Übungen zu DAS SoSe 2004, Blatt 6

PD Dr. Daniel Hug

Ralph Schuster 28.05.2004

Abgabetermin: Freitag, 11.06.2004, vor Beginn der Vorlesung

---

21. (a) Seien $a_1, a_2, d \in \mathbb{N}$ gegeben. Zeigen Sie: Genau dann existieren Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ mit $z_1 a_1 + z_2 a_2 = d$, wenn $(a_1, a_2) \mid d$ gilt.

    (b) Bestimmen Sie geeignete Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ mit $15z_1 + 28z_2 = 1$. Gibt es unendlich viele solcher Paare (z_1, z_2) ganzer Zahlen?

    (c) Weisen Sie nach, daß die Zahlen $8n + 3$ und $5n + 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ teilerfremd sind.

22. (a) Ermitteln Sie mit Hilfe des Siebs von Eratosthenes alle Primzahlen zwischen 1 und 100. (Sie können gern ein Programm schreiben, das einen entsprechenden Ausdruck erzeugt, um sich Schreibarbeit zu ersparen.)

    (b) Beweisen Sie, daß für alle Primzahlen $p \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(a + b)^p \equiv a^p + b^p \bmod p.$$

23. Beweisen Sie die folgenden Teilbarkeitsregeln im Dezimalsystem, wobei

$$n = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + \ldots + a_k \cdot 10^k, \qquad a_j \in \{0, \ldots, 9\}, a_k \neq 0$$

gelte.

    (a) $3 \mid n \Leftrightarrow 3 \mid (a_0 + \ldots + a_k)$ (Quersumme).

    (b) $9 \mid n \Leftrightarrow 9 \mid (a_0 + \ldots + a_k)$.

    (c) $11 \mid n \Leftrightarrow 11 \mid (a_0 - a_1 + a_2 - + \ldots + (-1)^k a_k)$ (alternierende Quersumme).

24. Leiten Sie sämtliche Lösungen $x, y \in \mathbb{N}$ der Gleichung $6x + 10y = 104$ her. Eine solche Gleichung bezeichnet man als Diophantische Gleichung.

    Hierzu gibt es die folgende lustige Textaufgabe in einem Lehrbuch der Diskreten Mathematik: Zur Korrektur eines Pascal-Programms benötigt Brian im Schnitt 6 Minuten, für ein C-Programm benötigt er 10 Minuten. Wieviele Programme kann er bei geeigneter Aufteilung in jeder Programmiersprache korrigieren, wenn er 104 Arbeitsminuten zur Verfügung hat. Geben Sie sämtliche Möglichkeiten an.