
Abgabetermin: Freitag, 28.05.2004, vor Beginn der Vorlesung

17. (a) Die Folge Q_n sei rekursiv erklärt durch

$$Q_n = n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n Q_{i-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

mit $Q_0 = 0$. Zeigen Sie $Q_n = 2(n+1)(H_{n+1} - 1)$ mit vollständiger Induktion nach n , wobei H_n wie in der Vorlesung erklärt ist.

- (b) Zeigen sie die folgende in der Vorlesung behauptete Aussage:

$$\sum_{1 \leq k < n} \lfloor \log_2 k \rfloor = n \lfloor \log_2 n \rfloor + 2 - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis. Es gilt $\sum_{i=1}^m i2^i = (m-1)2^{m+1} + 2$, $m \in \mathbb{N}$.

18. Seien $a \geq 1$, $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$, $c \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge mit $f(1) = c$ und

$$f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + c \quad \text{für } n = b^k, k \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie für $n = b^k$, $k \in \mathbb{N}_0$:

- (a) $f(n) = c(\log_b n + 1)$, falls $a = 1$.
(b) $f(n) = \frac{c}{a-1} (an^{\log_b a} - 1)$, falls $a > 1$.

Vergleichen Sie diese Aussagen mit Satz 1.3.23 der Vorlesung.

19. Verwenden Sie die Stirlingsche Formel, um die Aussagen (a) und (b) einzusehen:

- (a)

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n + O(\ln(n)).$$

- (b) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten von $\binom{2n}{n}$.

- (c) (Freiwillig) Die Funktion $T : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sei auf $[0, 10]$ beschränkt und erfülle

$$T(x) = 2T(\sqrt{x}) + \ln(x) \quad \text{für } x \geq 1.$$

Zeigen Sie $T(x) \leq C \cdot \ln(x) \ln \ln(x)$ für $x \geq 10$ und eine Konstante C .

Hinweis. Substitution $x = e^y$.

20. (a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus $\text{ggT}(154, 56)$.
(b) Finden Sie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x \cdot 154 + y \cdot 56 = 14$.