Lösungen zur Klausur DAS 2004 am 24.09.2004

1. Wir zeigen mit vollständiger Induktion $48 \mid (5^{2n} + 24n - 1)$.

$n = 1 : 48 \mid 5^2 + 24 - 1.$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned} & 5^{2(n+1)} + 24(n+1) - 1 = 5^{2n} \cdot 25 + 24n + 24 - 1 \\ = \quad & (5^{2n} + 24n - 1) \cdot 25 - 25 \cdot 24 \cdot n + 25 + 24n + 23 \\ = \quad & 25 \cdot \underbrace{(5^{2n} + 24n - 1)}_{=48 \cdot m \text{ für ein } m \in \mathbb{N} \text{ nach Ind.Vor.}} - 48n \cdot 12 + 48 \end{aligned}$$

Also gilt:

$$48 \mid (5^{2(n+1)} + 24(n+1) - 1).$$

2a. Es stehen 11 Stellen zur Verfügung. Davon sind 5 Stellen mit dem Buchstaben A, 2 Stellen mit dem Buchstaben B, 1 Stelle mit C, eine Stelle mit D und zwei Stellen mit R belegt. Das geht auf

$$\begin{aligned} & \binom{11}{5} \cdot \binom{11-5}{2} \binom{11-5-2}{1} \binom{11-5-2-1}{1} \binom{11-5-2-1-1}{2} \\ = \quad & \binom{11}{5,2,1,1,2} = \frac{11!}{5!2!1!1!2!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4} \\ = \quad & 11 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3^3 \cdot 2^3 = 83160 \end{aligned}$$

verschiedene Weisen.

2b. Sei P_1 die Menge der Teilnehmer, die am Montag Zeit haben. Sei P_2 die Menge der Teilnehmer, die am Dienstag Zeit haben. Sei P_3 die Menge der Teilnehmer, die am Mittwoch Zeit haben. Dann gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} & |P_1 \cup P_2 \cup P_3| = 71, \\ & |P_1| = 41, \quad |P_2| = 49, \quad |P_3| = 44, \\ & |P_1 \cap P_2| = 19, \quad |P_1 \cap P_3| = 22, \quad |P_2 \cap P_3| = 26. \end{aligned}$$

Mit der EA-Formel gilt also:

$$71 = 41 + 49 + 44 - 19 - 22 - 26 + |P_1 \cap P_2 \cap P_3|,$$

d.h.

$$|P_1 \cap P_2 \cap P_3| = 71 - 134 + 67 = 4.$$

Die Anzahl der Personen, die an genau zwei Tagen Zeit haben, ist

$$\begin{aligned} & |(P_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap P_3) \cup (P_2 \cap P_3)| - |P_1 \cap P_2 \cap P_3| \\ = \quad & 19 + 22 + 26 - 3|P_1 \cap P_2 \cap P_3| + |P_1 \cap P_2 \cap P_3| - |P_1 \cap P_2 \cap P_3| \\ = \quad & 19 + 22 + 26 - 3 \cdot 4 = 55, \end{aligned}$$

wobei die EA-Formel verwendet wurde.

3. Wir verwenden den euklidischen Algorithmus. Mit Polynomdivision erhält man

$$(x^5 - x^3 - x^2 + 1) : (x^3 + 2x - 3) = x^2 - 3 + \frac{2x^2 + 6x - 8}{x^3 + 2x - 3},$$

$$(x^3 + 2x - 3) : (2x^2 + 6x - 8) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{15x - 15}{2x^2 + 6x - 8},$$

$$(2x^2+6x-8):(15x-15)=\frac{2}{15}x+\frac{8}{15}.$$

Es folgt so

$$\begin{aligned}
x^5-x^3-x^2+1 &= (x^2-3)(x^3+2x-3)+2x^2+6x-8\\
x^3+2x-3 &= \left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)(2x^2+6x-8)+15x-15\\
2x^2+6x-8 &= \left(\frac{2}{15}x+\frac{8}{15}\right)(15x-15).
\end{aligned}$$

Dies zeigt also, daß in $\mathbb{R}[x]$ gilt:

$$\mathrm{ggT}(x^5-x^3-x^2+1, x^3+2x-3)=x-1.$$

4. Es gilt

$$\sigma^2=\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\2\,4\,3\,1\end{pmatrix}\quad \text{und}\quad \sigma^3=id.$$

Wegen $2000=3\cdot 666+2$ folgt nun

$$\sigma^{2000}=(\sigma^3)^{666}\circ\sigma^2=(id)^{666}\circ\sigma^2=\sigma^2.$$

5a. Sei das n-te Feld rot. Dann muss das $(n-1)$-te Feld blau sein, für die Belegung der Felder 1 bis $n-2$ gibt es h_{n-2} verschiedene Möglichkeiten. Ist das n-te Feld grün oder blau, so hat man jeweils h_{n-1} verschiedene Möglichkeiten, die Felder 1 bis $n-1$ zu belegen. Insgesamt folgt so

$$h_n=2h_{n-1}+h_{n-2},\quad n\geq 3.$$

Ferner ist offensichtlich $h_1=3$ und $h_2=1+2\cdot 3=7$.

5b. Die charakteristische Gleichung $t^2-2t-1=0$ hat die Lösungen $t=1+\sqrt{2}$ und $t=1-\sqrt{2}$. Also bilden die Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$b_n=(1+\sqrt{2})^n,\quad c_n=(1-\sqrt{2})^n$$

eine Basis (nach Vorlesung). Die Anfangsbedingungen $a_0=1$ und $a_1=3$ für

$$a_n=\alpha(1+\sqrt{2})^n+\beta(1-\sqrt{2})^n,\quad n\in\mathbb{N}_0$$

ergeben

$$\alpha+\beta=1,\quad \alpha(1+\sqrt{2})+\beta(1-\sqrt{2})=3$$

$$\Leftrightarrow\quad \alpha=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}),\quad \beta=\frac{1}{2}(1-\sqrt{2}).$$

Also erhält man

$$a_n=\frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}\right),\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

6a. C ist eindeutig decodierbar als Präfixcode, d.h. da C präfixfrei ist.

6b. Nein, es gibt keinen solchen Code. Dies folgt aus

$$1\cdot\frac{1}{2^1}+3\cdot\frac{1}{2^3}+1\cdot\frac{1}{2^4}+3\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{2}{32}+\frac{3}{32}$$

$$=\quad \frac{16+12+2+3}{32}=\frac{33}{32}>1,$$

d.h. die Kraftsche Ungleichung ist nicht erfüllt (Satz von McMillan, Satz 3.2.1 der Vorlesung).