**Übungen zu DAS** SoSe 2004, Blatt 9

PD Dr. Daniel Hug
Ralph Schuster 25.06.2004

---

**Abgabetermin:** Freitag, 02.07.2004, vor Beginn der Vorlesung

---

33. (a) Sind $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ und $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot_5)$ isomorphe Gruppen? Beantworten Sie dieselbe Frage (mit Begründung) für das Paar von Gruppen $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ und $(\mathbb{Z}_{12}^*, \cdot_{12})$.

    (b) Wieviele verschiedene (bis auf Isomorphie) Gruppen $G$ mit $|G| = 4$ gibt es?

    (c) Warum ist ein endlicher, nullteilerfreier, kommutativer Ring mit Eins stets ein Körper?

    (d) Ist $U = \{0, 3, 6\}$ ein Normalteiler von $(\mathbb{Z}_9, +_9)$? Geben Sie gegebenenfalls die Elemente der Faktorgruppe $\mathbb{Z}_9/U$ an.

34. Sei $S$ der Ring der $2 \times 2$ Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit den üblichen Verknüpfungen. Sei $\mathbb{C}$ der Körper (und damit Ring) der komplexen Zahlen. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \to S, \qquad a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

ein Ringisomorphismus ist.

35. (a) Bestimmen Sie die irreduziblen Faktoren von $p_1(x) := x^2 + 1$ sowie von $p_2(x) := x^4 + 3x^3 + x + 1$ in $\mathbb{Z}_5[x]$.

    (b) Bestimmen Sie einen ggT $m(x)$ von

$$g(x) := x^3 + 2x^2 + x + 1 \quad \text{und} \quad f(x) := x^2 + 5$$

in $\mathbb{Z}_7[x]$, und finden Sie Polynome $\lambda(x), \mu(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ mit

$$\lambda(x)g(x) + \mu(x)f(x) = m(x).$$

36. (a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig gegeben. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\Phi_\alpha : (\mathbb{R}[x], +, \cdot) \to (\mathbb{R}, +, \cdot), \quad p(x) \mapsto p(\alpha)$$

ein Ringhomomorphismus (Einsetzhomomorphismus) ist.

    (b) Bestimmen Sie die Einheiten des Rings $(\mathbb{Z}_{15}, +_{15}, \cdot_{15})$ sowie die Ordnungen der Elemente von $(\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot_{15})$. Ist $(\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot_{15})$ zyklisch?