

Abgabetermin: Freitag, 21.05.2004, vor Beginn der Vorlesung

13. Die Menge S_n bildet zusammen mit der Komposition \circ von Abbildungen eine Gruppe (symmetrische Gruppe).

- (a) Gilt $\pi \circ \rho = \rho \circ \pi$ für alle $\pi, \rho \in S_n$, falls $n \geq 3$? Beweis oder Gegenbeispiel!
- (b) Seien $\pi, \rho \in S_n$ und sei $F(\pi)$ bzw. $F(\rho)$ die Menge der Fixpunkte von π bzw. ρ . Es gelte $F(\pi) \cup F(\rho) = \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie $\pi \circ \rho = \rho \circ \pi$.

14. (a) Die Menge aller Zahlenfolgen $a_n, n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bildet in natürlicher Weise einen zweidimensionalen Vektorraum V . Geben Sie eine Basis von V an. Bestimmen Sie diejenige Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in V mit $a_0 = 1$ und $a_1 = 5$.

(b) Sei V die Menge aller Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, für die

$$a_{n+3} = -12a_n + 8a_{n+1} + a_{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

gilt. Weisen Sie nach, daß V ein dreidimensionaler Vektorraum ist und geben Sie eine Basis von V an. Bestimmen Sie diejenigen Folgen mit $a_0 = 1, a_1 = 0$ und $a_2 = 1$.

(c) Ermitteln Sie die Lösung der Rekursionsgleichung

$$x_{n+3} = 4x_n - 3x_{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

mit $x_0 = 2, x_1 = 0$ und $x_2 = 10$.

15. Sei S eine Menge von 2^n paarweise verschiedenen reellen Zahlen. Wir beschreiben ein spezielles Verfahren zur Bestimmung des Maximum und des Minimum dieser Zahlen durch Vergleiche zwischen gewissen dieser Zahlen. Sei a_n die Anzahl der dabei verwendeten Vergleiche. Zur Beschreibung des Verfahrens sei S mit $|S| = 2^{n+1}$ gegeben. Dann wird S beliebig zerlegt in $S = S_1 \cup S_2$ mit $|S_1| = |S_2| = 2^n$. Für S_1 und S_2 wird dann jeweils das Maximum und das Minimum bestimmt. Schließlich werden die so erhaltenen beiden Maxima miteinander verglichen und ebenso die beiden Minima.

(a) Erklären Sie die Gültigkeit der Rekursionsgleichung

$$a_{n+1} = 2a_n + 2, \quad n \geq 1 \quad \text{und} \quad a_1 = 1.$$

(b) Lösen Sie die so erhaltene Rekursionsgleichung.

16. Eine Menge von n Geraden in \mathbb{R}^2 heißt in allgemeiner Lage, wenn keine zwei Geraden parallel sind und keine drei Geraden durch einen Punkt gehen. Sei a_n die Anzahl der Gebiete, in die \mathbb{R}^2 durch n Geraden in allgemeiner Lage zerlegt wird. Zeigen Sie $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 7$ und allgemein $a_n = a_{n-1} + n$ für $n \geq 2$. Leiten Sie daraus $a_n = \binom{n+1}{2} + 1$ für $n \in \mathbb{N}$ ab.