Übungen zu Mathematik I WS 2004/05, Blatt 4

HD Dr. Daniel Hug

Dr. Ursula Ludwig 10.11.2004

Abgabetermin: Mittwoch, 17.11.2004, vor Beginn der Vorlesung

---

13. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(e^n)}{n(n+\sqrt{2})} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n^n} \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{2}^n}{n!}.$$

   (d) Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $x \in \mathbb{C}$ konvergiert die folgende Reihe:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{2^{n^2}} \,?$$

14. Überprüfen Sie, ob die folgenden Reihen bedingt oder absolut konvergieren:

$$\text{(a)} \quad \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{k\geq 1} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}}, \qquad \text{(c)} \quad \sum_{k\geq 1} \frac{k!}{(2k)!},$$

$$\text{(d)} \quad \sum_{k\geq 1} \sin(k) k^2 q^k \quad \text{mit } 0 < q < 1.$$

15. (a) Warum konvergiert

$$s := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{n}{n+2} \,?$$

   Geben Sie ein $N_0 \in \mathbb{N}$ an, so dass sicher $\mid s - s_n \mid < \frac{1}{100}$ für $n \geq N_0$ gilt.

   (b) Prüfen Sie

$$\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k^{\frac{1}{k}}}$$

   auf Konvergenz.

16. (a) Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen für $x \in (-1, 1)$ konvergieren und den angegebenen Wert haben:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \;; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} \;; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \frac{1}{1-x^2}.$$

   Bilden Sie erst das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ und dann die Summe der Reihen $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ und $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$. Vergleichen Sie das Ergebnis ihrer Rechung mit der Gleichungskette

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{1}{(1+x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}\right).$$

   (b) Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$$

   konvergiert. Warum? Konvergiert das Cauchy-Produkt dieser Reihe mit sich selbst?