Übungen zu Mathematik I WS 2004/05, Blatt 7

HD Dr. Daniel Hug
Dr. Ursula Ludwig 01.12.2004

Abgabetermin: Mittwoch, 08.12.2004, vor Beginn der Vorlesung

---

25. (a) Berechnen Sie mit Hilfe des Horner-Schemas für

$$f(x) := 2x^4 - 3x^3 + x - 2, \qquad x \in \mathbb{R}$$

den Wert $f(1)$. Entwickeln Sie f nach Potenzen von $x-1$, d.h. bestimmen Sie $a_0, \ldots, a_4 \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sum_{i=0}^{4} a_i (x-1)^i.$$

(b) Bestimmen Sie sukzessiv durch systematisches Raten von Nullstellen und Abspalten von Linearfaktoren die Nullstellen von

$$p(x) = x^6 - 4x^5 - 2x^4 + 32x^3 - 59x^2 + 44x - 12.$$

26. (a) Verwenden Sie das Newton und das Lagrange Verfahren, um zu den Daten

x	-2	-1	0	1	2	3
y	0	-1	2	0	1	-1

das Interpolationspolynom vom Grad $n = 5$ zu finden.

(b) Zu $p(x) := 4x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x + 1$ und $q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ bestimme man Polynome $h(x)$ und $r(x)$ mit $\operatorname{grad}(r) \leq 2$ und $p(x) = h(x)q(x) + r(x)$.

27. Prüfen Sie die folgenden Funktionen hinsichtlich ihres Definitionsbereichs und auf Differenzierbarkeit. Bestimmen Sie soweit möglich die Ableitung.

(a)

$$f(x) = \left(\frac{x^2+1}{x+3}\right)^3, \qquad g(x) = 3\sin(x^2+1)\cos^2(x), \qquad h(x) = \sin^3(x) - 5\tan^2(x^4).$$

(b)

$$f(x) = |x|, \qquad g(x) = x|x| + x, \qquad h(x) = |x|^2 + x, \qquad k(x) = |x|^3.$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

28. Zeigen Sie die folgenden Aussagen. Alle Funktionen seien auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt.

(a) Seien $f_1, \ldots, f_n$ etwa auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. Dann sind auch $f_1 + \ldots + f_n$ und $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. Wie kann man die Ableitung jeweils mittels der Funktionen f_i und f_j' ausdrücken?

(b) Sind f, g jeweils n-mal differenzierbar, dann ist $f \cdot g$ auch n-mal differenzierbar und

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

(c) Sei f in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Bestimmen Sie

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}.$$

(d) Sei g differenzierbar an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ und $k \geq 2$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) := g(x)(x-x_0)^k$ in x_0 differenzierbar ist und $f'(x_0) = 0$ gilt.