

1. Verifizieren Sie die Distributivgesetze und die Regeln von De Morgan für Aussagen A, B, C mit Hilfe von Wahrheitstabellen, d.h. zeigen Sie

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C), \quad A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

und

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B, \quad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B.$$

2. Bilden Sie zu folgenden (falschen) Aussagen die jeweilige Negation.
- Alle Tiere haben Beine oder Flossen, und alle Pflanzen haben Wurzeln.
 - Es gibt einen Käfer oder einen Schmetterling, der schneller ist als alle Fische und Landtiere.
 - Alle Straßen und mindestens ein Pfad führen nach Rom.
3. Seien $A := \{1, 2, 4, 8, 16\}$, $B := \{2, 4, 6, 8, 10\}$ und $C := \{1, 3, 7, 15\}$. Berechnen Sie $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \triangle C$, $A \cup (B \cap C)$, $C \setminus (B \setminus A)$, $A \triangle (B \triangle C)$.
4. Sei $A_n := [-2n, 3n] \subset \mathbb{R}$ und $B_n := \mathbb{N} \setminus \{1, \dots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Mengen

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{und} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

5. Zeigen Sie für $A \subseteq M$, daß $A \triangle \emptyset = A$ und $A \triangle M = M \setminus A$ gilt.
6. Beweisen Sie für beliebige Mengen A, B, C die folgenden Gleichungen

$$(A \subseteq C \wedge B \subseteq C) \Leftrightarrow (A \cup B \subseteq C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

und

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

7. Seien $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ gegeben durch

$$f(1) := 1, \quad f(n+1) := \begin{cases} \frac{1}{2}f(n), & \text{falls } f(n) \text{ gerade,} \\ 5f(n) + 1, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

und

$$g(n) := \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Untersuchen Sie f, g auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

8. Beweisen sie durch vollständige Induktion die folgenden Aussagen für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \quad \text{und} \quad \prod_{k=1}^n k^k \leq n^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$