**Wiederholungsaufgaben zu DAS** SoSe 2004

PD Dr. Daniel Hug

09.07.2004

---

**Besprechung der Aufgaben:** 22.07. und 23.07.2004

---

Die folgenden Aufgaben wurden aus zwei früheren Klausuren zusammengestellt. Außerdem wurden noch zusätzlich Aufgaben zur Codierungstheorie hinzugefügt. Begehen Sie bitte nicht den Fehler, die Auswahl der Aufgaben als repräsentativ anzusehen.

1. Sei $M := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ und $\sim$ die durch

$$(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow a - b = c - d$$

erklärte Relation über $M$. Prüfen Sie nach, ob $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Geben Sie (ohne Beweis) ein Repräsentantensystem an.

2. (a) Berechnen Sie die Primfaktorzerlegung des Koeffizienten von $x^7y^3z$ in der Entwicklung von $(x + y + z)^{11}$.

   (b) Wie viele Lösungen hat die Gleichung

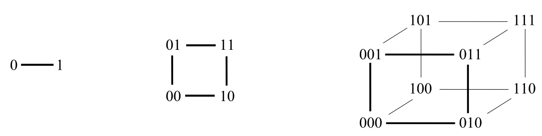
$$x_1 + x_2 + x_3 = 11 \qquad \text{mit } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}\,?$$

3. (a) Wie viele Lösungen hat die Gleichung

$$x_1 + \ldots + x_6 = 15 \qquad \text{mit } x_1, \ldots, x_6 \in \mathbb{N}_0\,?$$

   (b) Wieviele verschiedene Entwicklungsglieder der Form $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0$ treten beim Ausmultiplizieren von $(x + y + z)^{11}$ auf?

4. Der ($n$-dimensionale Würfel-) Graph $Q_n$ hat als Ecken alle $\{0, 1\}$-Worte der Länge $n \in \mathbb{N}$ (die Eckenmenge ist also $\{0, 1\}^n$), wobei zwei Worte benachbart sind, wenn sie sich an genau einer Stelle unterscheiden.




   (a) Wie viele Ecken hat $Q_n$? Geben Sie auch die Eckengrade an.

   (b) Bestimmen Sie die Anzahl der Kanten von $Q_n$.

5. Die Menge $S_n$ der Permutationen von $[n]$, $n \in \mathbb{N}$ bildet zusammen mit der Komposition $\circ$ von Abbildungen eine Gruppe (symmetrische Gruppe).

(a) Ist $(S_n, \circ)$ abelsch für $n \geq 3$? Beweis oder Gegenbeispiel!

(b) Seien $\pi, \rho \in S_n$ und sei $F(\pi)$ bzw. $F(\rho)$ die Menge der Fixpunkte von $\pi$ bzw. $\rho$. Es gelte $F(\pi) \cup F(\rho) = \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie $\pi \circ \rho = \rho \circ \pi$.

6. Die Menge aller Zahlenfolgen $a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bildet in natürlicher Weise einen zweidimensionalen Vektorraum $V$. Geben Sie eine Basis von $V$ an. Bestimmen Sie diejenige Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in $V$ mit $a_0 = 1$ und $a_1 = 5$.

7. Die Menge aller Zahlenfolgen $a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$a_{n+3} = a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bildet in natürlicher Weise einen dreidimensionalen Vektorraum $V$. Geben Sie eine Basis von $V$ an.

8. (a) Berechnen Sie den ggT von 235 und 147, und schreiben Sie diesen ggT in der Form $x \cdot 235 + y \cdot 147$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$.

   (b) Wie lautet das multiplikative Inverse von 147 in $\mathbb{Z}_{235}^*$?

9. Verwenden Sie den Beweis des Chinesischen Restsatzes, um alle Zahlen $x \in \mathbb{Z}$ zu bestimmen, für die

$$x \equiv 1 \bmod 2, \quad x \equiv 2 \bmod 3 \quad \text{und} \quad x \equiv 1 \bmod 5$$

gilt.

10. Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $p_1(x) := 2x^3 - x^2 + 5x + 3$ und $p_2(x) := 2x^2 - 3x - 2$ im Polynomring $\mathbb{R}[x]$.

11. (a) Ist $C := \{0, 01, 011, 0111, 01111, 11111\}$ ein eindeutig decodierbarer Code? Warum?

    (b) Gibt es einen eindeutig decodierbaren Binärcode, der die Codewortlängen (mit Vielfachheit) 1, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5 hat?

12. Zeigen Sie, daß $6 \mid (n^3 - n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

13. Konstruieren Sie eine Standardtafel für den binären linearen Code mit der Erzeugermatrix

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Decodieren Sie die Wörter $111$ und $100$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit korrekter Decodierung in einem binären symmetrischen Kanal mit Fehlerwahrscheinlichkeit $p$. Wenn $000$ gesendet und $001$ empfangen wird, was ergibt dann die Decodierung?