

Abgabetermin: Freitag, 25.06.2004, vor Beginn der Vorlesung

29. (a) Seien (G, \circ) und (H, \bullet) Gruppen. Auf dem kartesischen Produkt $G \times H$ werde eine zwei-stellige Operation $*$ erklärt durch

$$(g, h) * (\bar{g}, \bar{h}) := (g \circ \bar{g}, h \bullet \bar{h}), \quad g, \bar{g} \in G, h, \bar{h} \in H.$$

Weisen Sie nach, daß $(G \times H, *)$ eine Gruppe ist.

- (b) Auf $F := \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ wird eine Verknüpfung \otimes erklärt durch

$$(x_1, x_2) \otimes (y_1, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1), \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}_3.$$

Warum ist $(F \setminus \{(0, 0)\}, \otimes)$ keine Gruppe?

30. (a) Seien (G, \circ) und (H, \bullet) zwei endliche zyklische Gruppen. Eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß $(G \times H, *)$ (vgl. Aufgabe 29) zyklisch ist, ist die Teilerfremdheit von $|G|$ und $|H|$. Bestätigen Sie dies durch einen Nachweis.

- (b) Beschreiben Sie die Elemente der Faktorgruppe $(\mathbb{Q}, +)/(\mathbb{Z}, +)$.

31. (a) Welche der folgenden Teilmengen der Permutationsgruppe $S_5 = \text{Perm}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$ sind Untergruppen von S_5 ?

i. $\{(1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 2\ 4)(3\ 5)\}$.

ii. $\{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$.

- (b) Numerieren Sie die Ecken eines Quadrats mit Mittelpunkt im Ursprung im Uhrzeigersinn mit den Ziffern 1, 2, 3, 4. Jede Spiegelung bzw. Drehung, die das Quadrat in sich überführt, läßt sich als ein Element von S_4 auffassen, da jede solche Symmetrieabbildung eine Permutation der Ecken des Quadrats induziert (eine Rotation um 90° im Uhrzeigersinn etwa entspricht der Permutation $(1\ 2\ 3\ 4) \in S_4$). Geben Sie alle Permutationen an, die solchen Symmetrieabbildungen des Quadrats entsprechen.

32. In dieser Aufgabe wird aus \mathbb{Z} der Körper der rationalen Zahlen konstruiert.

Auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ wird durch

$$(r, s) \sim (r', s') :\Leftrightarrow r s' = r' s$$

eine Relation erklärt. Zeigen Sie:

- (a) \sim ist eine Äquivalenzrelation.

- (b) Sei $\frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich \sim . Mit $[r, s]$ werde die zu $(r, s) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ gehörige Äquivalenzklasse bezeichnet. Durch die Festsetzungen (Wohldefiniertheit?)

$$[r, s] + [r', s'] := [r s' + s r', s s'], \quad [r, s] \cdot [r', s'] := [r r', s s']$$

wird $\left(\frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}, +, \cdot\right)$ zu einem Körper mit Einselement $[1, 1]$, dessen Teilmenge $(\{[r, 1] : r \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ zu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ isomorph ist.