Übungen zu DAS SoSe 2004, Blatt 3

PD Dr. Daniel Hug

Ralph Schuster 07.05.2004

Abgabetermin: Freitag, 14.05.2004, vor Beginn der Vorlesung

---

9. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Wir erklären Funktionen $\Delta^k f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch iterierte Differenzenbildung, d.h. $\Delta^0 f := f$ und

$$(\Delta^k f)(x) := (\Delta^{k-1} f)(x+1) - (\Delta^{k-1} f)(x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeigen Sie

$$(\Delta^k f)(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} f(x+j).$$

(b) Ist $f(x) := \binom{x}{d}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{N}_0$, so gilt $(\Delta^k f)(x) = \binom{x}{d-k}$.

10. (a) Auf wieviele Arten kann man auf einem Schachbrett $k \in \{1, \ldots, 8\}$ Türme aufstellen, ohne daß diese sich gegenseitig bedrohen.

(b) Berechnen Sie den Koeffizienten von $a^5 b^2 c^3$ in der Entwicklung von $(a+b+c)^{10}$.

(c) Wieviele Entwicklungsglieder hat $(a+b+c+d)^{10}$?

(d) Wieviele Lösungen hat die Gleichung

$$x_1 + \ldots + x_r = n \quad \text{mit } x_i \in \mathbb{N}$$

im Fall $n = 10, r = 4$ beziehungsweise im allgemeinen Fall? Behandeln Sie das analoge Problem mit $x_i \in \mathbb{N}_0$.

11. (a) Wieviele symmetrische Relationen gibt es auf der n-elementigen Menge $A := \{a_1, \ldots, a_n\}$? Wieviele dieser Relationen sind reflexiv und symmetrisch?

(b) Betrachten Sie das Programmsegment

$$\texttt{For } i_1 := 1 \texttt{ to } 20 \texttt{ do}$$

$$\texttt{For } i_2 := 1 \texttt{ to } i_1 \texttt{ do}$$

$$\ddots$$

$$\texttt{For } i_r := 1 \texttt{ to } i_{r-1} \texttt{ do}$$

$$\texttt{Writeln } (i * j + k);$$

Wie oft wird der Writeln-Befehl ausgeführt?

12. (a) Schreiben Sie die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

als Produkt von elementfremden Zyklen und auch als Produkt von Transpositionen.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl aller Permutationen $\pi \in S_n$, für die $\pi \circ \pi = \mathrm{id}$ gilt, und zwar zunächst für $n = 6$ und dann allgemein für $n \in \mathbb{N}$.