

Abgabetermin: Mittwoch, 24.11.2004, vor Beginn der Vorlesung

17. Berechnen Sie unter Ausnutzen der Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen die folgenden Grenzwerte:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 7}{x^2 + 3x + 5},$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}},$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x}.$$

(d) Berechnen Sie

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Warum ist hier die Quotientenregel nicht anwendbar?

18. Wo sind die folgenden Funktionen stetig, wo unstetig?

(a) $f(x) = e^{\lfloor x \rfloor}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$(b) \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{n}, & x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], n \in \mathbb{N} \\ x, & x > 1, \end{cases} \quad (c) \quad h(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion h .

19. (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = e^{-x}$ auf \mathbb{R}_+ gleichmäßig stetig ist. Ist f auf \mathbb{R} gleichmäßig stetig?

(b) Zeigen Sie, dass $g : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 1/(x^2 - 1)$ nicht gleichmäßig stetig ist.

20. Wieviele Lösungen hat die Gleichung

$$x - \frac{x^5}{6} - \frac{2}{3} = 0$$

in $[0, 1]$? Berechnen Sie die Lösung(en) mit dem Intervallhalbierungsverfahren bis auf 3 Dezimalstellen genau.

20.* Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Zeigen Sie, dass f streng monoton ist.

(Tipp: Benutzen Sie den Zwischenwertsatz, um die Aussage

$$x_1 < x_2 < x_3 \text{ und } f(x_1) < f(x_2), f(x_2) > f(x_3)$$

auf einen Widerspruch zu führen.)