PD Dr. Daniel Hug

Mathematisches Institut
Universität Freiburg
02.09.2004

Prüfungs-Klausur zu Diskrete Algebraische Strukturen

Sommersemester 2004

Freitag, 24.09.2004, 10:00 - 12:00 Uhr

Ort: Georges-Köhler-Allee, Geb. 101, HS 00-026 und 00-036

Nachname, Vorname: ....

Geburtstag und Geburtsort: ....

Matrikelnummer: ....

Bitte füllen Sie zunächst den Kopf dieses Blattes aus. Geben Sie am Schluß alle Blätter **durchnumeriert, mit Ihrem Namen versehen und mit diesem Blatt als Deckblatt** ab. Bitte begründen Sie die einzelnen Schritte Ihrer Lösungen. Nebenrechnungen und Zwischenergebnisse, die zur Herleitung notwendig sind, sind mit aufzuführen. Für jede vollständig gelöste Aufgabe werden 4 Punkte vergeben. Zum Bestehen der Klausur müssen voraussichtlich 7,5 Punkte erreicht werden. **Als Hilfsmittel ist lediglich das Skriptum (ohne Eintragungen) zur Vorlesung zugelassen.**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punktzahl							

1. Beweisen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahl 48 ein Teiler von $5^{2n} + 24n - 1$ ist.

2. (a) Wieviele verschiedene Wörter (=Buchstabenfolgen) lassen sich aus den Buchstaben des Wortes

   ABRACADABRA

   bilden? Es genügt, die Primfaktorzerlegung der gesuchten Anzahl anzugeben.

   (b) An den Übungen zu einer Vorlesung sollen 71 Personen teilnehmen. Bekannt ist, dass

   - jede Person zumindest an einem der drei Tage Montag, Dienstag oder Mittwoch Zeit hat,
   - 41 Personen am Montag, 49 am Dienstag, 44 am Mittwoch Zeit haben,
   - 19 Personen am Montag und Dienstag, 22 am Montag und Mittwoch, 26 am Dienstag und Mittwoch Zeit haben.

   Wieviele Personen haben an allen drei Tagen Zeit? Wieviele an genau zwei Tagen?

3. Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $p_1(x) := x^5 - x^3 - x^2 + 1$ und $p_2(x) := x^3 + 2x - 3$ im Polynomring $\mathbb{R}[x]$.

4. Die Permutation $\sigma \in S_4$ sei gegeben durch

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie σ^{2000}, indem Sie erst σ^3 ausrechnen.

5. Es bezeichne h_n die Anzahl von Möglichkeiten, n horizontal nebeneinanderliegende Quadrate rot, grün oder blau einzufärben, so dass das Nachbarfeld direkt links neben einem roten Feld niemals rot oder grün ist.

   (a) Begründen Sie folgende rekursive Beschreibung der Zahlenfolge h_n:

$$h_n = 2h_{n-1} + h_{n-2}, \quad n \geq 3, \quad h_1 = 3, \quad h_2 = 7.$$

   (b) Bestimmen Sie eine Basis des Vektorraums aller Folgen a_n, $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

   Geben Sie eine explizite Formel für diejenige Folge a_n, $n \in \mathbb{N}_0$ an, welche die angegebene Rekursion und $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ erfüllt.

6. (a) Ist $C := \{0, 10, 110, 1110, 11110, 11111\}$ ein eindeutig decodierbarer Code?

   (b) Gibt es einen eindeutig decodierbaren Binärcode mit den Codewortlängen 1,3,3,3,4,5,5,5 ? Falls die Antwort ja lautet, gebe man einen solchen explizit an.