Abgabetermin: Mittwoch, 27.10.2004, vor Beginn der Vorlesung

1. Zeigen Sie: Für beliebige Mengen A, B, C gilt

$$A\backslash(B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C) \qquad \text{und} \qquad A\backslash(B \cup C) = (A\backslash B) \cap (A\backslash C).$$

   Veranschaulichen Sie die Aussagen durch Diagramme.

2. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

   (a) Für $A, B \subseteq X$ zeige man

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B),$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$

$$f(X) \setminus f(A) \subseteq f(X \setminus A).$$

   (b) Für $A, B \subseteq Y$ zeige man

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \qquad \text{und} \qquad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

3. Es seien M_1, M_2, M_3 Mengen und $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$ Abbildungen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) $g \circ f$ injektiv und f surjektiv $\Rightarrow$ g injektiv.

   (b) $g \circ f$ surjektiv und g injektiv $\Rightarrow$ f surjektiv.

4. (a) Geben Sie möglichst einfache Ausdrücke für die folgenden Summen an

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{n} 3^{2-k} 2^{k-3}.$$

   (b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}, \qquad n \geq 1.$$

   (c) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n^2$? Beweisen Sie Ihre Behauptung durch vollständige Induktion.