

1. Seien  $A := \{1, 2, 4, 8, 16\}$ ,  $B := \{2, 4, 6, 8, 10\}$  und  $C := \{1, 3, 7, 15\}$ . Berechnen Sie  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \Delta C$ ,  $A \cup (B \cap C)$ ,  $C \setminus (B \setminus A)$ ,  $A \Delta (B \Delta C)$ .

2. Sei  $A_n := [-2n, 3n] \subset \mathbb{R}$  und  $B_n := \mathbb{N} \setminus [n]$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Bestimmen Sie die Mengen

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{und} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

3. Zeigen Sie für  $A \subseteq M$ , daß  $A \Delta \emptyset = A$  und  $A \Delta M = M \setminus A$  gilt.

4. Beweisen Sie für beliebige Mengen  $A, B, C$  die folgenden Gleichungen

$$(A \subseteq C \wedge B \subseteq C) \Leftrightarrow (A \cup B \subseteq C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

und

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

5. Untersuchen Sie die Relation  $R$  über  $\mathbb{R}$  hinsichtlich Reflexivität, Symmetrie und Transitivität, wobei

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| \leq \min\{|x|, |y|\}\}.$$

6. Seien  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  gegeben durch

$$f(1) := 1, \quad f(n+1) := \begin{cases} \frac{1}{2}f(n), & \text{falls } f(n) \text{ gerade,} \\ 5f(n) + 1, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

und

$$g(n) := \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Untersuchen Sie  $f, g$  auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

7. Beweisen sie durch vollständige Induktion die folgenden Aussagen für  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

und

$$\prod_{k=1}^n k^k \leq n^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$