Musterlösungen DAS-Klausur, SS 2003

(1) Reflexivität:

$$(a,b) \sim (a,b) \Leftrightarrow a-b=a-b.$$

Symmetrie:

$$\begin{aligned}(a,b) \sim (c,d) &\Leftrightarrow a-b=c-d\\ &\Leftrightarrow c-d=a-b\\ &\Leftrightarrow (c,d)\sim(a,b).\end{aligned}$$

Transitivität:

$$\begin{aligned}(a,b) \sim (c,d) \quad \wedge \quad (c,d) \sim (e,f) &\Rightarrow a-b=c-d \quad \wedge \quad c-d=e-f\\ &\Rightarrow a-b=e-f\\ &\Rightarrow (a,b)\sim(e,f).\end{aligned}$$

Ein Repräsentantensystem ist gegeben durch

$$\{(n,0) : n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{(0,m) : m \in \mathbb{N}\}.$$

Der Nachweis wurde nicht verlangt.

(2) Teil (a).
Nach der Multinomialformel der Vorlesung ist der Koeffizient gegeben durch

$$\begin{aligned}\binom{11}{7,3,1} &= \frac{11!}{7!3!1!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = 11\cdot 10\cdot 3\cdot 4\\ &= 2^3\cdot 3^1\cdot 5^1\cdot 11^1\end{aligned}$$

Teil (b).
Die gesuchte Anzahl ist gleich der Anzahl der geordneten Zahlpartitionen von 11 mit 3 Summanden, d.h. gleich

$$\binom{11-1}{3-1} = \binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45.$$

(3) Teil (a).
Sei V_n die Menge der Ecken von Q_n. Dann gilt

$$|V_n| = |\{0,1\}^n| = 2^n.$$

Der Eckengrad jeder Ecke ist n, da es bei einem gegebenen n-Wort genau n Möglichkeiten gibt, genau eine Komponente abzuändern.
Teil (b).
Sei E_n die Menge der Kanten von Q_n. Nach Vorlesung gilt

$$\begin{aligned}2|E_n| &= \sum_{v\in V_n} d(v)\\ &= n|V_n| = n2^n.\end{aligned}$$

Also ist

$$|E_n| = n2^{n-1}.$$

(4) Teil (a).
$(S_n, \circ)$ ist für $n \geqslant 3$ nicht abelsch. Es genügt, S_3 zu betrachten. Hier gilt etwa:

$$(1)(23) \circ (12)(3) = (132),$$

aber

$$(12)(3) \circ (1)(23) = (123).$$

Teil (b).
1. Fall: $x \in F(\pi) \cap F(\rho)$. Dann gilt

$$\rho \circ \pi(x) = \rho(x) = x = \pi(x) = \pi(\rho(x)) = \pi \circ \rho(x).$$

2. Fall: $x \in F(\pi) \backslash F(\rho)$. Mit $x \notin F(\rho)$ gilt auch $\rho(x) \notin F(\rho)$. Daher muß $\rho(x) \in F(\pi)$ gelten nach Voraussetzung. Es folgt also

$$\rho \circ \pi(x) = \rho(x) = \pi(\rho(x)) = \pi \circ \rho(x).$$

3. Fall: $x \in F(\rho) \backslash F(\pi)$. Analog zu Fall 2.
Weitere Fälle gibt es nach Voraussetzung nicht.

(5) Das charakteristische Polynom lautet

$$t^2 - (-6) - 5t = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $t = 3$ oder $t = 2$. Nach Vorlesung sind Basisfolgen gegeben durch

$$b_n^1 = 2^n \qquad \text{und} \qquad b_n^2 = 3^n$$

für $n \in \mathbb{N}_0$. Aus

$$a_n = \alpha 2^n + \beta 3^n,$$

$a_0 = 1$ und $a_1 = 5$ folgt $\alpha + \beta = 1$ und $2\alpha + 3\beta = 5$, d.h. $\alpha = -2, \beta = 3$. Also

$$a_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$.

(6) Teil (a).
Mit Hilfe des euklidischen Algorithmus erhält man

$$\begin{aligned} 235 &= 1 \cdot 147 + 88 \\ 147 &= 1 \cdot 88 + 59 \\ 88 &= 1 \cdot 59 + 29 \\ 59 &= 2 \cdot 29 + 1. \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{ggT}(235, 147) = 1$, d.h. $(235, 147) = 1$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} 1 &= 59 - 2 \cdot 29 = 59 - 2 \cdot (88 - 59) \\ &= 3 \cdot 59 - 2 \cdot 88 = 3 \cdot (147 - 88) - 2 \cdot 88 \\ &= 3 \cdot 147 - 5 \cdot 88 = 3 \cdot 147 - 5 \cdot (235 - 147) \\ &= 8 \cdot 147 - 5 \cdot 235. \end{aligned}$$

Teil (b).
Es gilt $8 \cdot 147 \equiv 1 \bmod 235$ nach Teil (a), d.h. $(147)^{-1} = 8$ in $\mathbb{Z}_{235}^*$.