Übungen zu DAS SoSe 2004, Blatt 10

PD Dr. Daniel Hug
Ralph Schuster 02.07.2004

Abgabetermin: Freitag, 09.07.2004, vor Beginn der Vorlesung

---

37. Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Seien ferner X, Y Zufallsvariablen. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Größen Entropie und Information:

    (a) $H(X \times Y) = H(X) + H(Y \mid X) = H(Y) + H(X \mid Y)$;

    (b) $I(X, Y) = I(Y, X)$;

    (c) $I(X, Y) \leq \min\{H(X), H(Y)\}$.

38. (a) Ist $C := \{0, 10, 1100, 1101, 1110, 1111\}$ eindeutig decodierbar?

    (b) Ist es möglich, einen eindeutig decodierbaren Code über $A := \{0, 1, \ldots, 9\}$ zu konstruieren mit 9 Codewörtern der Länge 1, 9 Codewörtern der Länge 2, 10 Codewörtern der Länge 3 und 10 Codewörtern der Länge 4?

39. Wieviele binäre Codewörter der Länge 6 kann man zu $\{0, 10, 1100\}$ hinzufügen, so daß ein binärer Präfixcode entsteht? Geben Sie solche geeigneten Codewörter explizit an.

40. Sei $S := \{a, b, c, d, 1, 2\}$ und $p(a) = 0.35$, $p(b) = 0.1$, $p(c) = 0.19$, $p(d) = 0.25$, $p(1) = 0.06$, $p(2) = 0.05$. Bestimmen Sie eine optimale binäre Präfixcodierung von $Q = (S, \mathbb{P})$ mit Hilfe des Huffman-Algorithmus. Berechnen Sie die mittlere Codewortlänge $\bar{L}(\varphi, Q)$.

41. Sei $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ ein Quellalphabet und $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf S. Sei φ eine binäre Huffman-Codierung von $(S, \mathbb{P})$. Sei ψ eine Codierungsfunktion für S mit Werten in einem binären Präfixcode. Warum gilt dann

$$\sum_{i=1}^{n} L(\varphi(s_i)) \leq \sum_{i=1}^{n} L(\psi(s_i))\,?$$

42. Sei $Q = (S, \mathbb{P})$ mit $S = \{a, b, c\}$ und $p(a) = 1/2$, $p(b) = 1/4$, $p(c) = 1/4$.

    (a) Berechnen Sie die Entropie von Q.

    (b) Können Sie eine optimale Codierung φ von S in $\{0, 1\}$ finden mit

$$\bar{L}(\varphi, Q) = H(Q)\,?$$