

Prüfungs-Klausur zu Diskrete Algebraische Strukturen

Sommersemester 2003

Samstag, 19.07.2003, 09:15 - 11:15 Uhr

Ort: Geb. 101, HS 026, 036

Nachname, Vorname:

Geburtstag und Geburtsort:

Matrikelnummer:

Bitte füllen Sie zunächst den Kopf dieses Blattes aus. Geben Sie am Schluß alle Blätter **durchnummeriert, mit Ihrem Namen versehen und mit diesem Blatt als Deckblatt** ab. Bitte begründen Sie die einzelnen Schritte Ihrer Lösungen. Nebenrechnungen und Zwischenergebnisse, die zur Herleitung notwendig sind, sind mit aufzuführen. Für jede vollständig gelöste Aufgabe werden 4 Punkte vergeben. Zum Bestehen der Klausur müssen voraussichtlich 10 Punkte erreicht werden. **Als Hilfsmittel ist lediglich das Skriptum zur Vorlesung zugelassen.**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punktzahl							

1. Sei $M := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ und \sim die durch

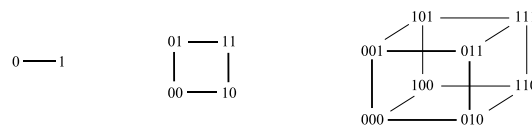
$$(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow a - b = c - d$$

erklärte Relation über M . Prüfen Sie nach, ob \sim eine Äquivalenzrelation ist. Geben Sie (ohne Beweis) ein Repräsentantensystem an.

2. (a) Berechnen Sie die Primfaktorzerlegung des Koeffizienten von $x^7 y^3 z$ in der Entwicklung von $(x + y + z)^{11}$.
 (b) Wie viele Lösungen hat die Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11 \quad \text{mit } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}?$$

3. Der (n -dimensionale Würfel-) Graph Q_n hat als Ecken alle $\{0, 1\}$ -Worte der Länge $n \in \mathbb{N}$ (die Eckenmenge ist also $\{0, 1\}^n$), wobei zwei Worte benachbart sind, wenn sie sich an genau einer Stelle unterscheiden.



- (a) Wie viele Ecken hat Q_n ? Geben Sie auch die Eckengrade an.
 (b) Bestimmen Sie die Anzahl der Kanten von Q_n .
4. Die Menge S_n bildet zusammen mit der Komposition \circ von Abbildungen eine Gruppe (symmetrische Gruppe).
- (a) Ist (S_n, \circ) abelsch für $n \geq 3$? Beweis oder Gegenbeispiel!
 (b) Seien $\pi, \rho \in S_n$ und sei $F(\pi)$ bzw. $F(\rho)$ die Menge der Fixpunkte von π bzw. ρ . Es gelte $F(\pi) \cup F(\rho) = \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie $\pi \circ \rho = \rho \circ \pi$.
5. Die Menge aller Zahlenfolgen $a_n, n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bildet in natürlicher Weise einen zweidimensionalen Vektorraum V . Geben Sie eine Basis von V an. Bestimmen Sie diejenige Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in V mit $a_0 = 1$ und $a_1 = 5$.

6. (a) Berechnen Sie den ggT von 235 und 147, und schreiben Sie diesen ggT in der Form $x \cdot 235 + y \cdot 147$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$.
 (b) Wie lautet das multiplikative Inverse von 147 in \mathbb{Z}_{235}^* ?