

Abgabetermin: Mittwoch, 10.11.2004, vor Beginn der Vorlesung

9. (a) Ermitteln Sie die Grenzwerte der Folgen (für $n \rightarrow \infty$)

$$a_n = \frac{4n^3 - 6}{6n^3 + 2n^2}, \quad b_n = \frac{3^{n+1} + 2^n}{3^n + 1}.$$

- (b) Konvergiert die Folge

$$c_n = (-1)^n \frac{4n^2 + 2n + 1}{3n^3 + 6} ?$$

- (c) Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 5n + 1} - n \right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+2} \sum_{i=1}^n i - \frac{n}{2} \right).$$

10. (a) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{5^4}{x_n^4} - 1 \right) \right) x_n.$$

Berechnen Sie x_n für $n = 1, \dots, 6$ zu den beiden Startwerten $x_0 = 10$ und $x_0 = 4, 5$.

- (b) Warum konvergiert die Folge in (a) für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen den Grenzwert 5?

Anleitung:

- Zeigen Sie $x_n > 0$ für $n \in \mathbb{N}$.
- Zeigen Sie $x_n \geq 5$ für $n \in \mathbb{N}$. Hierzu wende man auf

$$x_{n+1}^4 = x_n^4 \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{5^4}{x_n^4} - 1 \right) \right)^4$$

die Bernoulli-Ungleichung an.

- Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend ist.

11. (a) Seien $(x_n), (y_n)$ konvergente Folgen in \mathbb{R} mit Grenzwerten x, y . Zeigen Sie, dass $(\max(x_n, y_n))$ und $(\min(x_n, y_n))$ konvergieren mit den Grenzwerten $\max(x, y)$ bzw. $\min(x, y)$. **Hinweis:** $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

- (b) Seien $a, b \geq 0$. Zeigen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = \max(a, b).$$

Hinweis: Für $q \in [0, 1]$ gilt

$$1 \leq (1 + q^n)^{\frac{1}{n}} \leq 2^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

12. Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \frac{1}{10}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}.$$

Zeigen Sie:

- $f([0, 1]) \subseteq [0, 1]$;
- für $x, y \in [0, 1]$ gilt $|f(x) - f(y)| \leq \frac{9}{10}|x - y|$.
- Berechnen Sie näherungsweise den durch $\bar{x} = f(\bar{x})$ bestimmten Fixpunkt von f .