

Ein stationärer Wirbelring als schwache
Lösung der Eulergleichung im beschränkten
Gebiet.

DIPLOMARBEIT

vorgelegt von

Patrizio Neff
Fachbereich Mathematik

Prüfer:

Prof. Dr. H. D. Alber,
AG 6 Partielle Differentialgleichungen und anwendbare
Analysis.

6. November 1995

Technische Hochschule Darmstadt

Inhaltsverzeichnis

1	Strömungsmechanik	5
1.1	Notation	5
1.2	Die Eulergleichungen	5
1.3	Zylinderkoordinaten	9
1.3.1	Argument und Basis-Transformation	9
1.3.2	Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten	11
1.4	Ebene Strömung	14
1.5	Stokesche Stromfunktion	14
1.6	Ein Wirbelring	16
1.7	Wirbel-Torus im beschränkten Gebiet	17
1.8	Differentialgleichung	18
2	Sobolevtheorie	21
2.1	Stetige Einbettungen	21
2.2	Kompakte Einbettung	29
2.3	Der Hilbertraum $H^\bullet(\Omega)$	34
2.4	Stetigkeit zwischen L_p -Räumen	36
2.5	Die Nichtlinearität $f(u)$	41
3	Minimax-Methoden	43
3.1	Kritische Punkte	43
3.2	Mountain-Pass Theorem	44
3.3	Variationsfunktional	45
3.4	Fréchet-Ableitung von I	45
3.5	Schwache Form der PDE	49
3.6	Schwache Lösung der PDE	51
4	Literaturverzeichnis	53

Kapitel 1

Strömungsmechanik

1.1 Notation

Eine lineare Abbildung A , angewendet auf ein Element des Definitionsbereiches von A schreiben wir $A.v$. D stehe grundsätzlich für einen Differentialoperator. Die Anwendung von D auf ein Element u des betreffenden Raumes schreiben wir Du . Die dadurch festgelegte lineare Abbildung Du angewandt auf ein weiteres Element schreiben wir $Du.v$. So schreiben wir z. Bsp. für die Jacobimatrix der Funktion u angewandt auf v $Du.v$. Für skalarwertige Funktionen verwenden wir hingegen den Gradienten ∇ . So können wir simultan schreiben $Du.v$ oder auch $(v\nabla)u$.

1.2 Die Eulergleichungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$ und n der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor. Dann wird die Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit, die keinerlei innerer Reibung unterliegt, durch die Eulerschen Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik für $v : \Omega \times (0, T) \mapsto \mathbb{R}^3$ und $p : \Omega \times (0, T) \mapsto \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}v(x, t) + (Dv(x, t)).v(x, t) &= -\frac{1}{\rho}\nabla p(x, t) - g(x, t) & (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div} v(x, t) &= 0 & (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ v(x, t)n(x) &= h(x, t) & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \end{aligned}$$

beschrieben, wobei $\rho > 0$ die Flüssigkeitsdichte beschreibt, $g(x, t)$ eine vorgegebene Zwangskraft ist und $h(x, t)$ ein auf dem Rand $\partial\Omega$ vorgegebener Fluß sei. Das sind 4 Gleichungen für die 4 Unbekannten v_1, v_2, v_3, p und eine

Randbedingung. Natürlich muß

$$\int_{\partial\Omega} h(x, t) dS = \int_{\partial\Omega} v(x, t) n(x) dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} v(x, t) dx = 0$$

zu jedem Zeitpunkt gelten. Aufgabe ist es dann, die Geschwindigkeit $v(x, t)$ und den Druck $p(x, t)$ zu bestimmen, so daß die Gleichungen identisch erfüllt werden. Wir wollen $\rho = 1$ und $g \equiv 0$ annehmen.

Ein Flüssigkeitsteilchen wird sich im Geschwindigkeitsfeld bewegen. Wir bezeichnen seinen Ort zur Zeit $t \geq 0$ mit $x(t)$. Das Teilchen muß dann zu jeder Zeit der Gleichung $\dot{x}(t) = v(x(t), t)$ genügen. Das ist die Gleichung für die **Bahnlinie** des Teilchens. Davon unterscheiden wir die **Stromlinien**, welche zu einem festen Zeitpunkt t_0 die Integralkurven der Gleichung $\frac{d}{ds}x(s) = v(x(s), t_0)$ sind. Für das betrachtete Teilchen schreiben wir

$$\frac{d}{dt}v(x(t), t) = \frac{\partial}{\partial t}v(x(t), t) + (Dv(x(t), t)) \cdot \dot{x}(t) = -\nabla p(x(t), t) \quad (1.1)$$

Wenn die Strömung stationär ist, das heißt $\frac{\partial}{\partial t}v(x, t) \equiv 0$, gilt also

$$\frac{d}{ds}v(x(s)) = (Dv(x(s))) \cdot \dot{x}(s) = -\nabla p(x(s)) \quad (1.2)$$

Wir beschränken uns im weiteren auf den stationären Fall (steady case). Dann fallen **Bahnlinien** und **Stromlinien** zusammen. Mit Hilfe der **Lambschen Formel**

$$\begin{aligned} (v\nabla)v &= (v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} + v_3 \frac{\partial}{\partial z})v = \nabla(\frac{1}{2}|v|^2) - v \times \operatorname{rot} v \\ (Dv) \cdot v &= \nabla(\frac{1}{2}|v|^2) - v \times \operatorname{rot} v \end{aligned}$$

die man leicht durch direktes Ausrechnen nachprüft, können wir die Eulergleichung in unserem Fall (stationär) dann auch so schreiben

$$\begin{aligned} \nabla(\frac{1}{2}|v(x)|^2) - v(x) \times \operatorname{rot} v(x) &= -\nabla p(x) & x \in \Omega \\ \operatorname{div} v(x) &= 0 & x \in \Omega \\ v(x)n(x) &= h(x) & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Wenn wir die erste Gleichung skalar mit v multiplizieren, folgt

$$\langle v, \nabla \left(\frac{1}{2}|v(x)|^2 + p(x) \right) \rangle = 0$$

Also ist $H := \frac{1}{2}|v(x)|^2 + p(x)$ konstant in Richtung v , das heißt entlang von Stromlinien, denn $H(x + tv) = H(x) + \int_0^1 \langle v, \nabla H \rangle dt = H(x)$. Aber natürlich wird die Konstante sich von Stromlinie zu Stromlinie unterscheiden. Wenn die Strömung jedoch wirbelfrei ist ($\operatorname{rot} v \equiv 0$), ergibt sich daraus identisch in ganz Ω

$$\nabla\left(\frac{1}{2}|v(x)|^2 + p(x)\right) = 0 \quad (1.3)$$

also $\frac{1}{2}|v(x)|^2 + p(x) = \text{const.}$ in ganz Ω . Wenn Ω einfach zusammenhängend ist, können wir dann ein Potential ϕ so bestimmen, daß $v = \nabla\phi$ ist. Die Inkompressibilität führt zu $0 = \operatorname{div}(\nabla\phi) = \Delta\phi$ und $\operatorname{rot}(\nabla\phi) \equiv 0$ gilt automatisch. Mit der Bedingung $v(x) \cdot n(x) = h(x)$ auf dem Rand lösen wir ein Neumannproblem für ϕ . Es gibt dann bis auf eine Konstante eine eindeutige Funktion ϕ , die unser Problem löst. $p(x)$ bestimmt sich gemäß (1.3) und das Paar (v, p) ist eine Lösung unseres Problems, wie man sofort sieht. Siehe auch [Alber92].

Satz 1 (Helmholtzischer Wirbelsatz) *Das Paar (v, p) genüge den Eulerschen Gleichungen und es sei $v \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$. Dann gilt*

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} v + (D \operatorname{rot} v) \cdot v = (Dv) \cdot \operatorname{rot} v$$

oder, was dasselbe ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} v + (v \nabla) \operatorname{rot} v &= [(\operatorname{rot} v) \nabla] v \\ \frac{d}{dt} \operatorname{rot} v(x(t), t) &= (Dv(x(t), t)) \cdot \operatorname{rot} v(x(t), t) \end{aligned}$$

Wobei zu beachten ist, daß $Dv \cdot h = (h \nabla)v = (h \nabla_B)(v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3)$ und ∇_B in der jeweiligen Basis ausgedrückt werden muß.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) + (Dv(x, t)) \cdot v(x, t) = -\nabla p(x, t)$$

und wegen der **Lambschen Formel** folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) + \nabla\left(\frac{1}{2}|v|^2\right) = v \times \operatorname{rot} v - \nabla p(x, t)$$

wir wenden den linearen Operator rot an und erhalten

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\partial}{\partial t} v(x, t)\right) = \operatorname{rot}(v \times \operatorname{rot} v)$$

Mit der Vektoridentität [Bronstein89] (S.574),

$$\operatorname{rot}(a \times b) = a \operatorname{div} b - b \operatorname{div} a + (Da).b - (Db).a$$

die so in jedem Koordinatensystem gilt (div , rot , D entsprechend verstanden) folgt wegen $\operatorname{div} v = 0$ und $\operatorname{div} \operatorname{rot} v \equiv 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} v(x, t) = v \operatorname{div}(\operatorname{rot} v) - \operatorname{rot} v(\operatorname{div} v) + (Dv).\operatorname{rot} v - (D \operatorname{rot} v).v$$

also

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} v = (Dv).\operatorname{rot} v - (D \operatorname{rot} v).v$$

das heißt

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} v + (D \operatorname{rot} v).v = (Dv).\operatorname{rot} v$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} v(x(t), t) + (D \operatorname{rot} v(x(t), t)).\dot{x}(t) = (Dv).\operatorname{rot} v$$

also auch

$$\frac{d}{dt} \operatorname{rot} v(x(t), t) = (Dv(x(t), t)).\operatorname{rot} v(x(t), t)$$

■

Folgerung 1 (stationärer Fall) *Im stationären Fall gilt*

$$(D \operatorname{rot} v).v = (Dv).\operatorname{rot} v$$

$$(v \nabla) \operatorname{rot} v = [(\operatorname{rot} v) \nabla] v$$

Bemerkung 1 *Der Druck $p(x, t)$ tritt in der Aussage nicht mehr auf.*

Als Beispiel betrachten wir eine Strömung, die ganz in der xy -Ebene liegt, d.h. $v(x, y, z, t) = (v_1(x, y, t), v_2(x, y, t), 0)$. Dann ist $\operatorname{rot} v = (0, 0, v_{2,x} - v_{1,y})$. Der Wirbelsatz liefert dann in kartesischen Koordinaten

$$\frac{d}{dt} \operatorname{rot} v = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} v + (D \operatorname{rot} v).v \equiv 0$$

denn

$$Dv.\operatorname{rot} v = \begin{pmatrix} v_{1,x} & v_{1,y} & 0 \\ v_{2,x} & v_{2,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{2,x} - v_{1,y} \end{pmatrix} \equiv 0$$

Also behält ein Teilchen $x(t)$ seine Rotation während es sich bewegt. Im stationären Fall bekommen wir jedoch $(D \operatorname{rot} v).v \equiv 0$, woraus wir schließen, daß $\operatorname{rot} v$ konstant entlang Stromlinien ist.

Hier ist eine Bemerkung zum Begriff der **Rotation** eines Vektorfeldes angebracht. Rotation hat überhaupt nichts damit zu tun, daß ein Vektorfeld global rotiert, sondern es wird eine Aussage darüber gemacht, wie sich hypothetische Teilchen im Vektorfeld gegeneinander verschieben. Anschaulich stellt man sich das gut so vor: Hält man einen differentiellen Mikropropeller senkrecht in eine eben strömende Flüssigkeit, so wird er sich nicht bewegen, solange sich die Flüssigkeitsteilchen nicht gegeneinander verschieben, bewegt er sich doch, ist Rotation vorhanden. Diese Anschauung ist hilfreich, aber eben nur Anschauung und sollte nicht überstrapaziert werden.

Wir benötigen im folgenden noch einige Begriffe aus der Fluidodynamik, die hiermit bereitgestellt werden.

Definition 1 (Wirbellinien) *Wirbellinien nennen wir die Feldlinien des Wirbelvektors $\text{rot } v$.*

Definition 2 (Wirbelröhre) *Wirbelröhre nennen wir eine Röhre, deren Mantel ganz aus Wirbellinien gebildet ist.*

Definition 3 (Wirbelfaden) *Eine Wirbelröhre mit sehr kleinem Querschnitt nennen wir einen Wirbelfaden.*

Definition 4 (Wirbelring) *Ein geschlossener Wirbelfaden sei Wirbelring genannt.*

Bemerkung 2 *Einer der ersten, der sich mit Wirbelbewegungen befaßte, war im letzten Jahrhundert Helmholtz [Helmholtz58]. Von ihm stammt der hier gebrachte Wirbeltransportsatz. Leider ist dieser Artikel ob seines Alters nur noch schwer zu lesen. Eine gut lesbare Einführung in die Fluidodynamik ist dagegen [Acheson90]. An ihr habe ich mich hier auch orientiert. Mit Gewinn kann man auch [Lamb31] zu Rate ziehen.*

Wir sehen jetzt auch, daß es im \mathbb{R}^2 keine turbulente Strömung, das heißt eine mit Wirbellinien, geben kann. Denn für eine ebene Strömung steht der Wirbelvektor senkrecht auf der Stromebene, ist also nicht im \mathbb{R}^2 .

1.3 Zylinderkoordinaten

1.3.1 Argument und Basis-Transformation

Wir führen im \mathbb{R}^3 neue Koordinaten (r, ϕ, z) ein durch die Transformation $X : \mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$

$$(r, \phi, z) \mapsto X(r, \phi, z) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ z \end{pmatrix}_{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3}$$

Mit

$$\begin{bmatrix} a_1(r, \phi, z) \\ a_2(r, \phi, z) \\ a_3(r, \phi, z) \end{bmatrix}_{[r, \phi, z]}$$

wollen wir fürderhin einen Vektor, dargestellt im krummlinigen $[r, \phi, z]$ -System, bezeichnen. Dabei sei das $[r, \phi, z]$ -System dasjenige System, gebildet mit krummlinigen ortsabhängigen Basisvektoren, welches durch die Transformation X induziert wird. Wir sagen dazu unten mehr. $[\]$ beziehe sich immer auf das $[r, \phi, z]$ -System, während $(\)$ sich immer auf das entsprechende kanonische geradlinige System des \mathbb{R}^3 bezieht. Wohlgermerkt transformieren wir hier nicht nur das Argument, sondern auch die Basis. Wie sehen nun die Basisvektoren im $[r, \phi, z]$ -System, ausgedrückt im kanonischen (x, y, z) -System aus? Dazu sei (t, ϕ, z) die zum Basisvektor $(1, 0, 0)_{(r, \phi, z) \in \mathbb{R}^3}$ im Parameterbereich $\mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ gehörige Koordinatenlinie. Sie wird durch X auf

$$X(t, \phi, z) = \begin{pmatrix} t \cos \phi \\ t \sin \phi \\ z \end{pmatrix}_{(x, y, z)} \quad (1.4)$$

transformiert. Nun ergibt sich der transformierte Basisvektor als Tangente an die transformierte Koordinatenlinie, das heißt

$$X_r = \frac{d}{dt} X(t, \phi, z) = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Genauso ergibt sich für die 2 anderen transformierten Basisvektoren

$$X_\phi = \frac{d}{dt} X(r, t, z) = \begin{pmatrix} -r \sin \phi \\ r \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_z = \frac{d}{dt} X(r, \phi, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Wir normieren diese 3 transformierten Basisvektoren noch und erhalten

$$e_r = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad e_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Also ist z. Bsp:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{[r, \phi, z]} := e_r = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}_{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3}$$

Wir bemerken, daß die Basisvektoren e_r, e_ϕ, e_z lokal ein Orthonormalsystem bilden, also genauso wie das kanonische System kartesisch sind.

Die Umkehrung der Koordinatentransformation X geschieht mit $X^{-1} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$

$$(x, y, z) \mapsto X^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan \frac{y}{x} \\ z \end{pmatrix}_{(r, \phi, z) \in \mathbb{R}^3} \quad (1.8)$$

Das heißt

$$\begin{aligned} r(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2}; & \phi(x, y) &= \arctan \frac{y}{x}; & z &= z \\ r_x(x, y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \phi; & \phi_x(x, y) &= \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-y}{r^2} = -\frac{\sin \phi}{r}; \\ r_y(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin \phi; & \phi_y(x, y) &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \phi}{r} \\ r_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} r_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} = \frac{y^2}{r^3} \\ r_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} r_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} = \frac{x^2}{r^3} \\ \phi_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \phi_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy}{r^4} \\ \phi_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} \phi_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{r^4} \end{aligned}$$

1.3.2 Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten

Nun betrachten wir eine skalare Funktion $(x, y, z) \mapsto u(x, y, z) \in \mathbb{R}$. Dieselbe Funktion in Zylinderkoordinaten laute $(r, \phi, z) \mapsto v(r, \phi, z)$. Es gelte also

$u(x, y, z) = v(r(x, y), \phi(x, y), z)$. Wir bestimmen

$$\begin{aligned} \nabla u(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} u \\ \frac{\partial}{\partial y} u \\ \frac{\partial}{\partial z} u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} v(r(x, y), \phi(x, y), z) \\ \frac{\partial}{\partial y} v(r(x, y), \phi(x, y), z) \\ \frac{\partial}{\partial z} v(r(x, y), \phi(x, y), z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_r r_x + v_\phi \phi_x \\ v_r r_y + v_\phi \phi_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_r \cos \phi - v_\phi \frac{\sin \phi}{r} \\ v_r \sin \phi + v_\phi \frac{\cos \phi}{r} \\ v_z \end{pmatrix} = v_r \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} + v_\phi \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} + v_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= v_r e_r + \frac{1}{r} v_\phi e_\phi + v_z e_z = \begin{bmatrix} v_r(r, \phi, z) \\ \frac{1}{r} v_\phi(r, \phi, z) \\ v_z(r, \phi, z) \end{bmatrix}_{[r, \phi, z]} \end{aligned}$$

In derselben Weise berechnen wir auch

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y, z) &= u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ &= v_{rr}(r_x^2 + r_y^2) + v_{\phi\phi}(\phi_x^2 + \phi_y^2) + 2v_{r\phi}(r_x \phi_x + r_y \phi_y) + \\ &\quad v_r(r_{xx} + r_{yy}) + v_\phi(\phi_{xx} + \phi_{yy}) + v_{zz} \\ &= v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\phi\phi} + \frac{1}{r} v_r + v_{zz} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r^2} v_{\phi\phi} + v_{zz} \end{aligned}$$

Wir wollen außerdem noch div und rot in dieser Basis ausdrücken. Dazu geben wir uns einen Vektor v im $[r, \phi, z]$ -System vor. Wir transformieren v zuerst in das kartesische (r, ϕ, z) -System

$$v(r, \phi, z) = \begin{bmatrix} v_1(r, \phi, z) \\ v_2(r, \phi, z) \\ v_3(r, \phi, z) \end{bmatrix}_{[r, \phi, z]} = \begin{pmatrix} v_1(r, \phi, z) \cos \phi - v_2(r, \phi, z) \sin \phi \\ v_1(r, \phi, z) \sin \phi + v_2(r, \phi, z) \cos \phi \\ v_3(r, \phi, z) \end{pmatrix}_{(r, \phi, z)}$$

Der rechte Term ist nun in kartesischen Koordinaten ausgedrückt, auf ihn können wir beide Operatoren anwenden, indem wir setzen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u(x, y, z) &= \operatorname{div} \begin{pmatrix} u_1(x, y, z) \\ u_2(x, y, z) \\ u_3(x, y, z) \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{div} \begin{pmatrix} v_1(r(x, y), \phi(x, y), z) \cos \phi(x, y) - v_2(r(x, y), \phi(x, y), z) \sin \phi(x, y) \\ v_1(r(x, y), \phi(x, y), z) \sin \phi(x, y) + v_2(r(x, y), \phi(x, y), z) \cos \phi(x, y) \\ v_3(r(x, y), \phi(x, y), z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach mühsamer Rechnung zeigt sich

$$\begin{aligned}\nabla \cdot v &= \operatorname{div} v(r, \phi, z) = \operatorname{div} u(x, y, z) \\ &= v_{1,r}(r, \phi, z) + \frac{v_{2,\phi}(r, \phi, z)}{r} + \frac{v_1(r, \phi, z)}{r} + v_{3,z}(r, \phi, z) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_1(r, \phi, z)) + \frac{v_{2,\phi}(r, \phi, z)}{r} + v_{3,z}(r, \phi, z)\end{aligned}$$

Genauso zeigt man, daß

$$\nabla \times v = \operatorname{rot} v(r, \phi, z) = \operatorname{rot} u(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{v_{3,\phi}}{r} - v_{2,z} \\ v_{1,z} - v_{3,r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r v_2) - v_{1,\phi} \right) \end{bmatrix}_{[r,\phi,z]}$$

Der Ausdruck $Dv \cdot h = (h\nabla)v$ berechnet sich folgendermaßen, wenn wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} e_r &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} e_\phi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} e_z = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \phi} e_r &= e_\phi, \quad \frac{\partial}{\partial \phi} e_\phi = -e_r, \quad \frac{\partial}{\partial \phi} e_z = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} e_r &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} e_\phi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} e_z = 0\end{aligned}$$

beachten

$$\begin{aligned}(h\nabla)v &= \left(h_1 \frac{\partial}{\partial r} + h_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + h_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) (v_1(r, \phi, z)e_r(r, \phi, z) + v_2 e_\phi + v_3 e_z) \\ &= h_1(v_{1,r}e_r + v_{2,r}e_\phi + v_{3,r}e_z) + \frac{h_2}{r}(v_{1,\phi}e_r + v_1 e_{r,\phi} + v_{2,\phi}e_\phi + v_2 e_{\phi,\phi} + v_{3,\phi}e_z) \\ &\quad + h_3(v_{1,z}e_r + v_{2,z}e_\phi + v_{3,z}e_z) \\ &= h_1(v_{1,r}e_r + v_{2,r}e_\phi + v_{3,r}e_z) + \frac{h_2}{r}(v_{1,\phi}e_r + v_1 e_\phi + v_{2,\phi}e_\phi - v_2 e_r + v_{3,\phi}e_z) \\ &\quad + h_3(v_{1,z}e_r + v_{2,z}e_\phi + v_{3,z}e_z) \\ &= (h_1 v_{1,r} + \frac{h_2}{r} v_{1,\phi} - \frac{h_2 v_2}{r} + h_3 v_{1,z})e_r + (h_1 v_{2,r} + \frac{h_2}{r} v_{2,\phi} + \frac{h_2}{r} v_1 + h_3 v_{2,z})e_\phi \\ &\quad + (h_1 v_{3,r} + \frac{h_2}{r} v_{3,\phi} + h_3 v_{3,z})e_z \\ &= \begin{bmatrix} h_1 v_{1,r} + \frac{h_2}{r} v_{1,\phi} + h_3 v_{1,z} - \frac{h_2 v_2}{r} \\ h_1 v_{2,r} + \frac{h_2}{r} v_{2,\phi} + h_3 v_{2,z} + \frac{h_2}{r} v_1 \\ h_1 v_{3,r} + \frac{h_2}{r} v_{3,\phi} + h_3 v_{3,z} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

1.4 Ebene Strömung

Wir untersuchen jetzt die Eigenschaften einer stationär strömenden Flüssigkeit, die der Eulergleichung genügt und deren Stromlinien die z -Achse als Rotationzentrum besitzen. In Zylinderkoordinaten ist das eine in der (r, z) -Ebene liegende Strömung, also können wir setzen

$$v(r, \phi, z) = \begin{bmatrix} v_1(r, z) \\ 0 \\ v_3(r, z) \end{bmatrix}_{[r, \phi, z]}$$

Die Rotation dieser Strömung ist

$$\operatorname{rot} v(r, z) = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{1,z} - v_{3,r} \\ 0 \end{bmatrix}_{[r, \phi, z]} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega(r, z) \\ 0 \end{bmatrix}_{[r, \phi, z]}$$

was sich aus dem vorher für Zylinderkoordinaten gesagten ergibt. Der Helmholtzsche **Wirbelsatz**, angewandt auf dieses v lautet

$$(v(r, z)\nabla)\operatorname{rot} v(r, z) = [(\operatorname{rot} v(r, z)\nabla)v(r, z)]$$

Ausgeschrieben sieht das so aus

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_1\omega_r + v_3\omega_z \\ 0 \end{bmatrix}_{[r, \phi, z]} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{r}\omega v_1 \\ 0 \end{bmatrix}_{[r, \phi, z]}$$

Also gilt

$$v_1\omega_r + v_3\omega_z - \frac{1}{r}\omega v_1 = 0$$

Das ist aber für $r \neq 0$ gleichwertig zu

$$(v_1 \frac{\partial}{\partial r} + v_3 \frac{\partial}{\partial z})\left(\frac{1}{r}\omega\right) = 0$$

Woraus wir auf $\frac{1}{r}\omega = \text{const.}$ entlang von Stromlinien schließen können.

1.5 Stokesche Stromfunktion

Ein besonderer Typ ebener Strömung entsteht, wenn wir mit einer sogenannten **Stokeschen Stromfunktion** $\Psi \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ schreiben:

$$v(r, z) := \operatorname{rot} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Psi(r, z)}{r} \\ 0 \end{bmatrix}_{[r, \phi, z]} = \begin{bmatrix} -\frac{\Psi_z(r, z)}{r} \\ 0 \\ \frac{\Psi_r(r, z)}{r} \end{bmatrix}_{[r, \phi, z]}$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v(r, z) &= \operatorname{div} \begin{bmatrix} -\frac{\Psi_z(r, z)}{r} \\ 0 \\ \frac{\Psi_r(r, z)}{r} \end{bmatrix}_{[r, \phi, z]} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\Psi_z(r, z)}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Psi_r(r, z)}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\Psi_z(r, z)}{r} = 0 \end{aligned}$$

was auch automatisch aus $\operatorname{div} \operatorname{rot} \cdot = 0$ folgt. Die Rotation dieser Strömung berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} v(r, z) &= \operatorname{rot} \begin{bmatrix} -\frac{\Psi_z(r, z)}{r} \\ 0 \\ \frac{\Psi_r(r, z)}{r} \end{bmatrix}_{[r, \phi, z]} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Psi_z}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi_r}{r} \right) \\ 0 \end{bmatrix}_{[r, \phi, z]} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{r} \Psi_{zz} + \frac{1}{r^2} \Psi_r - \frac{1}{r} \Psi_{rr} \\ 0 \end{bmatrix}_{[r, \phi, z]} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega(r, z) \\ 0 \end{bmatrix}_{[r, \phi, z]} \end{aligned}$$

Der **Wirbelvektor** $\operatorname{rot} v$ liegt also immer senkrecht zur (r, z) -Ebene. Natürlich genügt diese Strömung der Eulergleichung, denn wenn v bekannt ist, berechnet man p mit der Lambschen Formel. Nach dem oben gesagten ist aber $\frac{\omega}{r} = \text{const.}$, also folgt durch Gleichsetzen mit dem eben berechneten Ausdruck

$$-\Psi_{zz} + \frac{1}{r} \Psi_r - \Psi_{rr} = r^2 \text{const.} \quad (1.9)$$

Darüberhinaus ist Ψ konstant entlang Stromlinien, denn

$$\frac{d}{ds} \Psi(r(s), z(s)) = \langle \nabla \Psi(r(s), z(s)), \left[\frac{d}{ds} r(s) \right] \rangle = -\Psi_r \frac{\Psi_z}{r} + \Psi_z \frac{\Psi_r}{r} = 0$$

Damit steht der Gradient von Ψ senkrecht auf den Stromlinien und die Stromlinien ergeben sich umgekehrt als **Stromflächen** $\Psi(r, z) = \text{const.}$ im $[r, \phi, z]$ -System bei festgehaltenem ϕ .

Ψ ist aber gerade kein Geschwindigkeitspotential, denn dann könnte ja keine Rotation auftreten! Wie man zeigt, ist die Durchflußmenge durch eine überall senkrecht zu den Stromlinien liegende Fläche, die von 2 Stromflächen $\Psi(r, z) = \Psi_1, \Psi_2$ begrenzt wird, gegeben durch $2\pi (\Psi_2 - \Psi_1)$. Da Ψ konstant entlang Stromlinien ist, können wir die Konstante dementsprechend von Stromlinie zu Stromlinie variieren indem wir dort $\omega := r f(\Psi)$ setzen. Dann folgt wegen (1.9) wieder entlang von Stromlinien

$$\Psi_{rr} + \Psi_{zz} - \frac{1}{r} \Psi_r = -r^2 f(\Psi) \quad (1.10)$$

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ nennen wir Wirbelfunktion. Die Eigenschaften von f präzisieren wir später. Diese Gleichung ist eine nichtlineare (wegen $f(\Psi)$) elliptische PDE 2. Ordnung.

Definition 5 (Der Differentialoperator L) *Wir definieren den Differentialoperator L als*

$$L\Psi := \Psi_{rr} + \Psi_{zz} - \frac{1}{r}\Psi_r$$

Mit dieser Definition können wir dann (1.10) abkürzend schreiben

$$L\Psi = -r^2 f(\Psi)$$

1.6 Ein Wirbelring

Wir interessieren uns nun für solche Stromfunktionen Ψ der gerade betrachteten Art, die für $r^2 + z^2 \rightarrow \infty$ eine in z -Richtung konstant abwärts gerichtete Strömung hervorrufen, das heißt mit $W > 0$ soll gelten

$$\lim_{r^2+z^2 \rightarrow \infty} v(r, z) = \lim_{r^2+z^2 \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} -\frac{\Psi_z(r, z)}{r} \\ 0 \\ \frac{\Psi_r(r, z)}{r} \end{bmatrix}_{[r, \phi, z]} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -W \end{bmatrix}_{[r, \phi, z]}$$

Wir fordern dafür, daß $\lim_{r^2+z^2 \rightarrow \infty} \Psi(r, z) + \frac{1}{2}Wr^2 = 0$ gilt. Desweiteren soll die von Ψ induzierte Strömung Rotation nur genau in einer zu einem Torus ähnlichen Figur besitzen, während sie außerhalb derselben identisch verschwinden soll. Das können wir verlangen, weil Ψ im $[r, \phi, z]$ -System eine ebene Strömung induziert, deren Wirbelvektor nur in ϕ -Richtung zeigt. Wenn wir es schaffen, den Bereich mit Rotation in der rz -Ebene durch eine geschlossene Kurve einzugrenzen, wird sich automatisch eine torusähnliche Figur im $[r, \phi, z]$ -System ergeben müssen. Das von der Kurve eingeschlossene Gebiet wird der Querschnitt des Torus sein. Wir nennen ihn A . Aus Symmetriegründen können wir uns auf den Bereich $\Pi := \{(r, z) | r > 0\}$ beschränken. Wir fordern also

$$\Psi_{rr} + \Psi_{zz} - \frac{1}{r}\Psi_r = -r^2 f(\Psi) \quad (r, z) \in A \quad (1.11)$$

$$\Psi_{rr} + \Psi_{zz} - \frac{1}{r}\Psi_r = 0 \quad (r, z) \in \Pi \setminus A \quad (1.12)$$

$$\Psi(r, z) = -\frac{1}{2}Wr^2 \quad r^2 + z^2 \rightarrow \infty \quad (1.13)$$

Die erste Gleichung reflektiert gerade die Bedingung Rotation nur in A , während die zweite Gleichung besagt: keine Rotation außerhalb A . Das nach

unten strömende Fluid soll den Wirbel-Torus dabei passieren, ohne ihn mit sich zu führen (reibungsfrei!) und so soll der Wirbel-Torus als ganzes stationär bleiben. Deshalb muß der Rand ∂A selbst auch Stromlinie sein und wir können $\Psi_{\partial A}(r, z) = 0$ setzen. Aus der angesetzten Rotationssymmetrie der Strömung schließen wir, daß die z -Achse selbst auch Stromlinie ist, also setzen wir dementsprechend $\Psi_{(r=0)}(r, z) = -k \leq 0$. Der so beschriebene Wirbel-Torus geht für kleine Querschnitte in einen Wirbelring über, wir bemerken aber, daß er im Gegensatz zu den üblicherweise untersuchten Wirbelringen an seinem Ort verharrt, während sich Wirbelringe aufgrund einer Folgerung aus dem Helmholtzschen Wirbelsatz mit dem Fluid bewegen. (Das ist ja eigentlich auch hier so, nur relativ zu dem umströmenden Fluid bewegt sich der Wirbel-Torus nicht, obgleich er sich selbst natürlich gemäß der Strömung bewegt). Das schließen wir aus dem sogenannten

Satz 2 (Helmholtzscher Wirbeltransportsatz) *Bilden irgendwelche Fluidteilchen zu einem Moment eine Wirbellinie, so bilden dieselben Fluidteilchen, obwohl von der Strömung fortgeführt, an jedem folgenden Moment auch eine Wirbellinie.*

Beweis. [Lamb31] oder [Acheson90]. ■

Bemerkung 3 *Helmholtz schloß diesen Satz in [Helmholtz58] aus dem Wirbelsatz. Er führt eine Taylorentwicklung aus und benutzt die Identität des Wirbelsatzes. Von verschiedener Seite (Stokes, Kelvin) wurden dagegen Einwände vorgebracht, so daß man heute den Weg über Integralsätze geht. Zumindest im stationären Fall verstehe ich die Einwände noch nicht.*

Wenn eine Wirbellinie durch die Strömung gedehnt wird, so wird sich die Rotationsstärke erhöhen. Damit werden unzählige Phänomene der Physik einer Beschreibung zugänglich, z.Bsp Tornados (deren Auge ist gerade eine Wirbelröhre).

1.7 Wirbel-Torus im beschränkten Gebiet

Wir ersetzen den unbeschränkten Bereich Π durch einen beschränkten Zylinder $\Omega := \{(r, z) \mid 0 < r < a; |z| < b\}$ und fordern als Randbedingung für das Problem (1.11) an den Zylinderwänden

$$\Psi_{\partial\Omega}(r, z) = -\frac{1}{2}Wr^2 - k$$

So wird an den Zylinderwänden eine konstant abwärts gerichtete Strömung hervorgerufen und die z -Achse ist Stromlinie mit dem Parameter $\Psi = -k$.

Nun ist der Rand ∂A noch nicht festgelegt, sondern ja gerade erst zu bestimmen. Wir hatten aber den Rand schon als Stromlinie $\Psi_{\partial A} = 0$ gesetzt. Wenn nun $L\Psi < 0$ in A wäre und weil $\Psi_{\partial A} = 0$ könnten wir ein Maximumprinzip für L anwenden [Gilbarg77] Cor.3.2 und erhielten

$$\inf_A \Psi \geq \inf_{\partial A} \Psi^- \geq 0$$

also $\Psi \geq 0$ in A . Genauso schliesen wir aber wegen $L\Psi = 0$ in $\Omega \setminus A$ und $\Psi_{\partial\Omega}(r, z) = -\frac{1}{2}Wr^2 - k < 0$ auf $\Psi < 0$ in $\Omega \setminus A$. Wegen $\Psi(r, z) > 0 \Leftrightarrow (r, z) \in A$ können wir den Querschnitt A des Wirbel-Torus definieren als

$$A := \{(r, z) \in \Omega \mid \Psi(r, z) > 0\}$$

Das eben Gesagte ging aber nur unter der Voraussetzung $L\Psi < 0$ in A . Um das zu gewährleisten müssen wir $f(\Psi) > 0$ in A , also $f(\Psi) > 0$ für $\Psi > 0$ wählen. Weil aber auch $L\Psi = 0$ in $\Omega \setminus A$ gelten soll, muß $f(\Psi) = 0$ in $\Omega \setminus A$ gelten, also $f(\Psi) = 0$ für $\Psi \leq 0$. Dann sieht unser Problem jetzt so aus

$$L\Psi(r, z) = -r^2 f(\Psi(r, z)) \quad (r, z) \in \Omega \quad (1.14)$$

$$\Psi(r, z) = -\frac{1}{2}Wr^2 - k \quad (r, z) \in \partial\Omega \quad (1.15)$$

Dieses Dirichlet-Problem transformieren wir noch auf homogene Randbedingungen indem wir setzen

$$\Psi(r, z) = \psi(r, z) - \frac{1}{2}Wr^2 - k$$

Dann haben wir $L\Psi = L\psi - L(\frac{1}{2}Wr^2 - k) = L\psi$ und $\psi_{\partial\Omega} = \Psi_{\partial\Omega} + \frac{1}{2}Wr^2 - k = 0$. Das ergibt schlußendlich

$$L\psi = -r^2 f(\psi - \frac{1}{2}Wr^2 - k) \quad (r, z) \in \Omega \quad (1.16)$$

$$\psi(r, z) = 0 \quad (r, z) \in \partial\Omega \quad (1.17)$$

Bemerkung 4 Die Herleitung der letzten Gleichung orientiert sich in groben Zügen an dem, was in [Fraenkel74] gezeigt wird.

1.8 Differentialgleichung

Im weiteren wollen wir uns aber auf das technisch weniger aufwendige Problem

$$L\psi = -r^2 f(\psi) \quad (r, z) \in \Omega \quad (1.18)$$

$$\psi(r, z) = 0 \quad (r, z) \in \partial\Omega \quad (1.19)$$

beschränken. Die gezeigten Resultate gelten jedoch unisono auch für (1.16). Im folgenden Kapitel stellen wir Hilfsmittel aus der Sobolev-Theorie zur Verfügung, die uns dann erlauben werden, das Problem zu lösen. Als allgemeine Referenz dazu kann [Adams75] dienen.

Kapitel 2

Sobolevtheorie

2.1 Stetige Einbettungen

Lemma 1 (Höldersche Ungleichung) *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes offenes Gebiet. Seien $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ist dann $f \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^q(\Omega)$ dann gilt $fg \in L^1(\Omega)$ und*

$$\|fg\|_{1,\Omega} \leq \|f\|_{p,\Omega} \|g\|_{q,\Omega} \quad (2.1)$$

Beweis. [Alber94] oder [Alt85]. ■

Folgerung 2 (Höldersche Ungleichung für Produkte) *Seien $v_1 \dots v_n \in L^1(\Omega)$. Dann gilt*

$$\int_{\Omega} v_1(x)^{\frac{1}{n}} \dots v_n(x)^{\frac{1}{n}} dx \leq \left(\int_{\Omega} v_1(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \dots \left(\int_{\Omega} v_n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.2)$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über n . Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei $n = 2$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} v_1(x)^{\frac{1}{2}} v_2(x)^{\frac{1}{2}} dx \leq \left(\int_{\Omega} v_1(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} v_2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

wie sich aus der Hölderschen Ungleichung mit $p = q = 2$ sofort ergibt. Sei das Resultat gezeigt für n . Dann haben wir für $n + 1$

$$\int_{\Omega} v_1(x)^{\frac{1}{n+1}} \dots v_n(x)^{\frac{1}{n+1}} v_{n+1}(x)^{\frac{1}{n+1}} dx \leq \left(\int_{\Omega} v_{n+1}(x) dx \right)^{\frac{1}{n+1}} \left(\int_{\Omega} v_1(x)^{\frac{1}{n}} \dots v_n(x)^{\frac{1}{n}} dx \right)^{\frac{n}{n+1}} \quad (2.4)$$

wobei wir die Höldersche Ungleichung auf den letzten Faktor v_{n+1} mit $p = n + 1$ und $q = 1 - \frac{1}{p} = \frac{n}{n+1}$ angewendet haben. Auf

$$\int_{\Omega} v_1(x)^{\frac{1}{n}} \dots v_n(x)^{\frac{1}{n}} dx \quad (2.5)$$

wenden wir die Induktionsvoraussetzung an und erhalten

$$\int_{\Omega} v_1(x)^{\frac{1}{n}} \dots v_n(x)^{\frac{1}{n}} dx \leq \left(\int_{\Omega} v_1(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \dots \left(\int_{\Omega} v_n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.6)$$

fassen wir (2.4) und (2.6) zusammen, erhalten wir

$$\int_{\Omega} v_1(x)^{\frac{1}{n+1}} \dots v_n(x)^{\frac{1}{n+1}} v_{n+1}(x)^{\frac{1}{n+1}} dx \leq \left(\int_{\Omega} v_1(x) dx \right)^{\frac{1}{n+1}} \dots \left(\int_{\Omega} v_{n+1}(x) dx \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (2.7)$$

was die Induktion vollendet. ■

Lemma 2 (Stetige Einbettung von $L^q(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes offenes Gebiet. Sei $p < q$. Dann ist die Abbildung

$$\text{id} : L^q(\Omega) \longmapsto L^p(\Omega) \quad (2.8)$$

stetig.

Beweis. Da **id** linear ist genügt es, die Stetigkeit in 0 zu zeigen. Sei $u \in L^q(\Omega)$. Wir benutzen die Höldersche Ungleichung mit $\frac{1}{k'} + \frac{1}{k} = 1$ und schreiben

$$\int_{\Omega} 1 |u(x)|^p dx \leq \left(\int_{\Omega} 1 dx \right)^{\frac{1}{k'}} \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{pk} dx \right)^{\frac{1}{k}} \quad (2.9)$$

Setzen wir $k = \frac{q}{p} > 1$ erhalten wir

$$\int_{\Omega} 1 |u(x)|^p dx \leq \left(\int_{\Omega} 1 dx \right)^{1 - \frac{p}{q}} \left(\int_{\Omega} |u(x)|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} \quad (2.10)$$

Das ergibt wegen $\frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$

$$\|u\|_{p,\Omega} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|u\|_{q,\Omega} \leq C(\Omega) \|u\|_{q,\Omega} \quad (2.11)$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Definition 6 (Der Raum $H_m^p(\Omega)$) Sei α ein Multiindex. Für $u \in C_0^\infty(\Omega)$ definieren wir eine Norm

$$\|u\|_{p,m,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{p,\Omega} \right)$$

Dann sei $H_m^p(\Omega)$ die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich dieser Norm.

Lemma 3 (Poincarésche Ungleichung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes offenes Gebiet. Sei $1 \leq p < \infty$. Dann gilt für alle $u \in \mathring{H}_1^p(\Omega)$

$$\|u\|_{p,\Omega} \leq C(\Omega, p) \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{p,\Omega} \quad (2.12)$$

Beweis. [Alber94], [Alt85] ■

Folgerung 3 $\sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{p,\Omega}$ ist eine zu $\|u\|_{p,1,\Omega}$ äquivalente Norm auf $\mathring{H}_1^p(\Omega)$ (Für alle $q \geq 1$ sind $\|u\|_{p,m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{p,\Omega}^q \right)^{\frac{1}{q}}$ äquivalente Normen auf $H_m^p(\Omega)$).

Beweis. Es ist $\|u\|_{p,1,\Omega} = \|u\|_{p,\Omega} + \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{p,\Omega}$ also $\sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{p,\Omega} \leq \|u\|_{p,1,\Omega}$. Wegen der Poincaréschen Ungleichung gilt aber auch $\|u\|_{p,1,\Omega} \leq (C+1) \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{p,\Omega}$ also haben wir

$$\frac{1}{C+1} \|u\|_{p,1,\Omega} \leq \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{p,\Omega} \leq \|u\|_{p,1,\Omega} \quad (2.13)$$

was das Argument abschließt. ■

Bemerkung 5 Für alle $1 \leq p < \infty$ sind $\sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{p,\Omega}$ zu $\|\nabla u\|_{p,\Omega}$ äquivalente Normen auf $\mathring{H}_1^p(\Omega)$

Beweis.

$$\sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{p,\Omega} = \sum_i \|D_i u\|_{p,\Omega} = \sum_i \left(\int_\Omega |D_i u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_i \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = n \|\nabla u\|_{p,\Omega}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{p,\Omega} &= \|\sqrt{(D_1 u)^2 + \dots + (D_n u)^2}\|_{p,\Omega} \leq \|\sqrt{n \max_i (D_i u(x))^2}\|_{p,\Omega} \\ &\leq \sqrt{n} \|\max_i D_i u(x)\|_{p,\Omega} \leq \sqrt{n} \sum_i \|D_i u\|_{p,\Omega} \end{aligned}$$

Also folgt

$$\frac{1}{n} \sum_i \|D_i u\|_{p,\Omega} \leq \|\nabla u\|_{p,\Omega} \leq \sqrt{n} \sum_i \|D_i u\|_{p,\Omega}$$

■

Satz 3 (Stetige Einbettung von $\mathring{H}_1^p(\Omega)$ in $L^{p^*}(\Omega)$) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, sei $1 \leq p < n$ und $p^* = \frac{np}{n-p}$. Dann gilt für alle $u \in \mathring{H}_1^p(\Omega)$

$$\|u\|_{p^*,\Omega} \leq C(n,p) \|\nabla u\|_{p,\Omega} \quad (2.14)$$

Beweis. Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $\mathring{H}_1^p(\Omega)$ ist, zeigen wir den Satz zuerst für $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Für alle $u \in C_0^\infty(\Omega)$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (u(x_{1,\dots}, x_n) - u(x_{1,\dots}, t, \dots, x_n)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{x_i} D_i u(x_{1,\dots}, \xi_{i,\dots}, x_n) d\xi_i \quad (2.15)$$

also, weil u am Rand verschwindet:

$$u(x_{1,\dots}, x_n) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{x_i} D_i u(x_{1,\dots}, \xi_{i,\dots}, x_n) d\xi_i = \int_{-\infty}^{x_i} D_i u(x_{1,\dots}, \xi_{i,\dots}, x_n) d\xi_i \quad (2.16)$$

auf dieselbe Weise schreiben wir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u(x_{1,\dots}, t, \dots, x_n) - u(x_{1,\dots}, x_n)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{x_i}^t D_i u(x_{1,\dots}, \xi_{i,\dots}, x_n) d\xi_i \quad (2.17)$$

woraus wieder folgt

$$-u(x_{1,\dots}, x_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{x_i}^t D_i u(x_{1,\dots}, \xi_{i,\dots}, x_n) d\xi_i = \int_{x_i}^t D_i u(x_{1,\dots}, \xi_{i,\dots}, x_n) d\xi_i \quad (2.18)$$

Beträge setzen in (2.16) und (2.18) zeigt

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_i} |D_i u(x_1, \dots, \xi_i, \dots, x_n)| d\xi_i \quad (2.19)$$

$$|u(x)| \leq \int_{x_i}^{\infty} |D_i u(x_1, \dots, \xi_i, \dots, x_n)| d\xi_i \quad (2.20)$$

wir addieren beide Gleichungen und erhalten

$$2 |u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u(x_1, \dots, \xi_i, \dots, x_n)| d\xi_i \quad (2.21)$$

deshalb gilt auch (dasselbe in jeder der n Variablen, miteinander multiplizieren und zur $\frac{1}{n-1}$.ten Potenz erheben)

$$|2 u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u| d\xi_1 \right) \dots \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_n u| d\xi_n \right) \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (2.22)$$

Wir integrieren diese Ungleichung nun bezüglich x_n über ganz \mathbb{R}

$$\int_{-\infty}^{\infty} |2 u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_n \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u| d\xi_1 \right) \dots \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_n u| d\xi_n \right) \right]^{\frac{1}{n-1}} dx_n \quad (2.23)$$

Der Faktor $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_n u| d\xi_n \right)$ ist konstant bezüglich der Integration, deshalb ziehen wir ihn vor das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |2 u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_n \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_n u| d\xi_n \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u| d\xi_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \dots \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_{n-1} u| d\xi_{n-1} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right] dx_n \quad (2.24)$$

Auf den rechten Faktor $\int[\]$ wenden wir die Höldersche Ungleichung für Produkte an und erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} |2u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_n \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_n u| d\xi_n \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{j=1}^{n-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_j u| d\xi_j dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (2.25)$$

Die Integration wird jetzt sukzessive über alle x_j erstreckt, wobei immer ein Faktor konstant ist und $n-1$ Faktoren integriert werden und auf das Produkt dann jeweils die Höldersche Ungleichung für Produkte angewandt wird. So erhalten wir schließlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |2u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \dots dx_n \leq \prod_{j=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |D_j u| d\xi_1 \dots dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (2.26)$$

also

$$\int_{\Omega} |2u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx \leq \prod_{j=1}^n \left(\int_{\Omega} |D_j u| dx \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (2.27)$$

oder auch

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1}, \Omega} \leq \frac{1}{2} \prod_{j=1}^n \left(\int_{\Omega} |D_j u| dx \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.28)$$

auf die rechte Seite wenden wir die arithmetisch/geometrische Ungleichung $\prod_{j=1}^n a_j^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j$ an, die sich ergibt, weil der Logarithmus konkav ist, und erhalten

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1}, \Omega} \leq \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} |D_j u| dx = \frac{1}{2n} \int_{\Omega} 1 (|D_1 u| + \dots + |D_n u|) dx \quad (2.29)$$

woraus sich durch die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung in der Form $\sum_{i=1}^n 1 a_i \leq (\sum_{i=1}^n 1^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^n a_i^2)^{\frac{1}{2}}$ ergibt

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1}, \Omega} \leq \frac{1}{2n} \sqrt{n} \int_{\Omega} (|D_1 u|^2 + \dots + |D_n u|^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2\sqrt{n}} \|\nabla u\|_{1, \Omega} \quad (2.30)$$

Dies ist das gewünschte Resultat für $p = 1$, dann ist nämlich $p^* = \frac{n}{n-1}$. Sei jetzt $p > 1$. Wir wenden das Resultat für $p = 1$ auf die Funktion

$v(x) := |u(x)|^{\frac{(n-1)p}{n-p}}$ an. Da $\frac{(n-1)p}{n-p} > 1$ für $p > 1$ ist $v \in C_0^1(\Omega)$. Es gilt

$$|\nabla v| = \left| \frac{(n-1)p}{n-p} |u|^{\frac{(n-1)p}{n-p}-1} \frac{u}{|u|} \nabla u \right| = \frac{(n-1)p}{n-p} |u|^{\frac{n(p-1)}{n-p}} |\nabla u| \quad (2.31)$$

also ergibt sich mit v in (2.30) eingesetzt

$$\left(\int_{\Omega} |v|^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \frac{(n-1)p}{n-p} \int_{\Omega} |u|^{\frac{n(p-1)}{n-p}} |\nabla u| dx \quad (2.32)$$

und mit der Definition von v

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |u|^{\frac{(n-1)p}{n-p} \frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \frac{(n-1)p}{n-p} \int_{\Omega} |u|^{\frac{n(p-1)}{n-p}} |\nabla u| dx \leq \\ &\frac{1}{2\sqrt{n}} \frac{(n-1)p}{n-p} \left(\int_{\Omega} |u|^{\frac{n(p-1)}{n-p} p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und $p' = \frac{p}{p-1}$ und auf den rechten Term wieder die Höldersche Ungleichung angewendet wurde. Nun folgt

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |u|^{\frac{np}{n-p}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} &= \left(\int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \\ &\frac{1}{2\sqrt{n}} \frac{(n-1)p}{n-p} \|\nabla u\|_{p,\Omega} \left(\int_{\Omega} |u|^{\frac{n(p-1)p}{(p-1)(n-p)}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned} \quad (2.34)$$

jetzt dividieren wir durch den rechten Term und erhalten

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{(n-1)}{n} - \frac{(p-1)}{p}} &\leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \frac{(n-1)p}{n-p} \|\nabla u\|_{p,\Omega} \\ \left(\int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} &\leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \frac{(n-1)p}{n-p} \|\nabla u\|_{p,\Omega} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Also haben wir endlich

$$\forall u \in C_0^\infty(\Omega) \quad \|u\|_{p^*,\Omega} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \frac{(n-1)p}{n-p} \|\nabla u\|_{p,\Omega} \quad (2.36)$$

Wir übertragen das Resultat auf $\mathring{H}_1^p(\Omega)$. Sei $v \in \mathring{H}_1^p(\Omega)$, dann gibt es eine Folge $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|v - \phi_n\|_{1,p,\Omega} \rightarrow 0$ wenn $n \rightarrow \infty$. Es gilt dann wegen (2.36) und der Äquivalenz der Normen $\|\nabla(\cdot)\|_{p,\Omega}$ und $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$

$$\|\phi_k - \phi_l\|_{p^*,\Omega} \leq C \|\nabla(\phi_k - \phi_l)\|_{p,\Omega} \leq C \|\phi_k - \phi_l\|_{1,p,\Omega} \xrightarrow{k,l \rightarrow \infty} 0 \quad (2.37)$$

also ist $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ auch eine Cauchy-Folge in $L^{p^*}(\Omega)$. $L^{p^*}(\Omega)$ ist vollständig, deshalb gibt es ein $u \in L^{p^*}(\Omega)$ mit $\|u - \phi_n\|_{p^*,\Omega} \rightarrow 0$ wenn $n \rightarrow \infty$. $v \in \overset{\circ}{H}_1^p(\Omega)$ ist natürlich auch in $L^p(\Omega)$. Daher approximiert ϕ_n v und u in der jeweiligen L^p -Norm. Überdies gilt $L^{p^*}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, da $p^* = \frac{np}{n-p} > p$. Wir bemerken, daß $v = u$ punktweise fast überall gilt, denn sei das Gegenteil wahr, dann ist $0 < \|v(x) - u(x)\|_{p,\Omega} \leq \|v - \phi_n + \phi_n - u\|_{p,\Omega} \leq \|v - \phi_n\|_{p,\Omega} + \|u - \phi_n\|_{p,\Omega} \leq \|v - \phi_n\|_{p,\Omega} + C \|u - \phi_n\|_{p^*,\Omega} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ weil $L^{p^*}(\Omega)$ stetig in $L^p(\Omega)$ eingebettet ist. Also ein Widerspruch.

Deshalb schreiben wir

$$\begin{aligned} \|v\|_{p^*,\Omega} &= \|u\|_{p^*,\Omega} = \|u - \phi_n + \phi_n\|_{p^*,\Omega} \leq \|u - \phi_n\|_{p^*,\Omega} + \|\phi_n\|_{p^*,\Omega} \\ &\leq C \|\nabla \phi_n\|_{p,\Omega} + \|u - \phi_n\|_{p^*,\Omega} \\ &= C \|\nabla \phi_n - \nabla v + \nabla v\|_{p,\Omega} + \|u - \phi_n\|_{p^*,\Omega} \\ &\leq C \|\nabla v\|_{p,\Omega} + C \|\nabla \phi_n - \nabla v\|_{p,\Omega} + \|u - \phi_n\|_{p^*,\Omega} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ schließt den Beweis ab. ■

Korollar 1 (Der Fall $\tilde{p} \geq n$) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, und $1 < n \leq \tilde{p}$. Dann gilt für alle $u \in \overset{\circ}{H}_1^{\tilde{p}}(\Omega)$

$$\forall \tilde{q} \geq 1 \quad \|u\|_{\tilde{q},\Omega} \leq C(n, p, \Omega) \|\nabla u\|_{\tilde{p},\Omega} \quad (2.39)$$

Beweis. Es ist $\tilde{p} \geq n$. Sei $\epsilon > 0$. Wir setzen $p = n - \epsilon$. Es sei $\tilde{q} < p^* = \frac{n(n-\epsilon)}{n-(n-\epsilon)} = \frac{n^2}{\epsilon} - n$. Aufgrund der stetigen Einbettung von $L^{p^*}(\Omega)$ in $L^{\tilde{q}}(\Omega)$ und $L^{\tilde{p}}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ und dem gerade gezeigten Satz folgt für alle $u \in \overset{\circ}{H}_1^{\tilde{p}}(\Omega)$

$$\|u\|_{\tilde{q},\Omega} \leq C(\Omega) \|u\|_{p^*,\Omega} \leq C(n, p, \Omega) \|\nabla u\|_{p,\Omega} \leq C(n, p, \tilde{p}, \Omega) \|\nabla u\|_{\tilde{p},\Omega}$$

also

$$\|u\|_{\tilde{q},\Omega} \leq C(n, p, \tilde{p}, \Omega) \|\nabla u\|_{\tilde{p},\Omega}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, gilt diese Ungleichung für beliebige $1 \leq \tilde{q} < \infty$ ■

Folgerung 4 Es gilt insbesondere im Fall $n = 2$ und $\tilde{p} = 2$ und für alle $u \in \overset{\circ}{H}_1^2(\Omega)$

$$\forall \tilde{q} \geq 1 \quad \|u\|_{\tilde{q},\Omega} \leq C(n, p, \Omega) \|\nabla u\|_{2,\Omega} \quad (2.40)$$

Folgerung 5 Da $\|\|\nabla u\|\|_{p,\Omega}$ auf $\mathring{H}_1^p(\Omega)$ wegen der Poincaréschen Ungleichung und der sich anschließenden Bemerkung eine äquivalente Norm zu $\|u\|_{p,1,\Omega}$ darstellt, ist die Einbettung von $\mathring{H}_1^p(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ für alle $1 \leq q < p^*$ stetig. Im Grenzfall $p = n$ ist die Einbettung von $\mathring{H}_1^n(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ für alle $1 \leq q < \infty$ stetig.

2.2 Kompakte Einbettung

Satz 4 (Kompakte Einbettung von $\mathring{H}_1^p(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes offenes Gebiet. Sei $1 \leq p < n$ und $p^* = \frac{np}{n-p}$. Dann ist $\mathring{H}_1^p(\Omega)$ kompakt in $L^q(\Omega)$ eingebettet, wenn $1 \leq q < p^*$, das heißt, die Abbildung

$$\text{id} : \mathring{H}_1^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

ist kompakt. Insbesondere ist dann jede in $\mathring{H}_1^p(\Omega)$ beschränkte Menge relativ-kompakt in $L^q(\Omega)$, was gleichwertig dazu ist, daß jede in $\mathring{H}_1^p(\Omega)$ beschränkte Funktionenfolge eine in $L^q(\Omega)$ konvergente Teilfolge besitzt.

Beweis. Sei $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathring{H}_1^p(\Omega)$ mit $\|u_k\|_{p,1,\Omega} \leq 1$ und sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir setzen u_k durch 0 auf ganz \mathbb{R}^n fort. Es ist dann $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathring{H}_1^p(\mathbb{R}^n)$ Sei $\{\phi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ eine Dirac-Familie mit $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\phi(\frac{x}{\epsilon})$ und $\phi \in C_0^\infty(B_1(0))$, $\phi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$. Dann ist

$$u_k^\epsilon := \phi_\epsilon * u_k \in C_0^\infty(\Omega_\epsilon)$$

wobei

$$\Omega_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, \Omega) < \epsilon\}$$

und die auf $\overline{\Omega}_\epsilon$ gleichmäßig stetige Funktionenfolge $\{u_k^\epsilon\}_{k=1}^\infty = \{\phi_\epsilon * u_k\}_{k=1}^\infty$ ist gleichgradig stetig in $C(\overline{\Omega}_\epsilon, \mathbb{R})$, das heißt

$$\forall \kappa > 0 \exists \delta > 0 \exists n_0 \forall k \geq n_0 \forall u_k^\epsilon \forall x, y \in \overline{\Omega}_\epsilon \\ |x - y| \leq \delta \Rightarrow |u_k^\epsilon(x) - u_k^\epsilon(y)| \leq \kappa \quad (2.41)$$

Denn es gilt

$$\begin{aligned}
|u_k^\epsilon(x) - u_k^\epsilon(y)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} (\phi_\epsilon * u_k)(t(x-y) + y) dt \right| \\
&= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} (\phi_\epsilon(t(x-y) + y - z) u_k(z)) dz dt \right| \\
&= \left| \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d}{dt} (\phi_\epsilon(t(x-y) + y - z) u_k(z)) dz dt \right| \\
&= \left| \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \langle x - y, \nabla \phi_\epsilon(t(x-y) + y - z) \rangle u_k(z) dz dt \right| \\
&= \left| \langle x - y, \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \phi_\epsilon(t(x-y) + y - z) u_k(z) dz dt \rangle \right|
\end{aligned}$$

partiell integrieren liefert

$$\begin{aligned}
&= \left| -\langle x - y, \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} (\phi_\epsilon(t(x-y) + y - z) \nabla u_k(z)) dz dt \rangle \right| \\
&= \left| -\int_0^1 \langle x - y, \int_{\mathbb{R}^n} (\phi_\epsilon(t(x-y) + y - z) \nabla u_k(z)) dz \rangle dt \right|
\end{aligned}$$

die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung anwenden

$$\leq \left| \int_0^1 |x - y| \sqrt{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon D_1 u_k \right)^2 + \dots + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon D_n u_k \right)^2} dt \right|$$

und danach die Höldersche Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \int_0^1 |x - y| \sqrt{(\|\phi_\epsilon\|_{q, \mathbb{R}^n} \|D_1 u_k\|_{p, \mathbb{R}^n})^2 + \dots + (\|\phi_\epsilon\|_{q, \mathbb{R}^n} \|D_n u_k\|_{p, \mathbb{R}^n})^2} dt \right| \\
&\leq |x - y| \int_0^1 \|\phi_\epsilon\|_{q, \mathbb{R}^n} n \|\nabla u_k\|_{p, \mathbb{R}^n} dt \\
&= n |x - y| \|\phi_\epsilon\|_{q, \mathbb{R}^n} \|\nabla u_k\|_{p, \mathbb{R}^n}
\end{aligned}$$

wenn wir $0 < \delta \leq \frac{\kappa}{n \|\phi_\epsilon\|_{q, \mathbb{R}^n} \|\|\nabla u_k\|\|_{p, \mathbb{R}^n}}$ wählen, folgt die Behauptung (2.41), da $\|\|\nabla u_k\|\|_{p, \mathbb{R}^n} \leq \sqrt{n} \|u_k\|_{1, p, \Omega} \leq \sqrt{n}$.

Nun folgt aus dem Satz von Arzela-Ascoli, daß die regularisierte Folge $\{u_k^\epsilon\}_{k=1}^\infty$ relativkompakt in $C(\overline{\Omega}_\epsilon, \mathbb{R})$ ist. Also ist $\{u_k^\epsilon\}_{k=1}^\infty$ auch relativkompakt in $L^1(\Omega)$. Denn sei $\{u_{k_j}^\epsilon\}_{j=1}^\infty$ eine in $C(\overline{\Omega}_\epsilon, \mathbb{R})$ gegen \hat{u} konvergierende Teilfolge von $\{u_k^\epsilon\}_{k=1}^\infty$, deren Existenz gerade der Satz von Arzela-Ascoli garantiert. Dann ist

$$\|u_{k_j}^\epsilon(x) - \hat{u}(x)\|_{1, \overline{\Omega}_\epsilon} = \int_{\overline{\Omega}_\epsilon} |u_{k_j}^\epsilon(x) - \hat{u}(x)| dx \leq \int_{\overline{\Omega}_\epsilon} \kappa dx \rightarrow 0 \quad (2.42)$$

wenn $j \rightarrow \infty$. Das zeigt das Resultat für den Fall $q = 1$ und für die ϵ -regularisierte Folge. Um dasselbe auch für die Folge $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ selbst zu zeigen, benötigen wir folgende Ungleichung:

$$\|u^\epsilon - u\|_{1, \mathbb{R}^n} \leq \epsilon \|\|\nabla u\|\|_{1, \mathbb{R}^n} \quad (2.43)$$

Wir konstruieren jetzt induktiv Teilfolgen von $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ indem wir setzen $\{u_{k,0}\}_{k=1}^\infty := \{u_k\}_{k=1}^\infty$, $\{u_{k,1}\}_{k=1}^\infty$ ist diejenige Teilfolge von $\{u_{k,0}\}_{k=1}^\infty$ so daß $\{u_{k,1}^{\epsilon=\frac{1}{k}}\}_{k=1}^\infty$ konvergiert. $\{u_{k,j}\}_{k=1}^\infty$ ist diejenige Teilfolge von $\{u_{k,j-1}\}_{k=1}^\infty$ so daß $\{u_{k,j}^{\epsilon=\frac{1}{j}}\}_{k=1}^\infty$ konvergiert. Dann ist die Diagonalfolge $\{u_{j,j}\}_{j=1}^\infty$ Teilfolge von $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ und auch, bis auf den unwesentlichen Folgenanfang, Teilfolge jeder der Folgen $\{u_{k,j}\}_{k=1}^\infty$. Die Diagonalfolge $\{u_{j,j}\}_{j=1}^\infty$ ist Cauchy-Folge in $L^1(\Omega)$, denn

$$\begin{aligned} \|u_{j,j} - u_{k,k}\|_{1, \mathbb{R}^n} &= \|u_{j,j} - u_{j,j}^{\epsilon=\frac{1}{m}} + u_{j,j}^{\epsilon=\frac{1}{m}} - u_{k,k}^{\epsilon=\frac{1}{m}} + u_{k,k}^{\epsilon=\frac{1}{m}} - u_{k,k}\| \\ &\leq \|u_{j,j} - u_{j,j}^{\epsilon=\frac{1}{m}}\|_{1, \mathbb{R}^n} + \|u_{j,j}^{\epsilon=\frac{1}{m}} - u_{k,k}^{\epsilon=\frac{1}{m}}\|_{1, \mathbb{R}^n} + \|u_{k,k} - u_{k,k}^{\epsilon=\frac{1}{m}}\|_{1, \mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

und wegen der Ungleichung (2.43) gilt

$$\leq \frac{1}{m} \|\|\nabla u_{j,j}\|\|_{1, \mathbb{R}^n} + \|u_{j,j}^{\epsilon=\frac{1}{m}} - u_{k,k}^{\epsilon=\frac{1}{m}}\|_{1, \mathbb{R}^n} + \frac{1}{m} \|\|\nabla u_{k,k}\|\|_{1, \mathbb{R}^n}$$

Zu vorgegebenem $\kappa > 0$ wählen wir m mit $\frac{1}{m} \leq \frac{\kappa}{3}$ und n_0 so, daß für alle $j, k \geq n_0$ gilt

$$\|u_{j,j}^{\epsilon=\frac{1}{m}} - u_{k,k}^{\epsilon=\frac{1}{m}}\|_{1, \mathbb{R}^n} \leq \frac{\kappa}{3}$$

Dann ist

$$\|u_{j,j} - u_{k,k}\|_{1, \mathbb{R}^n} \leq \frac{2}{m} + \frac{\kappa}{3} \leq \kappa$$

Das ist das gewünschte Resultat für $p = 1$.

Wir müssen noch (2.43) zeigen. Dazu schreiben wir

$$\begin{aligned} (\phi_\epsilon * u)(x) - u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x-y) u(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x-y) dy u(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x-y) (u(y) - u(x)) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \epsilon^{-n} \phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) (u(y) - u(x)) dy \end{aligned}$$

und nach der Variablentransformation $y \mapsto z = \frac{x-y}{\epsilon}$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^n} \epsilon^{-n} \phi(z) (u(x - \epsilon z) - u(x)) \epsilon^n dz \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \phi(z) |(u(x - \epsilon z) - u(x))| dz \\ &\leq \|\phi\|_{1, \mathbb{R}^n} \sup_{z \in \text{supp } \phi} |(u(x - \epsilon z) - u(x))| \end{aligned}$$

also folgt zuerst für $u \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u^\epsilon(x) - u(x)| &\leq \sup_{|z| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} |(u(x - \epsilon z) - u(x))| dx \\ &\leq \sup_{|z| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} (u(x - \epsilon z) - u(x)) dt \right| dx \\ &\leq \sup_{|z| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^1 \langle \epsilon z, \nabla u(x - t\epsilon z) \rangle dt \right| dx \\ &\leq \sup_{|z| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 |\epsilon z| |\nabla u(x - t\epsilon z)| dt dx \\ &\leq \sup_{|z| \leq 1} \epsilon |z| \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x - t\epsilon z)| dx dt \\ &\leq \sup_{|z| \leq 1} \epsilon |z| \|\nabla u\|_{1, \mathbb{R}^n} \leq \epsilon \|\nabla u\|_{1, \mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

Damit ist (2.43) gezeigt, wenn wir das Resultat noch in der üblichen Weise auf $\overset{\circ}{H}_1^p(\Omega)$ übertragen.

Sei jetzt $q > 1$. Dann gilt für alle $u \in \mathring{H}_1^p(\Omega)$

$$\|u\|_{q,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{\Omega} |u|^{\lambda q + (1-\lambda)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{\Omega} |u|^{\lambda q} |u|^{(1-\lambda)q} dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

Aus der Hölderschen Ungleichung mit $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$ folgt nun

$$\|u\|_{q,\Omega} \leq \left(\int_{\Omega} |u|^1 dx \right)^{\lambda} \left(\int_{\Omega} |u|^{(1-\lambda)qk'} dx \right)^{\frac{1}{qk'}}$$

Wenn wir jetzt $0 < \lambda < 1$ so wählen, daß $(1-\lambda)q = p^* (1-\lambda q)$ gilt, dann folgt ($\frac{1}{k} = \lambda q$, $\frac{1}{k'} = 1 - \lambda q$)

$$\|u\|_{q,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega}^{\lambda} \|u\|_{p^*,\Omega}^{1-\lambda} \leq \|u\|_{1,\Omega}^{\lambda} C \|\nabla u\|_{p,\Omega}^{1-\lambda} \quad (2.44)$$

wegen Satz (3)

Wenn nun $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ in $\mathring{H}_1^p(\Omega)$ beschränkt ist, dann wissen wir nach dem gerade Gezeigten (2.44), daß

$$\|u_k\|_{q,\Omega} \leq K \|u_k\|_{1,\Omega}^{\lambda}$$

Weil aber, wie wir in (2.42) ff. sahen, $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ relativkompakt in $L^1(\Omega)$ ist, gibt es eine Teilfolge $\{u_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ die in $L^1(\Omega)$ konvergiert, also gilt

$$\|u_{k_m} - u_{k_n}\|_{q,\Omega} \leq K \|u_{k_m} - u_{k_n}\|_{1,\Omega}^{\lambda} \rightarrow 0$$

Somit ist $\{u_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in $L^q(\Omega)$. Die Vollständigkeit von $L^q(\Omega)$ liefert die Existenz einer Funktion $\tilde{u} \in L^q(\Omega)$ für die gilt

$$\|u_{k_m} - \tilde{u}\|_{q,\Omega} \rightarrow 0$$

■

Korollar 2 (Der Grenzfall $p = n$) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes offenes Gebiet. Dann ist für alle $q \geq 1$ $\mathring{H}_1^n(\Omega)$ kompakt in $L^q(\Omega)$ eingebettet.

Beweis. Für alle $\epsilon > 0$ ist $\mathring{H}_1^n(\Omega)$ stetig in $\mathring{H}_1^{n-\epsilon}(\Omega)$ eingebettet. $\mathring{H}_1^{n-\epsilon}(\Omega)$ ist nach dem gerade gezeigten Satz kompakt in $L^q(\Omega)$ für $q \in [1, \frac{n^2}{\epsilon} - n]$ eingebettet. Für alle $q \geq 1$ gibt es aber ein $\epsilon > 0$, so daß $q \in [1, \frac{n^2}{\epsilon} - n]$. Also ist eine Folge $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ die in $\mathring{H}_1^n(\Omega)$ beschränkt ist auch in $\mathring{H}_1^{n-\epsilon}(\Omega)$ beschränkt. Dann gibt es für alle $q \geq 1$ eine Teilfolge $\{u_{k,j}\}_{j=1}^{\infty}$ die in $L^q(\Omega)$ konvergiert. ■

Folgerung 6 (n=2) $\forall q \in [1, \infty)$ ist $\mathring{H}_1^2(\Omega)$ kompakt in $L^q(\Omega)$ eingebettet.

2.3 Der Hilbertraum $H^\bullet(\Omega)$

Sei nun $\Omega \subset \{(r, z) \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$ ein beschränktes offenes Gebiet. Wir definieren ein inneres Produkt auf $C_0^\infty(\Omega)$ folgendermaßen:

$$\langle u, v \rangle^\bullet := \int \int_\Omega \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} u \frac{\partial}{\partial r} v + \frac{\partial}{\partial z} u \frac{\partial}{\partial z} v \right) r dr dz \quad (2.45)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle^\bullet$ ist ein Skalarprodukt auf $C_0^\infty(\Omega)$, denn $\langle u, u \rangle^\bullet \geq 0$ für alle $u \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\langle u, u \rangle^\bullet = 0 \Rightarrow u \equiv 0$ weil $0 = \langle u, u \rangle^\bullet \Rightarrow \nabla u \equiv 0 \Rightarrow u = \text{const.}$ Aber $u \equiv 0$ auf $\partial\Omega$, also $u \equiv 0$. Dieses Skalarprodukt impliziert auf $C_0^\infty(\Omega)$ die Norm

$$\|u\|_\Omega^{\bullet 2} := \langle u, u \rangle^\bullet = \int \int_\Omega \frac{1}{r^2} (u_r^2 + u_z^2) r dr dz \quad (2.46)$$

Die Norm stellt physikalisch die Energie dar, welche die Strömung u besitzt. Jetzt können wir den unserem Problem angemessenen Hilbertraum $H^\bullet(\Omega)$ definieren. Wir setzen

$$H^\bullet(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_\Omega^\bullet}$$

Also ist $H^\bullet(\Omega)$ die Vervollständigung des Raumes der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω in der durch das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle^\bullet$ implizierten Norm $\|\cdot\|_\Omega^\bullet$

Mit der schon gegebenen Definition des Operators \mathbf{L}

$$Lu := u_{rr} + u_{zz} - \frac{1}{r} u_r = r \left(\frac{1}{r} u_r \right)_r + u_{zz}$$

ergibt sich für $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle^\bullet &= \int \int_\Omega \frac{1}{r^2} (u_r v_r + u_z v_z) r dr dz \\ &= \int \int_\Omega \frac{1}{r^2} (u_z v_z) r dr dz + \int \int_\Omega u_r \frac{v_r}{r} dr dz \end{aligned}$$

und indem wir partiell integrieren

$$\begin{aligned} &= \int \int_\Omega -\frac{1}{r^2} (u v_{zz}) r dr dz + \int \int_\Omega -u \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_r}{r} \right) dr dz \\ &= \int \int_\Omega -\frac{1}{r^2} (u v_{zz}) r dr dz + \int \int_\Omega -\frac{u}{r} \left(\frac{v_{rr} r - v_r}{r^2} \right) r dr dz \\ &= \int \int_\Omega -\frac{u}{r^2} \left(v_{rr} + v_{zz} - \frac{1}{r} v_r \right) r dr dz \\ &= \int \int_\Omega \frac{1}{r^2} u Lv r dr dz \end{aligned}$$

Lemma 4 ($H^\bullet(\Omega)$ stetig eingebettet in $\overset{\circ}{H}_1^2(\Omega)$) Der Hilbertraum $H^\bullet(\Omega)$ ist stetig im Hilbertraum $\overset{\circ}{H}_1^2(\Omega)$ eingebettet.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|\|\nabla u\|\|_{2,\Omega} &= \left(\int \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, drdz \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int \int_{\Omega} (v_r^2 + v_z^2) \, drdz \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int \int_{\Omega} \frac{(\sup_{(r,z) \in \Omega} r)}{r} (v_r^2 + v_z^2) \, drdz \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int \int_{\Omega} \frac{(\sup_{(r,z) \in \Omega} r)}{r^2} (v_r^2 + v_z^2) r \, drdz \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.47} \\
&= \left(\sup_{(r,z) \in \Omega} r \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \int_{\Omega} \frac{1}{r^2} (v_r^2 + v_z^2) r \, drdz \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C(\Omega) |v|_{\bullet}^{\circ}
\end{aligned}$$

und daraus folgt die Behauptung, da $\|\|\nabla u\|\|_{2,\Omega}$ eine äquivalente Norm auf $\overset{\circ}{H}_1^2(\Omega)$ ist. ■

Lemma 5 ($L^p(\Omega)$ stetig in $L_{\bullet}^p(\Omega)$) $L^p(\Omega)$ ist für alle $p \geq 1$ stetig in dem durch die Norm $\|v\|_{p,\Omega}^{\bullet} = \left(\int \int_{\Omega} |v|^p r \, drdz \right)^{\frac{1}{p}}$ definierten Banachraum $L_{\bullet}^p(\Omega)$ eingebettet.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\|v\|_{p,\Omega}^{\bullet} &= \left(\int \int_{\Omega} |v|^p r \, drdz \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sup_{(r,z) \in \Omega} r \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int \int_{\Omega} |v|^p \, drdz \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.48} \\
&= C(\Omega) \|v\|_{p,\Omega}
\end{aligned}$$

Wir bemerken noch, daß $|\cdot|_{\bullet}^{\circ}$ tatsächlich eine Norm auf $H^\bullet(\Omega)$ ist, und $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\bullet}$ eine positiv definite Form auf $H^\bullet(\Omega)$ darstellt. Sei nämlich $|v|_{\bullet}^{\circ} = 0$, dann ist wegen (2.47) $\|\|\nabla v\|\|_{2,\Omega} = 0$ also $v \equiv 0$ da $\|\|\nabla \cdot\|\|_{2,\Omega}$ eine Norm auf $\overset{\circ}{H}_1^2(\Omega)$ ist. Desweiteren ist natürlich $\langle v, v \rangle^{\bullet} \geq 0$ und die Definitheit folgt aus der gerade gezeigten Normeigenschaft. ■

Satz 5 ($H^\bullet(\Omega)$ kompakt in $L^\bullet_p(\Omega)$) Die Einbettung von $H^\bullet(\Omega)$ in $L^\bullet_p(\Omega)$ ist für alle $p \geq 1$ kompakt.

Beweis. Sei $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ beschränkt in $H^\bullet(\Omega)$, dann ist $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ auch beschränkt in $H^2_1(\Omega)$ wegen Lemma (4). Weil für alle $p \geq 1$ gilt, daß $H^2_1(\Omega)$ kompakt in $L^2(\Omega)$ eingebettet ist, finden wir eine Teilfolge $\{u_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ die in $L^p(\Omega)$ konvergiert. Dann konvergiert aber $\{u_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ auch in $L^\bullet_p(\Omega)$, denn $L^p(\Omega)$ ist stetig in $L^\bullet_p(\Omega)$ eingebettet, wie wir in Lemma (5) sahen. ■

Folgerung 7 $H^\bullet(\Omega) \subset H^2_1(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^\bullet_p(\Omega)$ wobei die 2.te Einbettung kompakt ist.

2.4 Stetigkeit zwischen L^p -Räumen

Lemma 6 (Lp-Stetigkeit) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Gebiet und $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Außerdem seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p, q \geq 1$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ mit $a_1, a_2 \geq 0$ und g erfülle eine Wachstumsbeschränkung der Art:

$$\forall \xi \in \mathbb{R} : |g(\xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^{\frac{p}{q}} \quad (2.49)$$

Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} \hat{g} : L^p(\Omega) &\longrightarrow L^q(\Omega) \\ \hat{g} : u(\cdot) &\longmapsto g(u(\cdot)) \end{aligned} \quad (2.50)$$

stetig.

Beweis. Sei $u \in L^p(\Omega)$ dann gilt

$$\int_{\Omega} |\hat{g}(u)|^q dx \leq \int_{\Omega} (a_1 + a_2 |u|^{\frac{p}{q}})^q dx \quad (2.51)$$

wegen (2.49). Da x^q für $x \geq 0$ und $q \geq 1$ konvex ist, gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^q &\leq \frac{1}{2}x_1^q + \frac{1}{2}x_2^q \\ (x_1 + x_2)^q &\leq 2^{q-1}(x_1^q + x_2^q) \end{aligned} \quad (2.52)$$

woraus auf (2.51) angewendet folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (a_1 + a_2 |u|^{\frac{p}{q}})^q &\leq \int_{\Omega} 2^{q-1} (\max(a_1, a_2))^q (1 + |u|^p) dx \\ &\leq \int_{\Omega} C(1 + |u|^p) dx \leq C|\Omega| + C\|u\|_{p,\Omega}^p < \infty \end{aligned} \quad (2.53)$$

da $u \in L^p(\Omega)$ ist. Also ist $\hat{g}(u) \in L^q(\Omega)$.

Um zu zeigen, daß \hat{g} stetig in u ist, betrachten wir die Funktion $f_u : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ $z \mapsto f_u(z) := \hat{g}(z + u) - \hat{g}(u)$. Wie wir sehen werden gilt

$$\forall u \in L^p(\Omega) : f_u \text{ stetig in } z \equiv 0 \Leftrightarrow \hat{g} \text{ stetig in } u.$$

denn es ist

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall u : f_u \text{ stetig in } z \equiv 0 \\ &\Leftrightarrow \forall u : \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|\hat{z} - 0\|_{p,\Omega} \leq \delta \Rightarrow \|f_u(\hat{z}) - f_u(0)\|_{q,\Omega} \leq \epsilon \\ &\Leftrightarrow \forall u : \|\hat{z}\|_{p,\Omega} \leq \delta \Rightarrow \|\hat{g}(\hat{z} + u) - \hat{g}(u)\|_{q,\Omega} \leq \epsilon \end{aligned}$$

sei $\hat{z} + u = \hat{u}$

$$\Leftrightarrow \forall u : \|\hat{u} - u\|_{p,\Omega} \leq \delta \Rightarrow \|\hat{g}(\hat{u}) - \hat{g}(u)\|_{q,\Omega} \leq \epsilon$$

Was gleichwertig dazu ist, daß \hat{g} stetig in u ist für alle $u \in L^p(\Omega)$. Es ist $f_u(0) = \hat{g}(u) - \hat{g}(u) = 0$.

Wir müssen also zeigen, daß f_u stetig in $z \equiv 0$ ist. Dazu bemerken wir, daß f_u als **reellwertiger Funktion** einer ähnlichen Wachstumsbeschränkung unterliegt wie g . Definieren wir nämlich für $n \in \mathbb{N}$: $\Omega_3(n) := \{x \in \bar{\Omega} : |u(x)| \leq n\}$ dann gibt es positive Konstanten $C_1(n), C_2(n) < \infty$ so daß gilt

$$\forall x \in \bar{\Omega}_3(n) \quad \forall \xi \in \mathbb{R} : |f_u(\xi)(x)| \leq C_1(n) + C_2(n)|\xi|^{\frac{p}{q}} \quad (2.54)$$

Um das zu zeigen, schreiben wir für $x \in \bar{\Omega}_3$ und $|\xi| \geq \lambda > 0$ (weil für $|\xi| < \lambda$ die behauptete Ungleichung sofort folgt)

$$\begin{aligned} |f_u(\xi)(x)| &= |g(\xi + u(x)) - g(u(x))| \\ &\leq a_1 + a_2|\xi + u(x)|^{\frac{p}{q}} + a_1 + a_2|u(x)|^{\frac{p}{q}} \\ &\leq 2a_1 + a_2 n^{\frac{p}{q}} + a_2|\xi + u(x)|^{\frac{p}{q}} \\ &\leq 2a_1 + a_2 n^{\frac{p}{q}} + a_2(|\xi| + |u(x)|)^{\frac{p}{q}} \\ &\leq 2a_1 + a_2 n^{\frac{p}{q}} + a_2\left(|\xi|\left(1 + \frac{|u(x)|}{|\xi|}\right)\right)^{\frac{p}{q}} \\ &\leq 2a_1 + a_2 n^{\frac{p}{q}} + a_2\left(1 + \frac{|u(x)|}{|\lambda|}\right)^{\frac{p}{q}}|\xi|^{\frac{p}{q}} \\ &\leq 2a_1 + a_2 n^{\frac{p}{q}} + a_2\left(1 + \frac{n}{|\lambda|}\right)^{\frac{p}{q}}|\xi|^{\frac{p}{q}} \\ &\leq C_1(n) + C_2(n)|\xi|^{\frac{p}{q}} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Da g auf $[-(n+1), n+1]$ gleichmäßig stetig ist, gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall s, t \in [-(n+1), n+1] |s-t| \leq \delta \Rightarrow |g(s) - g(t)| \leq \epsilon$$

Sei $x \in \overline{\Omega}_3(n)$. Wir setzen $s = \xi + u(x), t = u(x)$, dann ist klar daß $s, t \in [-(n+1), n+1]$ wenn $|\xi| < 1$. Also gilt auch

$$\forall \hat{\epsilon} > 0 \exists \hat{\delta} > 0 : \forall \xi \in \mathbb{R} |\xi| \leq \hat{\delta} \Rightarrow |g(\xi + u(x)) - g(u(x))| \leq \hat{\epsilon}$$

Aber das heißt natürlich nicht, daß hier $x \mapsto g(u(x))$ gleichmäßig stetig ist, denn u ist nicht notwendig stetig.

Wir setzen $\Omega_1 := \{x \in \overline{\Omega}_3(n) : |z(x)| \leq \hat{\delta}\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} |f_u(z)(x)|^q dx &= \int_{\Omega_1} |g(z(x) + u(x)) - g(u(x))|^q dx \leq \int_{\Omega_1} |\hat{\epsilon}|^q dx \\ &\leq \hat{\epsilon}^q |\Omega_1| \leq \hat{\epsilon}^q |\Omega| \end{aligned} \quad (2.56)$$

Sei $\Omega_2 := \{x \in \overline{\Omega}_3(n) : |z(x)| > \hat{\delta}\}$. Dann ergibt (2.53) zusammen mit (2.55)

$$\int_{\Omega_2} |f_u(z)(x)|^q dx \leq C(n) |\Omega_2| + C(n) \|z\|_p^p \leq C(n) (|\Omega_2| + \delta^p) \quad (2.57)$$

Nach Voraussetzung $\|z\|_{p,\Omega} < \delta$ ist

$$\delta^p \geq \int_{\Omega} |z|^p dx \geq \int_{\Omega_2 \subseteq \Omega} |z|^p dx \geq \hat{\delta}^p |\Omega_2| \quad (2.58)$$

weil $|z(x)| > \hat{\delta}$ in Ω_2 . Deshalb ist $|\Omega_2| \leq (\frac{\delta}{\hat{\delta}})^p$. Einsetzen in (2.57) zeigt

$$\int_{\Omega_2} |f_u(z)|^q dx \leq C(n) \left(\frac{\delta}{\hat{\delta}}\right)^p + C(n) \delta^p \leq C(n) \delta^p \left(1 + \frac{1}{\hat{\delta}^p}\right). \quad (2.59)$$

Betrachten wir jetzt $\Omega \setminus \Omega_3(n) := \{x \in \Omega : |u(x)| > n\}$. Weil $u \in L^p(\Omega)$ ist, wissen wir, daß $meas(\Omega \setminus \Omega_3(n)) \rightarrow 0$ wenn $n \rightarrow \infty$. Außerdem gilt für alle $x \in \overline{\Omega}$

$$\begin{aligned} |f_u(\xi)(x)|^q &= |g(\xi + u(x)) - g(u(x))|^q \\ &\leq (a_1 + a_2 |\xi + u(x)|^{\frac{p}{q}} + a_1 + a_2 |u(x)|^{\frac{p}{q}})^q \\ &\dots \\ &\leq C_1 (|\xi|^p + |u(x)|^p) + C_2 \end{aligned} \quad (2.60)$$

welches man durch mehrmalige Anwendung von (2.52) zeigt. Das bedeutet für das Integral:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \Omega_3(n)} |f_u(z(x))|^q dx &\leq \int_{\Omega \setminus \Omega_3(n)} C_1(|z(x)|^p + |u(x)|^p) + C_2 dx \\ &\leq C_2 \operatorname{meas}(\Omega \setminus \Omega_3(n)) + \int_{\Omega \setminus \Omega_3(n)} C_1(|z(x)|^p + |u(x)|^p) dx \end{aligned} \quad (2.61)$$

Nun ist aber $\int_{\Omega_3(n)} C_1(|z(x)|^p + |u(x)|^p) dx$ monoton wachsend für $n \rightarrow \infty$ mit oberer Schranke $\int_{\Omega} C_1(|z(x)|^p + |u(x)|^p) dx$, also ist $\int_{\Omega \setminus \Omega_3(n)} C_1(|z(x)|^p + |u(x)|^p) dx$ monoton fallend mit unterer Schranke 0. Deshalb können wir, wenn wir nur $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß wählen, $\int_{\Omega \setminus \Omega_3(n)} |f_u(z(x))|^q dx$ vernachlässigen und es folgt schließlich:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f_u(z)(x)|^q dx &= \int_{\Omega_1} \dots + \int_{\Omega_2} \dots + \int_{\Omega \setminus \Omega_3(n)} \\ &\leq C(n) \delta^p \left(1 + \frac{1}{\delta^p}\right) + \hat{\epsilon}^q |\Omega| \end{aligned} \quad (2.62)$$

Wenn wir jetzt $\hat{\epsilon} \leq \frac{\epsilon^q}{2} \frac{1}{|\Omega|}$ und $C(n) \delta^p \left(1 + \frac{1}{\delta^p}\right) \leq \frac{\epsilon^q}{2}$ wählen, dann ergibt sich

$$\int_{\Omega} |f_u(z)(x)|^q dx \leq \epsilon^q \quad (2.63)$$

was $\|f_u(z)\|_{q,\Omega} \leq \epsilon$ impliziert solange $\|z\|_{p,\Omega} \leq \delta$ und damit ist die Behauptung gezeigt. \blacksquare

Bemerkung 6 Die Grundidee des Beweises habe ich aus [Rabinowitz84] übernommen. Allerdings mußten technische Einzelheiten (Einführung der Menge Ω_3) hinzugefügt werden. Diesen Hinweis verdanke ich Prof. Alber. Ähnliche Beweise findet man auch in [Rabinowitz73] und [Rabinowitz74]

Bemerkung 7 Eine tiefere Analyse des so gewonnenen Operators der Hintereinanderausführung $\hat{g} : u(x) \mapsto g(u(x))$ zeigt, daß die Wachstumsbedingung auch notwendig für die Stetigkeit von \hat{g} ist. Den Operator \hat{g} nennt man auch Nemitski Operator. Näheres findet sich in [Appell90].

Bemerkung 8 Naheliegende Änderungen des Beweises erlauben es, das Resultat auch für den Fall $g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ $\hat{g} : u(x) \mapsto g(x, u(x))$ zu erhalten. Dieses sei dem Leser überlassen.

Beispiel 1 \hat{g} stetig von $L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$. Das garantieren wir indem wir fordern $|g(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)$.

\hat{g} stetig von $L^p(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$. Dann fordern wir $|g(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^{\frac{p}{2}})$.

Je 'besser' also die Ausgangsfunktion ist, desto schwächer fällt die Wachstumsbedingung aus, was auch nicht verwundert.

2.5 Die Nichtlinearität $f(u)$.

Sei wieder $F(\xi) = \int_0^\xi f(s) ds$. Wir stellen an f folgende Bedingungen:

(f_1) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $f(\xi) = 0$ für $\xi \leq 0$.

(f_2) Es gebe Zahlen $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p, q \geq 1$ und Konstanten $a_1, a_2 \geq 0$ so daß f die Wachstumsbeschränkung

$$\forall \xi \in \mathbb{R} : |f(\xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^{\frac{p}{q}}$$

erfülle.

(f_3) $f(\xi) = o(|\xi|)$ für $\xi \rightarrow 0$

(f_4) Es gebe Konstanten $\mu > 2$ und $\nu \geq 0$ so daß für $|\xi| \geq \nu$ gilt

$$0 < \mu F(\xi) \leq \xi f(\xi)$$

Daraus folgt aber sofort auch $f(\xi) > 0$ und $F(\xi) > 0$ für $\xi \geq \nu$

Sei $\epsilon > 0$. Wir integrieren die letzte Bedingung in den Grenzen von $\nu + \epsilon$ bis ξ und erhalten

$$0 < \int_{\nu+\epsilon}^{\xi} \frac{\mu}{t} dt \leq \int_{\nu+\epsilon}^{\xi} \frac{f(t)}{F(t)} dt$$

Wir substituieren $z = F(t)$ und erhalten wegen $F'(t) = f(t)$

$$0 < \int_{\nu+\epsilon}^{\xi} \frac{\mu}{t} dt \leq \int_{F(\nu+\epsilon)}^{F(\xi)} \frac{1}{z} dz$$

also ergibt sich

$$0 < \mu [\ln |\xi| - \ln(\nu + \epsilon)] \leq \ln |F(\xi)| - \ln |F(\nu + \epsilon)|$$

woraus folgt

$$|F(\xi)| \geq \frac{|F(\nu + \epsilon)| |\xi|^\mu}{(\nu + \epsilon)^\mu} > |F(\nu + \epsilon)|$$

also gilt

$$\forall \xi \geq \nu : F(\xi) \geq a_3 |\xi|^\mu$$

weil dann $F(\xi) > 0$ ist. Aber F ist stetig auf $[-\nu, \nu]$ und deshalb gibt es ein $a_4 > 0$ so daß für $|\xi| < \nu$: $F(\xi) \geq \min_{\zeta \in [-\nu, \nu]} F(\zeta) \geq -a_4$. Deshalb gilt insgesamt

$$\forall \xi \in \mathbb{R} : F(\xi) \geq a_3 |\xi|^\mu - a_4 \quad (2.64)$$

Bemerkung 9 Aus (f_3) folgt $f(0) = 0$ und die Differenzierbarkeit von f in 0 , denn

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(\xi)}{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{o(\xi)}{\xi} = 0$$

Bemerkung 10 Weil $\mu > 2$ ist, wächst also $F(\xi)$ superquadratisch für $\xi \geq \nu$. Aus (f_4) folgt, daß $f(\xi) \geq \frac{\mu}{\xi} F(\xi) \geq \frac{\mu}{\xi} (a_3 |\xi|^\mu - a_4) \geq \mu |\xi|^{\mu-1} - \frac{\mu a_4}{\xi}$. Also wächst $f(\xi)$ superlinear.

Beispiel 2 $f(\xi) = \xi^{\frac{3}{2}}$ erfüllt $(f_1), \dots, (f_4)$.

Kapitel 3

Minimax-Methoden

3.1 Kritische Punkte

Definition 7 (Fréchet-differenzierbar) Seien X, Y zwei Banachräume und $I : X \mapsto Y$. Wir sagen I ist in $u \in X$ **Fréchet-differenzierbar** wenn es eine beschränkte lineare Abbildung $A(u) : X \mapsto Y$ gibt, so daß für alle $v \in X$ für die $\lim_{\|v\|_X \rightarrow 0} \|v\|_X = 0$ gilt, folgt

$$\lim_{\|v\|_X \rightarrow 0} \frac{\|I(u+v) - I(u) - A(u).v\|_Y}{\|v\|_X} = 0 \quad (3.1)$$

Dann ist $A(u)$ die Fréchet-Ableitung in u und wir schreiben $DI(u) = A(u)$.

Definition 8 (Kritische Punkte) Sei E ein reeller Banachraum und sei $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ ein Funktional. Dann ist die Fréchet-Ableitung $I'(u) \in E'$, dem topologischen Dual von E . Wir nennen $u \in E$ einen **kritischen Punkt** von I , wenn $I'(u) \equiv 0$, d.h

$$\forall \phi \in E : I'(u).\phi = 0$$

Den zugehörigen Wert $I(u)$ nennen wir **kritischen Wert** von I .

Wenn E ein Hilbertraum ist, dann gibt es aufgrund des Rieszschen Darstellungssatzes ein eindeutiges Element $DI(u) \in E$ so daß gilt

$$\forall \phi \in E : I'(u).\phi = \langle DI(u), \phi \rangle_{E,E}$$

Hier ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E,E}$ das skalare Produkt auf E . Daraus folgt für Hilberträume sofort das

Lemma 7 (Kritische Punkte sind schwache Lösungen) Sei E ein Hilbertraum. Dann gilt: $u \in E$ ist schwache Lösung von $DI(v) = 0 \Leftrightarrow u$ ist kritischer Punkt von I .

3.2 Mountain-Pass Theorem

Definition 9 (Palais-Smale Bedingung) Sei E ein reeller Banachraum und sei $C^1(E, \mathbb{R})$ der Raum der Frechet-differenzierbaren Funktionale, deren Ableitung noch stetig ist. Sei $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ ein solches Funktional.

Wir sagen I erfülle die **Palais-Smale Bedingung (PS)** wenn (1) \Rightarrow (2) gilt.

- (1) $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset E$, $\exists C > 0 \forall m \in \mathbb{N} |I(u_m)| < C$, $DI(u_m) \rightarrow 0$ wenn $m \rightarrow \infty$
 (2) Es gibt eine Teilfolge $\{u_{m_j}\}_{j=1}^\infty$ von $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ die in E konvergiert.

Satz 6 (Mountain-Pass Theorem) Sei E ein reeller Banachraum und sei $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Außerdem sei für $\rho > 0$ $B_\rho(0)$ die ρ -Normkugel in E . Dann gilt (1) \Rightarrow (2).

- (1) (I_1) $I(0) = 0$
 (I_2) I genügt der **Palais-Smale Bedingung (PS)**.
 (I_3) $\exists \alpha > 0 I_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$
 (I_4) $\exists e \in E \setminus B_\rho(0) : I(e) \leq 0$
- (2) • I besitzt einen kritischen Punkt und für den zugehörigen kritischen (stationären) Wert C gilt $C \geq \alpha$ und

$$C = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u=g(t), t \in [0,1]} I(u)$$

wobei $\Gamma = \{g \in C([0, 1], E) \mid g(0) = 0, g(1) = e\}$

Beweis. [Rabinowitz84] oder [Struwe90]. ■

Beispiel 3 ($E = \mathbb{R}$) In diesem Fall reduziert sich die Aussage zu $I \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, die Palais-Smale Bedingung wird zu $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}$, $|I(x_m)| < C$, $I'(x_m) \rightarrow 0$ wenn $m \rightarrow \infty$. $\{x_{m_j}\}_{j=1}^\infty$ konvergiert gegen \hat{x} . Dann ist \hat{x} ein stationärer Punkt von I , d.h. $I'(\hat{x}) = 0$ und die weiteren Voraussetzungen im Mountain-Pass Theorem schließen einen Sattelpunkt aus, weil es, bis auf verschiedene Parametrisierung, nur einen Weg zwischen 0 und e gibt und der kritische Punkt als $\max I(u)$ realisiert wird. Also ist $I(\hat{x})$ lokales Extremum.

Beispiel 4 ($E = \mathbb{R}^2$) I ist auf dem Kreis mit Radius ρ größer als α . $I(0) = 0$ und es gibt ein $e \in \mathbb{R}^2$ mit $\|e\| > \rho$ so daß $I(e) \leq 0$. Dann gibt es einen 0 und e verbindenden Weg mit geringster Maximalhöhe, welcher den ρ -Kreis überquert und an seiner höchsten Stelle einen Sattelpunkt passiert.

Bemerkung 11 Heuristisch lautet dieses Mountain-Pass Theorem also: Sind zwei Punkte im Graph von I durch einen Höhenrücken getrennt, dann gibt es einen sie verbindenden Weg mit geringster Maximalhöhe. Der höchste Punkt dieses Weges ist ein Gebirgspäß (Sattelpunkt).

3.3 Variationsfunktional

Definition 10 (Variationsfunktional zur schwachen Form einer PDE)

Wenn sich die gegebene PDE schwach als

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) : \langle DI(u), \phi \rangle = 0$$

schreiben läßt, nennen wir I das der PDE zugeordnete **Variationsfunktional**.

3.4 Fréchet-Ableitung von I

Sei für $u \in H^\bullet(\Omega)$ das Funktional I so erklärt:

$$I(u) := \frac{1}{2} \langle u, u \rangle^\bullet - \int \int_\Omega \left[\int_0^{u(r,z)} f(s) ds \right] r dr dz$$

Die Existenz des so definierten Funktionals wird durch die Wachstumsbeschränkung (f_2) gesichert. Wir zeigen nun, daß I Fréchet-differenzierbar ist und die Fréchet-Ableitung so aussieht:

$$DI(u).v = \langle u, v \rangle^\bullet - \int \int_\Omega f(u) v r dr dz \quad (3.2)$$

Dazu sei $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $\xi \mapsto F(\xi) = \int_0^\xi f(s) ds$. Dann gilt für $|v|_\Omega^\bullet \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} I(u+v) - I(u) &= \frac{1}{2} \langle u+v, u+v \rangle^\bullet - \int \int_\Omega \left[\int_0^{u(r,z)+v(r,z)} f(s) ds \right] r dr dz \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle u, u \rangle^\bullet - \int \int_\Omega \left[\int_0^{u(r,z)} f(s) ds \right] r dr dz \\ &= \langle u, v \rangle^\bullet - \int \int_\Omega \left[\int_{u(r,z)}^{u(r,z)+v(r,z)} f(s) ds \right] r dr dz + \frac{1}{2} \langle v, v \rangle^\bullet \\ &= \langle u, v \rangle^\bullet - \int \int_\Omega F(u(r,z) + v(r,z)) - F(u(r,z)) r dr dz + \frac{1}{2} \langle v, v \rangle^\bullet \end{aligned}$$

also folgt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung mit $\theta \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} &= \langle u, v \rangle^\bullet - \int \int_{\Omega} F'(u(r, z) + \theta v(r, z)) v(r, z) r dr dz + \frac{1}{2} \langle v, v \rangle^\bullet \\ &= \langle u, v \rangle^\bullet - \int \int_{\Omega} f(u + \theta v) v r dr dz + \frac{1}{2} \langle v, v \rangle^\bullet \end{aligned}$$

Deshalb folgt

$$|I(u + v) - I(v) - DI(u).v| = \left| \int \int_{\Omega} [f(u + \theta v) - f(u)] v r dr dz + \frac{1}{2} \langle v, v \rangle^\bullet \right|$$

und wir können weiter schreiben

$$\leq C_r(\Omega) \left| \int \int_{\Omega} [f(u + \theta v) - f(u)] v r dr dz \right| + \left| \frac{1}{2} \langle v, v \rangle^\bullet \right|$$

nun schließen wir mit der Hölder-Ungleichung

$$\leq C_r(\Omega) \|f(u + \theta v) - f(u)\|_{p,\Omega} \|v\|_{q,\Omega} + \frac{1}{2} |v|_{\Omega}^{\bullet 2}$$

Daher gilt

$$DI(u).v = \langle u, v \rangle^\bullet - \int \int_{\Omega} f(u) v r dr dz \quad (3.3)$$

denn es ist

$$\begin{aligned} &\lim_{|v|_{\Omega}^{\bullet} \rightarrow 0} \frac{|I(u + v) - I(u) - DI(u).v|}{|v|_{\Omega}^{\bullet}} \\ &\leq \lim_{|v|_{\Omega}^{\bullet} \rightarrow 0} \frac{C_r(\Omega) \|f(u + \theta v) - f(u)\|_{p,\Omega} \|v\|_{q,\Omega} + \frac{1}{2} |v|_{\Omega}^{\bullet 2}}{|v|_{\Omega}^{\bullet}} \\ &\leq C_r(\Omega) \lim_{|v|_{\Omega}^{\bullet} \rightarrow 0} \frac{\|f(u + \theta v) - f(u)\|_{p,\Omega} C |v|_{\Omega}^{\bullet} + \frac{1}{2} |v|_{\Omega}^{\bullet 2}}{|v|_{\Omega}^{\bullet}} \end{aligned}$$

weil $H^\bullet(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. Es gilt also

$$\begin{aligned} &\lim_{|v|_{\Omega}^{\bullet} \rightarrow 0} \frac{|I(u + v) - I(u) - DI(u).v|}{|v|_{\Omega}^{\bullet}} \\ &\leq C_r(\Omega) C \lim_{|v|_{\Omega}^{\bullet} \rightarrow 0} \|f(u + \theta v) - f(u)\|_{p,\Omega} + \frac{1}{2} |v|_{\Omega}^{\bullet} \end{aligned}$$

Da f stetig ist und der Wachstumsbeschränkung (f_2) genügt, folgt aus dem Stetigkeitslemma für $L^p(\Omega)$ -Funktionen, daß $\|f(u + \theta v) - f(u)\|_{p,\Omega} \rightarrow 0$, wenn $\|\theta v\|_{q,\Omega} \rightarrow 0$. Wenn aber $|v|_{\Omega}^{\bullet} \rightarrow 0$, dann gilt auch $\|v\|_{q,\Omega} \rightarrow 0$. Also folgt endlich

$$\lim_{|v|_{\Omega}^{\bullet} \rightarrow 0} \frac{|I(u+v) - I(u) - DI(u) \cdot v|}{|v|_{\Omega}^{\bullet}} = 0 \quad (3.4)$$

in Übereinstimmung mit (3.1). \blacksquare

Wir zeigen jetzt, das

Lemma 8 (*DI ist stetig*) Die Fréchet-Ableitung

$$\begin{aligned} DI : H^{\bullet}(\Omega) &\mapsto H^{\bullet}(\Omega)' \\ u &\mapsto DI(u) \end{aligned} \quad (3.5)$$

ist stetig, mithin also $I \in C^1(H^{\bullet}(\Omega), \mathbb{R})$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Wir setzen der Einfachheit halber $E = H^{\bullet}(\Omega)$. Dann gilt für eine gegen $u \in H^{\bullet}(\Omega)$ konvergierende Folge $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$:

$$\begin{aligned} \|DI(u_m) - DI(u)\|_{E'} &:= \sup_{\|\phi\|_E \leq 1} \left| \int \int_{\Omega} (f(u_m) - f(u)) \phi \, r \, dr \, dz + \langle u_m - u, \phi \rangle^{\bullet} \right| \\ &\leq \sup_{\|\phi\|_E \leq 1} \int \int_{\Omega} |(f(u_m) - f(u))| |\phi| \, r \, dr \, dz + |u_m - u|_{\Omega}^{\bullet} \cdot 1 \\ &\leq C_r(\Omega) \sup_{\|\phi\|_E \leq 1} \int \int_{\Omega} |(f(u_m) - f(u))| |\phi| \, dr \, dz + |u_m - u|_{\Omega}^{\bullet} \end{aligned}$$

Die Höldersche Ungleichung anwenden

$$\leq C_r(\Omega) \sup_{\|\phi\|_E \leq 1} \|f(u_m) - f(u)\|_{q,\Omega} \|\phi\|_{p,\Omega} + |u_m - u|_{\Omega}^{\bullet}$$

wegen der Einbettung $H^{\bullet}(\Omega) \subset \overset{\circ}{H}_1^2(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ folgt

$$\begin{aligned} &\leq C_r(\Omega) \sup_{|v|_{\Omega}^{\bullet} \leq 1} \|f(u_m) - f(u)\|_{q,\Omega} C |v|_{\Omega}^{\bullet} + |u_m - u|_{\Omega}^{\bullet} \\ &\leq C \|f(u_m) - f(u)\|_{q,\Omega} + |u_m - u|_{\Omega}^{\bullet} \end{aligned}$$

Da f stetig ist und der Wachstumsbeschränkung (f_2) genügt, garantiert uns das Stetigkeitslemma für $L^p(\Omega)$ -Funktionen, daß $\|f(u_m) - f(u)\|_{q,\Omega} \leq \epsilon_1$ ist, falls $\|u_m - u\|_{p,\Omega} \leq \delta_1$. Da $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ gegen $u \in H^{\bullet}(\Omega)$ konvergiert, finden wir

ein $m_0 \in \mathbb{N}$ so daß für $m \geq m_0$ gilt $\|u_m - u\|_{p,\Omega} \leq \frac{\delta_1}{C(\Omega)}$. Dann ist $\|u_m - u\|_{p,\Omega} \leq \delta_1$, weil $H^\bullet(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ ist. Und hierbei brauchten wir uns keine Gedanken über die tatsächlich gegebenen Werte für p, q aus der Wachstumsbeschränkung (f_2) zu machen. Diese Wahl von $\delta_1 > 0$ zeigt uns

$$\|DI(u_m) - DI(u)\|_{E'} \leq C \epsilon_1 + \frac{\delta_1}{C(\Omega)}$$

Wir wählen $\epsilon_1 \leq \frac{\epsilon}{2C}$ und setzen $\delta := \min\{\frac{\epsilon}{2}, \delta_1\}$. δ anstelle von δ_1 gibt uns

$$\|DI(u_m) - DI(u)\|_{E'} \leq \epsilon$$

■

Wir haben in diesem Beweis nebenbei

$$\|DI(u)\|_{E'} \leq C \|f(u)\|_{q,\Omega} + \|u\|_{\Omega}^\bullet$$

gezeigt, deshalb ist tatsächlich $DI(u) : v \mapsto DI(u).v$ beschränkt und damit $DI(u) \in H^\bullet(\Omega)'$.

Wir betrachten nun $J(u) = \int \int_{\Omega} \left[\int_0^{u(r,z)} f(s) ds \right] r dr dz$. Aufgrund der gezeigten Resultate für I ist J stetig Frechet-differenzierbar mit $DJ(u).\phi = \int \int_{\Omega} f(u) \phi r dr dz$. Es gilt darüberhinaus, die

Folgerung 8 ($u \mapsto DJ(u)$ **kompakt**) $u \mapsto DJ(u)$, $H^\bullet(\Omega) \mapsto H^\bullet(\Omega)'$ ist kompakt.

Beweis. Sei $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset H^\bullet(\Omega)$ beschränkt. Weil die Normkugel im Hilbertraum schwach kompakt ist, gibt es eine gegen $u \in H^\bullet(\Omega)$ schwach konvergierende Teilfolge $\{u_{m_j}\}_{j=1}^\infty$. Da aber auch $H^\bullet(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ kompakt eingebettet ist, können wir aus dieser Teilfolge wieder eine Teilfolge auswählen, die wir genauso bezeichnen, die in $L^p(\Omega)$ gegen u stark konvergiert. Ähnlich wie im Beweis von Lemma (3.5) schreiben wir nun für diese Folge

$$\|DJ(u_{m_j}) - DJ(u)\|_{E'} \leq C \|(f(u_{m_j}) - f(u))\|_{q,\Omega}$$

Die rechte Seite wird klein wenn $j \rightarrow \infty$, weil $\{u_{m_j}\}_{j=1}^\infty$ in $L^p(\Omega)$ konvergiert und wir dasselbe Argument wie im Beweis von (3.5) anwenden können. Nach dem gerade gezeigten gilt dann $\|DJ(u_{m_j}) - DJ(u)\|_{E'} \rightarrow 0$, also konvergiert $DJ(u_{m_j})_{j=1}^\infty$. ■

3.5 Schwache Form der PDE

Lemma 9 (Schwache Form der PDE) *Die schwache Form der semilinearen elliptischen PDE 2. Ordnung*

$$Lu = -r^2 f(u) \quad (r, z) \in \Omega \quad (3.6)$$

$$u = 0 \quad (r, z) \in \partial\Omega \quad (3.7)$$

bezüglich des Integrals $\int \int_{\Omega} (\cdot) r dr dz$ lautet:

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) : \quad \langle u, \phi \rangle^\bullet - \int \int_{\Omega} f(u) \phi r dr dz = 0$$

Beweis. $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ schreiben wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} Lu &= -f(u) \\ \phi \frac{1}{r^2} Lu &= -f(u) \phi \\ \int \int_{\Omega} \phi \frac{1}{r^2} Lu r dr dz &= - \int \int_{\Omega} f(u) \phi r dr dz \\ 0 &= \langle u, \phi \rangle^\bullet - \int \int_{\Omega} f(u) \phi r dr dz \end{aligned}$$

und wegen (3.2) ist das gleichwertig zu

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) : \quad 0 = DI(u) \cdot \phi$$

■

Folgerung 9 *Also ist I das Variationsfunktional zu (3.6).*

Lemma 10 ($u \mapsto \Lambda(u)$ ist offen) *Sei für alle $\phi \in H^\bullet(\Omega)$*

$$\begin{aligned} \Lambda : H^\bullet(\Omega) &\mapsto H^\bullet(\Omega)' \\ u &\mapsto \Lambda(u) \cdot \phi = \langle u, \phi \rangle^\bullet \end{aligned}$$

Dann ist Λ offen.

Beweis. $u \mapsto \Lambda(u)$ ist linear und beschränkt, weil $\|\Lambda\| = \sup_{\|u\|_{\Omega}^\bullet \leq 1} \|\Lambda(u)\|_{H^\bullet(\Omega)'} = \sup_{\|u\|_{\Omega}^\bullet \leq 1} \sup_{\|\phi\|_{\Omega}^\bullet \leq 1} |\langle u, \phi \rangle^\bullet| \leq 1$. Λ ist surjektiv. Denn sei $h \in H^\bullet(\Omega)'$. Da $H^\bullet(\Omega)$ ein Hilbertraum ist, identifizieren wir $H^\bullet(\Omega)$ mit seinem Dual $H^\bullet(\Omega)'$. Der

Rieszsche Darstellungssatz liefert uns die Existenz eines Elementes $T(h) \in H^\bullet(\Omega)$ so daß

$$\forall \phi \in H^\bullet(\Omega) : \quad h.\phi = \langle T(h), \phi \rangle^\bullet$$

gilt. Wenn wir $u = T(h)$ wählen, sehen wir, daß $\Lambda(u).\phi = \langle T(h), \phi \rangle^\bullet = h.\phi$. Aus dem Satz von der offenen Abbildung folgt dann, daß Λ offen ist. ■

Folgerung 10 (Λ^{-1} ist stetig) Λ^{-1} ist stetig (beschränkt) in der Operatornorm auf $L(H^\bullet(\Omega)', H^\bullet(\Omega))$.

Beweis. Λ ist injektiv, denn sei $\Lambda(u) \equiv 0$, d.h

$$\forall \phi \in H^\bullet(\Omega) : \quad \Lambda(u).\phi = \langle u, \phi \rangle^\bullet = 0$$

Dann ist insbesondere $\langle u, u \rangle^\bullet = |u|_\Omega^{\bullet 2} = 0$. Daraus folgt aber sofort $u = 0$. Deshalb existiert Λ^{-1} und weil Λ offen ist, ist Λ^{-1} stetig. ■

Wir zeigen jetzt den

Satz 7 (PS für das Variationsfunktional I) Das Variationsfunktional habe die Form

$$I(u) = \frac{1}{2} \langle u, u \rangle^\bullet - \int \int_\Omega \left[\int_0^{u(r,z)} f(s) ds \right] r dr dz$$

Wenn für jede Folge $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset H^\bullet(\Omega)$ aus $|I(u_m)| \leq C$ und $DI(u_m) \rightarrow 0$ folgt, daß die Folge $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset H^\bullet(\Omega)$ beschränkt ist, dann erfüllt I die Palais-Smale Bedingung.

Beweis. Sei $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset H^\bullet(\Omega)$ eine Folge die den genannten Voraussetzungen genügt, d.h. $|u_m|_\Omega^\bullet \leq C$ wenn $|I(u_m)| \leq C$ und $DI(u_m) \rightarrow 0$. Wir müssen dann die Existenz einer konvergenten Teilfolge zeigen. Dazu schreiben wir

$$DI(u_m).\phi = \Lambda(u_m).\phi - DJ(u_m).\phi$$

wir wenden Λ^{-1} auf beide Seiten der Gleichung an und erhalten also

$$\Lambda^{-1}DI(u_m) = \Lambda^{-1}\Lambda(u_m) - \Lambda^{-1}DJ(u_m)$$

$$u_m = \Lambda^{-1}DI(u_m) - \Lambda^{-1}DJ(u_m)$$

Weil DJ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $\{u_{m_j}\}_{j=1}^\infty$ so daß $DJ(u_{m_j})$ konvergiert. Da Λ^{-1} stetig ist und nach Voraussetzung $DI(u_m) \rightarrow 0$ ist, gilt

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} u_{m_j} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \Lambda^{-1}DI(u_{m_j}) - \lim_{j \rightarrow \infty} \Lambda^{-1}DJ(u_{m_j}) \\ &= \Lambda^{-1} \lim_{j \rightarrow \infty} DI(u_{m_j}) - \Lambda^{-1} \lim_{j \rightarrow \infty} DJ(u_{m_j}) \\ &= \Lambda^{-1} \lim_{j \rightarrow \infty} DJ(u_{m_j}) \end{aligned}$$

also konvergiert $\{u_{m_j}\}_{j=1}^\infty$ und das ist die in der **PS**-Bedingung geforderte Folgerung. ■

3.6 Schwache Lösung der PDE

Wir wollen nun zeigen, daß I die Voraussetzungen des Mountain-Pass Theorems erfüllt, dann erhalten wir ein u , welches kritischer Punkt von I ist, und damit eine schwache Lösung der PDE (3.6) ist.

Lemma 11 (I erfüllt (I_4)) *Es gibt ein $e \in H^\bullet(\Omega) \setminus B_\rho(0)$ mit $I(e) \leq 0$. Deshalb erfüllt I die Bedingung (I_4) des Mountain-Pass Theorems.*

Beweis. Sei $t \geq 0$ und $u \in H^\bullet(\Omega) \setminus \{0\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} I(tu) &= \frac{1}{2} \langle tu, tu \rangle^\bullet - \int \int_\Omega \int_0^{tu} f(s) ds r dr dz \\ &= \frac{1}{2} t^2 \|u\|_\Omega^\bullet{}^2 - \int \int_\Omega F(tu) r dr dz \end{aligned}$$

wegen (2.64) folgt

$$\begin{aligned} &\leq C t^2 - \int \int_\Omega (a_3 |tu|^\mu - a_4) r dr dz \\ &= C_1 t^2 + \int \int_\Omega a_4 r dr dz - a_3 t^\mu \int \int_\Omega |u|^\mu r dr dz \\ &= C_1 t^2 + a_4 \|1\|_{1,\Omega}^\bullet - a_3 t^\mu \|u\|_{\mu,\Omega}^\bullet{}^\mu \\ &= C_1 t^2 + C_2 - C_3 t^\mu \end{aligned}$$

weil aber $\mu > 2$ ist und $C_1, C_2, C_3 > 0$, gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} I(tu) = -\infty$. Deshalb gibt es ein $t_0 > 0$ so daß $I(t_0 u) < 0$. Wir setzen $e = t_0 u$. Also haben wir ein $e \in H^\bullet(\Omega) \setminus B_\rho(0)$ gefunden mit $I(e) \leq 0$. Das zeigt (I_4) für das Variationsfunktional I . ■

Lemma 12 (I erfüllt (I_3)) *Das Variationsfunktional I genügt der Bedingung (I_3) des Mountain-Pass Theorems.*

Beweis. Sei $u \in H^\bullet(\Omega)$. Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, daß wir allemal $|f(s)| \leq \epsilon |s|$ für $|s| \leq \delta$ haben, weil (f_3) gilt; dann ist $|F(s)| \leq \frac{\epsilon}{2} |s|^2$.

Für $|s| > \delta$ benutzen wir (f_2) . Wir dürfen die Wachstumsbeschränkung (f_2) hier für unsere Zwecke ohne weiteres zu $\frac{p}{q} \geq 1$ lockern, denn wenn $|f(s)| \leq a_1 + a_2|s|^\beta$, dann gilt sicher auch $|f(s)| \leq (a_1 + 1) + a_2|s|^\gamma$ wenn $0 \leq \beta \leq \gamma$, also schreiben wir $|F(s)| \leq \int_0^s |f(s)| ds \leq \int_0^s a_1 + a_2|s|^{\frac{p}{q}} ds \leq a_1|s| + C|s|^{\frac{p}{q}+1}$. Deshalb ist $|F(s)| \leq C(\frac{1}{|s|^{\frac{p}{q}}} + 1) |s|^{\frac{p}{q}+1} \leq C(\frac{1}{|\delta|^{\frac{p}{q}}} + 1) |s|^{\frac{p}{q}+1}$ für $|s| > \delta$. Wir definieren nun $\Omega_\delta := \{(r, z) \in \Omega \mid |u(r, z)| \leq \delta\}$. Es ist dann

$$\begin{aligned} |J(u)| &\leq \int \int_\Omega \left| \int_0^{u(r,z)} f(s) ds \right| r dr dz \leq \int \int_\Omega |F(u(r, z))| r dr dz \\ &\leq \int \int_{\Omega_\delta} \frac{\epsilon}{2} |u(r, z)|^2 r dr dz + \int \int_{\Omega \setminus \Omega_\delta} |F(u(r, z))| r dr dz \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \|u\|_{2, \Omega}^{\bullet 2} + \int \int_{\Omega \setminus \Omega_\delta} C \left(\frac{1}{|\delta|^{\frac{p}{q}}} + 1 \right) |u(r, z)|^{\frac{p}{q}+1} r dr dz \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \|u\|_{2, \Omega}^{\bullet 2} + C \left(\frac{1}{\delta^{\frac{p}{q}}} + 1 \right) \|u\|_{\frac{p}{q}+1, \Omega}^{\bullet \frac{p}{q}+1} \end{aligned}$$

$C(\delta) := C(\frac{1}{\delta^{\frac{p}{q}}} + 1)$ ist wegen $\delta > 0$ beschränkt, was nicht der Fall wäre, wenn wir das Integral nicht in dieser Weise aufgespalten hätten. Da wir nach dem oben gesagten also $\frac{p}{q} > 1$ annehmen können, und es ein $r \geq \frac{p}{q} + 1$ gibt, so daß dann $L_\bullet^r(\Omega) \subset L_\bullet^2(\Omega)$ und $L_\bullet^r(\Omega) \subset L_\bullet^{\frac{p}{q}+1}(\Omega)$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} |J(u)| &\leq C \frac{\epsilon}{2} \|u\|_{r, \Omega}^{\bullet 2} + C(\delta) \|u\|_{r, \Omega}^{\bullet \frac{p}{q}+1} \\ &\leq \left[C \frac{\epsilon}{2} + C(\delta) \|u\|_{r, \Omega}^{\bullet \frac{p}{q}-1} \right] \|u\|_{r, \Omega}^{\bullet 2} \end{aligned}$$

und weil $H^\bullet(\Omega) \subset L_\bullet^r(\Omega)$ stetig eingebettet ist, gilt dann für alle $u \in H^\bullet(\Omega)$

$$|J(u)| \leq \left[C \frac{\epsilon}{2} + C(\delta) \|u\|_{\Omega}^{\bullet \frac{p}{q}-1} \right] \|u\|_{\Omega}^{\bullet 2}$$

wenn wir nun $\|u\|_{\Omega}^{\bullet} \leq \left[\frac{C}{C(\delta)} \left(\frac{\epsilon}{2} \right) \right]^{\frac{1}{\frac{p}{q}-1}}$ wählen, folgt

$$|J(u)| \leq C \epsilon \|u\|_{\Omega}^{\bullet 2}$$

Diese Wahl von $u \in H^\bullet(\Omega)$ ist deshalb erfolgreich, weil $\|u\|_{\Omega}^{\bullet \frac{p}{q}-1}$ wegen $\frac{p}{q} - 1 \geq 0$ auch klein wird, wenn $\|u\|_{\Omega}^{\bullet} \rightarrow 0$. Deshalb ist $|J(u)| = o(\|u\|_{\Omega}^{\bullet 2})$. Weil dann

$I(u) = \frac{1}{2}|u|_{\Omega}^{\bullet 2} - J(u) = \frac{1}{2}|u|_{\Omega}^{\bullet 2} + o(|u|_{\Omega}^{\bullet 2})$ gilt, ist $I(u) \geq \alpha > 0$ solange $0 < |u|_{\Omega}^{\bullet} \leq [\frac{C}{C(\delta)} (\frac{\epsilon}{2})]^{\frac{1}{q-1}}$, denn $|u|_{\Omega}^{\bullet 2}$ majorisiert dort $o(|u|_{\Omega}^{\bullet 2})$. Wir wählen $0 < \rho \leq [\frac{C}{C(\delta)} (\frac{\epsilon}{2})]^{\frac{1}{q-1}}$, dann ist $I_{\partial B_{\rho}(0)} \geq \alpha > 0$ und damit ist (I_3) erfüllt. ■

Lemma 13 (*I erfüllt PS*) . *Das Variationsfunktional I genügt der Palais-Smale Bedingung PS I₂ des Mountain-Pass Theorems.*

Beweis. Wir wenden den Satz (7) an und müssen deshalb nur zeigen, daß für eine Folge $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H^{\bullet}(\Omega)$, für die $I(u_m)$ beschränkt ist und $DI(u_m) \rightarrow 0$ gilt, folgt, daß $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ selbst beschränkt ist.

Sei nun $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H^{\bullet}(\Omega)$ mit $I(u_m) \leq C$ und $DI(u_m) \rightarrow 0$. Wir schreiben

$$\begin{aligned} I(u_m) - \frac{DI(u_m) \cdot u_m}{\mu} &= \frac{1}{2}|u_m|_{\Omega}^{\bullet 2} - \int \int_{\Omega} F(u_m(r, z)) r dr dz \\ &\quad - \frac{1}{\mu}|u_m|_{\Omega}^{\bullet 2} + \int \int_{\Omega} \frac{f(u_m) u_m}{\mu} r dr dz \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)|u_m|_{\Omega}^{\bullet 2} + \int \int_{\Omega} \frac{f(u_m) u_m}{\mu} - F(u_m) r dr dz \end{aligned}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$T(u_m(r, z)) = \frac{f(u_m(r, z)) u_m(r, z)}{\mu} - F(u_m(r, z))$$

Nun fahren wir fort indem wir schreiben

$$\begin{aligned} I(u_m) - \frac{DI(u_m) \cdot u_m}{\mu} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)|u_m|_{\Omega}^{\bullet 2} + \int \int_{\{(r,z) \in \Omega \mid |u_m(r,z)| \geq \nu\}} T(u_m) r dr dz \\ &\quad + \int \int_{\{(r,z) \in \Omega \mid |u_m(r,z)| < \nu\}} T(u_m) r dr dz \end{aligned}$$

Aus (f_4) ergibt sich für $|u_m(r, z)| \geq \nu$, daß $T(u_m) \geq 0$ ist, denn $0 < \mu F(u_m) \leq u_m f(u_m)$ also $0 \leq u_m f(u_m) - \mu F(u_m)$. Deshalb folgt

$$\int \int_{\{(r,z) \in \Omega \mid |u_m(r,z)| \geq \nu\}} T(u_m) r dr dz \geq 0$$

Weil $\mu > 2$ ist $C_1 := (\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}) > 0$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} \int \int_{\{(r,z) \in \Omega \mid |u_m(r,z)| < \nu\}} T(u_m(r, z)) r dr dz \\ \leq \int \int_{\{(r,z) \in \Omega \mid |u_m(r,z)| < \nu\}} |T(u_m(r, z))| r dr dz \leq C_T \quad (3.8) \end{aligned}$$

mit C_T unabhängig von $m \in \mathbb{N}$, weil T auf dem abgeschlossenen Intervall $[-\nu, \nu]$ stetig ist. Also gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} C_1 |u_m|_{\Omega}^{\bullet 2} &\leq |I(u_m)| + \frac{|DI(u_m) \cdot u_m|}{\mu} + C_T \\ C_1 |u_m|_{\Omega}^{\bullet 2} &\leq C + \frac{|u_m|_{\Omega}^{\bullet}}{\mu} + C_T \end{aligned}$$

was gleichwertig ist zu

$$|u_m|_{\Omega}^{\bullet 2} - \frac{|u_m|_{\Omega}^{\bullet}}{C_1 \mu} - \frac{C + C_T}{C_1} \leq 0$$

Indem wir quadratisch ergänzen, können wir zeigen, daß für alle $m \in \mathbb{N}$

$$|u_m|_{\Omega}^{\bullet} \leq \frac{1}{2C_1 \mu} + \sqrt{\frac{1}{C_1} \left[C + C_T + \frac{1}{4C_1 \mu^2} \right]}$$

gelten muß, also ist $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H^{\bullet}(\Omega)$ beschränkt. ■

Bemerkung 12 *Es wurde nur die Beschränktheit von $DI(u_m)$ benötigt, nicht aber daß $DI(u_m) \rightarrow 0$. Es ist darüberhinaus $I(0) = 0$, was (I_1) zeigt.*

Satz 8 (*I erfüllt Mountain-Pass*) *Das Variationsfunktional I erfüllt alle Voraussetzungen des Mountain-Pass Theorems, also gibt es einen kritischen Punkt $u \in H^{\bullet}(\Omega)$. Somit ist $u \in H^{\bullet}(\Omega)$ schwache Lösung von $DI(u) \cdot \phi = 0$. Weil $I(u) > 0$, aber $I(0) = 0$ ist u nicht die triviale Lösung.*

Beweis. siehe Lemmata (11)(12)(13) und Bemerkung (12). ■

Somit haben wir eine schwache Lösung von

$$\begin{aligned} Lu &= -r^2 f(u) & (r, z) \in \Omega \\ u &= 0 & (r, z) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

gefunden. Das Problem läßt keine eindeutige Lösung zu, denn 0 ist die triviale Lösung. Das ist bei Anwendung des Mountain-Pass Theorems auch gar nicht anders zu erwarten.

Bemerkung 13 *Die gegebene Darstellung orientiert sich im letzten Teil wesentlich an [Ni80]. Dort sind die Beweisschritte aber lediglich skizziert. Über die Regularität der gefundenen Lösung machen wir keine Aussage, aber man kann zeigen [Ni80], daß dieses u auch eine klassische Lösung ist. Zu wesentlich besseren Ergebnissen, aber mit anderen Methoden, gelangt [Ambrosetti90]. Dort werden Sub-Differentialmethoden verwendet, um die Nichtlinearität f freier zu fassen.*

Literaturverzeichnis

- [Acheson90] D. J. ACHESON, *Elementary fluid dynamics*, **Oxford applied mathematics and computing science series**, 1990
- [Adams75] R. A. ADAMS, *Sobolev Spaces*, **Academic Press**, 1975
- [Alber92] H. D. ALBER, *Existence of threedimensional, steady, inviscid, incompressible flows with nonvanishing vorticity*, **Mathematische Annalen** **292**, 1992
- [Alber94] H. D. ALBER, *Vorlesungsskript: Variationsrechnung und Sobolevräume*, **TH Darmstadt**, 1994
- [Alt85] H.W. ALT, *Lineare Funktionalanalysis*, **Springer Lehrbuch**, 1985
- [Ambrosetti93] A. AMBROSETTI, G. PRODI, *A primer of nonlinear analysis*, **Cambridge studies in advanced mathematics** **34**, 1993
- [Ambrosetti90] A. AMBROSETTI, M. STRUWE, *Existence of steady vortex rings in an ideal fluid*, **Archive for Rational Mechanics and Analysis** **108**, 1989
- [Appell90] J. APPELL, P. ZABREJKO, *Nonlinear Superposition Operators*, **Cambridge Tracts In Mathematics** **95**, 1990
- [Bronstein89] I. BRONSTEIN, K. SEMENDJAJEW, *Taschenbuch der Mathematik*, **Verlag Harri Deutsch**, 1989
- [Fraenkel74] L. E. FRAENKEL, M. S. BERGER, *A global theory of steady vortex rings in an ideal fluid*, **Acta Mathematicae** **132**, 1974
- [Gilbarg77] D. GILBARG, N. S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, **Springer-Verlag**, 1977

- [Helmholtz58] H. HELMHOLTZ, *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen*, **Journal für Reine und Angewandte Mathematik** **55**,1858
- [Hill94] J. M. HILL, *On a spherical vortex*, **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, **A185**,1894
- [Lamb31] H. LAMB, *Lehrbuch der Hydrodynamik*, **Verlag B. G. Teubner Berlin**,1931
- [Ni80] W. M . NI, *On the existence of global vortex rings*, **Journal d'Analyse Mathématique** **37**,1980
- [Norbury72] J. NORBURY, *A family of steady vortex rings*, **Journal for Fluid Mechanics** **57**,1973
- [Rabinowitz73] A. AMBROSETTI, P. RABINOWITZ, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, **Journal of Functional Analysis** **14**,1973
- [Rabinowitz74] P. RABINOWITZ, *Variational methods for nonlinear eigenvalue problems*, **Indiana University Mathematics Journal** **23**,1974
- [Rabinowitz84] P. RABINOWITZ, *Minimax Methods In Critical Point Theory With Applications To Differential Equations*, **AMS-Regional Conference Series In Mathematics** **65**,1984
- [Struwe90] M. STRUWE, *Variational Methods*, **Springer Series**,1990
- [Vainberg64] M. VAINBERG, *Variational methods for the study of nonlinear operators*, **Holden-Day**,1964