Übungen zu DAS SoSe 2004, Blatt 1

PD Dr. Daniel Hug

Ralph Schuster 23.04.2004

Abgabetermin: Freitag, 30.04.2004, vor Beginn der Vorlesung

---

1. Zeigen Sie: Für beliebige Mengen A, B, C gilt
$$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$$
$$A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C).$$
Veranschaulichen Sie die Aussagen durch Diagramme.

2. Zeigen Sie, daß es sich bei
$$R_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : xy > 0 \text{ oder } x = y\}$$
und
$$R_2 := \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y^2 - y = x^2 - x\}$$
um Äquivalenzrelationen handelt. Welche Äquivalenzklassen gibt es? Wieviele Elemente haben die einzelnen Äquivalenzklassen?

3. Sei M eine endliche Menge mit $m \geqslant 2$ Elementen. Auf M sei eine symmetrische, antireflexive Relation F (= Freundschaft) definiert, d.h., falls $(a, b) \in F$, so auch $(b, a) \in F$, aber für kein $a \in M$ gilt $(a, a) \in F$. Für jedes $a \in M$ bezeichne $f(a)$ die Anzahl der Elemente $b \in M$ mit $(a, b) \in R$ (= Anzahl der mit a befreundeten Elemente b). Dann gilt: Es gibt zwei *verschiedene* Elemente $a, b \in M$ mit $f(a) = f(b)$.

   Tip: Betrachte $f : M \to \{0, \ldots, m-1\}$. Kann zugleich $0 \in f(M)$ und $m-1 \in f(M)$ gelten? Schubfachprinzip anwenden.

4. (a) Seien R, S jeweils Äquivalenzrelationen über einer Menge M. Die Komposition $R \circ S$ von R und S ist erklärt durch
$$R \circ S := \{(x, z) \in M \times M : (x, y) \in S \wedge (y, z) \in R \text{ für ein } y \in M\}.$$
Sind dann auch
$$\text{(i)} \quad R \cap S \qquad \text{(ii)} \quad R \cup S \qquad \text{(iii)} \quad R \circ S$$
Äquivalenzrelationen über M?

   (b) Eine Relation $\preceq$ über $\mathbb{R}^2$ werde erklärt durch
$$(a, b) \preceq (c, d) :\Leftrightarrow a < c \vee (a = c \wedge b \leq d),$$
wobei $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$. Ist $\preceq$ eine Ordnungsrelation über $\mathbb{R}^2$?