Übungen zu Mathematik I WS 2004/05, Blatt 6

HD Dr. Daniel Hug

Dr. Ursula Ludwig 24.11.2004

Abgabetermin: Mittwoch, 01.12.2004, vor Beginn der Vorlesung

---

21. (a) Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{2n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^5 5^n x^n.$$

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{k^2} = 1 + x + x^4 + x^9 + x^{16} + \ldots ?$$

(c*) Man bestätige

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3} \qquad \text{für } |x| < 1.$$

Tip: Benutzen Sie die geometrische Reihe $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ und das Cauchyprodukt von Reihen, um die rechte Seite der Gleichheit als Potenzreihe darzustellen.

22. (a) Leiten Sie aus den Additionstheoremen

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{R} \text{ her.}$$

(b*) Bestätigen Sie die Gleichungen:

$$\sin(4\phi) = 8\cos^3\phi\sin\phi - 4\cos\phi\sin\phi, \qquad \cos(4\phi) = 8\cos^4\phi - 8\cos^2\phi + 1,$$

$$\cos^4\phi = \frac{1}{8}(\cos(4\phi) + 4\cos(2\phi) + 3), \qquad \sin^4\phi = \frac{1}{8}(\cos(4\phi) - 4\cos(2\phi) + 3).$$

(b) Leiten Sie ein Additionstheorem für die Tangensfunktion her.

23. (a) Die drei Spannungen in einer Drehstromleitung seien gegeben durch:

$$U_1 = U\sin(\omega t), \qquad U_2 = U\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right), \qquad U_3 = U\sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Wie lauten diese Spannungen in komplexer Darstellung, d.h. stellen Sie U_1, U_2, U_3 jeweils in der Form $\mathrm{Im}(\alpha e^{i\beta t})$ mit geeigneten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dar. Zeigen Sie $U_1 + U_2 + U_3 = 0$.

(b*) Man beweise für $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)\alpha) = \frac{\sin(2n\alpha)}{2\sin\alpha}.$$

24. (a) Aus der für alle $n \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{R}$ gültigen Beziehung (vgl. Augfgabe 22 (a))

$$\cos((n+1)y) + \cos((n-1)y) = 2\cos(ny)\cos y$$

leite man mit vollständiger Induktion her, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ ein Polynom $p_n(x)$ vom Grad n gibt mit

$$\cos(ny) = p_n(\cos y).$$

Folgern Sie, dass

$$T_n(x) := \cos(n \arccos x), \qquad |x| \le 1$$

ein Polynom in x vom Grad n ist. Berechnen Sie explizit $T_1, ..., T_4$.

(b) Verifizieren Sie die Rekursionsformel

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \qquad x \in [-1,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

Warum hat $2^{1-n}T_n$ die Zahl 1 als führenden Koeffizienten?

(c) Berechnen Sie $\|T_n\|_\infty = \max\{T_n(x) : x \in [-1,1]\}$.

24.* (a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert, aber für kein $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.

(b) Wird durch

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

auf $\mathbb{R}$ eine stetige Funktion definiert? (**Tip:** $1 + nx^2 \geq 2\sqrt{n}|x|$.) Zeigen Sie

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$