PD Dr. Daniel Hug

Mathematisches Institut
Universität Freiburg
08.03.2005

Prüfungs-Nachklausur zu Diskrete Algebraische Strukturen

Wintersemester 2004/05

Dienstag, 08.03.2005, 10:00 – 12:00 Uhr

Ort: Eckerstr. 1, Seminarraum 404

Nachname, Vorname: ....

Geburtstag und Geburtsort: ....

Matrikelnummer: ....

Bitte füllen Sie zunächst den Kopf dieses Blattes aus. Geben Sie am Schluß alle Blätter **durchnumeriert, mit Ihrem Namen versehen und mit diesem Blatt als Deckblatt** ab. Bitte begründen Sie die einzelnen Schritte Ihrer Lösungen. Nebenrechnungen und Zwischenergebnisse, die zur Herleitung notwendig sind, sind mit aufzuführen. Für jede vollständig gelöste Aufgabe werden 4 Punkte vergeben. Zum Bestehen der Klausur müssen voraussichtlich 7,5 Punkte erreicht werden. **Als Hilfsmittel ist lediglich das Skriptum (ohne Eintragungen) zur Vorlesung zugelassen.**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punktzahl							

1. Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(5k-1)(5k+4)} = \frac{n}{4(5n+4)}.$$

2. (a) Bestimmen Sie die Anzahl der $n \in \mathbb{N}$ mit $101 \leq n \leq 200$, die weder durch 2 noch durch 7 teilbar sind.

   (b) Warum gibt es unter 10 beliebigen natürlichen Zahlen stets zwei, deren Differenz durch 9 teilbar ist?

3. Zeigen Sie, dass die Menge aller Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen, die

$$a_{n+3} = -a_{n+2} - 2a_{n+1} - 2a_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

   erfüllen, zusammen mit den üblichen Verknüpfungen einen Vektorraum V bildet. Welche Dimension hat V? Bestimmen Sie eine Basis von V.

4. (a) Ermitteln Sie alle Zahlen $x \in \mathbb{Z}$ mit

$$x \equiv 3 \text{ mod } 17 \quad \text{und} \quad x \equiv 10 \text{ mod } 16\,.$$

   (b) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{Z}$ stets

$$x^2 \equiv 0 \text{ mod } 4 \qquad \text{oder} \qquad x^2 \equiv 1 \text{ mod } 4$$

   gilt. Warum ist 25364758103 nicht Summe von 2 Quadratzahlen?

5. Auf $\mathbb{Z}$ werde durch

$$x \oplus y := x + y - 1, \qquad x, y \in \mathbb{Z}$$

   eine Addition erklärt. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}, \oplus)$ eine kommutative Gruppe ist.

6. Sei $Q = (S, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit $S = \{a, b, c\}$ und $p(a) = 1/2$, $p(b) = 1/4$, $p(c) = 1/4$.

   (a) Berechnen Sie die Entropie von Q.

   (b) Ermitteln Sie eine optimale (und eindeutig decodierbare) Codierung φ von S in $\{0, 1\}$ mit

$$\overline{L}(\varphi, Q) = H(Q)\,.$$