durch Zurückführung auf ODE
- Charakteristisches System und Höhenlinien
- Lösungsverfahren
- Abhängigkeit von Funktionen, Integralbasis
- Verkehrsflussmodellierung liefert Transportgleichung
- Anknüpfungspunkte an Numerik

Lehrplan Statistik Sek II-NRW

- "grundlegende Fragestellungen der beurteilenden Statistik rücken in das Zentrum des Interesses"
- "Schüler sollen lernen, (wie beurteilende Statistik dabei hilft) rationale Prognosen zu erstellen"
- "(Schüler sollen) statistische Aussagen verstehen"
- "(die beurteilende Statistik wird repräsentativ gelehrt durch) das Testen von Hypothesen und das Schätzen von Parametern"
- "der Bezug zur Analysis kann über die Betrachtung stetiger Verteilungen erfolgen"

Eigene Vorstellungen zur Stochastik I

- Näher am Schulunterricht als die Modellierungsvorlesung
- maßtheoretische Fragen nur für interessierte Studenten, axiomatisch-deduktives Vorgehen nicht zu sehr betonen
- schneller Übergang von Würfeln und Urnen zur beurteilenden Statistik
- Voraussetzungen (nur): absolute Konvergenz von Reihen, Kenntnis uneigentlicher Riemann-Integrale
- verstärkt Zufallsvariablen mit (sogar stetigen) Dichten betrachten
- möglichst anwendungsbezogen und praxisorientiert
- statistische Ideen vermitteln: z.B. Median/arithmetisches Mittel, Robustheit als zentraler Begriff

Eigene Vorstellungen zur Stochastik II

- Diskussion: kleinste Fehlerquadrate und Normalverteilungen
- Diskussion: Normalverteilung und Maximum-Likelihood Methoden
- Verzahnung von Statistik mit Analysis, z.B. Dichte der Normalverteilung als Lösung der DGL $\varphi'(x) = -x \varphi(x)$,
 $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$
- Brücke zur Integralrechnung über Erwartungswert und Varianz
- Erwartungswert = Schwerpunkt, Varianz = Drehmoment,
Wahrscheinlichkeitsverteilung = Massenverteilung
- Steinersche Regel $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- Projektseminare: statistische Auswertungen mit dem Computer
(Monte-Carlo)

Ausblick

- Lehrerfortbildung in beiden Gebieten: Modellieren und Stochastik
- Projektseminare
- Modellierungswochen für Schüler (Vorbild Darmstadt?)
- Stärkung des intellektuellen Selbstvertrauens der Lehrer durch fachliche Stärkung
- Organisation von Besuchsprogrammen bei Firmen: kennenlernen, was "relevante" Mathematik ist
- Wozu braucht der Ingenieur Mathematik? Besuche in den technischen Nebenfächern